29. MEZINÁRODNÍ KONFERENCE

HISTORIE MATEMATIKY

Velké Meziříčí, 22. 8. – 26. 8. 2008

Praha 2008

ISBN 978-80-7378-048-7

Vážené kolegyně, vážení kolegové,

předkládáme Vám svazek obsahující texty čtyř hlavních vyzvaných přednášek a delších či kratších sdělení, které byly přihlášeny na 29. mezinárodní konferenci **Historie matematiky**. Všechny příspěvky byly graficky a typograficky sjednoceny, některé musely být upraveny i jazykově. Zařazen je též seznam řádně přihlášených účastníků (do 30. 6. 2008) a denní program konference. Svazek vznikl díky finanční podpoře Katedry didaktiky matematiky MFF UK a Ústavu aplikované matematiky FD ČVUT.

Letošní konference je rozdělena na dvě části. Poprvé se objevují hlavní přednášky, o něž byli požádáni zkušení přednášející, kteří se dlouhodobě věnují dějinám matematiky a výchově doktorandů oboru *Obecné otázky matematiky a informatiky*. Texty jejich vystoupení jsou otištěny v první části sborníku.

Ve druhé části sborníku jsou uveřejněny příspěvky jednotlivých účastníků. Jejich vystoupení nebyla monotématicky zaměřena, neboť jsme se snažili poskytnout dostatečný prostor k aktivním vystoupením, diskusím a neformálním setkáním všech přihlášených, tj. matematiků, historiků matematiky, učitelů vysokých a středních škol, doktorandů i studentů.

Program konference je v letošním roce opět dosti bohatý a pestrý. Doufáme, že každý najde něco, co ho zaujme, objeví nové kolegy a přátele, získá inspiraci, motivaci a povzbuzení k další odborné práci nebo studiu.

Všechna jednání konference probíhají v aule gymnázia:

Gymnázium
Sokolovská 27/235
594 01 Velké Meziříčí
tel.: 566 522 839
tel., fax.: 566 521 600
http://www.gvm.cz

Účastníci konference jsou ubytováni v domově mládeže:

Domov mládeže
Hornoměstská 36
594 01 Velké Meziříčí
tel.: 566 522 829
dm@ssrsvm.cz

Podrobnější informace o letošní konferenci i předchozích konferencích a letních školách lze najít na adrese:

http://www.fd.cvut.cz/personal/nemcova/konference/hlavnindex.html

Jindřich Bečvář a Martina Bečvářová

V Praze v červenci 2008

SEZNAM ÚČASTNÍKŮ

- **Balková Lubomíra**
- **Baštinec Jaromír**
- **Bečvář Jindřich**
- **Bečvářová Martina**
- **Čižmár Ján**
- **Dobiášová Kateřina**
- **Durnová Helena**
- **Fulier Jozef**
- **Halas Zdeněk**
- **Hromadová Jana**
- **Hudeček Jiří**
- **Hykšová Magdalena**
- **Chmelíková Vlasta**
- **Chocholová Michaela**
- **Ilucová Lucia**
- **Jarošová Martina**
- **Ježek Josef**
- **Kafková Marika**
- **Kalousová Anna**
- **Kotoučková Hana**
- **Koudela Libor**
- **Kotůlek Jan**
- **Kvasz Ladislav**
- **Lengyelfalusy Tomáš**
- **Lepka Karel**
- **Melcer Martin**
- **Moravec Luboš**
- **Otavová Miroslava**
- **Pavlíková Pavla**
- **Pazourek Karel**
- **Pecinová Eliška**
- **Pecl Jiří**
- **Pelantová Edita**
- **Pémová Marta**
- **Porubský Štefan**
- **Richter Jaroslav**
- **Saxl Ivan**
- **Sklenáriková Zita**
- **Slavík Antonín**
- **Smýkalová Radka**
- **Sýkorová Irena**
- **Šír Zbyněk**
- **Špinková Milena**
- **Trkovská Dana**
- **Ulrychová Eva**
- **Vacková Věra**
- **Więsław Witold**
- **Zichová Jitka**

SEZNAM PŘEDNÁŠEK

I. Vyzvané přednášky

J. Bečvář, M. Bečvářová: ***Práce historika matematiky***
J. Čižmár, Z. Sklenáriková***: Geometria v diele J. Lamberta***
Š. Porubský: ***Dokonalá čísla – najstarší otvorený problém matematiky***
I. Saxl: ***Pravděpodobnost před Pascalem a Fermatem***

II. Konferenční vystoupení (25 minut)

M. Bečvářová: ***Archimédovy práce česky***
K. Dobiášová: ***Bézier a Casteljau u vzniku CAGD***
H. Durnová: ***Postava matematika v beletrii a ve filmu***
J. Hudeček: ***Axioms, Algorithms & Anachronisms: David Hilbert and Mechanised Proofs***
M. Hykšová: ***Filozofické pojetí pravděpodobnosti v díle T. G. Masaryka a K. Vorovky***
M. Chocholová: ***Wilhelm Matzka (1798–1891) ve Vídni***
L. Ilucová: ***Rovinné grupy symetrií vo výtvarnom umení***
M. Jarošová: ***Leonardo Pisánský – Liber Abaci***
J. Ježek: ***Měl Fermat nástroje k důkazu svých vět!?***
A. Kalousová: ***Georges-Louis Leclerc de Buffon***
H. Kotoučková: ***Historie robustních matematicko-statistických metod***
L. Koudela: ***Vývoj pojmu fraktální dimenze***
M. Otavová: ***Caramuel z Lobkovic – matematická teorie jazyka v 17. století***
K. Pazourek: ***Euklidův algoritmus v učebnicích matematiky pro reálky a gymnázia (1852–1907)***
E. Pelantová: ***Neobvyklé reprezentace čísel***
A. Slavík: ***Méně známá fakta z historie teorie množin***
R. Smýkalová: ***Z historie goniometrických funkcí – Ptolemaiovy výpočty***
I. Sýkorová: ***Násobení ve středověké Indii***
Z. Šír: ***Užití teorie proporcí u Eukleida, Archiméda a Apollónia***
M. Špinková: ***Pravděpodobnost a naše zdraví***
D. Trkovská: ***Cremonovy transformace a jejich cesta z Milána do Prahy***
E. Ulrychová: ***Zrod vektorového počtu a vektorových prostorů***
W. Więsław: ***Zygmunt Rewkowski (1807–1893) – matematyk zapomniany***
J. Zichová: ***Josef Erben – pražský statistik 19. století***

ODBORNÝ PROGRAM KONFERENCE

Pátek 22. 8. 2008

Dopolední program 10:00–12:00
Zahájení
Plenární přednáška:
J. Čižmár, Z. Sklenáriková*: Geometria v diele J. Lamberta*

Konferenční vystoupení:
M. Jarošová: *Leonardo Pisánský – Liber Abaci*

Odpolední program 14:00–15:30
Plenární přednáška:
J. Bečvář, M. Bečvářová: *Práce historika matematiky*

Odpolední program 16:00–18:00
Konferenční vystoupení:
R. Smýkalová: *Z historie goniometrických funkcí – Ptolemaiovy výpočty*
H. Kotoučková: *Historie robustních matematicko-statistických metod*
E. Ulrychová: *Zrod vektorového počtu a vektorových prostorů*

Sobota 23. 8. 2008

Dopolední program 8:30–10:00
Konferenční vystoupení:
M. Bečvářová: *Archimédovy práce česky*
J. Zichová: *Josef Erben – pražský statistik 19. století*

Dopolední program 10:30–12:00
Konferenční vystoupení:
H. Durnová: *Postava matematika v beletrii a ve filmu*
M. Špinková: *Pravděpodobnost a naše zdraví*
J. Ježek: *Měl Fermat nástroje k důkazu svých vět!?*

Odpolední program 14:00–15:30
Plenární přednáška:
I. Saxl: *Pravděpodobnost před Pascalem a Fermatem*

Odpolední program 16:00–18:00
Konferenční vystoupení:
M. Chocholová: *Wilhelm Matzka (1798–1891) ve Vídni*
D. Trkovská: *Cremonovy transformace a jejich cesta z Milána do Prahy*
Diskuse o studiu historie matematiky

Neděle 24. 8. 2008

Dopolední program 8:30–10:00
Plenární přednáška:
Š. Porubský: *Dokonalá čísla – najstarší otvorený problém matematiky*

Dopolední program 10:30–12:00
Konferenční vystoupení:
A. Slavík: *Méně známá fakta z historie teorie množin*
L. Koudela: *Vývoj pojmu fraktální dimenze*

Pondělí 25. 8. 2008

Dopolední program 8:30–10:00
Konferenční vystoupení:
W. Więsław: *Zygmunt Rewkowski (1807–1893) – matematyk zapomniany*
A. Kalousová: *Georges-Louis Leclerc de Buffon*

Dopolední program 10:30–12:00
Konferenční vystoupení:
E. Pelantová: *Neobvyklé reprezentace čísel*
L. Ilucová: *Rovinné grupy symetrií vo výtvarnom umení*

Odpolední program 14:00–15:30
Konferenční vystoupení:
M. Otavová: *Caramuel z Lobkovic – matematická teorie jazyka v 17. století*
J. Hudeček: *Axioms, Algorithms & Anachronisms: David Hilbert and Mechanised Proofs*

Odpolední program 16:00–18:00
Konferenční vystoupení:
I. Sýkorová: *Násobení ve středověké Indii*
Z. Šír: *Užití teorie proporcí u Eukleida, Archiméda a Apollónia*
M. Hykšová: *Filozofické pojetí pravděpodobnosti v díle T. G. Masaryka a K. Vorovky*

Úterý 26. 8. 2008

Dopolední program 8:30–10:00
Konferenční vystoupení:
K. Pazourek: *Euklidův algoritmus v učebnicích matematiky pro reálky a gymnázia (1852–1907)*
K. Dobiášová: *Bézier a Casteljau u vzniku CAGD*

Dopolední program 10:30–12:00
Závěrečná diskuse
Zakončení

VYZVANÉ PŘEDNÁŠKY

Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777)

GEOMETRIA V DIELE JOHANNA HEINRICHA LAMBERTA

JÁN ČIŽMÁR, ZITA SKLENÁRIKOVÁ

Hlavný prúd vedeckého pokroku matematiky v 18. storočí prezentuje tvorba akademických vzdelancov pôsobiacich vo vedeckých centrách reprezentovaných niektorými poprednými európskymi univerzitami a najmä špecializovanými vedeckými inštitúciami, z ktorých najvýznamnejšie postavenie zaujímali Berlínska, Sankt-Peterburská a Parížska akadémia vied. Špičkové vedecké osobnosti tohto storočia v matematike (Euler, Lagrange, Laplace a i.) absolvovali špecializované štúdium vysokoškolskej úrovne, v ktorom matematika buď hrala dominantnú rolu, alebo bola podstatnou súčasťou vzdelávacieho programu, ktorý pomohol odhaliť a neskorším štúdiom a praxou naplno rozvinúť matematický talent a ďalšie intelektuálne schopnosti vedca. Matematická publikačná činnosť talentovaných samoukov – akými boli v predchádzajúcich storočiach M. Stifel, F. Viète, J. Napier, R. Descartes, P. Fermat, W. Oughtred a mnohí iní – ktorá významným podielom prispievala k vedeckému pokroku v matematike, prestáva byť v 18. storočí pravidelným fenoménom matematickej tvorby podstatne ovplyvňujúcim charakter matematiky tohto storočia a progresívne smery jej vývoja. Jedným z nemnohých matematikov-samoukov, ktorých pôsobenie sa vymyká z tohto všeobecného obrazu, je **Johann Heinrich Lambert**, ktorého vedecká produkcia v 18. storočí znateľne obohatila obsah niekoľkých vedeckých oblastí, a to najmä matematiky, fyziky, astronómie a filozofie.

1 Životopis

1.1 Detstvo a dospievanie

Johann Heinrich Lambert (franc. Jean Henri) sa narodil 26. augusta 1728 v alsaskom meste Mulhouse (nem. Mülhausen), ktoré malo od 14. storočia status slobodného ríšskeho mesta (slobodné mesto Svätej rímskej ríše nemeckého národa) a v čase Lambertovho života patrilo do Švajčiarskej konfederácie na základe obrannej zmluvy medzi konfederáciou a mestom. Lambertovi hugenotskí predkovia sa presídlili do mesta zo severofrancúzskej oblasti Lorraine r. 1635, keď v meste našli útočisko pred náboženským prenasledovaním v pohnutých časoch Tridsaťročnej vojny. Mesto Mulhouse poskytovalo obraz relatívne pokojného spolunažívania obyvateľov rôznych vierovyznaní v dobe, keď rozbroje medzi politickými reprezentantmi rímskokatolíckeho, evanjelicko-augsburského a kalvínskeho vierovyznania boli zámienkou na rozpútanie najničivejšej vojny 17. storočia na území západnej a strednej Európy.

Lambertov starý otec aj otec Lukas boli krajčíri a rovnaký životný údel čakal aj Johanna Heinricha, ktorý po absolvovaní základnej školy vo veku dvanásť rokov zostal doma pomáhať otcovi v remesle pri zabezpečovaní materiálnej existencie početnej rodiny, v ktorej bolo treba živiť päť synov a dve dcéry. Relatívne dobré základy vzdelania v obvyklých elementárnych predmetoch a vo francúzštine a latinčine, ktoré nadobudol mladý Lambert v škole, si po celodennom zamestnaní intenzívne doplňoval a rozširoval samostatným štúdiom po večeroch a nociach. Už dĺžka Lambertovho školského vzdelania nebola v 18. storočí pre deti nemajetných vrstiev obvyklá a v porovnaní so zaostalejšími oblasťami Európy bola priam nadmerná. (Napr. na Slovensku väčšina vidieckych žiakov ešte v dvadsiatych rokoch 20. storočia končila povinnú školskú dochádzku vo veku dvanástich rokov po šiestich ročníkoch základnej školy.) Dobré školské základy a usilovné samovzdelávanie priniesli Lambertovi prvé ovocie v podobe úradníckeho miesta v železiarňach v Seppois – južne od Mulhouse a západne od Bazileja – kam nastúpil ako pätnásťročný. V plnení rozmanitých úradníckych povinností vynikla jeho kaligrafická úprava písomností a počtárska zručnosť v účtovníckych záležitostiach. Široký vedomostný rozhľad mu onedlho umožnil privyrábať si aj činnosťou súkromného učiteľa. Ako sedemnásťročný získal miesto sekretára u Johanna Rudolfa Iselina, vydavateľa konzervatívneho denníka *Basler Zeitung* (Bazilejské noviny) a neskoršieho profesora práv v Bazileji. Vo svojich spomienkach Lambert vysoko hodnotil ideálne podmienky, ktoré mu toto pracovné miesto utváralo na ďalšie hlboké samoštúdium, zamerané najmä na matematiku, astronómiu a filozofiu. Prvotným objektom jeho štúdia bola síce filozofia, a to najmä teória poznania, ale čoskoro zistil, že metodologickým základom cesty k objektívne pravdivému poznaniu sú matematické vedy, osobitne algebra a mechanika, ktoré poskytujú jasné, hlboké a presvedčivé príklady na potvrdenie zákonov a pravidiel filozofie.

1.2 Dozrievanie

Dvadsaťročný Lambert nastúpil r. 1748 na miesto súkromného učiteľa a vychovávateľa v domácnosti grófa Petra von Salisa v mestečku Chur vo východnom Švajčiarsku neďaleko dnešných hraníc s Rakúskom. Jeho zverencami boli jedenásťročný grófov vnuk, jeho bratanec toho istého veku a ďalší sedemročný člen rodiny. Pobyt v Chure bol pre Lamberta jedinečnou príležitosťou na pokračovanie v hlbokom samovzdelávaní, v čom mu preukázala neoceniteľnú pomoc vynikajúca grófova knižnica. Štúdium bolo naďalej sústredené na matematiku, astronómiu a filozofiu, ale objavili sa už prvé formulácie vedeckých problémov a samostatné pokusy o ich riešenie. K uvedeným oblastiam pribudla fyzikálna tematika, špeciálne otázky termiky a optiky, ktoré sa stali predmetom dlhodobého Lambertovho záujmu. Pre Švajčiarsku vedeckú spoločnosť (*Societas Helvetica*) v Bazileji, ktorá ho medzičasom zvolila za svojho člena, konal v Chure pravidelné meteorologické pozorovania. Okrem toho sa venoval astronomickým pozorovaniam pomocou astronomických prístrojov zhotovených podľa jeho vlastných návrhov. K ďalším prejavom uznania Lambertovej vedeckej činnosti počas jeho pobytu v Chure patrila jeho voľba za člena Literárnej spoločnosti v Chure a jeho prvá publikácia o kalorickom teple v časopise *Acta Helvetica* r. 1755.

Po ôsmich rokoch pôsobenia v Chure vyslala rodina grófa von Salisa r. 1756 Lamberta s jeho dvoma staršími zverencami na okružnú vzdelávaciu cestu po Európe. Jednou z prvých zastávok na tejto ceste bola návšteva Göttingenu, kde sa Lambert stretol s univerzitnými profesormi A. G. Kästnerom a T. J. Mayerom st. a bol zvolený za člena Göttingenskej učenej spoločnosti. Dlhší pobyt v Göttingene a úmysel venovať sa tam štúdiu matematiky prekazila Lambertovi r. 1757 francúzsko-rakúska okupácia Göttingenu v Sedemročnej vojne (1756–1763) medzi Pruskom a Rakúskom. Lambert so svojimi mladými zverencami odcestoval do Utrechtu, odkiaľ v nasledujúcich dvoch rokoch navštívil väčšinu významnejších holandských miest. Počas holandského pobytu vyšla Lambertovi r. 1758 v Haagu jeho prvá kniha o zákonitostiach prechodu svetla rôznymi prostrediami.

Ďalšími zastávkami Lamberta s mladíkmi na okružnej ceste Európou boli mestá Paríž, Marseille, Nice, Turín a Miláno. V Paríži sa Lambert stretol s d´Alembertom, ktorý v tom čase už patril k špičkovým vedeckým osobnostiam svojej doby. Po návrate z okružnej cesty ukončil Lambert službu v rodine grófa von Salisa s úmyslom venovať sa výlučne vedeckej práci. Keď padla šanca nastúpiť na miesto v Göttingene, pobudol niekoľko mesiacov v Zürichu, kde sa zaoberal astronomickými pozorovaniami, a potom sa na niekoľko mesiacov vrátil do rodného mesta. R. 1759 mu vyšla v Zürichu vo francúzštine kniha *La perspective affranchie de l´embaras du Plan géometral*, známejšia pod nemeckým názvom *Die freye Perspective*, napísaná pravdepodobne už v polovici päťdesiatych rokov 18. storočia. Dielo, ktoré matematickou úrovňou a bohatstvom obsahu prekonalo dovtedy vrcholnú prácu o perspektíve B. Taylora *Linear perspective*, bolo predzvesťou exaktnej matematizácie zobrazovacích metód deskriptívnej geometrie v podaní Gasparda Mongea. Týmto dielom sa Lambert stal natrvalo známym v európskej vedeckej komunite.

1.3 Akademické pôsobenie

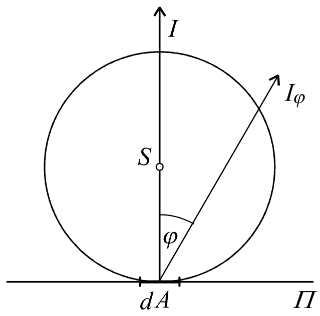
Od r. 1759 žil Lambert v Augsburgu, kde zohnal vydavateľa svojich dvoch ďalších diel *Photometria* (Fotometria, 1760) a *Cosmologische Briefe* (Kozmologické listy, 1761) a podieľal sa na prípravných prácach na založenie Bavorskej kurfürstskej akadémie vied v Mníchove, ktorá mala byť zorganizovaná podľa vzoru Berlínskej akadémie vied. Po nezhodách s niekoľkými členmi akadémie opustil akadémiu r. 1762. Zostal však jej korešpondujúcim členom.

