

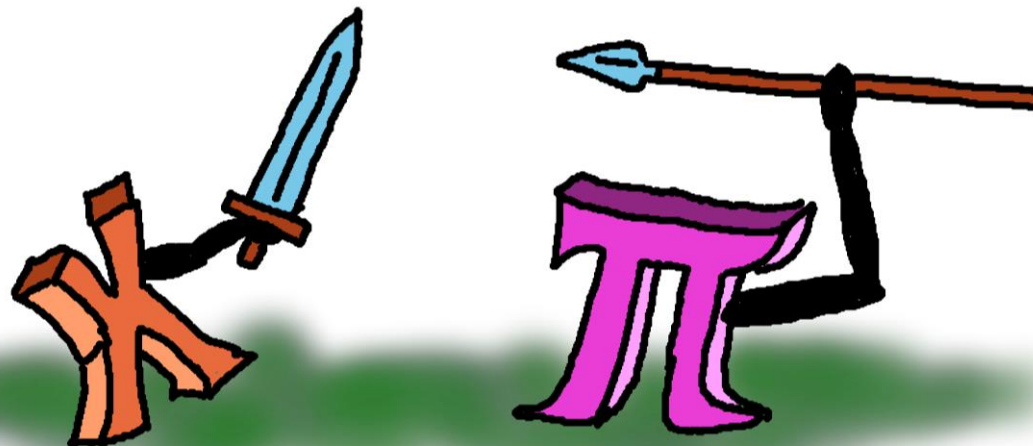


Přírodovědecká  
fakulta  
Faculty  
of Science

Jihočeská univerzita  
v Českých Budějovicích  
University of South Bohemia  
in České Budějovice

GYMNÁZIUM  
JÍROVCOVA

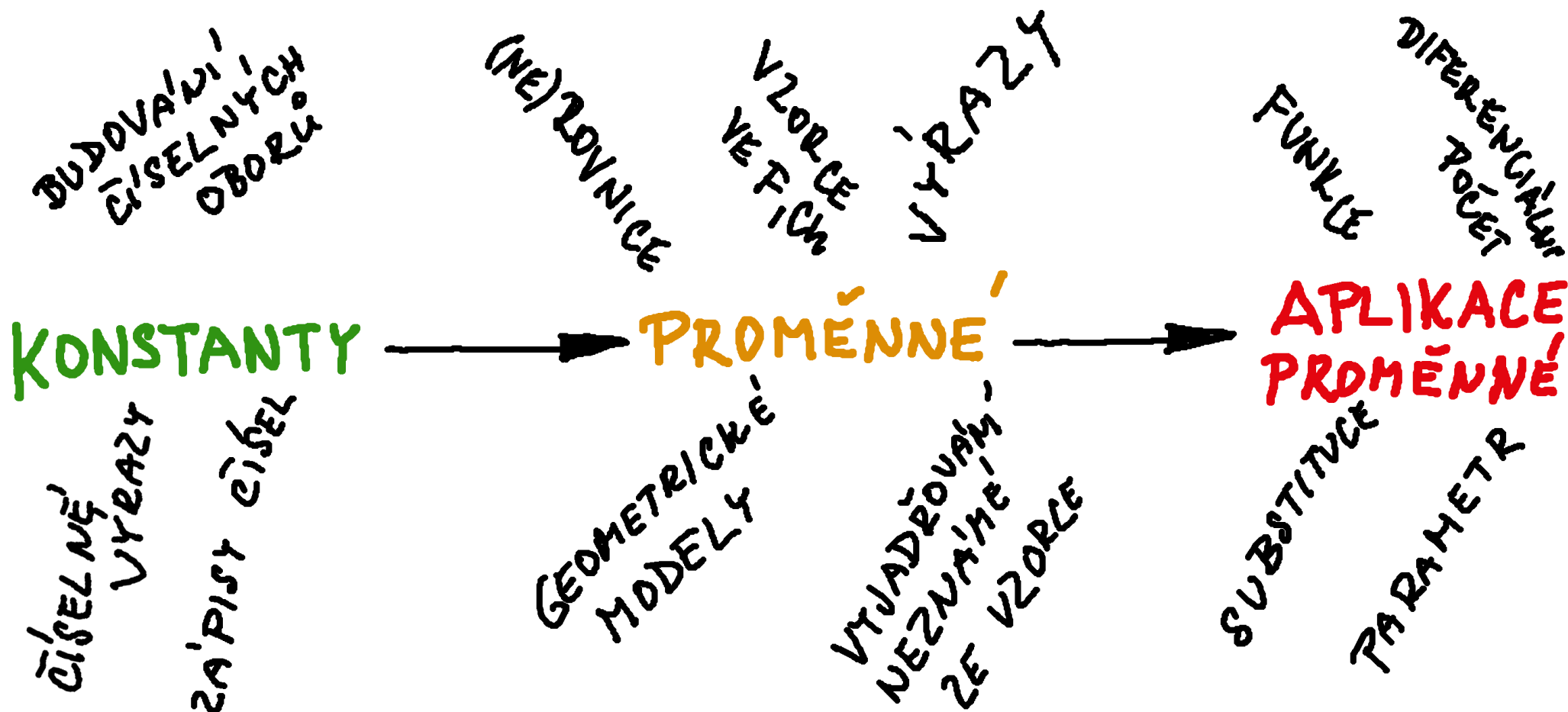
# Proměnná v proměnách mé výuky



Karel Pazourek

Celostátní konference učitelů matematiky SŠ, Praha, 2023

# Na cestě k proměnné



# Co je to proměnná?



## Výrazy [1] (Herman a kol.):

- „Písmeno  $a$  se nazývá proměnná“
- „Nahradíme-li v číselném výrazu některé konkrétní číslo písmenem (třeba i na několika místech), dostaneme výraz s proměnnou.“

## Základní poznatky z matematiky (Bušek, Calda):

- „[Ve výrazech se vyskytují] písmena, která označují proměnné, proměnné zastupují čísla z určité množiny, která se nazývá obor proměnné.“

## Přehled středoškolské matematiky (Polák):

- „[Proměnná je] písmeno ve významu libovolného reálného čísla“

# Proměnná je písmeno



$\pi$  je řecké písmeno  $\implies$  je to proměnná

$e$  je písmeno  $\implies$  je to proměnná

# Proměnná bez písmen



## Zadání:

Dědeček svým vnučkám Gábině, Hance, Ivě a Janě dala 200 eur na prázdninový pobyt v Řecku. Gábině dal o 20 eur méně než Hance. Přitom Hanka, Iva i Jana dostaly stejně. Kolik eur od dědečka dostala Iva?

