Výuka matematiky na střední škole není jen výklad a procvičování

Naďa Vondrová
Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova
nada.vondrova@pedf.cuni.cz

Učitelovo dilema

Časová náročnost vs. efektivita: Je nejvíce efektivní to, co přináší rychlé výsledky?

Maximalizovat výkon v krátkodobém horizontu (výklad a procvičování podobných typů úloh, učení se zpaměti)

vs.

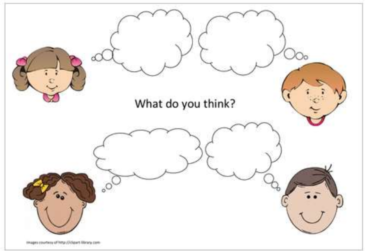
Maximalizovat učení v dlouhodobém horizontu (*produktivní selhávání*, *objevování jako příprava na učení*)

Hiebert, J., Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students‘ learning. In F. K. Lester, Jr., (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 371-404). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

- Pojmy a vztahy jsou veřejné (teachers and pupils attend explictly to concepts)

Matematické souvislosti jsou „věc veřejná“:
- diskutuje se o významech, které jsou podstatou matematických postupů,
- kladou se otázky týkající se řešitelských strategií, v čem jsou podobné a v čem se liší,
- zvažují se způsoby, jak na sebe matematické problémy navazují, v čem se odlišují, v čem jsou jedinečné,
- pozornost se věnuje vztahům mezi matematickými myšlenkami,
- zvědomuje se žákům, v čem skví podstata hodiny a jak to navazuje na minulé hodiny a již známé myšlenky

!Nezaměňovat s výkladem učitele!



- Žáci vynakládají úsilí při řešení matematických problémů (pupils struggle with important mathematics)

žáci vynakládají úsilí, aby matematice porozuměli, aby zjistili něco, co není na první pohled patrné; jsou kognitivně aktivizováni

Kognitivní aktivizace

„Kognitivní aktivizace je výuková praktika, která podněcuje **žáky** k hlubšímu uvažování tak, aby si vytvořili propracovanou znalostní bázi. Při kognitivně aktivizující výuce učitel vede **žáky** k tomu, aby odkrývali, vysvětlovali, sdíleli a konfrontovali své myšlenky, koncepty a metody řešení tím, že jim zadává náročné úkoly, dostává je do situací vedoucích ke kognitivním konfliktům a předkládá jim odlišné nápady, stanoviska, interpretace a řešení.“ (Lipowsky et al., 2009, s. 529)

Lipowsky, F., Rakoczy, K., Drollinger-Vetter, B., Klieme, E., Reusser, K., & Pauli, C. (2009). Quality of geometry instruction and its short-term impact on students’ understanding of Pythagorean Theorem. *Learning and Instruction*, 19(6), 527–537.

Klíčová otázka: Dáváme žákům dostatek příležitostí, aby byli kognitivně aktivizováni?

Náslech: Exponenciální rovnice

$a^0 =$; $a^{r+s} =$; $a^{-r} =$; $(a^r)^s =$; $(a \cdot b)^n =$;

$\left(\frac{a}{b}\right)^n =$; $\sqrt[n]{a^m} =$; $a^{r-s} =$

8.15: U. vyvolává žáky, ti přijdou k tabuli, zapíší vzorec na tabuli a vracejí se do lavice.

8.18: U. společně se třídou kontroluje správnost vzorců. U každého vzorce se zeptá třídy, zda je vzorec správně. Chybné vzorce následně sama opraví a zdůrazní, jak nesmírně důležitá je znalost vzorců na tabuli pro zvládnutí tak náročného učiva, jako jsou exponenciální rovnice.

8.23:

Exponenciální rovnice se vyznačují tím, že mají neznámou v exponentu.

Metoda řešení:

1)Levou a pravou stranu rovnice upravíme pomocí pravidel pro mocniny tak, abychom dostali na obou stranách rovnice mocniny se stejným základem.