L. Euler už r. 1760 odporučil prijatie Lamberta na miesto profesora astronómie v Sanktpeterburskej akadémii, dlhodobo uprázdnené následkom reorganizačných zmien v akadémii a neistých politických pomerov v Rusku. Keď táto šanca zlyhala a stroskotalo aj potenciálne trvalé pôsobenie Lamberta v Bavorskej akadémii vied, účastnil sa krátky čas na rozhraničujúcich geodetických meraniach medzi Milánom a Churom a potom odcestoval do Lipska, kde sa mu podarilo nájsť vydavateľa jeho filozofického diela *Neues Organon* (Nový organon), publikovaného r. 1764. V nasledujúcom roku bol Lambert na návrh Eulera prijatý za pracovníka Berlínskej kráľovskej akadémie vied, titulárne na slušne honorované miesto vrchného stavebného radcu. Pruský kráľ Fridrich II (Veľký) pôvodne odmietol vymenovať Lamberta za člena akadémie z niekoľkých príčin, medzi ktoré patrili o. i. Lambertov nízky pôvod, nekonvenčné správanie a rigorózne náboženské presvedčenie, ale vzhľadom na Lambertovu vedeckú reputáciu zmenil svoje rozhodnutie. Lambert bol formálne začlenený do fyzikálnej triedy (= sekcie) akadémie, ale ako jediný člen akadémie prezentoval pred písomnou publikáciou svoje práce, ktorých počet presiahol za dvanásť rokov číslo 150, aj v iných triedach akadémie. V akadémii Lambert pracoval na mnohých problémoch rýdzo teoretickej i aplikovanej povahy v niekoľkých oblastiach exaktných vied a filozofie. Väčšina jeho matematických výsledkov bola publikovaná súborne v štvorzväzkovom diele *Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung* (Príspevky k použitiu matematiky a jej aplikácie). Niektoré Lambertove výsledky dosiahnuté v Berlínskej akadémii , ako napr. dôkaz iracionality čísla π, prínos k teórii hyperbolických funkcií, aplikácie matematiky v kartografii a špeciálne prínos k vzniku neeuklidovskej geometrie, mali pre pokrok teórie v príslušných oblastiach fundamentálny význam. Útly spis *Theorie der Parallellinien*, dokončený r. 1766 a publikovaný posmrtne r. 1786 Johannom Bernoullim, vnukom Johanna Bernoulliho I, bol temer priamou predzvesťou zrodu neeuklidovskej geometrie v treťom desaťročí 19. storočia a hlboko zasiahol aj do metodologickej koncepcie základov geometrie. Rozsiahle filozofické dielo venované hlavne problémom poznania *Anlage zur Architectonic, oder Theorie des Einfachen und Ersten in der philosophischen und mathematischen Erkenntnis* (Úvod do architektoniky alebo teória jednoduchého a prvého vo filozofickom a matematickom poznaní), ktoré vyšlo r. 1771, bolo posledným knižným vydaním významnejšieho Lambertovho diela publikovaným za jeho života. Lambert zomrel 25. septembra 1777 v Berlíne vo veku 49 rokov na tuberkulózu.

2 Vedecké dielo

2.1 Fyzika

Najvýznamnejším Lambertovým prínosom k rozvoju fyziky sú výsledky, ktoré dosiahol v optike a publikoval v diele *Photometria* (1760). Pre tú časť optiky, ktorú študoval a opísal v tomto diele a ktorej dal svojím pomenovaním názov, je považovaný za zakladateľa. Základný fotometrický zákon, nazvaný *Lambertov kosínusový zákon* (alebo *kosínusový emisný zákon* či *Lambertov emisný zákon*), vyjadruje závislosť intenzity svetla vysielaného žiaričom od veľkosti uhla medzi normálou plochy *Π* žiariča a smerom na pozorovateľa v tom istom bode plochy (obr. 1).



Obr. 1

Ak na element plochy Π jednotkového obsahu prislúcha v smere normály plochy intenzita I a smer na pozorovateľa zviera s normálou na plochu uhol veľkosti φ, intenzita svetla vysielaného plošným elementom s obsahom dA v smere na pozorovateľa má hodnotu Iφ = L.dA.I.cos φ, kde L je konštanta závislá lokálne od fyzikálno-optických vlastností plochy Π. Tá istá matematická závislosť platí aj pre intenzitu odrážaného svetla, ak je plocha osvetlená vonkajším zdrojom. (Lambertov kosínusový zákon má lokálny charakter a nevysvetľuje o. i. empiricky pozorovateľný fakt poklesu intenzity svetla s rastúcou vzdialenosťou pozorovateľa od žiariča. Že je tento pokles úmerný druhej mocnine vzdialenosti, t. j. intenzita v mieste zdroja sa násobí prevrátenou hodnotou druhej mocniny vzdialenosti, predpokladal už Kepler a rovnako aj Lambert.) Lambertov zákon vysvetľuje, prečo je intenzita osvetlenia plochy v určitom bode pri konštantnej intenzite svetla žiariča tým menšia, čím šikmejšie dopadajú svetelné lúče na plochu v danom bode, t. j. čím väčší uhol s veľkosťou v intervale $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ zvierajú s normálou plochy v danom bode. To vysvetľuje znateľné teplotné rozdiely povrchu

Zeme v stredných a vyšších zemepisných šírkach počas zimy a leta pri prakticky zanedbateľných zmenách vzdialenosti Zeme od Slnka v týchto ročných obdobiach.

Jedným z nových objektov, ktoré priniesol vývoj fotometrie od Lambertových čias, je pojem *Lambertovho žiariča*, čo je ideálny fyzikálny žiarič s tou istou hodnotou jasu vo všetkých smeroch. Príkladom takého žiariča je žiariaca guľová plocha s tou istou hodnotou jasu vo všetkých svojich bodoch. Teda Slnko – odhliadnuc od istých nerovnomerností jeho povrchu – je Lambertov žiarič. – Po Lambertovi je nazvaná jednotka svetelného jasu; nazýva sa *lambert.*

Druhýn prvotriednym prínosom Lamberta vo fotometrii je výsledok známy pod názvom *Lambertova-Beerova veta*. Týka sa zmeny intenzity svetla pri jeho prechode absorpčným prostredím. Tento jav študoval už Pierre Bouguer, ktorý základnú závislosť poklesu intenzity svetla od dĺžky dráhy prechodu prostredím a od vlastností prostredia publikoval už r. 1729 v práci *Essai d´optique sur la gradation de la lumière* (Rozprava z optiky o prechode svetla). Túto prácu Lambert poznal, vo svojom diele *Photometria* (1760) ju uviedol a citoval. Preto ťažko vysvetliť, že autorstvo prvej verzie zákona je pripisované Lambertovi. Zovšeobecnenie zákona pochádza z r. 1852 od Augusta Beera, ktorý okrem pôvodných fyzikálnych veličín pribral do úvahy koncentráciu absorpčného prostredia v prípade, že ním bola tekutina, t. j. plyn alebo kvapalina. V dnešnej podobe má zákon tvar

$$E_{\lambda} = -\log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = \varepsilon_{\lambda}.c.d,$$

kde E_λ je tzv. extinkcia (t. j. absorpčnosť materiálu pre monochromatické svetlo vlnovej dĺžky λ), I_0 je intenzita vchádzajúceho svetla, I_1 je intenzita svetla po prechode prostredím, c je koncentrácia absorpčnej tekutiny, d je dĺžka dráhy svetla prostredím a ε_λ je dekadický molárny extinčný koeficient pre svetlo vlnovej dĺžky λ. Intenzita svetla po prechode je teda explicitne vyjadrená ako hodnota klesajúcej exponenciálnej funkcie

$$I_1 = I_0.e^{\left(-\varepsilon^{*}.c.d\right)}, \qquad \text{kde } \varepsilon^{*} = \varepsilon_{\lambda}.\ln 10.$$

Tretím, menej známym Lambertovým výsledkom v kolorimetrii je konštrukcia chromatickej pyramídy, publikovanej r. 1772 a zostavenej pomocou chromatických trojuholníkov profesora göttingenskej univerzity Tobiasa J. Mayera st. z r. 1758. Superpozíciou takýchto trojuholníkov homotetických s pôvodným a odlišujúcich sa navzájom počtom použitých riadkov a umiestnením čiernej farby dostal Lambert ihlanovitý útvar, v ktorého vrstvách bolo stodvanásť farieb a ich zmiešanín, pričom vrchol ihlana tvorila biela farba a stredom rovnostranného trojuholníka základne bola čierna farba, získaná zmiešaním troch základných farieb – žltej, červenej a modrej. Lambert bol presvedčený o rozsiahlych možnostiach použitia svojho objavu vo výrobe farieb, v polygrafickej a textilnej výrobe.

Z ďalších fyzikálnych myšlienok Lamberta je pozoruhodná idea tepelného minima vo vesmíre (absolútna nula v dnešnom chápaní), ktorú vyslovil ako prvý, ďalej záujem o meranie vlhkosti vzduchu a snaha o matematické vyjadrenie účinkov tepla, čím sa zaradil medzi priekopníkov hygrometrie a pyrometrie. Spis *Hygrometria* publikoval r. 1775 a dielo *Pyrometria*, venované teórii tepla, dokončil krátko pred svojou smrťou v máji 1777.

2.2 Astronómia

Lambertov vedecký záujem o astronómiu sa prejavoval od r. 1744 pozorovaniami a výpočtami dráh komét. Niektoré výsledky a geometrickú metódu určovania dráh komét zachytil v diele *Eigenschaften über Kometenbahnen* (O vlastnostiach dráh komét) publikovanom r. 1761. V pozorovaniach a výpočtoch dráh komét pokračoval aj v neskorších rokoch. R. 1773 upozornil, že zmeny obežných dráh komét sa mierne líšia od predpovedí založených len na započítavaní vplyvu gravitácie.

Spolu s Johannom Elertom Bodem bol zakladateľom a vydavateľom časopisu *Berliner Astronomisches Jahrbuch* (Berlínska astronomická ročenka), pripravovaného od r. 1774 s prvou publikáciou v roku 1776. Bode pokračoval vo vydávaní astronomickej ročenky ešte niekoľko desaťročí po Lambertovej smrti.

Najvýznamnejším a najznámejším Lambertovým astronomickým dielom bol spis *Cosmologische Briefe über die Einrichtung des Weltbaues* (Kozmologické listy o usporiadaní vesmíru) publikovaný v Augsburgu r. 1761. V diele s mnohými ideami filozofickej a fyzikálno-hypotetickej povahy sú početné racionálne pojmy a domnienky, v uvedení ktorých do astronómie má Lambert prioritu. Patria k nim: objav dvojhviezd a autorstvo tohto pojmu, zavedenie fotometrie do astronómie, zavedenie pojmu *albedo* (bielosť) pre odraz svetla na matných a drsných plochách, odhad vzdialeností hviezd na základe ich jasu (dôležité v čase neexistencie plauzibilných goniometrických a ďalších metód zisťovania vzdialeností), vypracovanie teórie astronomickej refrakcie, t. j. lomu svetla vzdialených astronomických objektov v zemskej atmosfére s premenným indexom lomu. Z filozofického a astronomicko-metodologického hľadiska najvýznamnejšiu časť spisu tvorí *hypotéza* o hierarchickej štruktúre vesmíru, podľa ktorej Slnečná sústava tvorí útvar prvého rádu, súbor obdobných sústav tvorí útvar druhého rádu, súbor takýchto útvarov tvorí galaxiu ako útvar ďalšieho rádu, súbor galaxií je útvarom ďalšieho vyššieho rádu atd. Je to pokus rozšíriť platnosť newtonovskej fyziky, platnosť zákonov ktorej bola potvrdená pre Slnečnú sústavu, za hranice tejto sústavy pre kométy a celé hviezdne univerzum. V súlade s prevažujúcimi dobovými filozofickými a náboženskými názormi pripisuje Lambert štruktúre vesmíru teleologickú povahu, podľa ktorej je vesmírne usporiadanie prejavom cieľavedomých zámerov akejsi absolútnej bytosti vybavenej rozumom, vôľou, mocou a inými atribútmi absolutizujúcimi pozitívne ľudské vlastnosti.

Dobovo osobitne významnou bola teória o Mliečnej ceste, založená na idei sformulovanej už r. 1749, podľa ktorej je Mliečna cesta systém diskovitého tvaru tvorený tisícmi hviezd obklopujúcich Slnko, pričom každá hviezda má svoj planetárny systém obdobný so Slnečnou sústavou a disk Mliečnej cesty je analogom ekliptiky Slnečnej sústavy. Lambert publikoval svoje predstavy o Mliečnej ceste bez znalosti teórií Thomasa Wrighta a Immanuela Kanta o tom istom objekte, publikovaných r. 1750, resp. 1755. Čulá korešpondencia Lamberta s Kantom pomohla objasniť zhodu i rozdielnosť názorov na niektoré dôležité pojmy astronómie a najmä kozmológie. Napr. nie vždy sa zhodli v názore na podstatu hmloviny, rozdiel bol i v predstave o rozľahlosti vesmíru – Kant ho považoval za nekonečný, Lambert za konečný. Spolu s Wrightom sa však všetci traja zhodli v názore, že všetky nebeské telesá vrátane hviezd a komét sú osídlené.

2.3 Filozofia a logika

V svojom hlavnom dvojzväzkovom filozofickom diele *Neues Organon, oder Gedanken über die Erforschung und Bezeichnung des Wahren* (Nový organon alebo myšlienky o skúmaní a označovaní pravdivého), vydanom v Lipsku r. 1764, zreteľne a proklamatívne vychádza z učenia Johna Locka (1632–1704) a Christiana Wolffa (1679–1754), v ktorom ho zaujali najmä princípy racionalizmu, formálneho jazyka, racionálnej dedukcie a formálnej logiky ako základu *teórie poznania*. Charakter diela zjavne naznačujú názvy jeho štyroch častí: Dianiológia (alebo náuka o zákonoch myslenia), Aletiológia (alebo náuka o pravde), Sémantika, resp. semiotika (učenie o význame, resp. o označovaní) a Fenomenológia (náuka o javoch). Najmä v prvej časti je Lambert značne poplatný Wolffovým názorom prezentovaným v jeho základnej práci *Die Logik oder Vernünftige Gedanken von den Kräften des menschlichen Verstandes* (Logika alebo Rozumné myšlienky o schopnostiach ľudského rozumu, 1712), ale Wolffovu koncepciu prekračuje a dopĺňuje vlastnými názormi, ktorých ústrednou ideou je budovanie schopnejšej a účinnejšej metodológie filozofie pomocou matematických a logických prostriedkov. Hoci Lambertovmu dielu chýba väčšia miera filozofickej originality a myšlienkovej prenikavosti, ktorou by bol výraznejšie ovplyvnil pokrok filozofie, predsa zohralo pozitívnu úlohu v propagácii racionalizmu a v posilnení formálnej exaktnosti filozofie. Lambert sa tak zaradil k významným predchodcom nemeckej klasickej filozofie.

Tendencia k štrukturálnej a formálnej matematizácii vedeckého, špeciálne filozofického procesu poznávania a jeho výsledkov je ešte zreteľnejšia v druhom Lambertovom dvojzväzkovom filozofickom diele *Anlage zur Architectonic, oder Theorie des Einfachen und Ersten in der philosophischen und mathematischen Erkenntnis*, publikovanom r. 1771 v Rige. Tu podrobne navrhuje, ako pribudovaní štruktúry poznatkov v určitej vednej oblasti treba vychádzať z pomerne málo rozsiahlej množiny prvotných (primitívnych) pojmov a matematicko-logickými prostriedkami konštruovať systematickú štruktúru pojmov a poznatkov vedy. Samotná idea nie je v histórii vedy nová, prínosom je len myšlienka jej aplikácie na oblasť filozofie, kde aj dnes prezentácia názorov namiesto jasného deklarovania základných premís často vyznieva skôr tak, ako by bolo cieľom tieto premisy čo najdokonalejšie utajiť alebo zahmliť. – Koncepcia axiomaticko-deduktívneho budovania teórie sa špeciálne v matematických disciplínach naplno rozvinula v prvých desaťročiach 20. storočia a dodnes si udržiava status základnej a hlavnej metódy.

2.4 **Matematika** (bez geometrie)

Väčšina matematických výsledkov teoretickej i aplikovanej povahy, ktorými Lambert obohatil matematické poznanie svojej doby, vznikla v čase jeho pôsobenia v Berlínskej akadémii a bola prevažne publikovaná postupne v štyroch knižných zväzkoch *Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung.* K mnohým výsledkom Lambert dospel riešením problémov, z ktorých niektoré v oblasti teórie zamestnávali popredných matematikov už dlhší čas, iné sa náhle objavili v súvislosti s pokrokom v nových, práve sa formujúcich odvetviach, ďalšie sa vynorili ako aktuálne problémy v situáciách súvisiacich s vývojom spoločnosti, s objavením sa nových fenoménov, veštiacich zrod budúcej industriálnej spoločnosti. Matematizácia týchto prevažne značne rozptýlených problémov zákonito nemohla viesť k tvorbe ucelených tematicky vyhranených teórií najmä u Lamberta, ktorému chýbala systematická hlboká a široko koncipovaná príprava vo všetkých základných oblastiach dobovej modernej matematiky. Jeho znalosť teórie a aplikačných možností napr. v matematickej analýze nebolo možné porovnávať s ovládaním tohto predmetu založeným na profesionálnej príprave napr. u Eulera, Lagrangea, Laplacea a ďalších čelných matematikov 18. storočia. No tam, kde k úspechu mohol viesť prenikavý vhľad, alebo v nových oblastiach, kde sa základy teórie rodili riešením konkrétnych problémov, nebol Lambert bez šancí. Jedným z takýchto výsledkov, priraďujúcich sa k špičkovým teoretickým úspechom 18. storočia v matematike, bol Lambertov sofistikovaný dôkaz iracionality čísla π, publikovaný r. 1768. Od r. 1737 bolo na základe Eulerovho dôkazu známe, že číslo $\frac{e-1}{e+1}$ vyjadrené v tvare konvergentného reťazového zlomku

$$\frac{e-1}{e+1} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}}$$

je iracionálne, následkom čoho je iracionálne aj číslo e. Lambert vyjadril hodnotu funkcie tangens v bode x v tvare nekonečného konvergentného reťazového zlomku

$$\operatorname{tg} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \cfrac{x^2}{\cdots}}}}}}$$

Hodnota tohto reťazového zlomku je pre každé prípustné racionálne číslo x iracionálne číslo. Keďže hodnota $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ je racionálne číslo, má to za následok, že číslo $\frac{\pi}{4}$, a tým aj číslo π nemôžu byť racionálne, sú teda iracionálne a nemožno ich vyjadriť, obdobne ako číslo e, konečným zlomkom. Legendrove pochybnosti o korektnosti a úplnej exaktnosti Lambertovho dôkazu bez potvrdenia konvergencie reťazového zlomku pre $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ vyvrátil r. 1898 Alfred Pringsheim (1850–1941).

Pre cyklometrickú funkciu arkustangens bol v Lambertovej dobe známy rozvoj do mocninového radu, objavený Jamesom Gregorym (1638–1675) r. 1671 a zverejnený až r. 1712. Jeho tvar je

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots$$

Použitím Euklidovho algoritmu postupného delenia dostal Lambert r. 1770 z tohto radu reťazový zlomok

$$\operatorname{arctg} x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{4x^2}{5 + \cfrac{9x^2}{7 + \cfrac{16x^2}{9 + \cfrac{25x^2}{\ldots}}}}}}$$

Tento zlomok v porovnaní s radom konverguje podstatne rýchlejšie a pre x = 1 dáva hodnotu $\frac{\pi}{4}$.

Z ďalších Lambertových matematických výsledkov zasluhujúcich si pozornosť hodno spomenúť príspevky k teórii hyperbolických funkcií, ktorým sa začal venovať pod vplyvom Eulerových fundamentálnych výsledkov v tejto oblasti, keď predtým jeho pozornosť viac pútala sférická goniometria. Avšak aj tak priorita v objavení hodnotných výsledkov, ktoré tu Lambert dosiahol, patrí Riccatimu. Lambert kládol dôraz aj na numerickú stránku riešenia problémov, zdokonaľoval aproximačné metódy a zostavil tabuľky. V teórii funkcií komplexnej premennej sa mnohostranne a podobne zaoberal funkciou inverznou k funkcii $f(w) = we^w$ s komplexnou premennou w. Táto funkcia dostala po ňom pomenovanie – nazýva sa *Lambertova funkcia W* alebo *funkcia Ω*. Z praktických problémov sa intenzívne zaoberal presnosťou meraní (najmä geodetických) a práci na teórii chýb sa začal venovať dávno pred Gaussom. Zaujímal sa aj o problematiku demografickej štatistiky a spolu s Eulerom, Johannom Bernoullim a ďalšími matematikmi 18. storočia patrí k zakladateľom tejto disciplíny.

Z rýdzo teoretických Lambertových prínosov hodno ešte spomenúť jeho metódu zisťovania činiteľov prvočíselného rozkladu celého čísla a z významných aplikácií vyjadrenie druhého Newtonovho pohybového zákona prostriedkami diferenciálneho počtu.