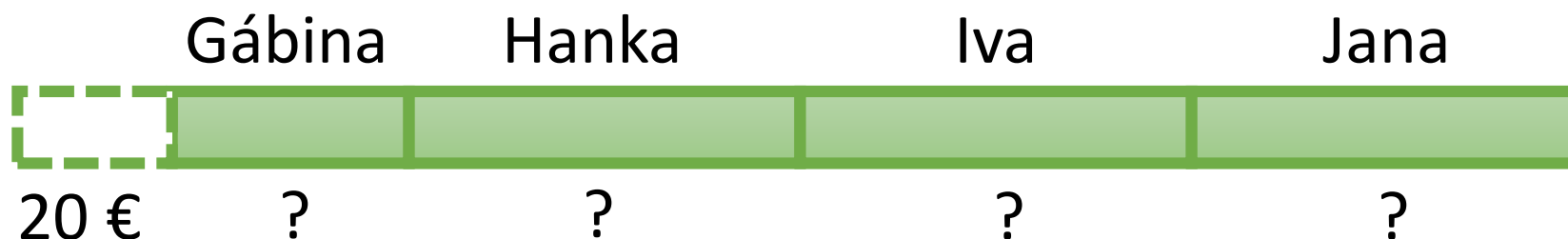
# Proměnná bez písmen



## Zadání:

Dědeček svým vnučkám Gábině, Hance, Ivě a Janě dala 200 eur na prázdninový pobyt v Řecku. Gábině dal o 20 eur méně než Hance. Přitom Hanka, Iva i Jana dostaly stejně. Kolik eur od dědečka dostala Iva?

## Řešení:



$$(x - 20) + 3x = 200$$

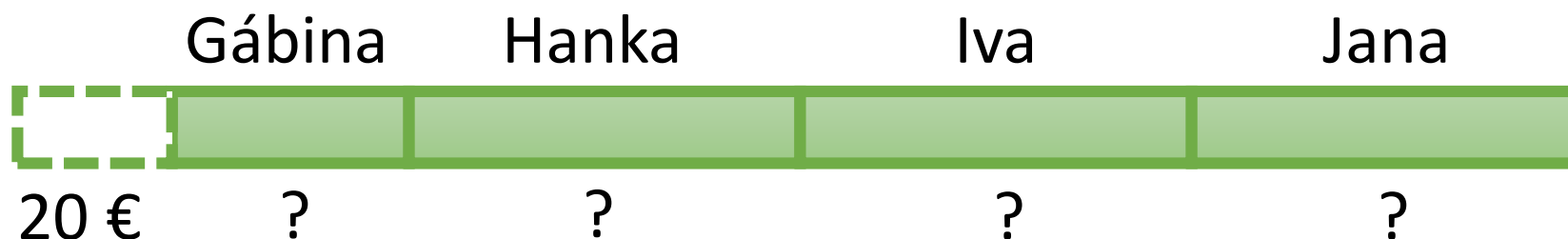
# Proměnná bez písmen



## Zadání:

Dědeček svým vnučkám Gábině, Hance, Ivě a Janě dala 200 eur na prázdninový pobyt v Řecku. Gábině dal o 20 eur méně než Hance. Přitom Hanka, Iva i Jana dostaly stejně. Kolik eur od dědečka dostala Iva?

## Řešení:



$$(200 + 20) : 4 = 220 : 4 = 55 \text{ €}$$

$$(x - 20) + 3x = 200$$



**Definice konstant**

×

**Zavádění (označování) proměnných**





# Mnohočleny



**Kde už něco takového žáci viděli:**

Rozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

↓

$$N = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_0$$

**Moje oblíbená úloha:**

Určete pro které základy  $z$  číselné soustavy je číslo  $(1320)_z$  dělitelné šesti.

# Algebra Tiles



1. Pomocí Algebra Tiles znázorněte:

(a)  $x^2 + 5x + 2$

(b)  $3x^2 - 3x - 1$

<https://mathsbot.com/manipulatives/tiles>

2. Znázorněte mnohočlen  $2x^2 - 4x + 3$  a poté jej změňte na opačný mnohočlen.

3. Vyskládejte mnohočlen  $3x^2 - 2x + 5$  a mnohočlen k němu opačný a ověřte vzájemným vyrušením bloků, že jejich součet je 0.

