Trojúhelníky jsou k ničemu!

Co se skrývá ve formální struktuře konstrukční úlohy

Michal Zamboj

Celostátní konference učitelů matematiky středních škol

Praha, 18. - 20. 9. 2023

KDYBY ČIROU NÁHODOU K NĚČEMU BYLY, TAK K ČEMU?

V čem se liší tyto úlohy?

Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jsou-li dány: .

a) Délky strany $a = 8$, těžnice $t_a = 5$, výšky $v_a = 4$.
b) Délky strany a, těžnice t_a, výšky v_a.
c) Výška v_a délky 4 svojí polohou v rovině. Délky strany $a = 8$ a těžnice $t_a = 5$.
d) Vrcholy B, C v rovině, kde $B \neq C$, a délky těžnice t_a a výšky v_a.

FORMÁLNÍ STRUKTURA KONSTRUKČNÍCH ÚLOH

- zadání
- náčrt a rozbor (analýza)
- postup konstrukce a konstrukce
- důkaz konstrukce, resp. zkouška (lze zahrnout do rozboru, nebo diskuze)
- diskuze řešitelnosti a počtu řešení, závěr

Formální struktura konstrukčních úloh

zadání

náčrt a rozbor (analýza) — heuristická fáze

postup konstrukce a konstrukce

důkaz konstrukce, resp. zkouška (lze zahrnout do rozboru, nebo diskuze)

diskuze řešitelnosti a počtu řešení, závěr

FORMÁLNÍ STRUKTURA KONSTRUKČNÍCH ÚLOH

- zadání
- náčrt a rozbor (analýza) — heuristická fáze
- postup konstrukce a konstrukce — algoritmická fáze
- důkaz konstrukce, resp. zkouška (lze zahrnout do rozboru, nebo diskuze)
- diskuze řešitelnosti a počtu řešení, závěr

FORMÁLNÍ STRUKTURA KONSTRUKČNÍCH ÚLOH

zadání

náčrt a rozbor (analýza) — heuristická fáze

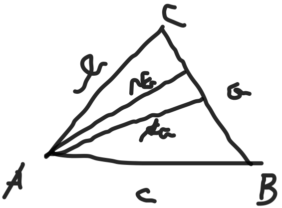
postup konstrukce a konstrukce — algoritmická fáze

důkaz konstrukce, resp. zkouška (lze zahrnout do rozboru, nebo diskuze)

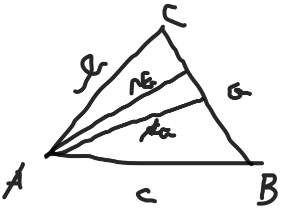
diskuze řešitelnosti a počtu řešení, závěr — argumentační fáze

Sestrojte $\triangle ABC$ jsou-li dány a, t_a, v_a

Sestrojte $\triangle ABC$ jsou-li dány a, t_a, v_a



Sestrojte $\triangle ABC$ jsou-li dány a, t_a, v_a

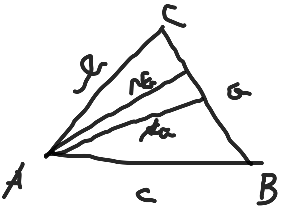


3) $k; k(S_{BC}, t_c)$
4) $p; p \| \overline{BC}, |p, \overline{BC}| = v_a$
5) $A; A = k \cap p$

Postup

1) $\overline{BC}; |BC| = a$
2) $S_{BC}; |BS_{BC}| = |CS_{BC}|$

Sestrojte $\triangle ABC$ jsou-li dány a, t_a, v_a



3) $k; k(S_{BC}, t_c)$

4) $p; p \| \overline{BC}, |p, \overline{BC}| = v_a$

5) $A; A = k \cap p$

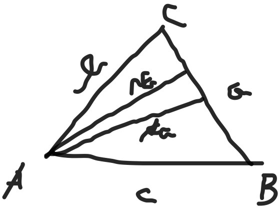
... Následuje precizní konstrukce...