3 Prínos k rozvoju geometrie

3.1 Kartografické zobrazenia

Matematická kartografia od prvých explicitne formulovaných problémov a prvých exaktných výsledkov ich riešenia G. Mercatorom (1512–1594) v prvej polovici 16. storočia sústavne priťahovala pozornosť špecializovaných odborníkov i matematikov, pre ktorých kartografia bola vďačným a neobvykle rozsiahlym poľom plodných aplikácií. Základné geometrické princípy zobrazovania guľovej plochy ako matematického modelu zemského povrchu do roviny – z ktorých niektoré boli známe už v antike – sa vykryštalizovali v začiatkoch matematického novoveku na tri hlavné geometrické metódy založené na *geometrickom premietaní* a klasifikované podľa druhu plochy, na ktorú sa guľová plocha premietala. Tieto tri hlavné skupiny kartografických zobrazení tvorili projekcie *valcové* (cylindrické), *kužeľové* (kónické) a *azimutálne*. Plochy, na ktoré sa guľová plocha, opatrená geografickou sieťou rovnobežiek a poludníkov, spravidla zo svojho stredu premietala, boli v týchto druhoch projekcií *rotačná valcová plocha*, resp. *rotačná kužeľová plocha*, resp. *rovina*, a rovinné zobrazenie – *mapa* – sa pri nerovinných priemetných plochách (priemetňach) získavalo následným *rozvinutím* týchto plôch do roviny, čo je umožnené faktom, že valcová aj kužeľová plocha sú *rozvinuteľné plochy*. Rotačná valcová plocha bola pri týchto zobrazeniach buď opísaná guľovej ploche pozdĺž rovníkovej kružnice, alebo obsahovala dve zhodné rovnobežky tej istej severnej a južnej zemepisnej šírky. Rotačná kužeľová plocha bola buď opísaná guľovej ploche pozdĺž niektorej rovnobežky rôznej od rovníka, alebo prechádzala dvoma rovnobežkovými kružnicami rôznych zemepisných šírok spravidla na tej istej, t. j. buď severnej alebo južnej polguli. Pri azimutálnom zobrazení priemetňou bola spravidla dotyková rovina guľovej plochy v nejakom bode významnom vzhľadom na ďalšie požiadavky na zobrazenie; dotykovým bodom mohol byť veľmi často niektorý pól alebo vhodný bod rovníka.

Ďalšie úpravy uvedených základných geometrických metód vyplývali z doplňujúcich požiadaviek, ktoré malo konkrétne kartografické zobrazenie spĺňať. Napr. určujúcim faktorom Mercatorovho zobrazenia je podmienka, aby obrazom *loxodrómy*, t. j. čiary guľovej plochy pretínajúcej všetky poludníky pod zhodnými uhlami, bola *priamka*, resp. *úsečka*. Túto podmienku spĺňa projekcia zo stredu guľovej plochy opatrenej sieťou rovnobežiek a poludníkov na rotačnú valcovú plochu opísanú guľovej ploche pozdĺž rovníkovej kružnice. Následné rozvinutie valcovej plochy do roviny dáva mapu, ktorá spĺňa uvedenú podmienku.

V čase Lambertovho pôsobenia boli už rozpracované elementárne metódy, ktorými sa dali realizovať tieto požiadavky na kartografické zobrazenia:

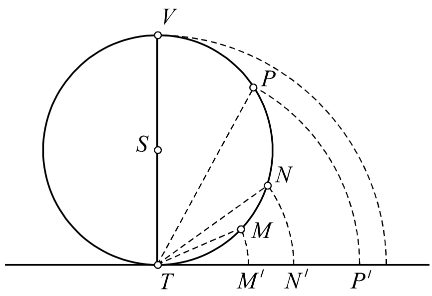
- aby sa *rovnali dĺžky* obrazov úsečiek alebo oblúkov kriviek zemského povrchu, ktorých dĺžky sa rovnajú (*ekvidištantnosť*)
- aby boli zhodné uhly obrazov dvojíc čiar zemského povrchu s uhlami týchto dvojíc na zemskom povrchu (*konformnosť, ekviformnosť*)
- aby sa *pomer obsahov* dvojíc oblastí zemského povrchu rovnal pomeru obsahov ich obrazov na mape (*ekvivalentnosť*; výstižnejší, hoci nie celkom korektný by bol názov *ekviareálnosť*)

Exaktná matematická realizácia týchto požiadaviek sa dosahuje diferenciálnogeometrickými prostriedkami pomocou *prvej* (*diferenciálnej*) *kvadratickej formy* plochy. Za Lambertovho života diferenciálna geometria ešte neexistovala ako samostatná matematická disciplína a k dosiahnutiu relevantných výsledkov v teórii plôch chýbalo ešte niekoľko desaťročí historického vývoja, ktorý v 19. storočí náležito hlboko osvetlil podstatu možností realizácie uvedených požiadaviek. Prvú z podmienok – ekvidištantnosť – možno dosiahnuť iba takým zobrazením plôch, ktoré je *izometrické*, čo je v jazyku diferenciálnej geometrie ekvivalentné s rovnosťou prvých kvadratických foriem plôch. Pretože v prípade zobrazenia zemského povrchu na mape rovnosť dĺžok reálnych čiar a ich obrazov neprichádza do úvahy, išlo by aj v prípade ekvidištantnosti o *kváziizometriu*, t. j. o zloženie izometrického zobrazenia guľovej plochy do roviny s podobnostným zobrazením v rovine. Globálne je však vylúčená aj táto možnosť, pretože pre guľovú plochu ako nerozvinuteľnú plochu neexistuje izometrické zobrazenie na rovinu. Nie sú však apriórne vylúčené zobrazenia, ktoré *lokálne aproximatívne* zobrazujú určitú oblasť guľovej plochy na určitú oblasť roviny ekvidištantne. Ten istý problém sa týka aj *konformného* kartografického zobrazenia, pretože veľkosť uhla dvoch čiar na ploche je esenciálne spätý s prvou kvadratickou formou plochy , čo zase pripúšťa len možnosť *lokálne konformného* zobrazenia zemského povrchu do roviny. A ten istý výsledok sa vzťahuje aj na problematiku zachovania pomerov obsahov dvoch oblastí plochy, pretože obsah plošného elementu je závislý od lokálnych hodnôt koeficientov prvej kvadratickej formy plochy.

Z celého radu kartografických zobrazení navrhnutých a vypracovaných Lambertom najvýraznejšie charakterizujú jeho kartografickú tvorbu nasledujúce tri druhy zobrazení.

Azimutálne zobrazenie zachovávajúce pomer obsahov

Rovinou obrazov je dotyková rovina guľovej plochy so sieťou rovnobežiek a poludníkov; dotykovým bodom roviny s guľovou plochou môže byť ktorýkoľvek bod zemepisnej siete na guľovej ploche. Obrazy jednotlivých bodov guľovej plochy v rovine obrazov sa konštruujú nasledovne (obr. 2):

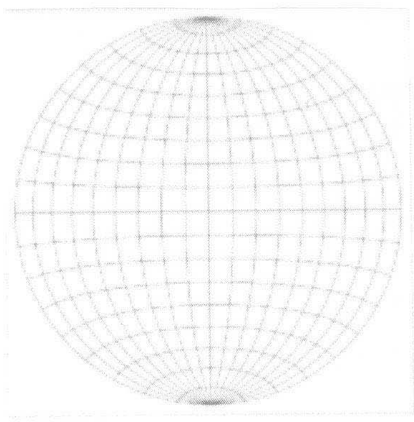


Obr. 2

Nech T je dotykový bod roviny obrazov v s guľovou plochou a nech V je bod guľovej plochy diametrálne združený s bodom T; nech S je stred guľovej plochy. Ak P je bod guľovej plochy, ktorý treba zobraziť, použije sa rez guľovej plochy rovinou PST; rezom guľovej plochy s touto rovinou je hlavná kružnica m_P guľovej plochy obsahujúca body T, V, P. Priesečnicou roviny TVP s rovinou obrazov v je priamka p. Obraz bodu P – označený písmenom $P´$ – je druhý krajný bod úsečky, ktorá (a) má jeden krajný bod v bode T, (b) leží na priamke p v polrovine s hraničnou priamkou TV a vnútorným bodom P a (c) úsečka $TP´$ je zhodná s úsečkou TP. Bod V z dôvodu nejednoznačnosti svojho obrazu pri použití rôznych rovín obsahujúcich priamku TV nemá definovaný obraz.

Obr. 3

Ak je bodom T napr. severný pól zemepisnej siete, obrazmi poludníkov v rovine v sú polpriamky zväzku so stredom v bode T a obrazmi rovnobežiek sú sústredné kružnice so stredom v bode T, pričom suprémom dĺžok polomerov týchto kružníc je dĺžka priemeru guľovej plochy (obr. 3). Pri inej voľbe dotykového bodu T a ponechaní pôvodnej zemepisnej siete sa obraz poludníkov a rovnobežiek značne zmení. Príklad takého špeciálneho obrazu zemepisnej siete je Schmidtova sieť na obr. 4.

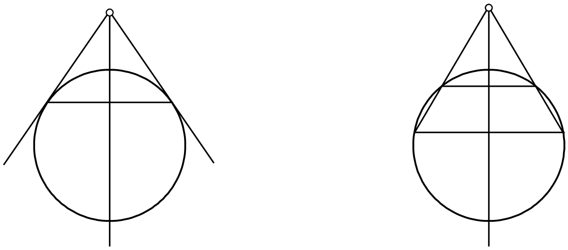


Obr. 4

Kužeľové konformné zobrazenie

Plochou, na ktorú sa premieta guľová plocha s geografickou sieťou rovnobežiek a poludníkov, je rotačná kužeľová polplocha, ktorej osou je os guľového modelu Zeme,

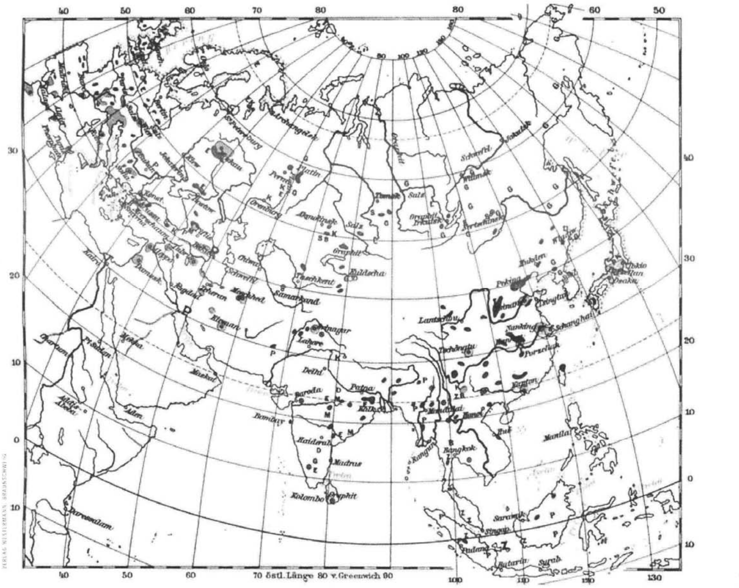
t. j. zemská os ako spojnica severného a južného pólu geografickej siete hraničnej guľovej plochy a a) buď sa dotýka guľovej plochy v rovnobežke rôznej od rovníka (obr. 5a), b) buď obsahuje dve rovnobežky rôznej zemepisnej šírky na tej istej polguli, t. j. obe buď na severnej, buď na južnej polguli (obr. 5b). Rovnobežky zemepisnej siete na guľovej ploche, ktoré ležia na priemetnej kužeľovej polploche, sa nazývajú *štandardné*, zvolený pevný meridián s konkrétnou zemepisnou dĺžkou sa nazýva *centrálny*. Premietacie útvary poludníkov zo stredu guľovej plochy sú polroviny, ktoré pretínajú priemetnú kužeľovú polplochu v tvoriacich polpriamkach, premietacie útvary rovnobežiek siete na guľovej ploche zo stredu guľovej plochy sú rotačné kužeľové plochy, súosové s priemetnou kužeľovou polplochou a pretínajúce ju v kružniciach. Po rozvinutí priemetnej kužeľovej polplochy do roviny kartografickú sieť tvoria hraničné a vnútorné polpriamky uhla ako obrazy poludníkov a sústredné kružnicové oblúky ohraničené ramenami uhla so stredom vo vrchole uhla, ktorý je obrazom jedného pólu, ako obrazy rovnobežiek.



Obr. 5a, b

Obr. 6

Jednoduché kužeľové zobrazenie poskytuje *prijateľnú konformnosť* len v istom okolí obrazu štandardnej rovnobežky (štandardných rovnobežiek). Čiastočná eliminácia uhlového skreslenia pre oblasti relatívne vzdialené od štandardnej rovnobežky kužeľového zobrazenia vyžaduje rôzne úpravy numerickej povahy, ktorých priehľadný súbor navrhol už sám Lambert r. 1772. Jedna z takých úprav, implicitne obsiahnutá vo všeobecnom postupe navrhnutom Lambertom, bola konkretizovaná Lagrangeom; nazýva sa podľa neho „Lagrangeovou“ projekciou a dáva ako konečný výsledok „Lagrangeovu“ mapu (obr. 6). Na obr. 7 je v upravenej Lambertovej kužeľovej projekcii zobrazená rozsiahla časť území severnej zemskej polgule.



Obr. 7

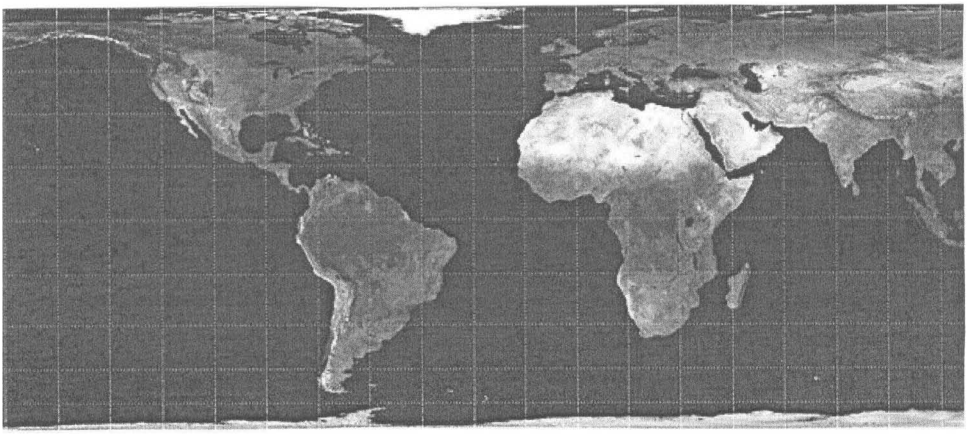
Valcové zobrazenie zachovávajúce pomer obsahov

Priemetnou plochou tohto zobrazenia je *rotačná valcová plocha*, ktorej určujúcou kružnicou je rovnobežková kružnica geografickej siete na referenčnej guľovej ploche Zeme so zemepisnou šírkou φ_0 a ktorej osou je zemská os. Priemetmi poludníkov zo stredu guľovej plochy na valcovú plochu sú tvoriace priamky valcovej plochy, priemetmi rovnobežiek na valcovú plochu sú kružnice zhodné so štandardnou rovnobežkou v rovinách rovnobežných s rovinou štandardnej rovnobežky. Po rozvinutí valcovej plochy do roviny tvoria kartografickú sieť všetky rovnobežné priamky rovinného pásu, ktorého šírka sa rovná dĺžke štandardnej rovnobežky, ako obrazy poludníkov, a úsečky kolmé na osnovu týchto priamok s krajnými bodmi na hraničných priamkach uvedeného rovinného pásu ako obrazy rovnobežiek. Ak sa priesečník obrazu centrálneho poludníka so zemepisnou dĺžkou λ_0 a obrazu štandardnej rovnobežky so zemepisnou šírkou φ_0 vezme za začiatok O pravouhlej karteziánskej sústavy súradníc, súradnicová os x sa vezme z osnovy obrazov rovnobežiek a súradnicová os y z osnovy obrazov poludníkov, bod zemského povrchu so zemepisnou dĺžkou λ a so zemepisnou šírkou φ má v karteziánskej sústave súradníc súradnice

$$x = (\lambda - \lambda_0).\cos \varphi_0$$
$$y = \sin \varphi / \cos \varphi_0$$

za predpokladu, že polomer guľovej plochy má dĺžku 1.

Na obr. 8 je znázornený povrch Zeme v Lambertovej valcovej projekcii; štandardnou rovnobežkou je rovník.



Obr. 8

Aj dnes, keď existujú veľké počty matematicky sofistikovaných kartografických zobrazení, si niektoré Lambertove zobrazenia zachovávajú dôležité postavenie v tvorbe máp rôznych špeciálnych určení.

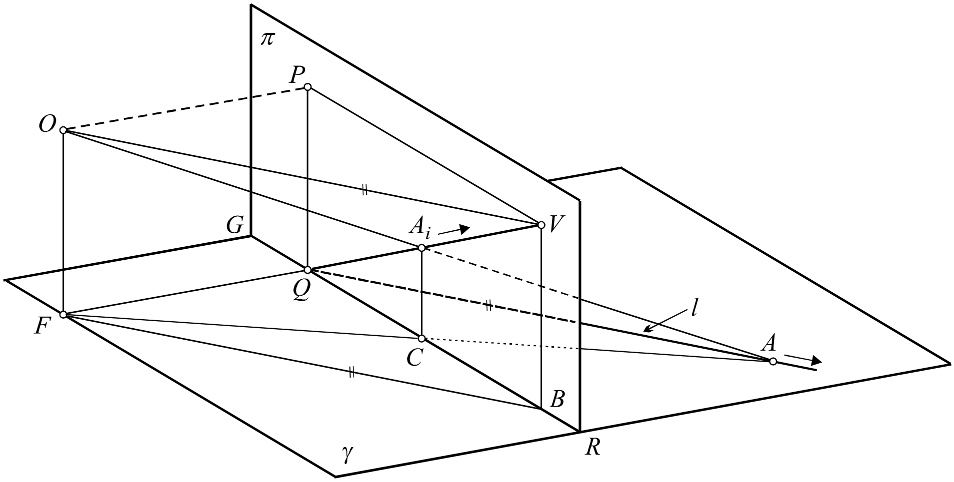
3.2 Lineárna perspektíva

Jediné, zato na svoju dobu impozantné dielo o lineárnej perspektíve vyšlo Lambertovi r. 1759 vo vydavateľstve Heidegger a spol. v Zürichu vo francúzštine pod názvom *La perspective affranchie de l´embaras du Plan géometral* (Perspektíva oslobodená od záťaže geometrického plánu) a r. 1774 vo vydavateľstve Drell, Gessner, Füsslin a spol. v Zürichu v nemčine pod názvom *J. H. Lamberts freye Perspective, oder Anweisung, jeden perspectivischen Afriss von freyen Stücken und ohne Grundriss zu verfertigen* (Voľná perspektíva J. H. Lamberta, alebo návod ako každý perspektívny nárys zhotoviť z voľných častí a bez pôdorysu). Nemecká verzia je označená ako *druhé vydanie rozšírené o poznámky a doplnky*. Podľa H. Wieleitnera ([2]) objem poznámok a doplnkov sa temer vyrovnáva rozsahu knihy, ktorá má vo francúzskom vydaní 192 strán odborného textu formátu približne B6.

Zobrazovaciu metódu použitú Lambertom v uvedenej publikácii možno označiť skôr za stredové premietanie než za lineárnu perspektívu, pretože Lambert pre ňu udáva zorný uhol veľkosti 90°, zatiaľ čo novšie a odborne kompetentnejšie pramene 19.–20. storočia uvádzajú pre lineárnu perspektívu zorný uhol veľkosti 40°–50°. Inak Lambert pracuje už s mnohými základnými pojmami, ktoré sú od jeho čias trvalou súčasťou pojmovej výbavy lineárnej perspektívy a dokonca aj terminológia týchto pojmov je stabilná (oko, základná rovina, výška oka, zvislá rovina, dištancia, hlavný bod, základnica, horizontála).

V jeho dikcii chýbajú názvy nevlastný alebo ideálny bod, úbežník, úbežnica, čo je pochopiteľné vzhľadom na skutočnosť, že prvá normatívna monografia projektívnej geometrie od J. V. Ponceleta bola publikovaná až r. 1822 a dobou teoretického rozkvetu teórie zobrazovacích metód deskriptívnej geometrie vrátane lineárnej perspektívy je druhá polovica 19. storočia. Nevlastný bod priamky Lambert nazýva jednoducho nekonečne vzdialený bod, čím implicitne potvrdzuje, že operačným priestorom jeho zobrazovacej metódy je rozšírený euklidovský priestor – bez explicitnej existencie tohto pojmu, ktorý je produktom vývoja geometrie v 19. storočí – so všetkými pojmami a vlastnosťami polohy a (euklidovskej) metriky.