2)Exponenty porovnáme.

8.26:

Řešte rovnici v oboru R, proveďte zkoušku:

$4^{-x} = 64$

$4^{-x} = 4^3$

$x = -3$

U. se zeptá třídy, zda má někdo návrh, jak danou rovnici řešit. Jeden žák navrhne vydělit rovnici čtyřmi. U. odpoví, že to nikam nepovede, a poradí žákům, ať si znovu přečtou definici. Zdůrazní, že je třeba upravit pravou stranu rovnice. Nikdo nic nenavrhuje, tak u. řešení prozradí.

Žákyně sedící přede mnou se šeptem zeptá souseda, proč je před trojkou mínus. Soused odpoví, že neví.

Náslech: Kombinatorika

Žáci začali probírat nové téma – kombinatorika. Paní učitelka problematiku uvedla na příkladech z jejich běžného života – budou si umět spočítat, kolika způsoby mohou zkombinovat svá trička a kalhoty, kolika způsoby se mohou dostat do školy apod.

Dále na projektoru ukázala pár příkladů, které ilustrovaly další možnosti kombinatoriky. Žáci byli velmi zaujatí, o tématu diskutovali. Bylo vidět, že jsou z problematiky nadšení a těší se, až začnou počítat. Některé dívky již zkoušeli, kolika způsoby zkombinují boty a kalhoty.

Paní učitelka ovšem následně pustila na projektoru vzorečky, které žákům doporučila si zaznamenat, a začala je komentovat. Celý zbytek hodiny se potom nesl ve znamení vzorečků a vysvětlování „s opakováním“ a „bez opakování“.

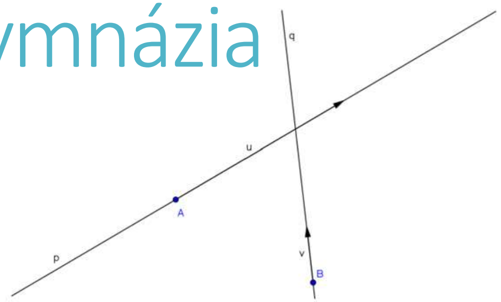
Žáci velmi rychle ztratili nadšení a nezúčastněně si zapisovali do sešitů.

Výuka analytické geometrie u dvou učitelů gymnázia (z diplomové práce)

Rovnice přímek v této úloze byly zadané, v první bylo použito písmeno t, ve druhé s.

U: „Protože budeme zkoumat, jestli je tato přímka (p) a tato přímka (q) totožná, tedy jsou to dvě parametrická vyjádření stejné přímky, tak si do té druhé nemůžu dosadit jako parametr také t, ale dosadím si tam jiné písmenko. Většinou se používá s."

Výuka analytické geometrie u dvou učitelů gymnázia (z diplomové práce)



MK nechal žáky vyřešit soustavu rovnic, kde je pouze jedna neznámá. Po vyřešení rovnice pro x-ovou souřadnici, vyšlo $k = \frac{1}{2}$ a pro y-ovou souřadnici $k = -\frac{1}{3}$.

U: „Co nám vyšlo? A co nám mělo vyjít?“

Ž: „Ten bod.“

U: „Tak jaké má souřadnice?“

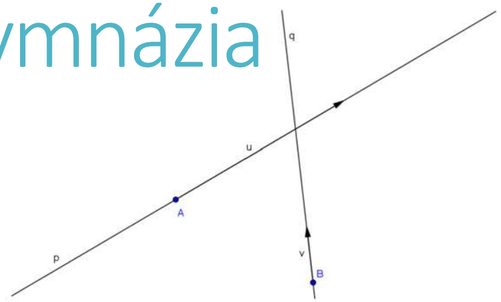
Ž: „Ten vektor, co je v přímce p, vynásobím tím, co nám vyšlo.“

U: „A co nám vyšlo? Jedna polovina nebo mínus jedna třetina? Co ty čísla znamenají? Co nám mělo říci to k?“

Ž: „Jak roztáhneme ty vektory.“

U: „A když nám vyšla dvě různá k, co to znamená?“

Výuka analytické geometrie u dvou učitelů gymnázia (z diplomové práce)



Ž: „To k, které nám vyšlo z rovnice pro x, dosadíme do x-ové souřadnice a to druhé do y-ové souřadnice."