Postup

1) $\overline{BC}; |BC| = a$

2) $S_{BC}; |BS_{BC}| = |CS_{BC}|$

Sestrojte $\triangle ABC$ jsou-li dány a, t_a, v_a



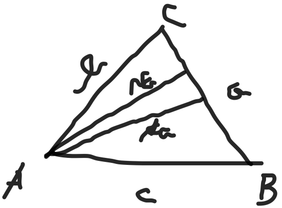
Postup

1) $\overline{BC}; |BC| = a$
2) $S_{BC}; |BS_{BC}| = |CS_{BC}|$
3) $k; k(S_{BC}, t_c)$
4) $p; p \| \overline{BC}, |p, \overline{BC}| = v_a$
5) $A; A = k \cap p$

... Následuje precizní konstrukce...

Důkaz: důkaz konstrukce byl proveden zpětným průběhem konstrukce

Sestrojte $\triangle ABC$ jsou-li dány a, t_a, v_a



Postup

1) $\overline{BC}; |BC| = a$
2) $S_{BC}; |BS_{BC}| = |CS_{BC}|$
3) $k; k(S_{BC}, t_c)$
4) $p; p \| \overline{BC}, |p, \overline{BC}| = v_a$
5) $A; A = k \cap p$

... Následuje precizní konstrukce...

Důkaz: důkaz konstrukce byl proveden zpětným průběhem konstrukce

Závěr: Úloha má 2 řešení v dané polorovině.

NÁČRT A ROZBOR

Náčrt — načrtneme vyřešenenou situaci, náčrtky můžou dynamicky přibývat v průběhu řešení (je to metoda řešení)

Rozbor — analýza vyřešené situace (náčrtku)

Náčrt a rozbor

Náčrt — načrtneme vyřešenenou situaci, náčrtky můžou dynamicky přibývat v průběhu řešení (je to metoda řešení)

Rozbor — analýza vyřešené situace (náčrtku)

podrobněji: vypíšeme všechny definice a vlastnosti zadaných a hledených prvků a všechna tvrzení, ve kterých se tyto prvky vyskytují (např. je-li v zadání ortocentrum, tak se zaměříme na výšky, kolmost, pravoúhle trojúhelníky a věty o nich). Zaměříme se na **vztahy mezi zadanými a hledanými prvky**. Na **množiny bodů**, na kterých leží výsledné prvky (např. kružnice, přímky, rovnoběžky, ekvidistanta . . .). Na **zobrazení, které zachovávají vlastnosti** útvarů ze zadání (např. rovnostranný trojúhelník a otočení, rovnoběžník a středová souměrnost, tečna kružnice a stejnolehlost/posunutí . . .). Na **přeformulování / přenesení** úlohy (např. kruhovou inverzí, dilatací) a zpětné vrácení. Použití **výpočtu a analytických metod**.

NÁČRT A ROZBOR

ZDE BYL OBRÁZEK KOPEČKŮ

Hledání cesty mezi předpoklady a útvarem k sestrojení.

Náčrt a rozbor

Pozorování 1:

Náčrt a rozbor

Pozorování 1:

Náčrt není rozbor.

NÁČRT A ROZBOR

Pozorování 1:

Náčrt není rozbor. Rozbor je rozbor.

NÁČRT A ROZBOR

Pozorování 1:

Náčrt není rozbor. Rozbor je rozbor.

Postup konstrukce a konstrukce

Postup konstrukce — sestavení jednotlivých vztahů z rozboru do algoritmu pro provedení konstrukce (za předpokladu řešitelnosti)

Postup konstrukce a konstrukce

Pozorování 2:

POSTUP KONSTRUKCE A KONSTRUKCE

Pozorování 2:

Rozbor není postup konstrukce.

Postup konstrukce a konstrukce

Pozorování 2:

Rozbor není postup konstrukce. Postup konstrukce je postup konstrukce.

POSTUP KONSTRUKCE A KONSTRUKCE

a, b, α

Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jsou-li dány délky stran a, b a velikost úhlu α.

POSTUP KONSTRUKCE A KONSTRUKCE

a, b, α

Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jsou-li dány délky stran a, b a velikost úhlu α.