„Oslobodenie od záťaže geometrického plánu“, t. j. od pôdorysu objektov – ako je explicitne uvedené v kompletnom nemeckom názve Lambertovho diela – dosahuje Lambert hlavne konštrukciou *úbežníkov* osnov priamok v základnej, a tým aj v *horizontálnej* rovine (obr. 9), čím získava na horizontále akýsi *„uhlomer“* pre všetky osnovy priamok základnej, resp. horizontálnej roviny, zvierajúcich so základnicou, resp. s horizontálou uhly s veľkosťou z intervalu [0°, 180°].



Obr. 9

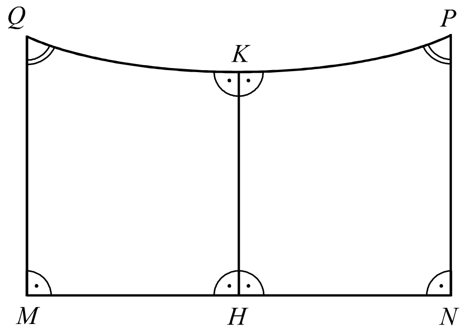
Prvé štyri kapitoly z ôsmich kapitol knihy sú venované riešeniu mnohých úloh polohového i metrického charakteru o objektoch základnej roviny a zvislých rovín. Teoreticky seriózne a matematicky podložené metódy vyúsťujú do zobrazenia obvyklých technických objektov (budovy a ich časti, dekoratívne prvky a stavby ap.), čím sa potvrdzuje pôvodný Lambertov zámer poskytnúť *praktikom* použiteľné metódy rysovania obrazov v lineárnej perspektíve prostriedkami, ktoré sú v porovnaní s predchádzajúcim stavom technického *„kreslenia“* jednoduchšie, prehľadnejšie a efektívnejšie. Napriek tomuto základnému cieľu vizuálne i obsahovo dominuje v Lambertovej knihe tendencia k teoretickej exaktnosti.

Nasledujúce dve kapitoly knihy zvýrazňujú jej faktický status učebnice *stredového premietania*, hoci tento jej cieľ nikde nebol – a historicky ani nemohol byť – proklamovaný. Riešenie polohových a metrických úloh v *ľubovoľnej rovine* za použitia jej stopy a úbežnice – bez zavedenia a používania týchto *termínov* – anticipuje budúce teórie stredového premietania ako exaktnej zobrazovacej metódy v 19. storočí. Do úplnosti systému u Lamberta kde-čo − aj podstatné – chýba: nie sú riešené napr. úlohy založené na kolmosti priamky a roviny, explicitne sa nenastoľuje ani téma kolmosti ľubovoľných dvoch priamok, hoci implicitne je už obsiahnutá v komplexe úloh o ľubovoľnej rovine. Napriek tomu formulácia a riešenie problematiky zobrazovania ľubovoľnej roviny bola inšpirujúca pre niekoľkých Lambertových nasledovníkov. S tematikou stredového premietania je spätá obšírna séria „*inverzných*" úloh ôsmej kapitoly, v ktorých na základe vlastností obrazov daných objektov treba dospieť k určujúcim prvkom stredového premietania (perspektívy).

V siedmej kapitole sa Lambert zaoberá *ortografickou projekciou*, čo je pravouhlé premietanie na jednu priemetňu, ako špeciálnym prípadom perspektívy (= stredového premietania), v ktorom stred premietania (oko) je „nekonečne vzdialený". Na jednej strane tu rušivo pôsobí nediferencovanie medzi polohovými a metrickými záležitosťami – pochopiteľné pri neexistencii projektívnej geometrie, na druhej strane je zjavné – napriek všetkej poplatnosti spôsobu myslenia a vyjadrovania v kategóriách perspektívy – smerovanie k exaktnému budovaniu zobrazovacej metódy, ktorú o niekoľko desaťročí neskôr Monge použil ako základ v svojej zobrazovacej metóde ohlasujúcej zrod novej matematickej disciplíny – deskriptívnej geometrie.

3.3 Neeuklidovská geometria

18. storočie sa rozhodujúcim spôsobom priblížilo k vyriešeniu vyše dvetisícročného tzv. *problému rovnobežiek*, ktorého podstata spočívala v otázke, či piaty Euklidov postulát – nazývaný neskôr v histórii aj postulátom o rovnobežkách – je výrok nezávislý od ostatných štyroch postulátov prvej knihy Euklidových *Základov*. Dvetisícročná história problému rovnobežiek sa niesla prevažne v znamení pokusov dokázať piaty postulát ako logický dôsledok predchádzajúcich štyroch postulátov a nejakých ďalších „*nespochybniteľných*" faktov geometrie. Veľkú skupinu týchto „dôkazov" tvorili pokusy, v ktorých bol často použitý nenápadný a „samozrejmý" predpoklad ekvivalentný s piatym Euklidovým postulátom. Analýzu okolo tridsiatich takýchto dôkazov urobil r. 1763 vo svojej dizertácii *Conatuum precipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio* (Prehľad najvýznamnejších pokusov dokázať teóriu rovnobežiek) *Georg Simon Klügel* (1739–1812), žiak profesora göttingenskej univerzity *Abrahama Gotthelfa Kästnera* (1719–1800). V analýze pokusov bola o. i. aj neveľmi informatívna pasáž o príspevku *Giovanniho Girolama Saccheriho* (1667–1733) k riešeniu problému rovnobežiek. Saccheriho práca vyšla r. 1733 pod názvom *Euclides ab omni naevo vindicatus, sive conatus geometricus, quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia* (Euklides očistený od všetkých škvŕn, čiže geometrický pokus, ktorým sa ustanovujú celkom prvé základy celej geometrie); predstavuje jeden z najvýznamnejších krokov na ceste k zrodu neeuklidovskej geometrie. Podstatná časť Saccheriho práce týkajúca sa potenciálnych neeuklidovských záverov je spätá so štúdiom tzv. Saccheriho štvoruholníka $MNPQ$ s pravými uhlami pri vrcholoch M, N a zhodnými stranami NP, MQ (obr. 10).



Obr. 10

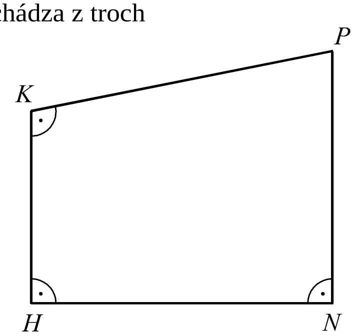
Presne taký štvoruholník študoval v 11.–12. storočí arabský matematik, astronóm, filozof a básnik *Omar Chajjám* (1048–1131) (a po ňom ďalší vynikajúci arabský matematik a astronóm Nasir ad-Din at-Túsí (1201–1274)) a boli mu známe aj niektoré závery, ku ktorým dospel Saccheri. Je preto namieste nazývať tento štvoruholník *Chajjámovým-Saccheriho štvoruholníkom.* Dve základné vlastnosti Chajjámovho-Saccheriho štvoruholníka sú: 1. Spojnica stredov H, resp. K strany MN, resp. PQ je kolmá na obe strany a je osou súmernosti štvoruholníka; 2. Uhly pri vrcholoch P, Q sú zhodné. – Tieto vlastnosti platia v absolútnej geometrii. – Saccheri preskúmal všetky tri apriorné možnosti usporiadania uhlov pri vrcholoch P, Q vo vzťahu k pravému uhlu. Predpoklad, že uhly pri vrcholoch P a Q sú tupé, je v absolútnej geometrii nesplniteľný. Predpoklad, že uhly sú pravé, je ekvivalentný s platnosťou piateho Euklidovho postulátu. Predpoklad, že uhly sú ostré, vedie k vlastnostiam roviny z euklidovského pohľadu, ktorý bol za Saccheriho života (a nielen vtedy) všeobecne rozšírený, paradoxným a absurdným. Každá rovina je homogénna vzhľadom na kvalitu Chajjámovho-Saccheriho štvoruholníka, t. j. predpoklad, že uhly pri vrcholoch P, Q sú pravé (ostré) v jednom Chajjámovom-Saccheriho štvoruholníku, má za následok platnosť tejto vlastnosti pre všetky Chajjámove-Saccheriho štvoruholníky v danej rovine. Z prekvapivých výsledkov, ktoré Saccherimu logicky vyplynuli z predpokladu o ostrom uhle v štvoruholníku, sú pozoruhodné – okrem početných ďalších – tieto:

1. Ekvidištanta priamky nie je priamka.
2. Dve rôzne priamky sú buď rôznobežné, buď majú spoločnú kolmicu a v oboch polrovinách s hraničnou priamkou v nej sa body jednej priamky od druhej priamky neohraničene vzďaľujú, alebo pri súhlasnej orientácii priamok sa jedným smerom neohraničene približujú a opačným smerom sa neohraničene vzďaľujú, pričom v tom prípade priamky nemajú ani spoločný bod, ani spoločnú kolmicu.
3. Kolmica z bodu ramena ostrého uhla na druhé rameno od istého bodu druhé rameno nepretína.

S podobnými „prekvapeniami“ sa pri štúdiu problému rovnobežiek stretol aj Lambert, ktorý sa tomuto problému začal hlbšie venovať zrejme pod vplyvom Klügelovej dizertácie. Výsledkom jeho bádaní bol útly nepublikovaný spis *Theorie der Parallellinien* (Teória rovnobežiek), dokončený r. 1766, objavený v Lambertovej pozostalosti Johannom Bernoullim ml. (vnuk Johanna Bernoulliho I) a publikovaný r. 1786 v časopise Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik.

V prvej časti spisu Lambert vyjasňuje podstatu dôkazov postulátu o rovnobežkách. Prízvukuje, že úlohou dôkazov nie je nahradiť postulát ekvivalentným tvrdením alebo použiť také tvrdenie ako argument dôkazu, ale dokázať postulát len za pomoci ostatných postulátov skupiny. V druhej časti práce Lambert poukazuje na nedostatky niektorých „dôkazov“, analyzujúc niť dôkazov až do štádia, keď zostáva dokázať *nepatrnú maličkosť*, o ktorej sa starostlivým rozborom ukáže, že obsahuje ako argument dokazované tvrdenie alebo tvrdenie s ním ekvivalentné.

Podstatný prínos pre teóriu rovnobežiek znamená tretia časť Lambertovej práce, v ktorej východiskovým objektom štúdia je štvoruholník *HNPK* s tromi pravými uhlami, a to pri vrcholoch *H, N, K* (obr. 11). Tento štvoruholník sa nazýva Lambertov, hoci jeho korektnejšie pomenovanie je *Hajthamov-Lambertov štvoruholník*; skúmal ho už v 10. – 11. storočí arabský matematik a fyzik Abu Ali al-Hasan ibn al-Hasan ibn al-Hajtham (asi 965–1039), známy už v stredovekej Európe pod menom Alhazen. Ako je zjavné, Hajthamov-Lambertov štvoruholník je „polovicou“ Chajjámovho-Saccheriho štvoruholníka. Lambertove úvahy o štvoruholníku *HNPK* sú obdobné ako úvahy Saccheriho. Aj Lambert vychádza z troch



Obr. 11

možností – hypotéz o vzťahu uhla pri vrchole *P* k pravému uhlu. Najprv ukazuje homogenitu roviny vzhľadom na každú z hypotéz. Potom vyraďuje hypotézu tupého uhla ako nerealizovateľnú. Hypotézu pravého uhla zisťuje ako ekvivalentnú s Euklidovým postulátom rovnobežnosti. Hypotézu ostrého uhla preberá podrobne a ako logické dedukcie z nej dostáva celý rad neočakávaných výsledkov. Tu sú niektoré z nich:

1. *Súčet všetkých vnútorných uhlov v každom trojuholníku je menší než priamy uhol.*
2. *Súčet všetkých vnútorných uhlov vo všetkých trojuholníkoch nie je konštantný.*
   Konštantnosť tohto súčtu má za následok, že tento súčet je zhodný s priamym uhlom, čo je ekvivalentné s Euklidovým postulátom rovnobežnosti.
3. Ak označíme súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov v trojuholníku mierou $\pi - \delta$, kde $\delta > 0$ je veľkosť uhla v oblúkovej miere, číslo δ sa nazýva *uhlovým defektom* (alebo jednoducho *defektom*) trojuholníka.
   Obsah trojuholníka je úmerný jeho uhlovému defektu.
4. *Obsah trojuholníka je zhora ohraničený.*
   Ak má trojuholník s uhlovým defektom δ obsah S, horné ohraničenie obsahov všetkých trojuholníkov má hodnotu $S.\dfrac{2\pi}{\delta}$.
   Dôsledok. Predpoklad, že obsahy trojuholníkov nemajú horné ohraničenie, je ekvivalentný s Euklidovým postulátom rovnobežnosti.

5. *Existuje absolútna jednotka dĺžkovej miery.*
   Nemožno zvoliť za jednotku dĺžky ľubovoľnú úsečku.
6. *Neexistuje podobnosť.*
   Každé dva trojuholníky, ktoré majú po dvojiciach zhodné všetky tri vnútorné uhly, sú zhodné.
   Dôsledok. Existencia podobnosti, ktorá nie je zhodnosťou, je ekvivalentná s Euklidovým postulátom o rovnobežnosti.
7. *Neexistujú jednoznačné hodnoty goniometrických funkcií veľkosti uhla.*
   Platnosť tohto tvrdenia sa ozrejmuje faktom, že hodnoty goniometrických funkcií sú v euklidovskej rovine geometricky definované na báze podobnosti pravouhlých trojuholníkov, ktoré majú zhodný jeden ostrý uhol. Potom majú všetky takéto trojuholníky zhodný aj druhý ostrý uhol, súčet veľkostí dvoch ostrých uhlov v každom pravouhlom trojuholníku má v oblúkovej miere hodnotu $\frac{\pi}{2}$ a na týchto faktoch sú v euklidovskej rovine založené definície goniometrických funkcií, vzťahy kofunkcií atď.

V rovine s platnosťou hypotézy ostrého uhla v Hajthamovom-Lambertovom štvoruholníku nedáva existencia pravého uhla v trojuholníku žiaden rezolútny výsledok pre súčet veľkostí ostatných dvoch vnútorných (ostrých) uhlov trojuholníka, čiže pri pevnej hodnote veľkosti jedného z nich môže veľkosť druhého nadobúdať ľubovoľné hodnoty z istého intervalu, čím sa mení pomer veľkostí uhlov, a tým aj pomer veľkostí strán, čo znemožňuje definíciu goniometrickej funkcie veľkosti uhla analogickým spôsobom ako v euklidovskej rovine. Tento fakt Lambert charakterizuje slovami, že „goniometrické tabuľky by boli nekonečne rozľahlé“.

Logickú krásu dôsledkov hypotézy ostrého uhla Lambert hodnotí ako „… niečo úchvatné, čo dokonca vyvoláva želanie, aby tretia hypotéza (t. j. hypotéza ostrého uhla) bola pravdivá. Ale aj tak by som si želal, napriek tej prednosti (Má na mysli existenciu absolútnej jednotky dĺžky), aby to tak nebolo, lebo by to bolo spojené s celým radom iných nevýhod.“ Pod nevýhodami má na mysli absenciu podobnosti a úmernosti, nejednoznačnosť goniometrických funkcií, nemožnosť vyjadrenia metrických vlastností geometrických objektov inak než v absolútnej miere, enormné ťažkosti v astronómii atď. To všetko viedlo Lamberta k rozhodnutiu napriek sile opačných logických argumentov odmietnuť hypotézu ostrého uhla, čím zároveň priznáva, podobne ako jeho súčasníci Kästner a Klügel, že pokusy dokázať piaty Euklidov postulát nepriniesli nijaký rozumný výsledok.

Hodnotu Lambertových výskumov v teórii rovnobežiek náležito ocenila retrospektívne až história neeuklidovskej geometrie konštatovaním, že Lambertove dôsledky hypotézy ostrého uhla v Hajthamovom-Lambertovom štvoruholníku predstavujú kardinálne tvrdenia Lobačevského-Bolyaiovej (hyperbolickej) neeuklidovskej geometrie. V svetle tohto hodnotenia je Lambert spolu so Saccherim považovaný za jedného z najvýznamnejších priamych predchodcov budovania neeuklidovskej geometrie.

4 Záver

Osobnosť Johanna Heinricha Lamberta sa v histórii matematiky 18. storočia vyníma ako príklad originálneho mysliteľa, ktorý sa vlastným talentom, pracovitosťou a nevšedným samovzdelávacím úsilím začlenil medzi kliesniteľov pokroku matematiky najmä v tých oblastiach teórie a aplikácií, v ktorých mu jeho dokonalé ovládanie elementárnych metód a prostriedkov umožňovalo dosahovať originálne a progresívne riešenia. O jeho význame pre rozvoj niektorých odborov nerozhodoval tak počet a rozsah výsledkov ako hĺbka a závažnosť jeho objavov a ich rola vo formovaní nových smerov a progresívnych tendencií vo vývoji matematiky. Najvýstižnejším zakončením tohto príspevku k portrétu veľkej osobnosti matematiky 18. storočia nech sú slová, ktoré na Lambertovu adresu na margo jeho pôsobenie v Bavorskej akadémii vied napísal pri príležitosti 200. výročia založenia tejto akadémie Georg Faber (1877–1866), výskumník histórie tejto inštitúcie:

„Lambert bol z líca i z rubu pravým obrazom učenca 18. storočia, ktorý písal všetko možné o bohu a o svete, ale nikdy neprednášal spoza katedry. Medzi okolo 2 500 členmi, ktorých mala (mníchovská) akadémia počas dvesto rokov svojho trvania, niet iného jemu rovného.“

Literatúra

[1] Kagan V. F.: *Osnovanija geometrii I.* Gosudarstvennoje izdateľstvo techniko-teoretičeskoj literatury, Moskva, Leningrad, 1949.

[2] Vilejtner G.: *Istorija matematiki ot Dekarta do poloviny XIX stoletija.* Gosudarstvennoje izdateľstvo fiziko-matematičeskoj literatury, Moskva, 1960.

[3] Rozenfeľd B. A.: *Istorija nejevklidovoj geometrii.* Izdateľstvo Nauka, Moskva, 1976.

[4] Lambert J. H.: *La perspective affranchie de l´embaras du Plan géometral.* Heidegguer et comp., Zürich, 1759.

[5] Kadeřávek F, Klíma J., Kounovský J.: *Deskriptivní geometrie I.* Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1954.

[6] Boyer C. B.: *A history of mathematics.* John Wiley and sons, inc. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 1991.

[7] Gottwald S., Ilgauds, H.-J., Schlote, K.-H.: *Lexikon bedeutender Mathematike.* Verlag Harri Deutsch, Thun-Frankfurt (M.), 1990.

[8] MacTutor Biographies: *Johann Heinrich Lambert.* © jún 2004. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland. [prevz. 13. 5. 2008]

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Lambert.html.

[9] *Johann Heinrich Lambert*. [prevz. 1. 7. 2008]

http://seds.org/~spider/spider/Misc/lambert.html.

[contact] Hartmut Frommert, [SEDS].

[10] Wikipedia (Die freie Enzyklopädie): Lambertsches Gesetz [online]. Posledná revízia 27. 4. 2008 [prevz. 20. 5. 2008].

http://de.wikipedia.org/wiki/Lambertsches Gesetz.

[11] Wikipedia (The free Encyclopedia): Lambert´s cosine law [online]. Posledná revízia 3. februára 2008 [prevz. 20. 5. 2008].

http://en.wikipedia.org/wiki/Lambert%27s _cosine _law.

[12] Wikipedia (Die freie Enzyklopädie): *Lambert-Beersches Gesetz* [online]. Posledná revízia 17. mája 2008 [prevz. 20. 5. 2008].

http://de. wikipedia.org/wiki/Lambert-Beersches_Gesetz.

[13] Wikipedia (The free encyclopedia): *Lambert W function* [online]. Posledná revízia 16. apríla 2008 [prevz. 13. 5. 2008].

http://en. wikipedia.org/wiki/Lambert%27_W_function.

[14] Wikipedia (The free encyclopedia): *Lambert azimuthal equal-area projection.* Posledná revízia 1. mája 2008 [prevz. 27. 6. 2008].

http://en. wikipedia.org/wiki/Lambert_azimuthal_equal_area_projection.