4. Sečtěte následující mnohočleny a výsledek ověřte pomocí Algebra Tiles:

(a)  $(3x + 7) + (2 + x^2) =$

(b)  $(3x^2 - 2x - 3) + (x^2 + 2 + 4x) =$

(c)  $(x - 7 + 4x^2) + (11 - 3x^2 - x) + (x^2 - 1) =$

5. Odečtěte následující mnohočleny a výsledek ověřte pomocí Algebra Tiles:

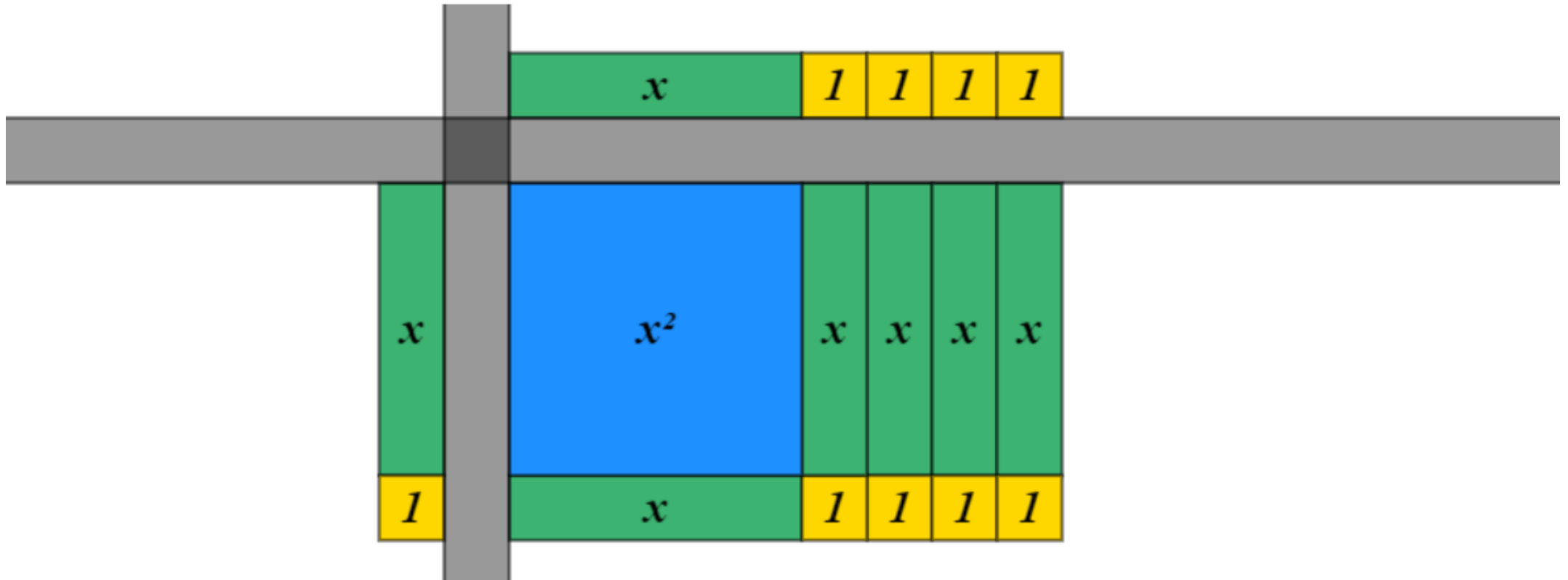


# Algebra Tiles



Factorise:

$$x^2 + 5x + 4$$
$$(x + 4)(x + 1)$$



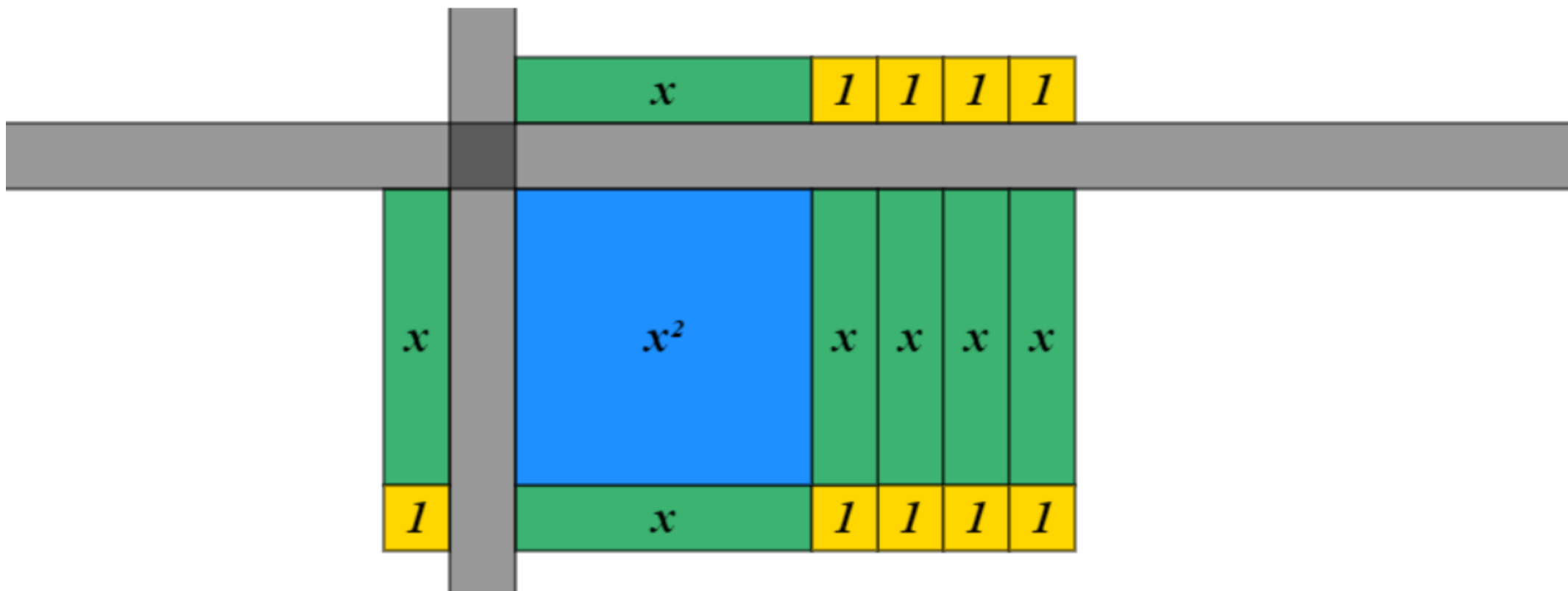
# Algebra Tiles



Jiná úloha:

Vydělte:

$$(x^2 + 5x + 4) : (x + 1) =$$



Účel proměnné



**Neznámá  $\times$  parametr**

# Rovnice s parametrem – obtíže a výzvy



**„Je tam víc písmenek“**

Řešte rovnici s neznámou  $a \in \mathbb{R}$   
v závislosti na parametru  $p \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{a}{p} + 1 = a + p$$