1) $C, A; |CA| = b$
2) $\overrightarrow{AX}; |\sphericalangle CAX| = \alpha$
3) $k; k(C, a)$
4) $B; B \in \overrightarrow{AX} \cap k$
5) $\triangle ABC$

DISKUZE EXISTENCE A POČTU ŘEŠENÍ

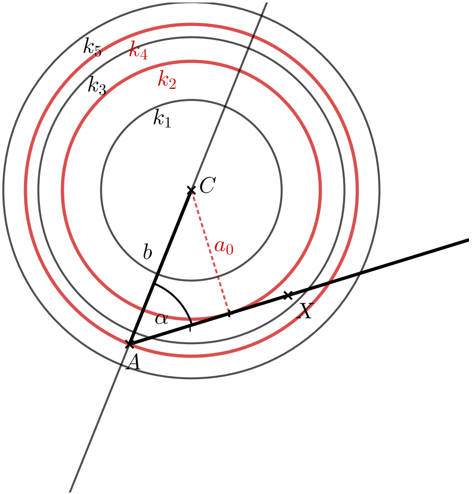
a, b, α

Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jsou-li dány délky stran a, b a velikost úhlu α.

Diskuze existence a počtu řešení

a, b, α

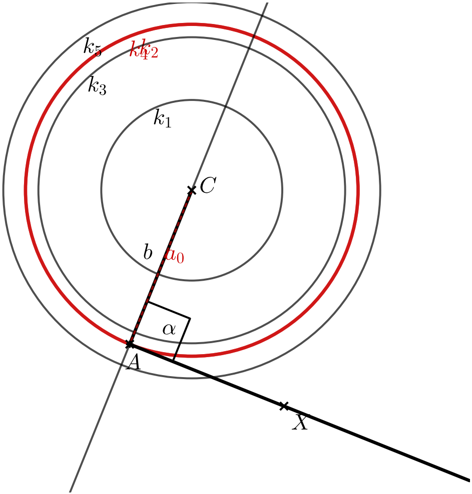
Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jsou-li dány délky stran a, b a velikost úhlu α.



DISKUZE EXISTENCE A POČTU ŘEŠENÍ

a, b, α

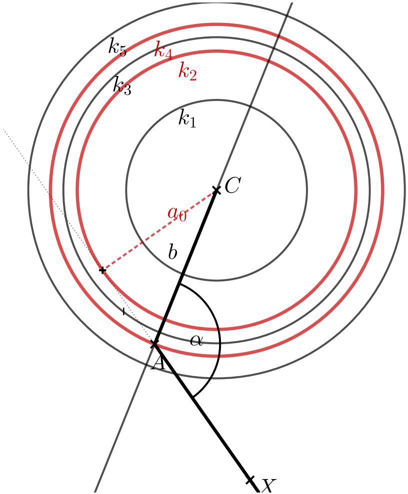
Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jsou-li dány délky stran a, b a velikost úhlu α.



Diskuze existence a počtu řešení

a, b, α

Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jsou-li dány délky stran a, b a velikost úhlu α.



DISKUZE EXISTENCE A POČTU ŘEŠENÍ

Argumentační části úlohy. Vychází z postupu konstrukce.

Diskuze existence a počtu řešení

Argumentační části úlohy. Vychází z postupu konstrukce.

Ověření a diskuze existence řešení:

Je možné, že některé z prvků v konstrukci nebylo možné sestrojit. Je potřeba provést diskuzi existence řešení.

DISKUZE EXISTENCE A POČTU ŘEŠENÍ

Argumentační části úlohy. Vychází z postupu konstrukce.

Ověření a diskuze existence řešení:

Je možné, že některé z prvků v konstrukci nebylo možné sestrojit. Je potřeba provést diskuzi existence řešení.

Navíc je možné, že sice jsme sestrojili všechny prvky, ale nesplňují vlastnosti hledaného útvaru (např. vrcholy trojúhelníku A, B, C leží v přímce).

DISKUZE EXISTENCE A POČTU ŘEŠENÍ

Argumentační části úlohy. Vychází z postupu konstrukce.

Ověření a diskuze existence řešení:

Je možné, že některé z prvků v konstrukci nebylo možné sestrojit. Je potřeba provést diskuzi existence řešení.

Navíc je možné, že sice jsme sestrojili všechny prvky, ale nesplňují vlastnosti hledaného útvaru (např. vrcholy trojúhelníku A, B, C leží v přímce).