[15] Wikipedia (The free encyclopedia): *Lambert conformal conic projection* [online]. Posledná revízia 9. apríla 2008 [prevz. 27. 6. 2008].

http://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_conformal_conic_projection.

[16] Wikipedia (The free encyclopedia): *Lambert cylindrical equal-area projection* [online]. Posledná revízia 13. februára 2008 [prevz. 13. 5. 2008].

http://en.wikipedia.org/wiki/ Lambert_cylindrical_equal-area_projection.

[17] Furuti C. A.: *Conformal projections*. Posledná revízia 3. marca 2008 [prevz. 30. 6. 2008].
http://www.progonos.com/furuti/MapProj/Normal/ProjConf/projConf.html.

[18] *Map projections*.

http://www.quadibloc.com/maps/mapint.htm.

[19] Treinish L. A.: *Cartographic projections.*

http:// opendx.npaci.edu/cds/proceedings96/cart/cart.html.

[20] Wiersma O. B.: *Perspective seen from different points of view*. Posledná revízia 10. septembra 2007 [prevz. 13. 5. 2008].

http“//www.ottowb.dds.nl/filosofie/perspect.html.

Adresy

Prof. RNDr. Ján Čižmár, PhD.
Katedra matematiky a informatiky
Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita
Priemyselná ul. č. 4
P.O. BOX 9
918 43 Trnava
Slovenská republika
e-mail: *jan.cizmar@truni.sk*
cizmar@fmph.uniba.sk

RNDr. Zita Sklenáriková, PhD.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
Slovenská republika
e-mail: *sklenarikova@fmph.uniba.sk*

DOKONALÉ ČÍSLA

NAJSTARŠÍ OTVORENÝ PROBLÉM MATEMATIKY

ŠTEFAN PORUBSKÝ[1]

O prvočíslach a dokonalých číslach môžu deti klásť otázky, na ktoré dospelí len ťažko odpovedia. (P. Erdős)

Ako úvod do štúdia matematiky je elementárna teória čísiel jedna z najvhodnejších oblastí matematiky. Vyžaduje minimálne predbežné znalosti, jej problematika je príťažlivá a ľahko pochopiteľná, využíva niekoľko jednoduchých, ale všeobecných metód uvažovania, a je jedinečná medzi matematickými disciplínami, čo sa týka vyburcovania prirodzenej ľudskej zvedavosti. (G. H. Hardy)

1 Z histórie prirodzených čísiel

1.1 Dvojaká tvár prirodzených čísiel

Z historického pohľadu, čísla predstavujú pomerne vysoký stupeň abstrakcie ľudského myslenia, a stupeň abstrakcie v ich používaní je často ukazovateľom stupňa intelektuálneho rozvoja danej spoločnosti. Čísla sú výsledkom abstrakcie v procese počítania a merania, a podľa rôznych teórií začali ľudia používať čísla v primitívnej písomnej forme asi pred 30 000 rokmi. Prvou formou zápisu bol zápis pomocou tzv. *unárneho systému*, v ktorom je každé číslo reprezentované odpovedajúcim počtom zvolených symbolov, napr. vrubov na vrubovkách (rovášoch). Jeho podkladom je poznatok, že číslo nie je nič iného než súhrn jednotiek a jeho typickým prejavom sú primitívne formy zápisu čísiel, ako egyptské, rímske, alebo čínske číslice, kipy Inkov, atď., alebo počítanie na prstoch, ku ktorému sa ešte krátko vrátime,

Číslovku už ako slovný druh tvoria samostatný a svojský druh, a ako také majú ďalšie zvláštne postavenie. Sú jediným slovným druhom, pre ktoré môžeme v písanom texte použiť aj špeciálne grafické znaky – číslice. To všetko je výsledkom istej abstrakcie *an sich*, keď 5 znamená *päť prstov bez prstov*. A. N. Whitehead poznamenal: *Prvý človek, ktorý si uvedomil analógiu medzi skupinou siedmich rýb a skupinou siedmich dní, urobil pozoruhodný krok v dejinách myslenia (Bol to prvý človek, ktorý si uvedomil pojem z čistej matematiky.)*

To, že existujú štyri základné operácie s číslami, pozná (snáď) každý školák. Málokto ale vie, že v minulosti[2], sa v učebniciach uvádzalo 6 základných operácií (naviac bolo tzv. pólenie a zdvojovanie (duplicírka), t.j. delenie a násobenie dvomi). A len matematik vie, že v podstate máme len dve operácie, sčítanie a násobenie, pričom násobenie je len skrátená forma sčítania. Napríklad egyptská matematika bola „aditívna“. Násobenie bolo u nich redukované na súčet postupných zdvojení, pričom zdvojenie je vlastne sčítanie čísla so sebou samým. Prví, kto si uvedomili, že sčítanie rovnakých čísiel sa dá vyjadriť

[1] Práca bola napísaná s podporou projektu 1ET200300529 programu Informační společnost a výzkumného záměru AV0Z10300504.

[2] Viď, napr. *Algorismus prosaycus* od Křišťana z Prachatic asi z r. 1400.

ako násobenie, boli asi Sumeri, ktorí asi začiatkom 3. tisícročia doplnili zoznam operácií „objavom“ delenia.

Sčítanie a násobenie čísiel (a aritmetické operácie vôbec) predstavujú akýsi janusovský[3] charakter aritmetickej štruktúry prirodzených čísiel. Unárny zápis reflektuje „priehľadnú“ aditívnu štruktúru množiny prirodzených čísiel, keď všetky prirodzené čísla môžeme vygenerovať púhym pripočítavaním jednotky. Euklid vo svojich Základoch v Knihe VII časti Výmery (definície) podľa Servítovho prekladu píše:

1. Jednotka jest, dle níž každé věci se říká jedna.
2. Číslo, pak je množství složené z jednotek.

Táto jednoduchá aditívna štruktúra množiny prirodzených čísiel kontrastuje s ich podstatne komplikovanejšou multiplikatívnou štruktúrou. Letmý pohľad na zoznam tzv. šťastných a nešťastných čísiel, ktoré sa do našej kultúry dostali cez veľmi poverčivých Sumerov a Rimanov, naznačuje, že ľudia si pomerne dávno uvedomili, že z multiplika-tívneho hľadiska majú prirodzené čísla omnoho zaujímavejšiu štruktúru. Šťastné alebo nešťastné čísla sú obyčajne prvočísla.

1.2 Prvočísla, zložené čísla a problematika deliteľov

Na počiatku diferenciácie medzi prvočíslami a zloženými číslami bolo pravdepodobne pozorovanie, že nie každé číslo sa dá napísať ako súčin dvoch čísiel väčších než 1.

Prvé náznaky potreby „vedecky“ diferencovať medzi prvočíslami a zloženými číslami sa objavujú u starých Egypťanov v ich formulách pre rozklad zlomkov tvaru $2/n$ do kmeňových zlomkov. Pre malé nepárne menovatele n používali formulu $\frac{2}{n}=\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n(n+1)}$, pre nepárne zložené menovatele typu nm používali viaceré vzťahy, napr. $\frac{2}{nm}=\frac{2}{\frac{n+1}{2}m}+\frac{2}{\frac{n+1}{2}nm}$. Pre väčšie prvočísla používali rozklad typu $\frac{2}{p}=\frac{1}{a}+\frac{2a-p}{an}$, kde a je číslo z intervalu $p/2<a<p$ s vlastnosťou, že má veľký počet deliteľov. Z tejto bohatej množiny deliteľov potom brali čitateľov pre ďalší rozklad druhého sčítanca v poslednom rozklade.[4]

Ako naznačujú predchádzajúce riadky, naši predkovia si začali dobre uvedomovať, že až vo vzájomnej interakcii oboch štruktúr – aditívnej a multiplikatívnej, väzí ťažisko riešenia mnohých praktických problémov. Z dnešného pohľadu bolo a v predchádza-júcom rozklade niečo ako tzv. *praktické číslo*, t.j. prirodzené číslo s vlastnosťou, že každé menšie prirodzené číslo sa dá napísať ako súčet jeho deliteľov.[5] Aj keď tento pojem bol

[3] Aj keď bol boh Janus obvykle zobrazovaný s dvomi opačnými tvárami (Janus Geminus nebo Dvojtvárny (Bifrons)) bol Janus v skutočnosti Quadrifrons – boh štyroch tvárí.

[4] V Rhindovom papyre sa uvádza päť metód na rozklad zlomkov $2/n$, dve metódy pre prípad, keď menovateľ je prvočíslo a tri, keď je zložené číslo.

[5] Aj keď praktické číslo, je z hľadiska počtu deliteľov akýmsi protipólom pojmu prvočísla, majú praktické čísla mnoho spoločných vlastností s prvočíslami: odhad ich počtu podobný Čebyševovmu odhadu prvočíselnej funkcie [28], analóg Goldbachovej hypotézy, analóg hypotézy o prvočíselných dvojčatách [17] a pod.

formálne po prvýkrát definovaný [30] v r. 1948, implicitne ho nájdeme už aj vo Fibonacciho *Liber Abbaci* (1202) pri jednej z uvedených metód rozkladu zlomkov na kmeňové zlomky. Ak a je praktické číslo, tak každé racionálne číslo $\frac{b}{a}$ môžeme vyjadriť v tvare $\sum \frac{d_i}{a}$, kde $d_i \mid a$, vďaka čomu sa celý súčet redukuje na súčet kmeňových zlomkov. Počiatočný úsek postupnosti praktických čísiel tvoria čísla $1, 2, 4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, \ldots$. Pre zaujímavosť v súvislosti s ďalším textom poznamenajme, že všetky čísla tvaru $2^{n-1}(2^n - 1)$, pre $n = 2, 3, \ldots$, sú praktické.[6]

Keď sa pozrieme na definíciu deliteľa u Euklida, tak v Knihe VII v časti Výměry nájdeme tieto definície spojené s týmto pojmom (preklad podľa Servíta):

3. Díl čísla většího jest číslo menší, když se jím větší doměřuje.
5. Násobek čísla menšího je číslo větší, když se menším doměřuje.
11. Kmenné jest číslo, které měří jednotka jediná.
13. Složené jest číslo, které se nějakým číslem doměřuje.[7]

Definícia 11 je známa Euklidova definícia prvočísla. Pojem prvočísla sa údajne po prvýkrát objavuje v práci Speussipusa z Atén[8] [ktorý vychádza z diela pytagorejca Philolaa (asi 480 pr.n.l. – 385 pr.n.l.), z ktorého diela sa učil pytagorejskú filozofiu i sám Platón], kde sa čísla delia na prvočísla (nerozložiteľné) a druhotné (rozložiteľné). Je zaujímavé konštatovať, že tradičná čínska matematika nepoznala pojem prvočísla až do doby jej prvého kontaktu s európskou matematikou okolo roku 1600.

1.3 Číslo 1 a alikvótne časti

Servít pri uvedenej definícii 2 pojmu čísla poznamenal: „Dle toho jednotka není číslo“. Číslo 1 malo historicky výsadné postavenie, čo sa odráža aj v jeho jazykovej forme. 1 sa v mnohých jazykoch správa ako prídavné meno, preberá rod a číslo, napríklad „jeden muž“, „jedna žena“, „jedno okno“, „jedni muži“ ale „jedny ženy“ a pod. Podobne je to aj mnohých iných jazykoch, v Hebrejčine máme tiež **אחד שיא** (jeden muž) a **תחא השא** (jedna žena) alebo množné číslo **םידחא**. V Gréčtine podobne máme *ενα* (m: *ενας*, f: *μια*, n: *ενα*). Výsadné historické postavenie jednotky asi malo jeden zaujímavý dopad v definícii toho, čo je to deliteľ.

To, že 1 nie je číslo, prebral Euklid od svojich predchodcov. Aristoteles vo svojej *Metafyzike*, pravdepodobne preberajúc pytagorejskú doktrínu, konštatuje, že jednotka nie

---

[6] Stewart [31] dokázal, že prirodzené číslo n s kanonickým rozkladom $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, kde $2 = p_1 < p_2 < \ldots < p_k$, je praktické práve vtedy, keď $p_i \le 1 + \sigma(p_1^{\alpha_1} \cdots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}}) = 1 + \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_j^{\alpha_j + 1} - 1}{p_j - 1}$ pre $i = 2, \ldots, k$, kde $\sigma(m) = \sum_{d \mid m} d$ je funkcia súčet deliteľov.

[7] Servít pod čiarou poznamenáva, že „Měří, doměřuje, jest něčemu měrou – jsou výrazy souznačné.“

[8] Speussipus (410? pr. n. l. – 339 pr. n. l.) bol synom Platónovej sestry Potone a stál v čele Platónovej akadémie po Platónovej smrti osem rokov, asi až do svojej smrti. Z jeho diela sa zachoval fragment *O pytagorejských číslach* a fragment nájdený v r. 1953 Raymondom Klibanskym.

je číslo, lebo miera nemôže byť meraným objektom. Prvá definícia čísla[9] sa pripisuje Tálesovi, ktorý definoval číslo ako súhrn jednotiek podľa egyptského vzoru [13], str. 69.

To, že problematika deliteľov mala v antike hlbšie a prekvapujúco iné postavenie, než z dnešného pohľadu očakávame, môžeme dokumentovať piatou knihou Platónových *Zákonov*. Je to jeho posledné a nedokončené dielo, ktoré vydal jeden z jeho žiakov po jeho smrti r. 348 pr.n.l. Tu Platón doporučuje voliť počty bezzemkov a majiteľov pôdy v novo zakladanom štáte tak, aby čísla udávajíce ich počty mali *dostatočne mnoho deliteľov*. Napr. rovné číslu 5040, ktoré má, ako uvádza, 59 deliteľov. Zákonodárci musia naviac natoľko ovládať aritmetiku, aby podľa veľkosti mesta to boli schopní primerane zariadiť. Poznamenajme, že grécki matematici robili rozdiel medzi *aritmetikou* ako vedou o číslach a *logistikou* ako praktickom počítaní.

Pozorný čitateľ si iste všimol, že uvedený počet deliteľov čísla 5040 nesedí. Platón za deliteľa nepovažoval číslo samotné.[10] Z toho vyvstávajú dve otázky:

1. Čím sa vyznačuje číslo 5040?
2. Prečo Platón vynechal číslo samotné zo zoznamu deliteľov (a trebárs nie 1, akoby sme mohli očakávať podľa prvého odstavca tejto časti)?

Istú cestičku na hľadanie odpovede na prvú otázku naznačuje Platón tým, že hovorí o veľkom počte deliteľov. Matematicky sa dá jednoducho dokázať, že ku každému m existuje najmenšie prirodzené číslo n s m deliteľmi. V minulom storočí vznikla nasledujúca definícia: Číslo n sa nazýva *silne zložené*, ak má väčší počet deliteľov než ľubovoľné od neho menšie číslo. Vieme, že existuje nekonečne veľa silne zložených čísiel [29], str.114. Začiatok postupnosti silne zložených čísiel tvoria čísla 1, 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180, 240, 360, 720, 840, 1260, 1680, 2520, 5040, 7560, ...[11] Naše číslo 5040 je medzi nimi, aj keď Platón túto definíciu asi nepoznal. Platón požaduje od čísla na mieste 5040, čo najdlhšiu, pravidelnú a neprerušenú sériu deliteľov, včítane všetkých čísiel od 1 do 10. Prvé číslo, ktoré spĺňa túto poslednú podmienku v postupnosti silne zložených čísiel je 2520, takže prvú otázku asi nezodpovieme ľahko.

Druhá otázka sa tiež nedá jednoducho zodpovedať. V antike sa za deliteľa považovali len vlastné delitele, ako to už vlastne naznačuje hore uvedená definícia z Euklida. Takéto delitele sa v staroveku nazývali *alikvótne časti*. To, že samotné číslo sa nepovažovalo za deliteľa má s najväčšou pravdepodobnosťou korene práve v egyptskej aritmetike spojenej s rozkladom zlomkov na kmeňové zlomky $\frac{1}{n}$, kde $n>1$ je prirodzené číslo. V prípade, že d je deliteľ čísla n, tak zlomok $\frac{d}{n}$ sa po vykrátení stane kmeňový, len ak $d<n$, čo vylučuje samotné číslo n z pozície deliteľa. Na druhej strane, ak $d=1$, tak dostaneme

[9] Len na okraj pripomeňme, že Platón diferencoval medzi pojmom ideálneho čísla a čísla „používaného“ v matematike. Platón nechápal ideálne číslo ako súhrn jednotiek, lebo každé ideálne číslo, ako ideálna dvojka, ideálna trojka, atď., ako ideálne objekty sú samostatnými dokonalými jednotkami, ktoré podobne ako ostatné idey sú nedeliteľné, nemajú časti, a nie sú odvodené zo žiadneho iného princípu.

[10] Číslo 5040 má týchto deliteľov 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 56, 60, 63, 70, 72, 80, 84, 90, 105, 112, 120, 126, 140, 144, 168, 180, 210, 240, 252, 280, 315, 336, 360, 420, 504, 560, 630, 720, 840, 1008, 1260, 1680, 2520, 5040.

[11] Z pohľadu tvrdenia, že čím viac deliteľov má základ pozičnej sústavy, tým menej je nekonečných (periodických) rozvojov racionálnych čísiel, je iste zaujímavé vidieť, že 60 je silne zložené číslo, kým 10 nie je.

priamo kmeňový zlomok, čo je možná príčinou toho, že jeho čitateľ 1 „unikol“ ďalšej logickej analýze a prirodzenou cestou sa zaradil medzi delitele, aj keď 1 mala zvláštne generické postavenie medzi číslami.

S postupne sa meniacim postavením 1 ako čísla, súvisí aj otázka, prečo 1 nie je považovaná za prvočíslo. Či je 1 prvočíslo, alebo nie je, je vecou definície. V modernej literatúre, 1 nie je klasifikovaná ani ako prvočíslo, ani ako číslo zložené. V starších textoch, však bola 1 považovaná za prvočíslo.[12] Francúzsky číselný teoretik V. A. Le Besgue[13] (1791–1875) explicitne uvádza 1 ako prvočíslo vo svojom diele [7] z r. 1859. Niekedy je možné nájsť v literatúre zmienku, že posledný matematik, ktorý zahrnul 1 medzi prvočísla bol H. Lebesgue (1875–1941) v r. 1899. Toto tvrdenie rozhodne nie je pravda, D. N. Lehmer zahrnul 1 do svojho zoznamu prvočísiel ešte v r. 1914 (aj keď možno len z historických dôvodov). Známy propagátor vedy a astronóm C. Sagan zahrnul 1 medzi prvočísla ešte v r. 1985 vo svojom slávnom románe *Kontakt*. Dôvod, prečo 1 dnes nie je považovaná za prvočíslo je veta o jednoznačnom rozklade na prvočísla. Táto mimoriadne dôležitá veta bola po prvýkrát sformulovaná a dokázaná až v C. F. Gaußom v jeho *Aritmetických rozpravách*. Je istou iróniou osudu, že priamy nasledovník Gaußa na mieste profesora na univerzite v Göttingen, M. A. Stern (1807–1894) aj naďalej zaraďoval 1 medzi prvočísla.

2 Počítanie na prstoch

Počítanie na prstoch bolo istotne bežné už veľmi dávno. Ako počítacie pomôcky boli prsty vždy „po ruke“ a používali sa pri rôznych situáciách (napr. pri tajnom uzatváraní obchodov v prítomnosti cudzích ľudí, pri takomto dorozumievaní dokonca ešte aj v nedávnej dobe medzi maklérmi na burze, atď.). Naviac ako prostriedok počítania bol použiteľný medzi negramotnými ľuďmi. Pomocou prstov síce môžeme číslo vyjadriť, ale nemôžeme ho trvale zaznamenať, ako pomocou vrubov. V počítaní na prstoch má svoj pôvod aj delenie čísiel na *digiti* (jednotky), *articuli* (t.j. články pre desiatky) a *numeri compositi* (zložené čísla). Ďalšie náznaky o tom, že počítanie na prstoch kedysi hralo dôležitú úlohu, zachováva reč i v rôznych zvratoch, napr. „spočítať (si) na prstoch“.

Hoci vieme, ako sa vo všeobecnosti počítanie na prstoch zdokonaľovalo, nemôžeme presne sledovať proces jeho vzniku, lebo písomné záznamy z prvých období neexistujú. Používané praktiky (často s lokálnymi odchýlkami a zvláštnosťami) sa dedili prostredníctvom používania z jednej generácie na druhú.