U: „Počkej, vždyť tohle k musí být vždy stejné, ne? To mi říká, jak natáhnu ten vektor. Já nemůžu natahovat jinak x-ovou a jinak y-ovou souřadnici."

Ž: „Tak dosadíme tu jednu polovinu do p a jednu třetinu do q, a když to bude stejné, tak máme ten bod."

U: „A když to nebude stejné?"

Ž: „Tak jsme počítali špatně."

U: „My jsme počítali špatně, ale v čem je tedy chyba?"

V tu chvíli skončila hodina, MK nechal problém otevřený s tím, že se k němu vrátí v příští hodině.

Produktivní selhávání (*productive failure*)

Výklad → Procvičování

Řešení problému (ne nutně korunované úspěchem) → Konsolidační fáze (výkladová)

Cílem komplexních úloh není, aby žáci sami objevili formální způsob řešení (učitel se tedy *nemusí* snažit je k němu navést), ale aby se *připravili* na naučení se tohoto způsobu.

PF: Výsledky napříč studiemi

- Experimentální skupiny dosahovaly lepších výsledků i ve standardních úlohách, v nichž byli žáci kontrolní skupiny trénováni.
- Experimentální skupiny dosahovaly lepších výsledků v konceptuálních znalostech a ve schopnosti transferu znalostí na jiný problém.
- Experimentální skupiny nebyly horší v procedurálních dovednostech než žáci kontrolní skupiny, kteří procvičovali řešení na více podobných úlohách.
- Čím více různých reprezentací a strategií byli schopni žáci v experimentální skupině najít, tím lepších výsledků dosáhli v post-testu.

Ilustrace – produktivní selhávání na střední škole

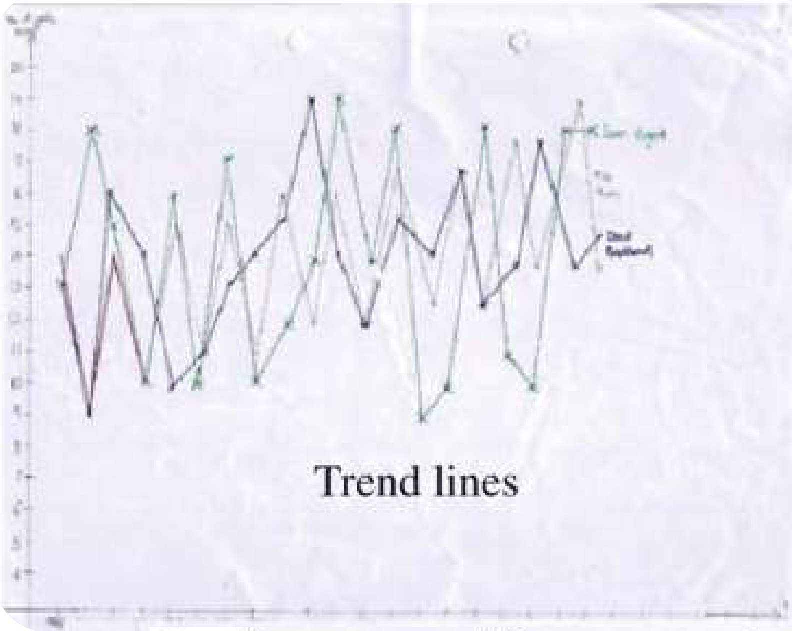
<table>
<tr><th>hod.</th><th>Kontrolní skupina</th><th>Experimentální skupina</th></tr>
<tr><td>1</td><td>učitel vysvětluje látku, na příkladech představuje kanonické řešení, žáci individuálně řeší podobné úlohy</td><td rowspan="2">žáci řeší ve trojicích komplexní problém</td></tr>
<tr><td>2</td><td>žáci řeší tři izomorfní úlohy samostatně, po každé z nich následuje společná kontrola, tři podobné úlohy byly zadány za domácí úkol (další tři byly zadány po čtvrté vyučovací jednotce)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>žáci řeší ve trojicích stejný komplexní problém jako experimentální skupina v 1. a 2. vyučovací jednotce, učitel vysvětluje řešení</td><td>žáci prezentují a porovnávají vlastní strategie a reprezentace, učitel prezentuje kanonické řešení</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">žáci řeší individuálně tři úlohy stejného typu, probíhá společná diskuse řešení</td></tr>
</table>