V jednotlivých bodech postupu vznikají nové prvky, je potřeba zajistit jejich existenci, speciálně průniků množin (průsečíků). Tím dostaneme podmínky existence řešení. Podmínky se musí opírat o zadané! prvky a musí být řádně zdůvodněné.

Diskuze existence a počtu řešení

Argumentační části úlohy. Vychází z postupu konstrukce.

Ověření a diskuze existence řešení:

Je možné, že některé z prvků v konstrukci nebylo možné sestrojit. Je potřeba provést diskuzi existence řešení.

Navíc je možné, že sice jsme sestrojili všechny prvky, ale nesplňují vlastnosti hledaného útvaru (např. vrcholy trojúhelníku A, B, C leží v přímce).

V jednotlivých bodech postupu vznikají nové prvky, je potřeba zajistit jejich existenci, speciálně průniků množin (průsečíků). Tím dostaneme podmínky existence řešení. Podmínky se musí opírat o zadané! prvky a musí být řádně zdůvodněné.

V případě, že jsou zadané hodnoty nebo polohy všech prvků a žádný není proměnný, tak je samotná konstrukce důkazem existence.

Diskuze existence a počtu řešení

Ověření a diskuze počtu řešení:

Je možné, že uvedeným postupem konstrukce jsme sestrojili i některé prvky, které nejsou správným řešením (nesplňují zadané podmínky). Ty je potřeba vyloučit (s argumentem proč nejsou řešením)

Diskuze existence a počtu řešení

Ověření a diskuze počtu řešení:

Je možné, že uvedeným postupem konstrukce jsme sestrojili i některé prvky, které nejsou správným řešením (nesplňují zadané podmínky). Ty je potřeba vyloučit (s argumentem proč nejsou řešením)

Počty řešení se obyčejně změní při speciálních případech podmínek existence (ostrá nerovnost, rovnost apod.). Počet řešení je vždy potřebné zdůvodnit (např. kružnice v 7. kroku konstrukce se za podmínky a) protne s přímkou ve dvou, za podmínky b) v jednom, za podmínky c) v žádném bodě).

DISKUZE EXISTENCE A POČTU ŘEŠENÍ

Ověření a diskuze počtu řešení:

Je možné, že uvedeným postupem konstrukce jsme sestrojili i některé prvky, které nejsou správným řešením (nesplňují zadané podmínky). Ty je potřeba vyloučit (s argumentem proč nejsou řešením)

Počty řešení se obyčejně změní při speciálních případech podmínek existence (ostrá nerovnost, rovnost apod.). Počet řešení je vždy potřebné zdůvodnit (např. kružnice v 7. kroku konstrukce se za podmínky a) protne s přímkou ve dvou, za podmínky b) v jednom, za podmínky c) v žádném bodě).

U nepolohové úlohy nezáleží na poloze a orientaci útvarů. Víc řešení vzniká, jen když se liší jiné vlastnosti útvarů.

Ověření a diskuze počtu řešení:

Je možné, že uvedeným postupem konstrukce jsme sestrojili i některé prvky, které nejsou správným řešením (nesplňují zadané podmínky). Ty je potřeba vyloučit (s argumentem proč nejsou řešením)

Počty řešení se obyčejně změní při speciálních případech podmínek existence (ostrá nerovnost, rovnost apod.). Počet řešení je vždy potřebné zdůvodnit (např. kružnice v 7. kroku konstrukce se za podmínky a) protne s přímkou ve dvou, za podmínky b) v jednom, za podmínky c) v žádném bodě).

U nepolohové úlohy nezáleží na poloze a orientaci útvarů. Víc řešení vzniká, jen když se liší jiné vlastnosti útvarů.

Polohová úloha má tolik řešení, kolik je možných výsledných útvarů (bez ohledu na pojmenování) vzhledem k poloze zadaných prvků.

Diskuze existence a počtu řešení

Nejčastější chyby:

Diskuze existence a počtu řešení

Nejčastější chyby:

Formalismus: „V dané polorovině existuje ... řešení.“ Která je daná?

Diskuze existence a počtu řešení

Nejčastější chyby:

Formalismus: „V dané polorovině existuje ... řešení.“ Která je daná?

Formalismus: „Ověření konstrukce (zkouška, důkaz) bylo provedeno zpětným projdením kroků konstrukce.“ Skutečně?