Isté je, že počítanie na prstoch dosiahlo v antickom Ríme svoj najvyšší stupeň, tešilo sa veľkej obľube a odtiaľto prenikalo aj do ďalších krajín. Napr. v diele rímskeho básnika Decima Junia Juvenalia (asi 60–140) je scéna, v ktorej sa hovorí o šťastlivcovi, ktorý na zrátanie svojich rokov potrebuje pravú ruku [18]:

Felix nimirum qui per tot saecula mortem
distulit, atque suos jam dextra computat annos[14].

---

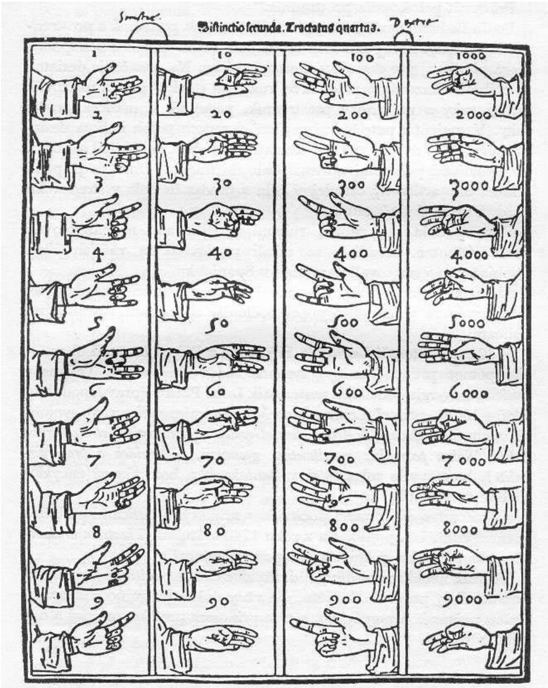
[12] Len ako zaujímavosť pripomeňme, že (okrem iných aj) novopytagorejci (Leon zo Smyrny, Nikomach atď.) nepovažovali číslo 2 za prvočíslo.

[13] V. A. Le Besgue je niekedy citovaný aj ako Lebesgue, a preto je často zamieňaný so svojím slávnejším menovcom H. Lebesgue-om.

[14] Šťastný je ten, kto tak dlho smrti vzdoroval, a na pravej ruke si mohol spočítať svoj vek.

Nie je to myslené ironicky. Muž je vyše storočný, lebo Rimania znázorňovali čísla od 1 do 99 ľavou rukou a čísla od 100 do 1000 pravou rukou.

Tento zvyk bol taký rozšírený, že sa dostal nielen do literárneho diela Juvenalia, ale aj do diel iných gréckych a rímskych autorov, ako bol Herodotos (asi 484–425 pr. n. l.), Ovídius (43 pr. n. l. – 17 n. l.) a Plínius (23–79). Plínius st. sa vo svojej encyklopédii *Naturalis historia* (Prírodopis) o 37 knihách v knihe 34, 7, 33 zmieňuje o tom, že „kráľ Numa venoval sochu boha Janusa s dvomi tvárami ... prsty v polohe znázorňujúcej číslo 365 ...“ – počet dní v roku; 300 na pravej 65 na ľavej ruke [27], [35].



Prstové číslice podľa Lucu Pacioliho

Najznámejší[15] učenec, ktorý sa počítanie na prstoch pokúsil zaznamenať v písomnej forme bol anglický benediktínsky mních Beda Venerabilis (673?–735). Beda bol predovšetkým cirkevný učiteľ a historik a do dejepisu zaviedol pri označovaní letopočtu pojem „pred narodením Krista“, matematikou sa zaoberal predovšetkým z historického záujmu. Cirkev bola v jeho dobe rozpoltená spôsobom počítania Veľkej noci (tzv. compus paschalis). Tejto problematike venoval svoje dielo *De Temporum Ratione* (O počítaní času). Z nášho pohľadu je toto dielo zaujímavé tým, že Beda tu uvádza úplnú sústavu počítania na prstoch. Ukazuje ako rôzne kombinácie ohnutých a natiahnutých prstov vyjadrujú jednotky, desiatky, stovky a tisíce. Naviac spolu s kombináciami polôh rúk sa rozsah vyjadriteľných čísel rozširuje až do miliónu. Bez Bedu by bolo počítanie na

[15] Existuje skorší ale menej známy text *Romana computatio* z roku 688.

prstoch ako matematická a tým aj kultúrno – historická kategória dnes už asi zabudnuté, lebo všetky neskoršie publikácie sa vracajú k jeho výkladu.[16]

Z diel uvádzajúcich počítanie na prstoch uveďme Fibonacciho *Liber Abbaci*, ktorá končí prvú kapitole v *Liber Abbaci* detailným popisom počítania na prstoch. Taliansky mních, univerzitný učiteľ a matematik Luca Pacioli (1445?–1514), priateľ Leonarda da Vinciho, sa mu venoval vo svojom hlavnom encyklopedickom diele[17] *Summa de Arithmetica, Geometrica, Propotioni et Proporcionalita* (Súhrn poznatkov o aritmetike, geometrii, proporciách a proporcionalite), ktoré vyšlo roku 1494 v Benátkách. Až víťazstvo písomného počítania s arabskými číslicami zatlačilo prstové počítanie.

3 Dokonalé čísla

3.1 Odkedy je dokonalé číslo dokonalé?

V predchádzajúcich častiach sme sa stretli s rôznymi klasifikáciami čísiel. Asi najstaršia všeobecná klasifikácia čísiel sa objavuje u pytagorejcov, u ktorých dôležite bolo, napríklad, delenie čísiel na párne a nepárne (pozostatky tejto klasifikácie nájdeme v *Základoch* IX, 21 – 34).[18] Pytagorejci si však všímali nielen delenia, ktoré sa vzťahujú na všetky čísla, ale aj individuálne vlastnosti čísiel. Pytagorovi je pripisovaný aj objav trojuholníkových čísiel, t.j. čísiel tvaru $n(n-1)/2$, kde $n = 2, 3, \dots$. Jedno z trojuholníkových čísiel číslo $10 = 1+2+3+4$, zvané τετρακτύς, hralo u pytagorejcov mimoriadnu úlohu,[19] a preto bolo nazývané τέλειος[20] – *dokonalým*.

Iný pojem dokonalého čísla, ale s rovnakým slovným označením, nachádzame u Euklida. Výměra 22 v Knihe VII podľa Servíta znie:

22. Plné (τέλειος) jest číslo, jež se rovná součtu svých dílů.

Inými slovami, číslo je plné, t.j. *dokonalé*, ak je súčtom svojich alikvótnych častí. Príkladmi dokonalého čísla je $6, 28, 496, 8128$:

6 = 1+2+3,
28 =1+2+4+7+14,
496 = 1+2+4+8+16+31+62+124+248,
8128 = 1+2+4+8+16+32+54+127+254+508+1016+2032+4064.

Ale v základnom tvrdení o dokonalých číslach používa Servít iný termín (Základy IX, 36): Když jest dáno po řadě od jednotky několik čísel v poměru jedné ke dvěma, až součet všech stane se číslem kmenným, a když se ten součet znásobí číslem posledním a vznikne jiné, vzniklé bude číslo dokonalé (τέλειος).

[16] Číňania používali úplne iný systém znázorňovania čísiel pomocou prstov [33].
[17] Obrázok je prevzarý z knihy [15], str. 61.
[18] Philolaus napr. nepovažoval 2 za párne číslo, ale ani za prvočíslo.
[19] Napr. Philolaus, ktorému je pripisovaná prvá teória o tom, že naše Zem nie je stredom vesmíru, veril, že existuje akási „proti-Zem“ vyvažujúca našu planétu, len kvôli tomu, aby počet nebeských telies bol 10 (to je údajne Aristetolovo vysvetlenie pre tento počet, ku ktorému neboli iné dôvody). Na desiatich kruhových dráhach okolo centrálneho ohňa sú umiestnené pevné hviezdy (na vonkajšej dráhe ako opora pre ostatné telesá), potom päť planét, Mesiac, Slnko, Zem a proti-Zem.
[20] Toto grécke slovo použil i Aristoteles vo svojej Metafyzike, Kniha A, časť 5, odstavec 1, keď charakterizoval pytagorejské stanovisko.

V súčasnej formulácii: Ak $2^n - 1$ je prvočíslo, tak $2^{n-1}(2^n - 1)$ je dokonalé číslo.

Aj keď v origináli je na obidvoch miestach použité to isté slovo τέλειος, Servít volí dva rôzne preklady. Existujú autori [1], [32], ktorí aj dnes považujú za vhodnejšie používať slovo *complete* namiesto *perfect* (dokonalé). Autorovi týchto riadkov nie je známe, prečo Servít používa dva rôzne preklady pre ten istý pojem. Je možné, že sa mu viac pozdával preklad „plné číslo“, ale vo vety 36 sa prispôsobil používanej terminológii. Pritom v skorších publikáciách o dokonalých číslach [2], [4], [5], najprv ešte poslucháča filozofie Bezdíčka a potom už profesora, alebo v komentári redakcie [3] sa vždy používa slovo dokonalý, napriek tomu, že autor Bezdíček je kritický k niektorým použitým prekladom. V literatúre sa tiež uvádza, že slovo „dokonalý“ údajne po prvýkrát použil Nikomach z Gerasy (okolo r. 100 n.l.) vo svojej *Arithmetike eisagoge* (Úvod do aritmetiky). V skutočnosti ale tiež použil slovo τέλειος, ako pre dokonalé číslo (časť I, 14 a I, 16), tak aj pre tetraktys (II, 22 [19]). Necelé tri storočia neskoršie ale Sv. Augustín z Hipponu (354–430) v časti 30 *De senarii numeri perfectione* (O dokonalosti čísla šesť) Knihy 11 z 22 kníh diela *De Civitate Dei* (O božskej obci) používa slovný základ perfectus:

> Je zaznamenané, že celá božia práca bola dokončená za šesť dní, pretože šesť je dokonalé číslo. ... Pretože to je prvé číslo zložené zo šestiny, tretiny a polovice, lebo jednotka dvojka a trojka dávajú spolu šesť. ...

V angličtine sa údajne termín „perfect number“ objavuje po prvýkrát r. 1570 v anglickom preklade Euklida od sira Henryho Billingsleya. V r. 1674 píše Samuel Jeake v diele *Arithmetic* „Perfect Numbers are almost as rare as perfect Men“.

3.2 Kultúrne-historické asociácie

Kedy (a kde) si ľudia uvedomili, že vlastnosť byť súčtom svojich vlastných deliteľov, môže byť zaujímavá, nie je ľahké zodpovedať. Je iste povšimnutiahodné, že v pojme dokonalého čísla došlo k mystickému spojeniu aditívnej vlastnosti „súčet“ s multiplikatívnou „deliteľ“.[21] Ak by sme v súčasnej terminológii a označení vzali, súčin a nie súčet deliteľov, je odpoveď pomerne jednoduchá: Súčin všetkých deliteľov daného čísla $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ sa rovná $\prod_{d|n} d = n^{\tau(n)/2}$, kde $\tau(n)$ označuje počet deliteľov čísla n. Na druhej strane, pre súčet všetkých deliteľov čísla n máme $\sum_{d|n} d = \prod_{p^\alpha \| n} (p^{\alpha+1} - 1)/(p-1)$. Na prvý pohľad je vidieť „dráždivý“ rozdiel v zložitosti, pričom v minulosti nepoznali našu symboliku, ktorá len zjednodušuje zápis.[22] Na tomto mieste len pripomeňme citát z Eulera

> Zo všetkých problémov vyšetrovaných v matematike neexistujú také, ktoré by sa v súčasnosti považovali viac neplodnými a neužitočnými, než problémy ohľadne podstaty čísiel a ich deliteľov. V tomto smere sa súčasní matematici silne odlišujú od starovekých, ktorí pripisovali bádaniu tohoto druhu omnoho väčší význam …

---

[21] Naviac číslo 6 je súčasne súčinom i súčtom svojich alikvótnych častí $1 \times 2 \times 3 = 1 + 2 + 3$.

[22] Čísla, ktoré sa rovnajú súčinu svojich vlastných deliteľov sa volajú *dokonalé čísla druhého druhu*. Ich charakterizácia je jednoduchá [29], str. 123: Sú to jedine mocniny prvočísiel a súčiny dvoch rôznych prvočísiel.

> Oni nielen považovali hľadanie istoty za chvályhodné samo o sebe a dôstojné ľudského poznania, ale okrem toho sa naprosto správne domnievali, že tým sa pozoruhodným spôsobom rozvíja vynaliezavosť a pred ľudským intelektom sa takto otvárajú nové možnosti riešiť spletité úlohy …
>
> Matematika by pravdepodobne nikdy nedosiahla takýto vysoký stupeň dokonalosti keby v staroveku nevynaložili toľko úsilia na štúdium problémov, ktorými dnes mnohí opovrhujú pre ich zdanlivú márnosť …

Pojem dokonalého číslo v zmysle súčtu svojich alikvótnych častí má svoj pôvod asi v sumersko-babylónkej tradícii. Hexadecimálna babylonská sústava bola veľmi výhodná pre počítanie so zlomkami. Babyloňania mali pre zlomky $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$ a $1/6$ samostatné klinové znaky. K tomu pristúpili ešte „astronomické skutočnosti“: Starí Babyloňania poznali 6 planét (Venuša, Merkúr, Zem, Mars, Jupiter a Saturn)[23]. Naviac dĺžka obehu Mesiaca okolo Zeme je 28 dní, čo je druhé dokonalé číslo. Samozrejme najznámejším citátom v tomto smere je Kniha Genezis 1, 31: *Boh videl všetko, čo urobil: a hľa, bolo to veľmi dobré. Bol večer a bolo ráno: šiesty deň.*

Pôvod pojmu dokonalého čísla je často pripisovaný pytagorejcom. Videli sme, že pod rovnakým slovom sa vlastne skrývajú dva rôzne pojmy[24]. Postupom času sa začali obidva pojmy asi prelínať, ako to môžeme vidieť u význačného predstaviteľa helenisticko-židovského filozofického prúdu Filóna Alexandrijského (25 pr. n. l. – 40 n.l.). V časti III diela *O stvorení sveta* hovorí, že svet bol stvorený behom

> … šiestich dní. Nie preto, že by k tomu tvorca potreboval nejaký čas – Boh totiž zrejme všetko robí naraz; nielen to, čo prikazuje, ale i to, čo má sám na mysli – ale preto, že vznikajúce veci vyžadovali vhodný poriadok. Poriadku ale prináleží číslo, a z čísiel je podľa zákonov prírody najvhodnejšia šestka. Pretože z čísiel nasledujúcich po jednotke je šestka prvým dokonalým číslom, ktoré sa rovná svojim častiam a je nimi úplne vyplnené, totiž z poloviny trojkou, z tretiny dvojkou a zo šestiny jedničkou.

A pokračuje v pytagorejskom duchu

> Šestka má takpovediac zo svojej povahy mužský aj ženský charakter a je spojená silou tejto dvojitosti. Mužské totiž zastupuje vo veciach bytia nepárne, kým párne je ženské. Prvým z nepárnych čísiel je číslo tri, dvojka je zase prvé z párnych. Silu obidvoch v sebe sústreďuje šestka. ...

Zdá sa, že postupom času pytagorejský aspekt pojmu dokonalého čísla vymizol, asi aj vplyvom Nikomachovho *Úvodu do aritmetiky*, ku ktorému sa ešte vrátime. Za zmienku ešte stojí jedna kultúrno-historická poznámka na tému, *prečo nosíme obrúčku na*

[23] Babyloňania boli prví, kto pomenoval dni týždňa po Slnku, Mesiaci a planetách tak, ako to dodnes napr. majú v angličtine: nedeľa – Slnko, pondelok – Mesiac, utorok – Mars, streda – Merkúr, štvrtok – Jupiter, piatok – Venuša, sobota – Saturn [34], čím dostávame spojenie s ďalším magickým číslom, číslom 7.

[24] Interesujúcemu sa čitateľovi o stope pytagorejského pojmu dokonalý v gréckej literatúre doporučujeme ako úvodné čítanie prácu [1], najmä jej časť 2.4. Na druhej strane Taisbak [32] vidí vo formulácii Euklidovho tvrdenia IX.36 vplyv a súvislosti s egyptskou formou násobenia, a touto cestou vysvetľuje aj pôvod pojmu dokonalého čísla ako súčtu alikvótnych častí.

prsteníku [25]. Odpoveď na túto otázku je údajne potrebné hľadať v tabuľke obsahujúcej reprezentáciu čísiel pomocou prstov. Číslo 6 je reprezentované ohnutým prstеníkom.[26] Podľa niektorých autorov, keďže 6 je dokonalé číslo, je spojenie s manželstvom jasné.[27] Existujú však aj iné vysvetlenia. Podľa Platóna 6 reprezentuje manželstvo, lebo je súčinom ženskej 2 a mužskej 3 (Aristoteles vo svojich *Fragmentoch* píše, že podľa pytagorejcov manželstvo reprezentovala 5, lebo $5 = 2 + 3$). V piatej knihe diela Republika priraďuje Platón manželstvu pravouhlý trojuholník so stranami 3, 4, 5, lebo jeho obsah je 6.

3.3 Nicomachov *Úvod do aritmetiky*

Nicomachov *Úvod do aritmetiky* je akousi voľnou prózou o aritmetike, v ktorej sa autor snaží argumentovať v prospech dôležitosti postavenia aritmetiky medzi ostatnými matematickými oblasťami. V podstate neobsahuje žiadny nový materiál, chýbajú dôkazy, ale vydobyla si svoje miesto v dejinách vďaka čitateľnému štýlu, vhodnému usporiadaniu materiálu a ako zdroj všeobecných informácií o číslach a ich vlastostiach. Zdôrazňuje pytagorejský prístup. Z nášho hľadiska zohrala kniha dôležitú úlohu, lebo obsahuje súhrn vtedy známych výsledkov o dokonalých číslach. Mnohé tvrdenia podávané ako fakty sú však nepravdivé, ich odhalenie zohralo veľmi významnú úlohu v ďalšom rozvoji teórie čísiel a matematiky vôbec.

Bez zachádzania do väčších detailov[28] Nicomach delí čísla na superabundantné, deficientné[29] a dokonalé (I, 14) podľa toho, aký je súčet ich vlastných deliteľov.[30] Dokonalé čísla, ako čísla rovnajúce sa súčtu alikvótnych častí, tvoria podľa Nikomacha rozmedzie medzi zvyšnými dvomi triedami. Nicomach uvádza (bez dôkazu ako už bolo uvedené) nasledujúce vlastnosti dokonalých čísel:

- *n*-té dokonalé číslo má *n* cifier,
- každé dokonalé číslo končí striedavo buď cifrou 6 alebo 8, v dôsledku čoho každé dokonalé číslo je párne,
- hore uvedeným Euklidovým algoritmom je možné vygenerovať všetky dokonalé čísla,
- existuje nekonečne veľa dokonalých čísel.

V Nikomachovej formulácii Euklidova veta má tvar: Začni od jednotky tvoriť párno-párne čísla ako dlho chceš: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 1024, 2048, 4096, ... Potom ich postupne po jednom spočítaj a zisti aký je výsledok. Keď zistíš, že dostaneš prvočíslo, pripočítaj posledného sčítanca, a výsledkom je vždy dokonalé číslo. Nikomach poznal 4 dokonalé čísla: 6, 28, 496 a 8128.

---

[25] Menninger v druhom diele [18] udáva, že v staroveku sa prsteník volal *medicus*.

[26] Napr. fotografiu ruky Afrodity s prsteňom na prsteníku môžeme nájst v knihe [6]. Socha pochádza z Grécka z 2.–3. st. pr. n. l.

[27] Viď tiež krátku poznámku v tomto smere na str. 130 v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky 25 (1896).

[28] Napr. Nikomach nezaraďuje párne čísla medzi zložené (I, 12) a nasledujúce delenie na superabundantné čísla, deficientné a dokonalé sa vzťahuje v časti I, 14 na jednoduché párne čísla (simple even numbers [19]) a v časti I, 16 je nasledujúca definícia dokonalého čísla uvedená bez tohoto odmedzenia.

[29] Napr. číslo je deficienté, ak súčet jeho vlastných deliteľov je menší než číslo samotné. Takým je číslo 8. Podľa Alkuina z Yorku (732?–804) to dokazuje, že tzv. druhé stvorenie, keď Noe zahránil 8 ľudí vo svojej arche, bolo nedokonalé.

[30] Len ako ukážku uveďme, že Nikomach prirovnáva superabundantné čísla k zvieratám, ktoré majú veľa končatín, desať jazykov, tri rady zubov, atď. Podobné prirovnania má pre deficientné čísla.