Řešte rovnici s neznámou  $p \in \mathbb{R}$   
v závislosti na parametru  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{a}{p} + 1 = a + p$$

# Rovnice s parametrem – obtíže a výzvy



- Je třeba sledovat obor parametru (podobně i u neznámé, když řešíme pouze na části definičního oboru).

$$\dots \quad p < 1$$

$$\vdots$$

$$x = \sqrt{p - 2}$$

Jako při řešení  
(ne)rovníc  
s absolutními  
hodnotami



# Rovnice s parametrem – obtíže a výzvy



- Dělení obou stran rovnic výrazem, který obsahuje parametr

$$(p + 2)(x + 2p) = p + 2 \quad | : (p + 2)$$

$$x + 2p = 1$$

$$x = \underline{\underline{1 - 2p}}$$

# Rovnice s parametrem – obtíže a výzvy



- Jestliže na začátku stanovíme podmínky na neznámou, pak výslednou hodnotu neznámé, pokud je závislá na parametru, je třeba zkontrolovat

$$\frac{p-1}{x} = p+2 \quad x \neq 0$$

⋮

$$x = \frac{p-1}{p+2}$$

# Rovnice s parametrem – obtíže a výzvy



- Závěr úlohy = diskuze v závislosti na parametru

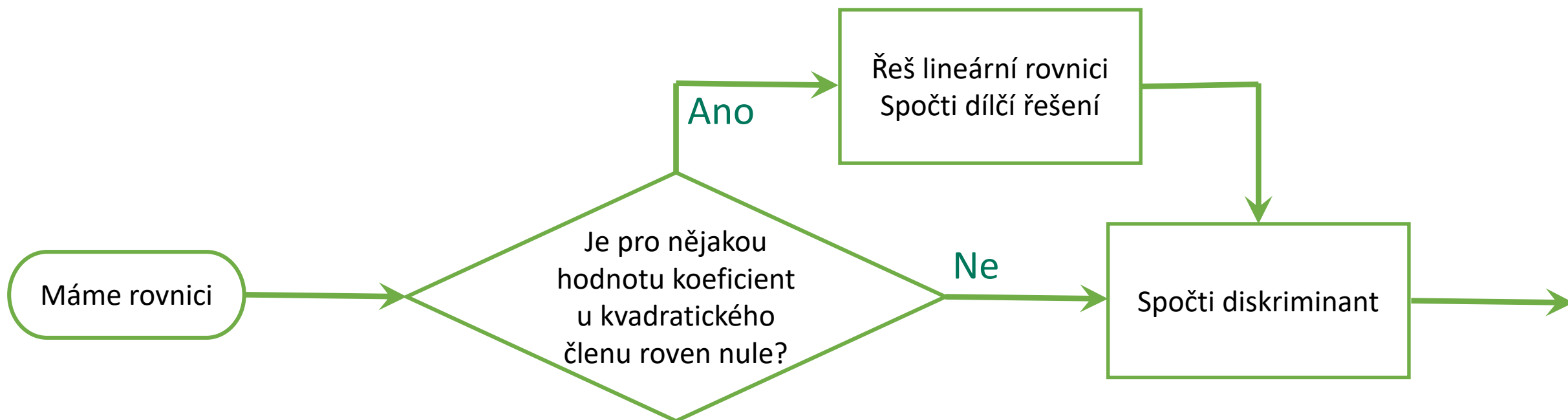
$p = 1$	$x = \mathbb{R}$
$x = 0$	Nemá řešení
$p \neq 1$	$x = \frac{p + 1}{p - 1}$