Diskuze existence a počtu řešení

Nejčastější chyby:

Formalismus: „V dané polorovině existuje ... řešení.“ Která je daná?

Formalismus: „Ověření konstrukce (zkouška, důkaz) bylo provedeno zpětným projdením kroků konstrukce.“ Skutečně?

Úloha (např. $\triangle a, v_a, \alpha$) má řešení, když je splněná trojúhelníková nerovnost (diskuze není vedena ze zadaných prvků, každý trojúhelník musí splňovat $\triangle \neq$)

DISKUZE EXISTENCE A POČTU ŘEŠENÍ

Nejčastější chyby:

Formalismus: „V dané polorovině existuje ... řešení.“ Která je daná?

Formalismus: „Ověření konstrukce (zkouška, důkaz) bylo provedeno zpětným projdením kroků konstrukce.“ Skutečně?

Úloha (např. $\triangle a, v_a, \alpha$) má řešení, když je splněná trojúhelníková nerovnost (diskuze není vedena ze zadaných prvků, každý trojúhelník musí splňovat $\triangle \neq$)

Řešení se můžou ztratit, když konstruujeme jenom části množin (hlavně: polopřímky místo přímek, polokružnice, místo kružnice, osy úhlu místo osy různoběžek, rovnoběžku ve vzdálenosti místo ekvidistanty = dvojice rovnoběžek)

DISKUZE EXISTENCE A POČTU ŘEŠENÍ

Nejčastější chyby:

Formalismus: „V dané polorovině existuje ... řešení.“ Která je daná?

Formalismus: „Ověření konstrukce (zkouška, důkaz) bylo provedeno zpětným projdením kroků konstrukce.“ Skutečně?

Úloha (např. $\triangle a, v_a, \alpha$) má řešení, když je splněná trojúhelníková nerovnost (diskuze není vedena ze zadaných prvků, každý trojúhelník musí splňovat $\triangle \neq$)

Řešení se můžou ztratit, když konstruujeme jenom části množin (hlavně: polopřímky místo přímek, polokružnice, místo kružnice, osy úhlu místo osy různoběžek, rovnoběžku ve vzdálenosti místo ekvidistanty = dvojice rovnoběžek)

Nerozlišení polohové a nepolohové úlohy.

Diskuze existence a počtu řešení

Nejčastější chyby:

Formalismus: „V dané polorovině existuje ... řešení.“ Která je daná?

Formalismus: „Ověření konstrukce (zkouška, důkaz) bylo provedeno zpětným projdením kroků konstrukce.“ Skutečně?

Úloha (např. $\triangle a, v_a, \alpha$) má řešení, když je splněná trojúhelníková nerovnost (diskuze není vedena ze zadaných prvků, každý trojúhelník musí splňovat $\triangle \neq$)

Řešení se můžou ztratit, když konstruujeme jenom části množin (hlavně: polopřímky místo přímek, polokružnice, místo kružnice, osy úhlu místo osy různoběžek, rovnoběžku ve vzdálenosti místo ekvidistanty = dvojice rovnoběžek)

Nerozlišení polohové a nepolohové úlohy.

Chybějící zdůvodnění.

JINÉ TYPY ÚLOH?

Je dán trojúhelník $\triangle ABC$, s délkami stran a, b a velikost úhlu α. Vypočítejte velikosti zbylých úhlů a délku strany c.

Jiné typy úloh?

Jsou dány délky $a > 0, b > 0$ a velikost úhlu $\alpha \in (0, \pi)$. Dokažte, že existuje $\triangle ABC$ se stranami $a = \overline{BC}, b = \overline{CA}$ a vnitřním úhlem α u vrcholu A.

Jiné typy úloh?

Jsou dány délky $a > 0, b > 0$ a velikost úhlu $\alpha \in (0, \pi)$. Dokažte, že existuje $\triangle ABC$ se stranami $a = \overline{BC}, b = \overline{CA}$ a vnitřním úhlem α u vrcholu A.

Jiné typy úloh?

Jsou dány délky $a > 0, b > 0$ a velikost úhlu $\alpha \in (0, \pi)$. Dokažte, že existuje $\triangle ABC$ se stranami $a = \overline{BC}, b = \overline{CA}$ a vnitřním úhlem α u vrcholu A.