Rozptyl

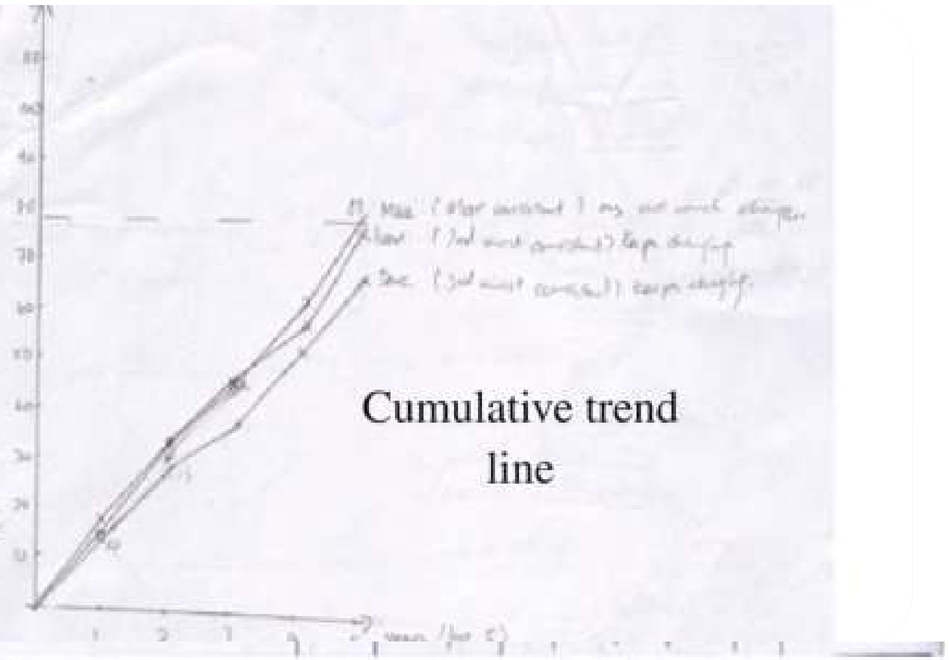
Pan Fergusson, pan Merino a pan Eriksson jsou manažery Nejvyššího fotbalového klubu. Momentálně shánějí nového útočníka a po dlouhém hledání se jim seznam potenciálních hráčů zúžil na tři hráče: Mikea Arwena, Davea Backhanda a Ivana Righta. Všichni útočníci si řekli o stejnou mzdu, a tak se manažeři shodli na tom, že se rozhodnou podle výkonu hráčů v Prémiové lize za posledních 20 let. Tabulka ukazuje počet gólů, které každý z hráčů vstřelil mezi lety 1988 a 2007. Manažeři si řekli, že by se měl vybrat konzistentní hráč. Dohodli se, že k rozhodnutí dojdou matematicky, a to tak, že přijdou na vzorec, pomocí kterého by se vypočítala „konzistentnost“ výkonu každého hráče. Tento vzorec by se měl použít pro výkony všech hráčů a měl by pomoci hráče férově porovnat. Manažeři vás žádají o pomoc. Vytvořte pro ně prosím „vzorec konzistentnosti“ a ukažte, který hráč je nejvíce konzistentní střelec. Na přidělený papír zaznamenejte svou práci i výpočty.