$p = 1$	$x = 0$
$p = 2$	Nemá řešení
$p > 1$	$x = \frac{p + 1}{p - 1}$

# Kvadratická rovnice s parametrem



- Lze sepsat osnovu, kterou lze dodržovat (vyžadovat?)
- Mechaničnost řešení



# Geometrické úlohy s parametrem

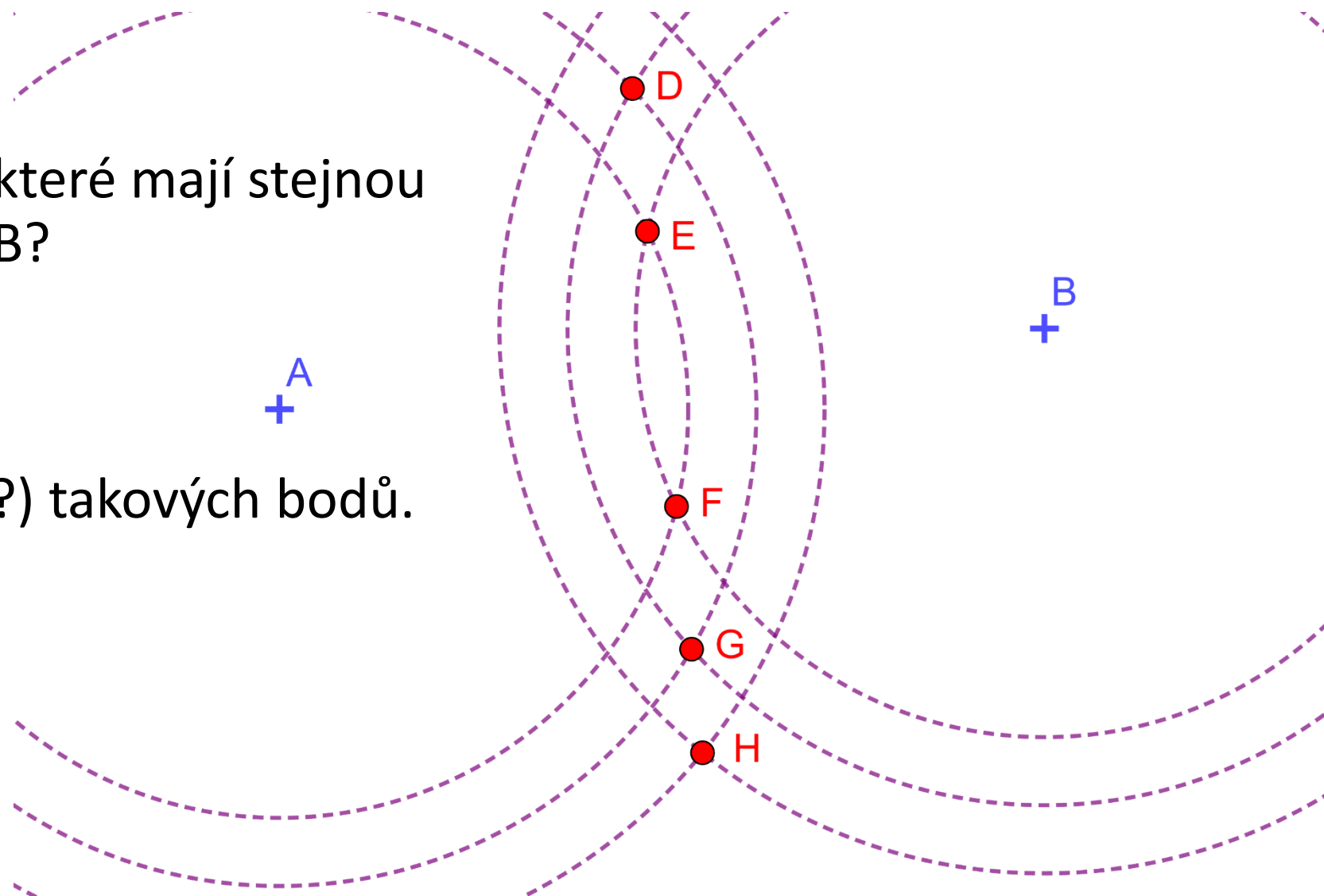


## Zadání:

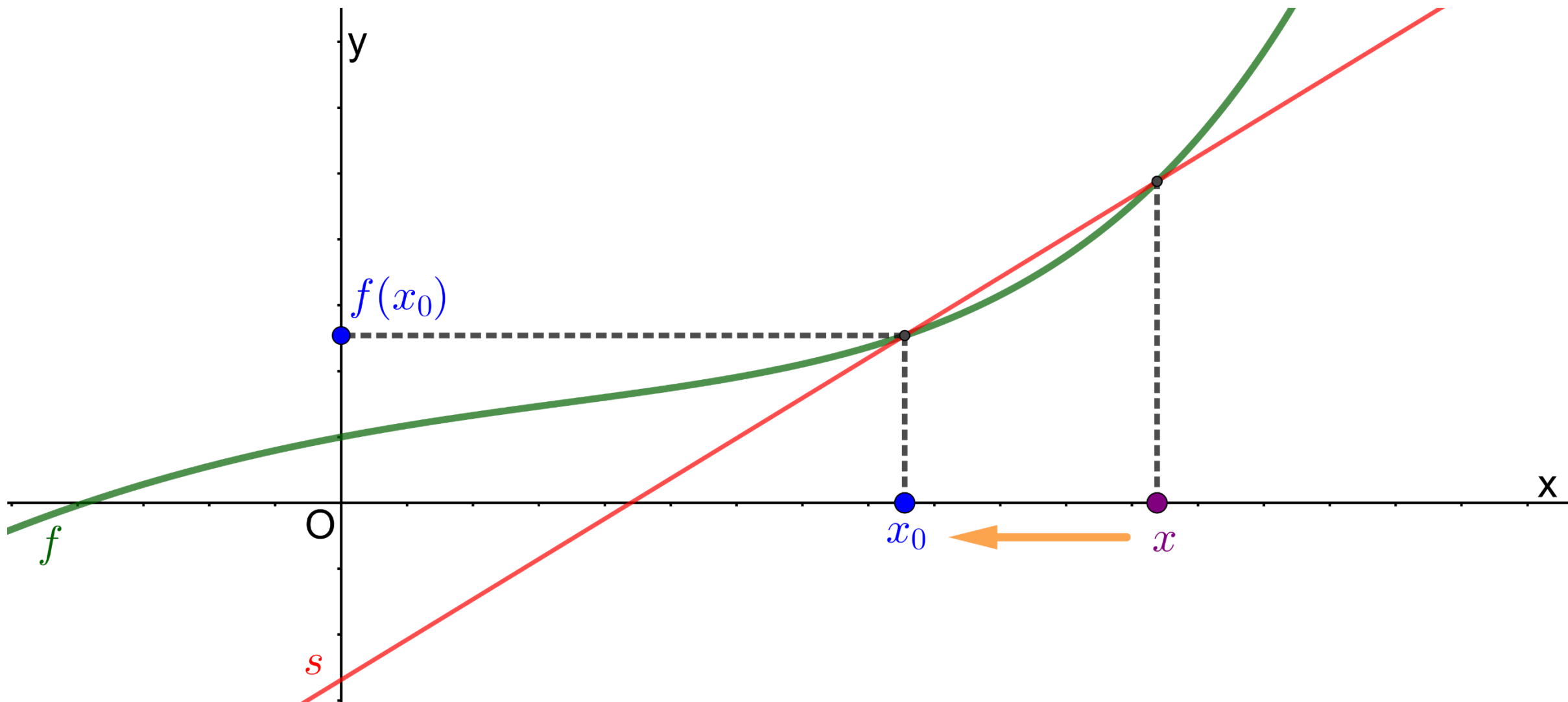
Kde leží všechny body, které mají stejnou vzdálenost od bodů A, B?