3.4 Vývoj do Fermata

Trvalo storočia, kým vývoj pokročil ďalej v problematike dokonalých čísiel. Najprv sa ťažisko presunulo do arabského sveta, kde problematika dokonalých a tzv. spriatelených čísiel našla veľkú odozvu. Al-Sabi Thabit ibn Qurra al-Harrani (836–901) vo svojom diele *Pojednanie o spriatelených číslach* vyšetroval otázku, za akých podmienok je číslo tvaru $2^n p$, kde p je prvočíslo, dokonalé. Ďalší arabský matematik Abu Ali al-Hasan ibn al-Haytham (965–1040) bol asi prvý, kto vyslovil domnienku, že Euklidova postačujúca podmienka je aj nutná [23], [24]. Ismail ibn Ibrahim ibn Fallus (1194 – 1239) vo svojom diele, ktoré nadväzuje na Nikomachov *Úvod do aritmetiky* udáva tabuľku, ktorá obsahuje prvých sedem dokonalých čísiel. Ďalšie tri v jeho tabuľke nie sú správne [8], [9]. Tieto príspevky arabských matematikov zostali v Európe neznáme. Aj Fibonacci, o ktorom sa tvrdí, že prevzal mnohé od arabských matematikov, uvádza vo svojej *Liber Abbaci* len prvé štyri dokonalé čísla, ktoré boli známe už Nikomachovi.

Asi prvým v Európe, kto začal pochybovať o platnosti Nikomachových hypotéz bol Pacioli, ktorý zpochybnil platnosť tvrdenia, že Euklidov vzťah dáva dokonalé číslo pre každé n. Zdá sa, že už predtým renesančný duch začal prenikať a oživovať aj európske matematické dianie. V neskoršie nájdenom neznámom rukopise z roku 1461 sa objavuje piate dokonalé číslo. Toto bolo nájdené aj v istom rukopise Johanna Regiomontana – Müllera (1436–1476) z obdobia jeho pobytu vo Viedni asi r. 1458 [21]. Naviac piate a šieste dokonalé číslo bolo dodatočne nájdené aj v rukopise, ktorý vznikol krátko po roku1460. Autor je neznámy a žil vo Florencii.

V r. 1536 vydal Hudalrichus Regius[31] v Strassburgu knihu *Utriusque Arithmetices*, v ktorej uviedol rozklad $2^{11}-1=23.89$, čím našiel prvé prvočíslo p, pre ktoré vzťah $2^{p-1}(2^p-1)$ nevedie na dokonalé číslo. Naviac tu ukázal, že $2^{13}-1=8191$ je prvočíslo, čím našiel piate dokonalé číslo $2^{12}(2^{13}-1)=33550336$. Týmto objavom síce nepoprel Nikomachovu tézu, že dokonalé čísla majú poslednú cifru buď 6 alebo 8, ale pretože toto číslo má 8 cifier poprel Nikomachovo prvé tvrdenie.

V roku 1603 Pietro Antonio Cataldi (1548 – 1626) vo svojej *Trattato de Numeri Perfetti* vydanej v Bologni rozložil na prvočísla všetky čísla po 800 a metódou Eratostenovho sita našiel všetky prvočísla do 750. Pomocou tej tabuľky zistil, že $2^{17}-1=131071$ je prvočíslo.[32] Z toho odviedol šieste dokonalé číslo $2^{16}(2^{17}-1)=8589869056$ čím poprel ďalšiu Nikomachovu hypotézu, že dokonalé čísla striedavo končia cifrou 6 alebo 8.[33] Cataldi našiel aj ďalšie dokonalé číslo $2^{18}(2^{19}-1)=137438691328$, keď dokázal, že $2^{19}-1=524287$ je prvočíslo.

V r. 1977 sa našlo, že už v r. 1555 uviedol J.Scheybl šieste dokonalé číslo v jeho komentároch k prekladu Euklidových *Základov*.

---

[31] V r. 2008 vyšla práca [25], ktorú autor tohto príspevku ešte nemal v ruke.

[32] Pripomeňme elementárne tvrdenie, často pripisované práve Cataldimu a Fermatovi, že ak 2^n-1 je prvočíslo, tak n je prvočíslo.

[33] Platí: Ak $2^{p-1}(2^p-1)$ je dokonalé číslo, tak (a) jeho posledná cifra je číslo 6, ak $p=2$ alebo $p\equiv 1 \pmod 4$, (b) končí na 28, ak $p\equiv 3 \pmod 4$.

Cataldi však popri serióznych výsledkoch prispel aj nesprávnymi hypotézami. Vo svojom diele *Utriusque Arithmetices* uvádza tvrdenie, že pre exponenty p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 vo vzťahu $2^{p-1}(2^p-1)$ dostaneme dokonalé číslo. Z posledných štyroch možností je to však pravda len pre $p=31$.

Dalo by sa povedať, že Cataldim sa skončila éra „amatérskeho“ prístupu k riešeniu dvoch hlavných problémov v teórii dokonalých čísiel:

1. Existuje nekonečne veľa dokonalých čísiel?
2. Existuje nepárne dokonalé číslo?

Čo sa týka druhého problému o existencii nepárneho dokonalého čísla, zdá sa, že všeobecne panovalo presvedčenie, že všetky dokonalé čísla sú tvaru, ktorý udával Euklidov vzťah. Avšak Descartes v liste Mersennovi z r. 1638 píše, že nevidí dôvod, aby neexistovali nepárne dokonalé čísla. Tvrdil, že vie dokázať, že každé párne dokonalé číslo je Euklidovho tvaru, a že každé nepárne dokonalé číslo musí mať tvar ps^2, kde p je prvočíslo. Napr. píše: *keby* $p=22021$ *bolo prvočíslo* (čo ale nie je, lebo $p=61.19^2$), *tak po vynásobení číslom* 9018009, *čo je štvorec súčinu prvočísiel* 3, 7, 11, 13, *dostaneme* 198585576189, *čo by mohlo by dokonalé* (čo opäť nie je, lebo súčet jeho vlastných deliteľov je 227441894589). *Ale keď použijeme akúkoľvek metódu, bude to vyžadovať hodne času nájsť takéto číslo ...*

4 Začiatky modernej teórie čísiel

Dôležitou postavou ďalšej časti príbehu dokonalých čísiel sa stáva už spomínaný francúzsky mních Marin Mersenne (1588–1648), ktorý sa preslávil najmä svojou významnou sprostredkovateľskou rolou pri výmene nových výsledkov medzi európskymi matematikmi v 30. a 40. rokoch 17.storočia. V r. 1644 vydáva v Paríži *Cogitata Physico Mathematica*, kde tvrdí, že 2^p-1 je prvočíslom jedine pre tieto hodnoty p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257 spomedzi 44 prvočísiel ≤ 257. Na počesť Mersenna sa prvočísla tvaru 2^p-1 nazývajú *Mersennovými*.

Prvú chybu v Mersennovom zozname našiel v r. 1876 E.Lucas. Overenie správnosti tohoto zoznamu trvalo až do roku 1947, a jeho správne zloženie je {2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127}. Napr. v r. 1876 Catalan položil otázku, či ak $m=2^p-1$ je prvočíslo, potom aj 2^m-1 je prvočíslo. Catalanova postupnosť začína takto: 3, 7, 127, 170141183460469231731687303715884105727, ale jej piaty člen má 10^{37} dekadických cifier, takže jeho overenie je nad naše súčasné možnosti.

Claude Gaspar Bachet de Méziriac (1581–1638) vydáva v r. 1612 svoju slávnu zbierku *Problèmes plaisans et delectables qui se font par les nombres,* ktorá veľmi prispela k „popularizácii“ matematiky, a ktorej piate vydanie vyšlo ešte aj v r. 1959.

V r. 1621 vydáva svoj slávny preklad Diofantovej Aritmetiky, ktorá ovplyvnila[34] P. Fermata (1601?–1665).

V r. 1636 oznamuje Fermat Robervalovi, že urobil veľký pokrok v riešení problematiky okolo dokonalých čísiel, a že plánuje o tom vydať publikáciu. Táto však nikdy nevyšla, a naopak Fermat dosť tajil metódy a prostriedky, ktoré objavil a používal. Fermat však dokázal v tejto problematike mnoho hodnotných výsledkov, napr. objavil tzv. malú Fermatovu vetu, jedno z kľúčových tvrdení elementárnej teórie čísiel. Bližšie sa čitateľ môže dozvedieť o detailoch celého vývoja v [22].

Definitívnu bodku v prípade párnych dokonalých čísiel urobil v 18. stor. L.Euler, keď v prácach, ktoré boli publikované po jeho smrti dokázal, že všetky párne dokonalé čísla sú Euklidovho typu, čím potvrdil Nikomachovu tézu. Tým definitívne zredukoval otázku párnych dokonalých čísiel na problém o Mersennových prvočíslach. To, či je ich nekonečne veľa nevieme ani dnes.

Euler prispel aj k otázke nepárnych dokonalých čísiel. Dokázal Descartovo tvrdenie a šiel ďalej. Dokázal, že každé nepárne dokonalé číslo má tvar $(4n+1)^{4k+1}b^2$, kde $4n+1$ je prvočíslo. Iný typ výsledku dokázal J. J. Sylvester v r. 1888: Každé nepárne dokonalé číslo má aspoň 4 rôzne prvočíselné delitele. Dnes vieme, že nepárne dokonalé číslo musí mať aspoň 300 cifier, aspoň 8 rôznych prvočíselných faktorov, a prvočíselného deliteľa $>10^6$. Jeho druhý najväčší prvočíselný deliteľ musí byť aspoň 10^4 a tretí najväčší aspoň 100. V r. 1958 Perisastri dokázal, že ak n je nepárne dokonalé číslo, tak $\frac{1}{2} < \sum_{p|n} \frac{1}{p} < 2\log\frac{\pi}{2}$.

V r. 1913 L.E.Dickson dokázal, že existuje len konečne veľa nepárnych dokonalých čísiel n s daným počtom k rôznych prvočíselných deliteľov. V r. 1994 Heath-Brown dokázal, že pre takéto n platí $n < 4^{4^k}$, atď. Čitateľa odkazujeme pre nedostatok miesta na ďalšiu literaúru, napr. [11], [12], [26].

To všetko naznačuje, že nepárne dokonalé číslo asi neexistuje, ale dokázať to stále nevieme.

5 Keď si nevieš niečo dokázať, zovšeobecňuj

V súčasnosti existuje mnoho variant zovšeobecnenia dokonalých čísiel. Uvedieme len tri z nich:

1. Obmedzíme množinu deliteľov. Napr. vezmeme len tzv. unitárne delitele. Deliteľ d čísla n sa nazýva *unitárny*, ak čísla d a n/d sú nesúdeliteľné. Číslo n sa nazýva *unitárne dokonalé,* ak sa rovná súčtu vlastných unitárnych deliteľov. Zatiaľ poznáme

[34] Do svojho exemplára Diofanta napísal Fermat známu poznámku o nedostaku miesta na okrajoch k tomu, aby tam napísal dôkaz tzv. veľkej Fermatovej vety, že rovnica $x^n + y^n = z^n$ nie je rešiteľná v prirodzených číslach x, y, z pre $n > 2$.

len 5 takýchto čísiel: 6, 60, 90, 87360, 146361946186458562560000. Vieme, ale že neexistuje nepárne unitárne dokonalé číslo.
2. Rozšírime pojem prirodzeného čísla na iné štruktúry. Napr. analóg dokonalého čísla v okruhu Gaußových celých čísiel je vyšetrovaný v [16]. Vyžaduje však väčšiu technickú prípravu, a preto nebudeme zachádzať do podrobností.
3. Upravíme definíciu súčtu. Namiesto súčtu uvažujme ich harmonický stred, napr. číslo 6 má 4 delitele 1, 2, 3 a 6. Ich harmonický stred je $\frac{4}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2$. Označme harmonický stred deliteľov čísla n symbolom $H(n)=\frac{\sum_{d|n}1}{\sum_{d|n}1/d}$. Ak harmonický stred je celé číslo, tak číslo sa nazýva *harmonické číslo* alebo *Oreho číslo*.[35] Ore dokázal, že každé dokonalé číslo je Oreho číslom. V r. 1955 dokázal Laborde, že n je párne dokonalé číslo vtedy a len vtedy, keď $n=2^{H(n)-1}(2^{H(n)}-1)$. V dôsledku toho, ak n je párne dokonalé číslo, tak $H(n)$ je dokonca prvočíslo.

   Ore vyslovil hypotézu, že $H(n)$ nie je celé, ak $n>1$ je nepárne číslo. To by znamenalo, že neexistuje nepárne Oreho číslo >1. Ak je to pravda, je problém nepárnych dokonalých čísiel vyriešený.

Týmto nie sú možnosti zovšeobecnenia pojmu dokonalého čísla zďaleka vyčerpané. Označme $s(n)=\sum_{d|n,\,d<n} d$ súčet alikvótnych častí čísla n. Číslo n sa nazýva *násobne dokonalé*, ak $n\,|\,s(n)$, špeciálne ak $s(n)=(k-1)n$ číslo sa nazýva *k-násobne dokonalé*. Napr. $s(120)=240$, t.j. 120 je 3-násobne dokonalé číslo. Existuje hypotéza, že pre každé $k>2$ existuje len konečne veľa *k*-násobne dokonalých čísiel.

Ak n je dokonalé, tak $s(n)=n$. Vzniká otázka, ako sa chová postupnosť iterácii funkcie $s(n)$, t.j. postupnosť n, $s(n)$, $s(s(n))$, ..., $s^k(n)=s(s^{k-1}(n))$, ... Catalan a Dickson sa domnievali, že každá takáto postupnosť je ohraničená. Napr. $s^{117}(138)=179931895322$, ale $s^{177}(138)=1$. Číslo $s^{469}(276)$ má 45 dekadických cifier, atď. Dnes prevláda názor, že táto hypotéza neplatí.

Literatura

[1] Acerbi F.: *A reference to perfect numbers in Plato's Theaetetus*. Archive for History of Exact Sciences 59(2005), 319–348.

[2] Bezdíček J.: *O číslech spřízněných a dokonalých*. Příloha k Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky 25(1896), 129–142, 209–224.

[3] *Dodatek redakce k článku předchozímu*, ibid. 25(1986), 225–229.

[4] Bezdíček J.: *Recenze výročných správ*. ibid. 33(1904), 156; 34(1905), 248.

[35] Ore dokázal, že súčin aritmetického stredu všetkých deliteľov čísla n s ich harmonickým stredom sa rovná samotnému číslu n.

[5] Bezdíček J.: *Eukleidovy základy* (recense knihy). ibid. 37(1908), 286.

[6] Borho W., Zagier D., Rohlfs J., Kraft H., Jantzen J. C.: *Lebendige Zahlen. Fünf Exkursionen.* Mathematische Miniaturen 1. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1981; existuje ruský preklad Moskva, 1985.

[7] Le Besgue V. A.: *Exercices d'Analyse Numérique*, Liber et Faraguet, Paris, 1859.

[8] Brentjes S.: *Die ersten sieben vollkommenen Zahlen und drei Arten befreundeter Zahlen in einem Werk zur elementaren Zahlentheorie von Ismail b. Ibrahim ibn Fallus*. NTM, International Zeitschrift für Geschichte der Medizin und Naturwissenschaften und Technik 24(1987), 21–30.

[9] Brentjes S.: *Eine Tabelle mit vollkommenen Zahlen in einer arabischen Handschrift aus dem 13. Jahrhundert*. Nieuw Arch. Wisk. (4) 8 (2) (1990), 239–241.

[10] Crubellier M., Sip J.: *Looking for perfect numbers*. History of Mathematics: History of Problems, Paris, 1997, str. 389–410.

[11] Dickson L. E.: *History of the Theory of Numbers*. Zv. 1, Carnegie Institute of Washington, 1919.

[12] Guy R. K.: *Unsolved Problems in Number Theory*. 3. vyd., Problem Books in Mathematics. Springer – Verlag, New York, 2004.

[13] Heath T.: *A history of Greek mathematics*. Zv. 1, Clarendon Press, Oxford, 1921.

[14] Lightfoot J. L.: *An Early Reference to Perfect Numbers? Some Notes on Euphorion, SH 417.* The Classical Quarterly, New Series 48(1998), No. 1, 187–194.

[15] Manteuffel H. G.-K.: *Na počiatku bol abakus*. Smena, Bratislava, 1981.

[16] McDaniel W.: *Perfect Gaussian integers*. Acta Arithemetica 25(1974), 137–144.

[17] Melfi G.: *On two conjectures about practical numbers*. J. Number Theory 56(1996), 205–210.

[18] Menninger K.: *Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl*. 3. vyd., Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1958.

[19] Nicomachus of Gerasa, *Introduction to Arithmetics*. (translated into English by M.L.D'Oooge) University of Michigan Studies, Humanistic Series XVI, The Macmillan Company, New York, 1926.

[20] Ore Ø.: *On the averages of the divisors of a number*. American Mathematical Monthly 55(1948), 615–619.

[21] Picutti E.: *Pour l'histoire des sept premiers nombres parfaits*. Historia Mathematica 16(1989), 123–136.

[22] Porubský Š.: *Fermat a teorie čísel*. In: Matematik Pierre de Fermat, Cahiers du CEFRES no. 28, CEFRES (Francouzský ústav pro výzkum ve spoločenských vědách) Praha, 2002, str. 49–86.

[23] Rashed R.: *Ibn al-Haytham et les nombres parfaits*, Historia Mathematica 16(1989), 343–352.

[24] Rashed R.: *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*. London, 1994.

[25] Reich U.: *Hudalrichus Regius (Ulrich Rieger) und die perfekten Zahlen*. In: Visier- und Rechenbücher der frühen Neuzeit, Rainer Gebhardt (editor): Band 19 der Schriften des Adam-Ries-Bundes e. V. Annaberg-Buchholz Beiträge des wissenschaftlichen Kolloquiums vom 18. 4. – 20. 4. 2008 in der Berg- und Adam-Ries-Stadt Annaberg-Buchholz, 2008, str. 75–84.

[26] Ribenboim P.: *The Little Book of Digger Primes*. 2. vyd., Springer, New York, 2004.

[27] Richardson L. J.: *Digital reckoning among the ancients*. American Mathematical Monthly 23(1916), 7–13.

[28] Saias E.: *Entiers à diviseurs denses 1*, J. Number Theory 62(1997), 163–191.

[29] Sieprinski W.: *Teoria liczb* (wydanie trecie, powiekszone), Monografie matematyczne zv. XIX, Warszawa – Wroclaw, 1950.

[30] Srinivasan A. K.: *Practical numbers*. Current Science 17(1948), 179–180.

[31] Stewart B. M.: *Sums of distinct divisors*. American Journal of Mathematics 76(1954), 779–785.

[32] Taisbak C. M.: *Perfect numbers a mathematical pun?* Centaurus 20(1976), 269–275 (1977).

[33] Wikipedia (The free encyclopedia): *Chinese number gestures* [online]. Posledná revízia 3. júna 2008 [cit. 7. 6. 2008]. http://en.wikipedia.org/wiki/Chinese_number_gestures.

[34] Wikipedia (The free encyclopedia): *Babylonian astrology* [online]. Posledná revízia 5. júna 2008 [cit. 10. 6. 2008]. http://en.wikipedia.org/wiki/Babylonian_astrology

[35] Williams B. P., Williams R. S.: *Finger Numbers in the Greco-Roman World and the Early Middle Ages*. Isis 86 (1995), 587–608.

Adresa

Prof. RNDr. Štefan Porubský, DrSc.
Ústav informatiky AV ČR, v.v.i.
Pod Vodárenskou věží 2
182 07 Praha 8 – Libeň
e-mail: *porubsky@cs.cas.cz*

PRAVDĚPODOBNOST PŘED PASCALEM A FERMATEM

IVAN SAXL

1 Úvod

Pravděpodobnostní uvažování má tři různé roviny. První a nejrozsáhleji využívaná je oblast lidských reakcí na nejisté jevy běžného života; jeho zdrojem je vědomé i podvědomé zpracování osobních zkušeností a hlouběji se jím zabývají psychologie a filosofie myšlení. Druhou oblastí je rozhodování o nejistých jevech prostřednictvím k tomu určených institucí, jimiž jsou soudy, zákonodárné a společenskou etiku určující sbory (např. církve a jiné občanské organizace), vládní organizace, zdravotnictví, ekonomické a průmyslové jednotky i komplexy, a v neposlední řadě i věda, jejíž dohady i poznatky vytvářejí prostředí, v němž dochází k rozhodování o budoucnosti. Třetí oblastí je omezený soubor jevů, k nimž lze použít striktně matematický přístup spočívající v jejich klasifikaci a srovnání z hlediska možnosti uskutečnění. Jedině tato třetí oblast je schopna své závěry bezrozporně vyjadřovat číselně. Na rozdíl od historické zkušenosti lidstva běžné chápání pravděpodobnosti nejčastěji omezujeme na třetí z uvedených oblastí a tomuto přístupu podřizujeme rodinnou i školní výchovu v ostrém kontrastu ke známému výroku biskupa Butlera: Pravděpodobnost je pravým průvodcem života.[1] Z tohoto omezeného pojetí vychází i časté konstatování, že teorie pravděpodobnosti vznikla v XVII. století v korespondenci Blaise Pascala s Pierrem de Fermatem z roku 1654 při řešení úlohy o rozdělení sázky[2]. Její pokračování v pracích Huyghense, Montmorta, De Moivrea i Laplace[3] se zabývalo převážně aplikacemi na hry typu hod mincí či kostkou. Rovnost možností výsledků náhodného jevu se tak stala význačným rysem teorie, i když v některých úlohách se uvažovaly různé schopnosti hráčů, ovšem vyjádřené pevnými hodnotami.