Year	Mike Arwen	Dave Backhand	Ivan Right
1988	14	13	13
1989	9	9	18
1990	14	16	15
1991	10	14	10
1992	15	10	16
1993	11	11	10
1994	15	13	17
1995	11	14	10
1996	16	15	12
1997	12	19	14
1998	16	14	19
1999	12	12	14
2000	17	15	18
2001	13	14	9
2002	17	17	10
2003	13	13	18
2004	18	14	11
2005	14	18	10
2006	19	14	18
2007	14	15	18

Kapur, M. (2012). Productive failure in learning the concept of variance. *Instructional Science, 40(4), 651-672. https://doi.org/10.1007/s11251-012-9209-6*

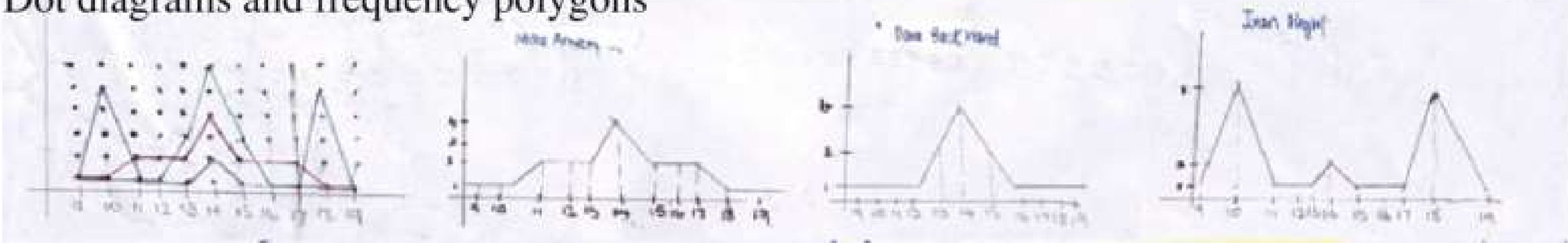


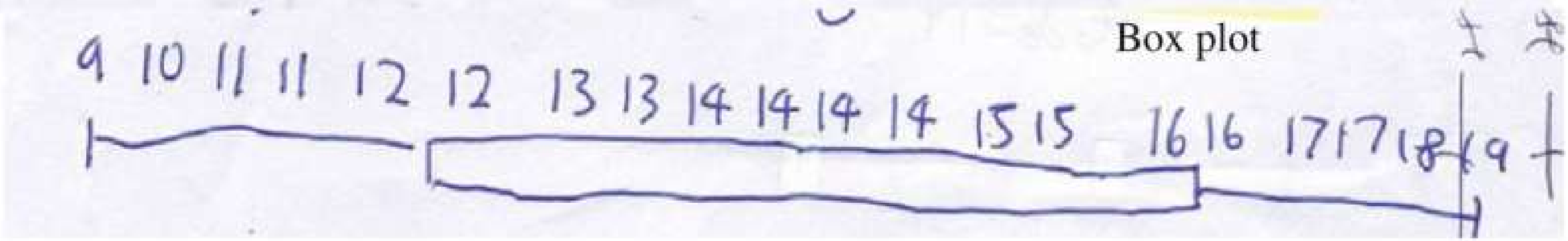
Trend lines



Cumulative trend line

Dot diagrams and frequency polygons





Box plot

From Question paper: Average = $\frac{280}{20}$

Mike has 8 years < average

4 years = average

8 years > average

Dave has 7 years < average

6 years = average

7 years > average

Ivan has 9 years < average

2 years = average

9 years > average

Mike Arwen at range	$8 \leq 11$	$12 \leq 15$	$16 \leq 19$	goals scored
	4 years	10 years	6 years	
Dave Backhand at range	$8 \leq 11$	$12 \leq 15$	$16 \leq 19$	goals scored
	3 years	13 years	4 years	
Ivan Right at range	$8 \leq 11$	$12 \leq 15$	$16 \leq 17$	goals scored
	7 years	5 years	8 years	