## Stanovení hypotézy:

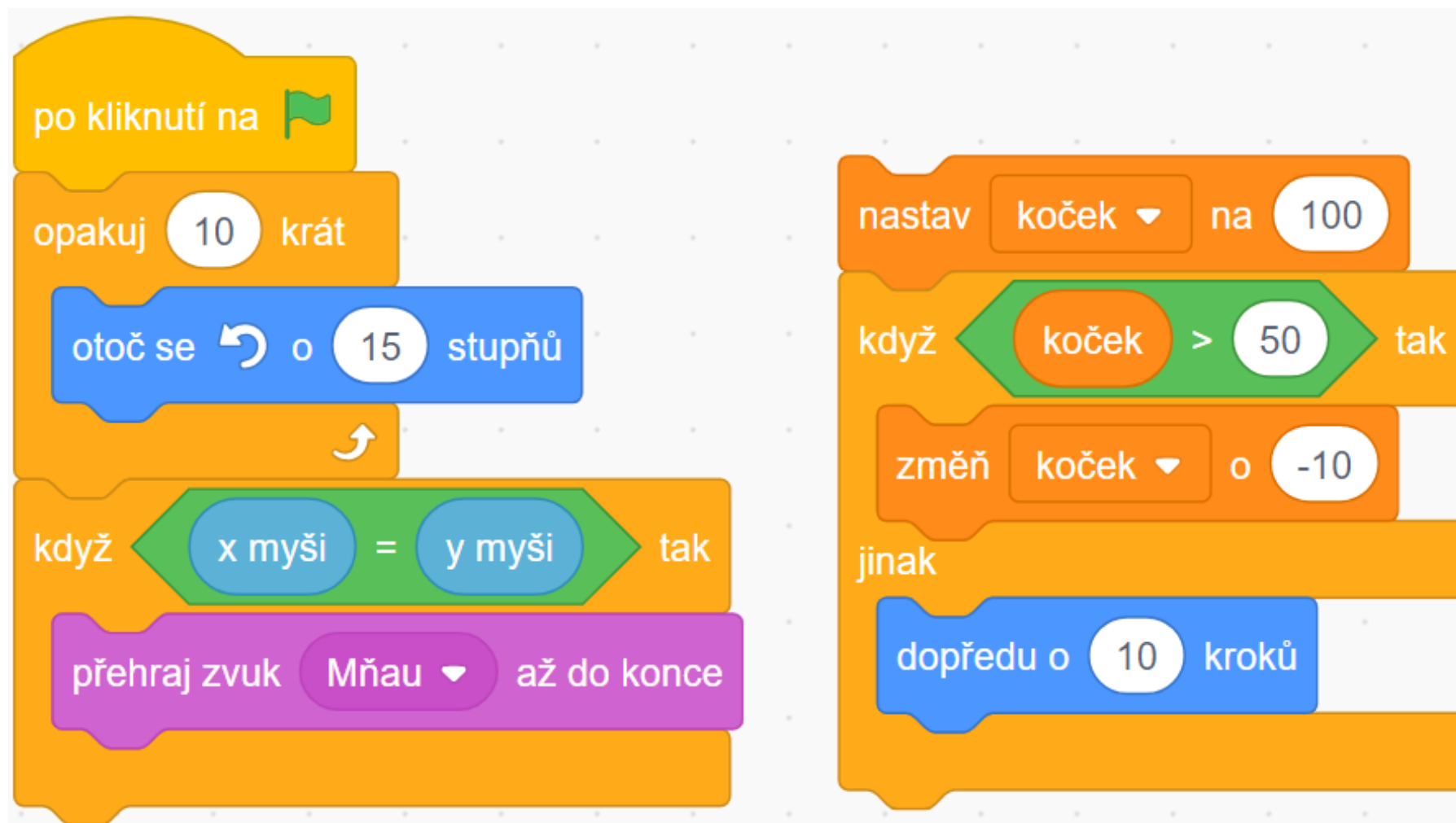
Najdeme několik (kolik?) takových bodů.