1) $C, A; |CA| = b$
2) $\overrightarrow{AX}; |\sphericalangle CAX| = \alpha$
3) $k; k(C, a)$
4) $B; B \in \overrightarrow{AX} \cap k$
5) $\triangle ABC$

Jiné typy úloh?

Jsou dány délky $a > 0, b > 0$ a velikost úhlu $\alpha \in (0, \pi)$. Dokažte, že existuje $\triangle ABC$ se stranami $a = \overline{BC}, b = \overline{CA}$ a vnitřním úhlem α u vrcholu A.

1) $C, A; |CA| = b$
2) $\overrightarrow{AX}; |\sphericalangle CAX| = \alpha$
3) $k; k(C, a)$
4) $B; B \in \overrightarrow{AX} \cap k$
5) $\triangle ABC$

1) $\forall b > 0,\ \exists C, A : |CA| = b$

Jiné typy úloh?

Jsou dány délky $a > 0, b > 0$ a velikost úhlu $\alpha \in (0, \pi)$. Dokažte, že existuje $\triangle ABC$ se stranami $a = \overline{BC}, b = \overline{CA}$ a vnitřním úhlem α u vrcholu A.

1) $C, A; |CA| = b$
2) $\overrightarrow{AX}; |\sphericalangle CAX| = \alpha$
3) $k; k(C, a)$
4) $B; B \in \overrightarrow{AX} \cap k$
5) $\triangle ABC$

1) $\forall b > 0,\ \exists C, A : |CA| = b$

1) $\Longrightarrow$ 2) $\forall \alpha \in (0, \pi), \exists X : |\sphericalangle CAX| = \alpha$

JINÉ TYPY ÚLOH?

Jsou dány délky $a > 0, b > 0$ a velikost úhlu $\alpha \in (0, \pi)$. Dokažte, že existuje $\triangle ABC$ se stranami $a = \overline{BC}, b = \overline{CA}$ a vnitřním úhlem α u vrcholu A.

1) $C, A; |CA| = b$
2) $\overrightarrow{AX}; |\sphericalangle CAX| = \alpha$
3) $k; k(C, a)$
4) $B; B \in \overrightarrow{AX} \cap k$
5) $\triangle ABC$

1) $\forall b > 0,\ \exists C, A : |CA| = b$

1) $\implies$ 2) $\forall \alpha \in (0, \pi), \exists X : |\sphericalangle CAX| = \alpha$

1) $\implies$ 3) $\forall a > 0,\ \exists k : k(C, a)$

JINÉ TYPY ÚLOH?

Jsou dány délky $a > 0, b > 0$ a velikost úhlu $\alpha \in (0, \pi)$. Dokažte, že existuje $\triangle ABC$ se stranami $a = \overline{BC}, b = \overline{CA}$ a vnitřním úhlem α u vrcholu A.

1) $C, A; |CA| = b$
2) $\overrightarrow{AX}; |\sphericalangle CAX| = \alpha$
3) $k; k(C, a)$
4) $B; B \in \overrightarrow{AX} \cap k$
5) $\triangle ABC$

1) $\forall b > 0,\ \exists C, A : |CA| = b$

1) $\implies$ 2) $\forall \alpha \in (0, \pi), \exists X : |\sphericalangle CAX| = \alpha$

1) $\implies$ 3) $\forall a > 0,\ \exists k : k(C, a)$

$\Big($2) $\wedge$ 3)$\Big) \implies$ 4) pak $\exists B : B \in \overrightarrow{AX} \cap k$

JINÉ TYPY ÚLOH?

Jsou dány délky $a > 0, b > 0$ a velikost úhlu $\alpha \in (0, \pi)$. Dokažte, že existuje $\triangle ABC$ se stranami $a = \overline{BC}, b = \overline{CA}$ a vnitřním úhlem α u vrcholu A.