Frequency of years within selected intervals

Dave Backhand is the most consistant.

From the table we can see that Davebackhand has the most number of years in one column which means that he is consistantly scoring the same range of goals in a year.

Sum of deviations about the mean (D4)

Year	Avg	M.A	D.B	I.R	x		
1988	14	14	13	13	0	-1	-1
1989	14	9	4	18	-5	-5	4
1990	14	14	16	15	0	+2	+1
1991	16	10	14	10	-4	0	-4
1992	16	15	10	16	+1	-4	+2
1993	14	11	11	10	-3	-3	-4
1994	14	15	13	17	+1	-1	+3
1995	14	11	14	10	-3	0	-4
1996	14	16	15	12	+2	+1	-2
1997	14	12	19	14	-2	+5	0
1998	14	16	14	16	+2	0	+5
1999	14	12	12	14	-2	-2	0
2000	16	17	15	18	+3	+1	+4
2001	14	13	14	9	-1	0	-5
2002	14	17	17	10	+3	+3	-4
2003	14	13	13	18	-1	-1	+4
2004	14	18	14	11	+4	0	-3
2005	14	14	18	10	0	+4	-4
2006	14	19	14	18	+5	0	+4
2007	14	14	15	17	0	+1	+4
				Total:	0	0	0

Sum of year-on-year deviation (D2)

Mike:
9-14 = -5
14-9 = 5
10-14 = -4
15-10 = 5
-4
4
-4
5
-4
4
-4
5
-4
4
-4
5
-4
5
-4

0 ✓ mike

Dave:
-4
7
-2
-4
1
2
1
1
4
-5
-2
3
-1
3
-4
1
4
-4
1

-2

Ivan:
5
-3
-5
1
-6
7
-7
2
2
5
-5
4
-9
1
8
-7
-1
8
0

-5

Average of year-on-year absolute deviation (D3, D5)

$$\text{MIKE} = \frac{5+5+4+5+4+4+4+5+4+4+4+5+4+4+4+5+4+5+4}{20-1}$$

$$= 84/19 = 4.26$$

$$\text{DAVE} = \frac{4+7+2+4+1+2+1+1+4+5+2+3+1+3+4+1+4+4+1}{19}$$

$$= 54/19 = 2.84$$

DAVE is most consistent

$$\text{IVAN} = \frac{5+3+5+1+6+7+7+2+2+5+5+4+9+1+8+7+1+8+0}{19}$$

$$= 4.79$$

PF: Řešení problému ve skupinách, nebo individuálně?

n=162, 10. ročník v německých školách

- pre-test
- 45 minut řešení problému (stejný jako nahoře)
- 45 minut výklad o rozptylu – včetně zdůraznění typických žákovských chyb
- post-test

Obě skupiny měly stejné konceptuální dovednosti a nelišily se v množství vygenerovaných strategií – tedy skupinová práce není nezbytným předpokladem úspěšného PF

Brand, C., Hartmann, C., Loibl, K., & Rummel, N. (2023). Do students learn more from failing alone or in groups? Insights into the effects of collaborative versus individual problem solving in productive failure. *Instructional Science. https://doi.org/10.1007/s11251-023-09619-7*