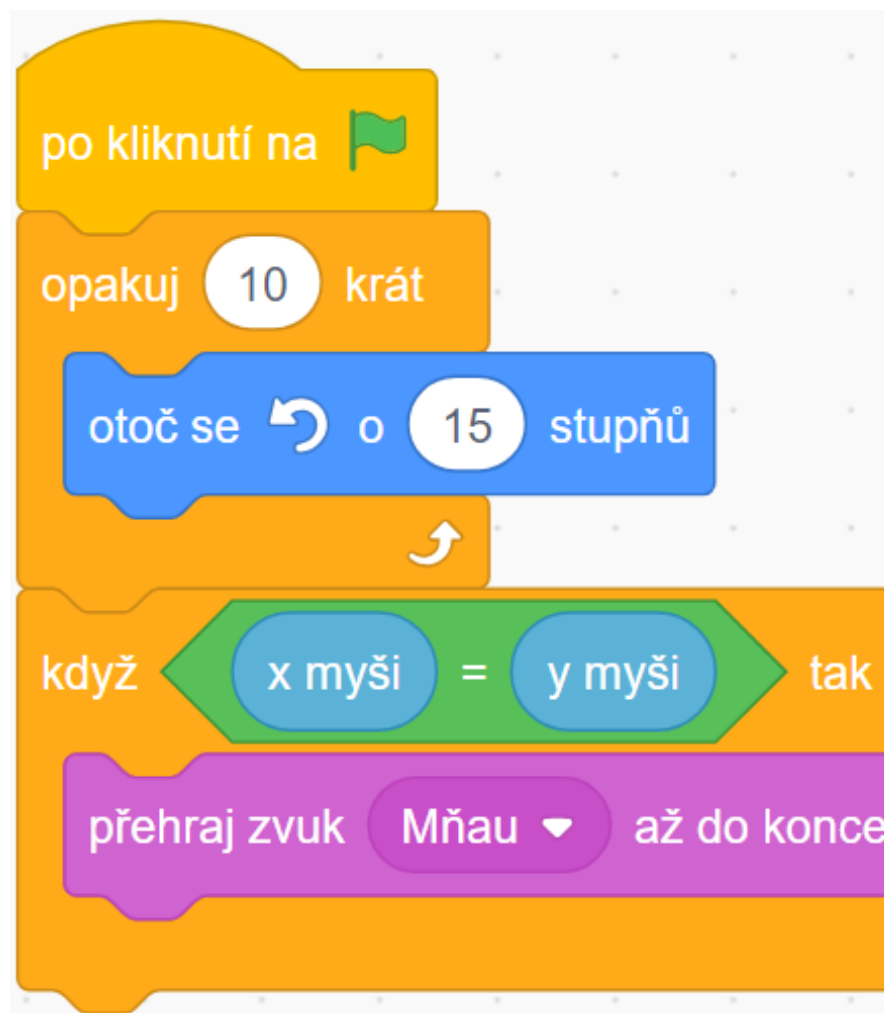
# Proměnná v diferenciálním počtu



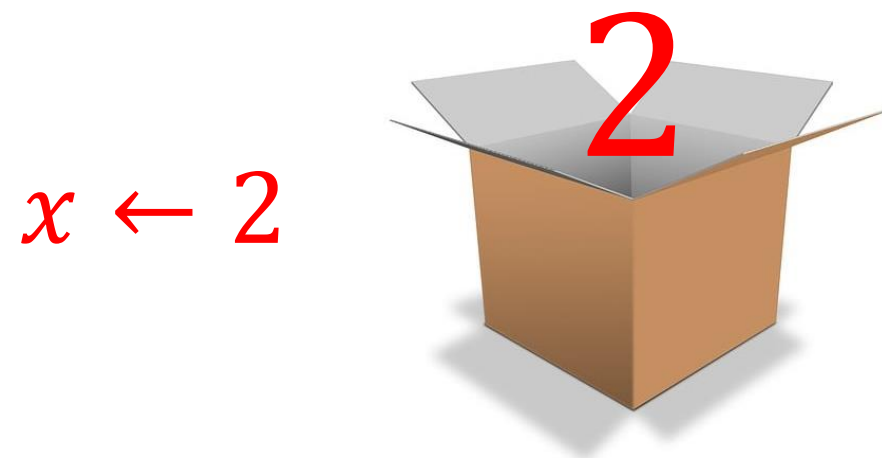
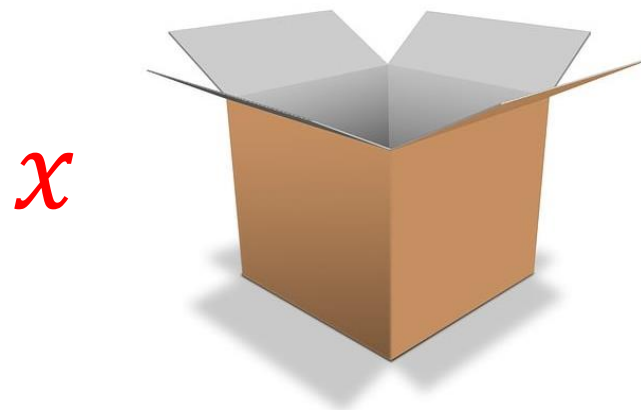
# Nová informatika



# Nová informatika



Proměnná jako krabice na čísla:





# Dosazování



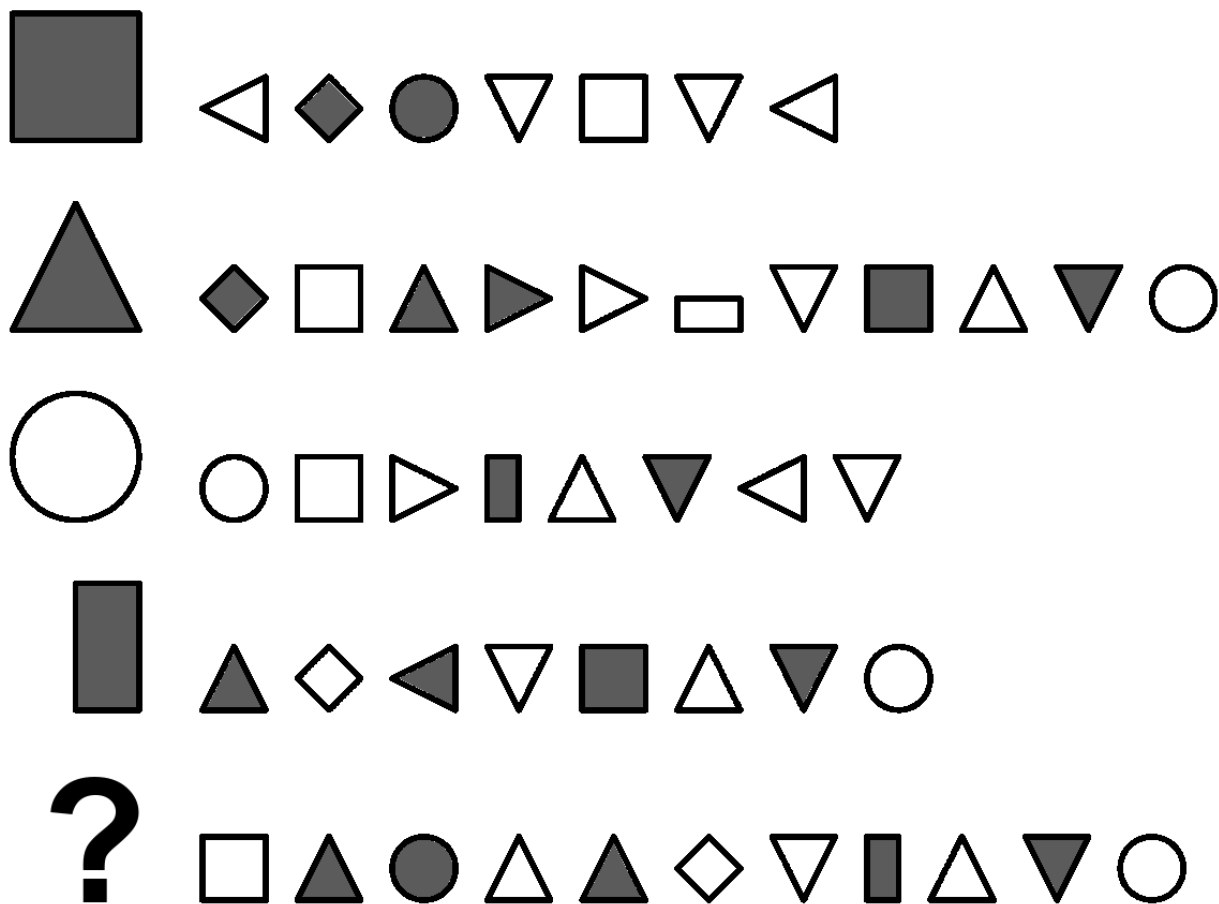
Několik obtížných momentů:

- Na začátku výpočet hodnoty výrazu (zejména s více proměnnými)

- Ve vyšších ročnících:





















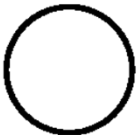





























AG: Hledání nerovnice poloroviny:  $ax + by + c \lessgtr 0$

# Substituce čili dosazování



# Substituce čili dosazování



	<b>Č</b>	<b>T</b>	<b>V</b>	<b>E</b>	<b>R</b>	<b>E</b>	<b>C</b>				
											
	<b>T</b>	<b>R</b>	<b>O</b>	<b>J</b>	<b>U</b>	<b>H</b>	<b>E</b>	<b>L</b>	<b>N</b>	<b>I</b>	<b>K</b>
											
	<b>K</b>	<b>R</b>	<b>U</b>	<b>Z</b>	<b>N</b>	<b>I</b>	<b>C</b>	<b>E</b>			
											
	<b>O</b>	<b>B</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>L</b>	<b>N</b>	<b>I</b>	<b>K</b>			
											
	<b>R</b>	<b>O</b>	<b>V</b>	<b>N</b>	<b>O</b>	<b>B</b>	<b>E</b>	<b>Z</b>	<b>N</b>	<b>I</b>	<b>K</b>
											

# Substituce čili dosazování



(V(FAKT(TROLL)RVE))(ZN(TREBAZE)KAH((ZAVERY)TINA)BY)



# Substituce čili dosazování



(V(FAKTORRVE))(ZNACKAH(KONCETINA)BY)

# Substituce čili dosazování



(V(FAKTORRVE))(ZNACKAH(KONCETINA)BY)  
RH UD

# Substituce čili dosazování



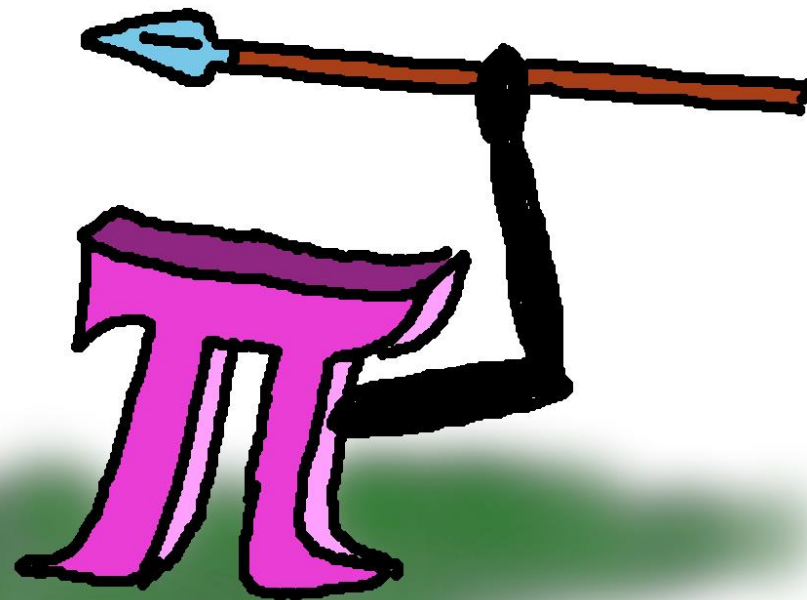
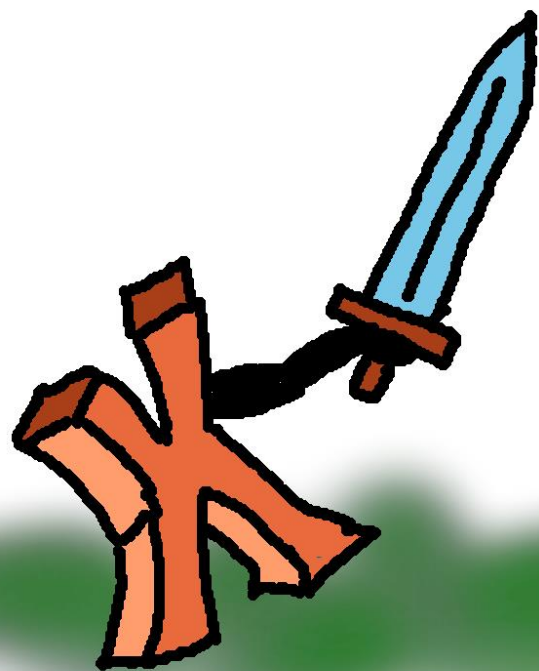
(VRH)(ZNACKAHUDBY)



# Substituce čili dosazování



(VRH)(ZNACKAHUDBY)  
HOD           NOTA



# Zdroje



- BUŠEK, Ivan a CALDA, Emil. *Matematika pro gymnázia. Základní poznatky*. 3., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2006 dotisk. 178 s. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-146-9.
- HERMAN, Jiří et al. *Matematika. Sekunda, Výrazy 1*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2016 dotisk. 168 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-013-6.
- POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 9., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2012. 659 s. ISBN 978-80-7196-356-1.