1) $C, A; |CA| = b$

2) $\overrightarrow{AX}; |\sphericalangle CAX| = \alpha$

3) $k; k(C, a)$

4) $B; B \in \overrightarrow{AX} \cap k$

5) $\triangle ABC$

1) $\forall b > 0,\ \exists C, A : |CA| = b$

1) $\implies$ 2) $\forall \alpha \in (0, \pi), \exists X : |\sphericalangle CAX| = \alpha$

1) $\implies$ 3) $\forall a > 0,\ \exists k : k(C, a)$

$\Big($2) $\wedge$ 3)$\Big)$ $\implies$ 4) pak $\exists B : B \in \overrightarrow{AX} \cap k$

$\Big($1) $\wedge$ 4)$\Big)$ $\implies$ 5) $\triangle ABC$

JINÉ TYPY ÚLOH?

Jsou dány délky $a > 0, b > 0$ a velikost úhlu $\alpha \in (0, \pi)$. Dokažte, že existuje $\triangle ABC$ se stranami $a = \overline{BC}, b = \overline{CA}$ a vnitřním úhlem α u vrcholu A.

1) $C, A; |CA| = b$
2) $\overrightarrow{AX}; |\sphericalangle CAX| = \alpha$
3) $k; k(C, a)$
4) $B; B \in \overrightarrow{AX} \cap k$
5) $\triangle ABC$

$$
\begin{aligned}
& & 1)\ & \forall b > 0,\ \exists C, A : |CA| = b \\
1) & \implies & 2)\ & \forall \alpha \in (0, \pi), \exists X : |\sphericalangle CAX| = \alpha \\
1) & \implies & 3)\ & \forall a > 0,\ \exists k : k(C, a) \\
\Big(2) \wedge 3)\Big) & \implies & 4)\ & \text{pak } \exists B : B \in \overrightarrow{AX} \cap k \\
\Big(1) \wedge 4)\Big) & \implies & 5)\ & \triangle ABC
\end{aligned}
$$

Až na to, že tato věta neplatí... je potřeba přidat předpoklady.

5.2.1. Věta (Rolleova věta). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Je-li $f(a) = f(b)$ a f má derivaci v každém bodě intervalu (a,b), pak existuje $c \in (a,b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

Důkaz. Podle Věty 4.3.9 nabývá funkce f na intervalu $[a,b]$ svého maxima i minima. Označme $m = \min f([a,b])$ a $M = \max f([a,b])$. Pak

$$m \leq f(a) = f(b) \leq M. \tag{5.12}$$

Jestliže $m = M$, potom je funkce f konstantní na $[a,b]$. Z Příkladu 5.1.11 vyplývá, že $f'(c) = 0$ dokonce v každém bodě $c \in (a,b)$.

Nyní předpokládejme, že $m < M$. Potom musí být alespoň jedna z obou ne-

splňující $f(c) = M$. Potom $c \notin \{a,b\}$, a tedy $c \in (a,b)$. Pak f nabývá v bodě c svého maxima na intervalu $[a,b]$ a existuje v něm derivace podle předpokladu. Podle Věty 5.1.30 platí $f'(c) = 0$.

Jestliže $m < f(a)$, pak lze postupovat obdobně jako v předcházejícím případě. Alternativně je také možné použít již dokázané tvrzení na funkci $-f$. Tím je důkaz hotov. ■

Pick L. a kol.: Matematická analýza (předběžná verze), 2023, online

`https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf`, str. 258–259

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce.

Důkaz. Podle Věty 4.3.9 nabývá funkce f na intervalu $[a,b]$ svého maxima i minima. Označme $m = \min f([a,b])$ a $M = \max f([a,b])$. Pak

f má derivaci v každém bodě intervalu (a,b),

$$m \leq f(a) = f(b) \leq M.$$

$f(a) = f(b)$

Nyní předpokládejme, že $m < M$. Potom musí být alespoň jedna z obou ne-

splňující $f(c) = M$. Potom $c \notin \{a,b\}$, a tedy $c \in (a,b)$. Pak f nabývá v bodě c svého maxima na intervalu $[a,b]$ a existuje v něm derivace podle předpokladu. Podle Věty 5.1.30 platí $f'(c) = 0$.

existuje $c \in (a,b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

TROJÚHELNÍKY SNAD K NĚČEMU BUDOU!

TROJÚHELNÍKY SNAD K NĚČEMU BUDOU!

objevování vztahů, reformulace, problem solving

algoritmizace, dedukce

argumentace, dokazování, hledání hraničních stavů

DĚKUJI ZA POZORNOST!

. . . a omlouvám se všem $\triangle$.