PF: Předpoklady

- úvodní problém by měl být dostatečně náročný, aby bylo co zkoumat, ale zase ne tolik, aby to žáci vzdali
- úvodní problém by měl být řešitelný více způsoby a měl by mít více reprezentací
- úvodní problém by měl aktivovat předchozí znalosti a dovednosti žáků (formální i neformální)
- ve druhé fázi by měl učitel navazovat na řešení, která vytvořili žáci, a dávat je do souvislosti s formálním řešením
- ve třídě jsou založeny takové normy, že se očekává, že se budou řešit problémy; žáci nespoléhají na výklad učitele

PF: Proč to funguje a jaká jsou rizika

- PF staví na mnohých experimentálně vyzkoušených postupech, které ukazují, že je pro žáky přínosné, když před vlastním výkladem dostanou příležitost řešit úlohy i bez znalosti příslušných postupů
- PF je založené na myšlence, že žákovská originální produkce (strategie, postupy, reprezentace) je cenná pro jejich učení, pokud se vhodně propojí s konvenčními (formálními) postupy
- I když žáci nenašli správné řešení, byli **připraveni** na výklad učitele – matematické pojmy a metody jim vysvětlily to, co si intuitivně vytvořili, i kde a proč udělali chybu
- Žáci (i slabší) byli schopni lépe pochopit novou látku a také, proč oni sami nebyli v řešení úspěšní
- To je zřejmě důvodem, proč se tyto znalosti ukázaly jako trvalejší
- Předpoklad – navození **vytrvalosti** v práci žáků
- Křehká rovnováha mezi produktivním a neproduktivním selháváním (nebezpečí **frustrace**)
- Nutnost vytvoření příznivých norem (např. chyba je příležitost k učení)

Učení se z chyb

- Prokázáno v psychologii (např. Booth et al., 2017) i neurologii (v okamžiku chyby dochází v mozku k aktivitě)
- Prokázáno pro reflektování vlastních chyb i chyb, které jsou žákům předloženy jako např. řešení fiktivních žáků
- Konsistentní výsledek pro všechny žáky – pozitivní efekt po časové prodlevě
- Některé studie prokázaly větší přínos pro silnější žáky, jiné pro slabší žáky

Předpoklady produktivního učení se z chyb (př. Steuer et al., 2013) – pohled žáků

- tolerance chyby ze strany učitele (chyba není pociťována jako něco a priori špatného)
- nevyužívání chyby pro hodnocení (fáze učení a hodnocení je z hlediska chyb oddělována)
- učitelova podpora po objevení chyby (vysvětlení, trpělivost a pomoc)
- absence negativní reakce na chybu (verbální i neverbální) ze strany učitele i žáků
- ochota žáků riskovat chybu
- analýza chyby (chyba je veřejně analyzována)
- využití chyby pro další učení

Steuer, G., Rosentritt-Brunn, G., & Dresel, M. (2013). Dealing with errors in mathematics classrooms: Structure and relevance of perceived error climate. *Contemporary Educational Psychology*, 38(3), 196–210. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2013.03.0

Procvičování

Pokud jde o uchování naučeného materiálu v paměti, v kognitivní psychologii byly opakovaně potvrzeny vztahy jednak mezi počtem opakování a podržením v paměti, jednak mezi časem a zapomínáním. V obou případech mají tyto vztahy podobu mocninné funkce a lze je zhruba charakterizovat jako „růst s negativní akcelerací“. […] s počtem opakování se množství zapamatovaného materiálu zvyšuje, přitom však se přírůstek při každém opakování snižuje. Pro zapomínání pak platí, že pokud není materiál opakován, pak s nárůstem časového intervalu od naučení se množství zapomenutého materiálu zvyšuje, velikost tohoto úbytku však s časem klesá.

Rendl, M., & Páchová, A. (2013). Procesy učení v diskurzu učitelů matematiky na 2. stupni základní školy. In Rendl, M. et al., *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* (s. 127–182). Praha: PedF UK.

Procvičování

V psychologii panuje obecná shoda na tom, že opakování je efektivnější, je-li rozloženo v čase. Rozložení učení do delšího časového úseku („spaced learning“, „spaced repetition“) je dáváno do kontrastu s tzv. nakupeným („massed“) učením, kdy učení a jeho opakování je soustředěno do krátkého časového úseku.

Bylo potvrzeno, že zatímco nakupené učení má lepší výsledky spíše při krátkodobých požadavcích na zapamatování, pro dlouhodobější uchování v paměti je efektivnější učení s vnořenými intervaly. Ty však nesmějí být dlouhé příliš. (s. 170)

Rendl, M., & Páchová, A. (2013). Procesy učení v diskurzu učitelů matematiky na 2. stupni základní školy. In Rendl, M. et al., *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* (s. 127–182). Praha: PedF UK.

Procvičování

Spoléhání na spontánní porozumění, které při opakovaném procvičování jaksi automaticky „naskočí“, může zejména bez cíleného prověřování, zda k porozumění skutečně došlo, vést k pouhému mechanickému používání procedur. Také setrvávání u stále stejné (nízké) úrovně složitosti úloh nijak neprohlubuje míru osvojení konceptu, nevede k tomu, aby se z žáka-nováčka v dané oblasti stával expert. (ibid.: s. 172)

Druhým způsobem, jak zefektivnit opakování, je elaborace. […] Elaborace znamená, že materiál je spontánně nebo záměrně postupně organizován, strukturován, stavěn do nových souvislostí. (ibid.: s. 171)

Rendl, M., & Páchová, A. (2013). Procesy učení v diskurzu učitelů matematiky na 2. stupni základní školy. In Rendl, M. et al., *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* (s. 127–182). Praha: PedF UK.

Závěr

Příležitost k PF

- Kombinatorika: žáci řeší soubor izomorfních úloh (existence různých reprezentací, hledání organizačního principu, různé strategie řešení)
- Námět – slovní úlohy o pohybu
- https://www.suma.jcmf.cz/news/matematika-v-mediich-vyuziti-slovnich-uloh-pri-kooperativni-vyuce/

Půjde to?

Určitě … někdy se povede, jindy ne

Poskytujeme žákům dost příležitostí k vlastní matematické práci?

Slovní úlohy o pohybu (námět Evy Holé)

P1:

- Kdy a kde se potkají dva vlaky, které vyjely současně proti sobě ze stanic A a B vzdálených 60 km, jestliže vlak ze stanice jel rychlostí 75 km/h a vlak ze stanice B rychlostí 45 km/h?
- Ze dvou míst vzdálených od sebe 192 km vyjedou současně proti sobě osobní a nákladní vlak. Osobní vlak má průměrnou rychlost o 12 km/h větší než nákladní vlak. Jakými rychlostmi vlaky jedou, jestliže se potkají za 2 hodiny?
- Vzdálenost dvou míst je 240 km. Z místa A vyjelo v 8.00 hodin nákladní auto průměrnou rychlostí 60 km/h. V 8.30 hodin mu vyjelo naproti z místa B osobní auto pohybující se průměrnou rychlostí 80 km/h. Za jak dlouho a jak daleko od místa A se obě vozidla potkají?

Z1:

- Chodec vyšel v 9 hodin ráno rychlostí 4 km/h. O půl dvanácté za ním vyrazil cyklista rychlostí 20 km/h. Za kolik minut jízdy cyklista chodce dohoní?
- Za chodcem jdoucím průměrnou rychlostí 5 km/h vyjel z téhož místa o 3 hodiny později cyklista průměrnou rychlostí 20 km/h. Za jak dlouhou dobu dohoní cyklista chodce?
- Petr vyběhl na tréninkový okruh rychlostí 6 km/h a za ním za 15 minut vyběhl ze stejného místa Kamil rychlostí 8 km/h. Za jak dlouho a jak daleko Kamil Petra doběhne?