Je zřejmé, že jeden letopočet nemůžeme přiřadit žádné z obou prvně jmenovaných oblastí pravděpodobnosti. Intuitivním, na zkušenosti založeným řešením nejistých situací se nemohli vyhnout ani naši nejvzdálenější předchůdci a nejspíš ani žádní živí tvorové. Problematika úzce souvisí s odezvou, kterou v našich myslích a v podvědomí mají vnější vlivy, a např. díla J. Locka, D. Huma a G. Berkeleye se jí systematicky zabývají v rámci sociální filosofie i individuální psychologie. V teorii pravděpodobnosti je tato problematika předmětem epistemologické interpretace pravděpodobnosti v dílech V. Šimerky, J. M. Keynese, F. P. Ramseye, Bruno de Finettiho aj.

---

[1] Probability is the very guide of life.] Joseph Butler (1692–1752), biskup v Bristolu a poté v Durhamu, autor vlivné knihy *Analogy of Religion*, namířené proti volnomyšlenkářům. Butler vysvětluje lidskou povahu jako výsledek interakce tří složek: vášní s náklonnostmi, sebelásky a dobroty, a dále ze složky regulační – svědomí.

[2] Předpokládejme, že uzavřenou sázku vyhraje ten ze dvou hráčů, který dohodnutým způsobem jako první získá tři body. Za stavu 2:0 je hra přerušena; jak se rozdělí sázka? Kombinatorické řešení je založeno na výčtu všech kombinací tří maximálně možných her: AAA, ABA, AAB, BAA, ABB, BAB, BBA, BBB. Všechny trojice jsou stejně pravděpodobné a hráč bez bodu vyhrává pouze v jediném případě z osmi, tj. když vyhraje třikrát za sebou (např. BBB). Ve skutečnosti by se ovšem hrálo pouze do prvé výhry hráče A, takže reálné jsou pouze čtyři hry, ovšem s různými pravděpodobnostmi P(A) = ½, P(BA) = ¼ a P(BBA) = P(BBB) = ⅛; výsledek je ovšem stejný.

[3] Úmyslně v tomto seznamu význačných tvůrců teorie pravděpodobnosti chybí jméno patrně nejdůležitější – Jakob Bernoulli, který si na rozdíl od uvedených průkopníků teorie pravděpodobnosti existenci nenumerických pravděpodobností v důležitých rozhodování byl plně vědom, jak dokazuje IV. část jeho *Ars Conjectandi*.

Předmětem příspěvku je druhá zmíněná oblast užití pravděpodobnosti v organizaci lidské společnosti. Výchozím bodem je kniha Jamese Franklina *The Science of Conjencture*[4], *Evidence and Probability before Pascal* [7], některé další práce tuto knihu doplňující a publikované v poslední době v internetovém časopise *Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique* (http://www.jehps.net/) [1], [2], [14], [15], [17], [18] a dále monografie [6] a [9].

2 Věda o domněnce

2.1 Soudnictví

Společenské soužití vyžaduje přijetí pravidel a ochotu společenství se jim podřídit. Při jejich porušení či uplatňování je role rozhodčího (náčelníka, šamana, soudce, kněze) nezbytná. Rozhodčí se vesměs snaží o co nejpravděpodobnější rekonstrukci minulé události na základě neúplných a různě modifikovaných podkladů. Metody posuzování prohřešků, nároků, rozporných a zájmy zúčastněných ovlivněných výpovědí i předložených písemných materiálů se v průběhu dějin vyvíjely různě podle okamžité společenské situace.

Z období egyptské Staré říše (6. dynastie, 2200 let př. Kr.) se dochovala zpráva o řešení pozůstalostního konfliktu mezi členem rodiny a držitelem písemného dědického nároku podepsaného zesnulým. Soudní rozhodnutí si vyžádalo potvrzení písemnosti třemi spolehlivými svědky. V dalších případech z pozdější doby byli dotazovány sochy bohů, a kněz oznámil jejich souhlas nebo odpor. Dalším odedávna používaným prostředkem rozhodování byla přísaha, k níž však býval soudcem vyzván pouze jeden z účastníků sporu a druhý se musel podřídit; soudce patrně vybral toho, jehož nárok považoval za oprávněnější. Přísaha byla někdy předepsána i zákonem.[5]

Nepřebernou zásobárnou pravidel pro řešení nejrůznějších možných i málo pravděpodobných situací přináší *talmud*[6], opírající se nejen o *Tóru* (*Pentateuch*, tj. pět knih Mojžíšových), zejména o knihu *Numeri*, ale uvádějící i nezřídka rozporné názory rabínských škol. Židovským zákoníkem je především část talmudu nazvaná *mišna*[7], která vznikla na přelomu druhého a třetího století jako reakce na nejednoznačné interpretace pokynů *Tóry* a představuje tak srozumitelnější kodifikaci jejích příkazů. Druhou částí talmudu je *gemara*, soubor diskusí rabínů nad mišnou. Jako celek talmud představuje nejen soubor náboženských předpisů, ale i celé trestní a občanské právo.[8] V talmudu i v další rabínské literatuře chybějí vzorce, obsahuje však řadu příkazů a doporučení v situacích, vyžadujících pravděpodobnostní úvahu, náhodný výběr, posouzení postačující či naopak nedostatečné evidence atd. Po téměř dvě tisíciletí jsou talmudické problémy diskutovány, v posledních třech až čtyřech stoletích jsou hledána vysvětlení

[4] Název je připomínkou knihy Jakoba Bernoulli *Ars Conjectandi* [Umění domněnky] .

[5] Např. babylonský Chammurapiho zákoník (1780 př. Kr.) v § 131 určuje: Jestliže něčí manželku nařkl její manžel z nevěry, avšak ona nebyla dopadena, když spala s jiným mužem, odpřísáhne tato žena při bohu a vrátí se do svého domu.

[6] Talmud se vyskytuje ve dvou verzích: jeruzalémské (kolem 400) a babylonské (427–560). Na internetové stránce http://www.come-and-hear.com/tcontents.html je anglický překlad babylonského talmudu s rozsáhlými komentáři a možností stažení.

[7] Podle slova *šana*, tj. opakovat, rozumí se s cílem zapamatovat si. Je opakem slova *mikra*, značícího text určený ke čtení, jímž byla Tóra.

[8] V Tóře samotné je jediným příkladem soudního rozhodování Šalomounův soud nad dvěma ženami svářícími se o dítě (I. Král. 3:16–28). Význam práva však plyne z jediné žádosti Šalomouna k Bohu poté, co byl ustanoven králem: Dejž tedy služebníku svému srdce rozumné, aby soudil lid Tvůj, a aby rozeznal mezi dobrým a zlým (I. Král. 3:9). Tato i všechny další biblické citace se vztahují k poslednímu kralickému vydání z roku 1613.

jejich řešení na základě okamžitého stavu teorie pravděpodobnosti. Skutečnost, že se prakticky vždy najdou, je víc než pozoruhodná a vzbuzuje dojem, že pravděpodobnostní uvažování bylo u židovských autorů již v první polovině prvního tisíciletí po Kr. dosti rozvinuté. Náhoda byla tradičně využívána především jako prostředek k řešení nejednoznačných situací a její „rozhodnutí“ bylo považováno za vyjádření Boží vůle ve věcech podstatných.

V liturgii i pro nalezení práva[9] bylo nejvíce rozšířeno losování z urny, jehož výsledek byl chápán jako vyjádření Boží vůle, např. při dělení majetku, dědictví atd. Příkladem je dělení země mezi izraelské kmeny pomocí losování uskutečněného na přímý příkaz Boží[10] a popsané podrobně v knize Josue, kap. 14 až 16.

V záležitostech denního života byla přítomnost náhody běžně předpokládána a v jednotlivých případech se tvůrci talmudu pokoušejí zahrnout co nejvíce možných situací a pro ně udat pravidla. Při rovnosti šancí se volí ortodoxnější řešení.[11] Udány jsou i směrnice pro výběrová šetření; podle okolností obvykle dva až tři prvky dostatečně reprezentují celý soubor. Například řemínky (tefilin, řemínky se schránkou obsahující citáty z Tóry) jsou rituální předměty, které musejí mít požadované vlastnosti; při modlitbě jeden z nich obepíná paži, druhý je obtočen kolem hlavy. Jestliže je třeba posoudit několik svazků pocházejících od různých neschválených výrobců, je třeba z každého souboru odzkoušet dva řemínky na paži a jeden na hlavě či naopak; tedy tři reprezentují celý svazek. V jeruzalémském talmudu se připouští jako postačující i výběr dvou elementů ze svazku za předpokladu, že jsou stejného původu.

Případ matky, jejíž první i druhý syn zemře po obřízce, je rovněž řešen tak, že třetí syn nemusí být obřezán a je zvažováno, zda osvobození od obřízky se nemá vztahovat i na děti jejích sester. Zde se však jedná spíše o řešení mezní situace než o úsudek na základě výběru dvou elementů, který ostatně nelze považovat za náhodný. Početnost postačujícího výběru ovšem závisí také na rozsahu souboru, jak ukazují následující pravidla: *Ve městě je 500 vojáků, tři zemřou ve třech dnech po sobě následujících. Pak je to mor.* A dále: *Ve městě je 1500 vojáků, devět jich zemře ve třech dnech po sobě následujících. Pak je to mor*.

Jako příklad textu uveďme aspoň traktát *Bava batra* [Poslední brána], v jehož IX. kapitole jsou zajímavá pravidla pro dělení dědictví mezi potomky: velký majetek dědí synové a z něj jsou povinni se starat o své sestry, malý majetek dědí rovným dílem dcery a synové se musejí starat sami o sebe, přesněji mají jít žebrat.[12]

---

[9] Přísl. 18:18: *Los pokojí svády, a mezi silnými rozeznává* (podle komentáře *silní* jsou ti, kteří mají mezi sebou velký spor).

[10] Numeri 26:55: *Avšak losem ať je rozdělena země, vedlé jmen pokolení otců svých dědictví vezmou*.

[11] Ve městě je devět řeznictví s košer masem, jedno s masem nečistým. Na ulici je nalezen kus masa neznámého původu. Šance, že pochází z košer řeznictví je 9:1, a tedy je lze považovat za košer podle „zákona většiny“. Když si však někdo donese domů maso a nepamatuje si, zda je koupil pro sebe nebo pro psa, jsou šance vyrovnané a maso je nutno považovat za nečisté.

[12] ***MISHNAH***. [IN THE CASE OF] ONE WHO DIES AND LEAVES SONS AND DAUGHTERS, IF THE ESTATE IS LARGE, THE SONS INHERIT [IT], AND THE DAUGHTERS ARE MAINTAINED [FROM IT]. [IF] THE ESTATE IS SMALL, THE DAUGHTERS ARE MAINTAINED [FROM IT], AND THE SONS SHALL GO BEGGING ADMON SAID, 'AM I TO BE THE LOSER BECAUSE I AM A MALE! R. GAMALIEL SAID: ADMON'S VIEW HAS MY APPROVAL.

GEMARA. What is considered a large estate? – Rab Judah said in the name of Rab: Out of which both may be maintained for twelve months. When I recited this before Samuel, he said, 'This is the view of R. Gamaliel b. Rabbi, but the Sages say that [the estate must be large enough] to provide for the maintenance of both until they reach their majority'. [So] it was also stated [elsewhere]: When Rabin came, he said in the name of

Manželské právo bylo složité, a postavení partnerů bylo různé. V případě nevěry měl muž právo na rozvod, i když to nebylo úplně jednoduché, pro ženu nebyla důvodem k rozvodu ani dlouhodobá nezvěstnost manžela.[13] Uznaným důvodem však bylo nevhodné manželovo zaměstnání.[14]

Výčty možných okolností posuzované události jsou vždy extrémně podrobné[15] a role soudců je tak značně usnadněna. Pravidlem bylo, že pokud nějaká situace byla trvale obecně známá, pak změnu bylo nutno dokázat (např. smrt zmizelé osoby, pro zrušení manželství však výjimečně jediný svědek). Závažné kriminální přečiny musely být dokázány zcela bezesporně a tento požadavek se objevuje i v římském právu. Počty povinných svědků se lišily – od jednoho po tři; vyloučeni byli přátelé i nepřátelé obviněného. Za zmínku stojí, že osobní přiznání nemělo žádný význam (patrně proto, že obviněný nemohl být ke svému případu nestranným svědkem), a proto také neexistovalo útrpné právo. Členové rodiny svědčit mohli, ale výlučně na straně žaloby.

Po rozpadu západořímské říše mělo na soudnictví po několik století silný vliv germánské kmenové právo, v němž role náhody byla značná, ovšem jiným způsobem než v právu židovském. Charakteristické byly v mnoha případech zvykové důkazy pomocí „vyšší moci“, spočívající v boji stran zúčastněných ve sporu, nebo zkoušky ohněm, vodou či losem, souboje a přísahy. Z karolinské doby (z roku 816) se dochoval následující příkaz zákonné procedury: Jestliže jedna strana podezřívá svědky ze zaujatosti, má si přivést svědky vlastní. *Když se však obě skupiny svědků nedohodnou, pak z každé skupiny je vybrán jeden a takto určení svedou boj se štíty a kopími. Ten, jehož strana prohraje, je křivopřísežník a ztratí pravou ruku* (citováno podle[7]).

Systematicky se po celé první tisíciletí rozvíjela církevně právní pravidla, založená na závěrech koncilů a papežských listech. Významným příspěvkem k církevnímu právu se stal soubor u nás nazývaný *Pseudoisidorské dekretálie* [Pseudo-Isidorian Decretals, False Decretals], sepsaný v letech 847 až 852 ve Francii a údajně obsahující starší papežské dekrety.[16] Na počátku nového tisíciletí však byl nesystematicky uspořádaný soubor již jen

R. Johanan, (others say [that it was] Rabbah b. Bar Hanah [who] said it in the name of R. Johanan): When [the estate is large enough] to provide for the maintenance of both until they have reached their majority, it is [considered] large; if less, it is regarded as small. And if [the estate] does not suffice for both until they have reached their majority.

[13] Babylonský talmud, traktát Jevamot 88a.

[14] Žena je oprávněna požádat o rozvod, když se jí manželovo povolání hnusí (např. sběrač psích lejn; užívala se v koželužství) a to i tehdy, kdy je před uzavřením manželské dohody znala a domnívala se, že jí to vadit nebude, ale následně zjistila, že to nemůže vydržet.

[15] Uveďme dva příklady. 1) Jestliže si někdo vypůjčí krávu a majitel ji pošle po svém synovi, otroku, zástupci nebo po synovi toho, kdo si ji vypůjčil, jeho otroku nebo jeho zástupci a zvíře pojde (rozumí se cestou), ten, kdo si ji vypůjčil, je prost zodpovědnosti. Jestliže majiteli však ten, kdo si krávu půjčuje, řekl: Pošli krávu po mém synovi, otroku nebo zástupci, nebo Pošli ji po svém synovi, otroku nebo zástupci, anebo majitel řekl: Pošlu ti ji po svém synovi, otroku nebo zástupci... a ten, kdo si ji vypůjčil, řekne Pošli, odpovědnost je na člověku, který si krávu vypůjčil ([3], s. 397). 2) Jestliže někdo svěřil peníze směnárníkovi (do úschovy), pak pokud byly svázány v šátku, nesmí je směnárník použít, a proto, pokud by se ztratily, za ně neodpovídá. Jestliže byly volné, může je použít, a proto, pokud by se ztratily, ponese za ně odpovědnost ([3], s. 395).

[16] Soubor byl sepsán osobou nazývající se Isidor Mercator a prohlašující, že se jedná o nález starých církevních dokumentů. Obsahuje 60 listů a dekretů papežů z prvních tří století po Kristu, z nichž je 58 padělaných, soubor pravých papežských listů ze IV. až VIII. století, původní zprávu o nikajském koncilu v roce 325, vesměs pravé zprávy o 54 dalších koncilech, a také významnou padělanou Konstantinovu donaci (Konstantin údajně po svém uzdravení díky křtu od papeže Silvestra předal papeži a jeho nástupcům různé výsady, mezi nimi i přednostní postavení ve srovnání s jinými církvemi; dokument vznikl patrně koncem VIII. století v souvislostí s císařskou korunovací Karla Velikého papežem). Cílem souboru bylo posílení biskupů v jejich sporech s lokálními sekulárními představiteli ve vznikajících městech; vyjímal

obtížně použitelný. Na další vývoj církevního práva měl vliv nový soubor nazvaný *Concordia discordantium canonum* [Shoda neshodujících se kánonů], sestavený kolem roku 1140 mnichem Gratianem. Běžně je pro něj používán název *Gratianův dekret* a 4000 kapitol obsahuje systematicky seřazené papežské listy, příkazy, koncilová usnesení a další pravidla. Církevní právo tak do jisté míry předběhlo roztříštěné právo civilní.

Nález souboru římského práva na konci XI. století[17] výrazně změnil situaci, i když snaha o vytvoření systematického zákonodárství se datuje již od císaře Oty I. (912–973, vládl od roku 936). Boloňská univerzita byla roku 1088 založena výhradně s cílem studovat *Corpus iuris civilis* a zároveň se objevuje i první generace *glosátorů*, tj. vykladačů a interpretů justiniánského práva. V římském právu byla specifičnost jednotlivých případů respektována[18] více než v právu církevním i židovském. Podle oddílu 22.5 o svědectví v Digestech: *... soudní vyšetřování nemá být vázáno k jedné formě důkazu. Musíte soudit podle vašeho vlastního přesvědčení, podle toho, co, čemu věříte a s ohledem na to, co nepovažujete za prokázané.*[19] Útrpné právo bylo součástí římského soudnictví, byli mu podrobováni zvláště otroci, ale vcelku patrně nebylo zneužíváno. V některých nejasných případech platila presumpce rozsudku; např. i při nejasnosti, zda je dítě potomkem osoby zanechavší finanční dědictví, mělo být rozhodnuto ve prospěch dítěte.

Nalezený soubor právních dokumentů vzniklých v různých dobách byl z mnoha hledisek plný rozporů, navíc naprostou většinou chybělo odůvodnění jednotlivých pravidel. Aby byl soubor použitelný jako základ středověkého práva, musel být vyvinut obecný přístup k řešení nejasností. Ten spočíval ve shromáždění všech textů k danému problému, posouzení jejich rozporů a v hledání obecných principů, s jejichž pomocí by texty mohly být vysvětleny, sjednoceny a případně upraveny. Každý řešený případ je v dílech glosátorů podrobně komentován a je velkým příspěvkem středověkých právníků k rozvoji evropského myšlení, byť i byl později pro nadměrnou podrobnost často kritizován.

Jedním z nejdůležitějších problémů bylo stanovení přesvědčivého důkazu v soudním řízení. Poté, co bylo rozhodnuto, že dvě souhlasná nezávislá svědectví jsou postačující jako plný důkaz, byl vytvořen termín *poloviční důkaz – semiplena probatio* – pro svědectví pouze jediného svědka v případě, že žádný další svědek se nenašel. K této situaci se vázala různá doporučení, sepsaná jedním z nejvýznamnějších glosátorů Azo

---

biskupské soudy z pravomoci místních civilních soudů i arcibiskupů a podřizoval je přímo papeži. Dekretály získaly papežské uznání, sehrály důležitou roli ve sporech římské kurie s konstantinopolským patriarchou a římskoněmeckými císaři a jsou citovány i v *Dekretu Gratianově* (viz níže). Jejich nepravost byla prokázána až v XVI. století; mezi jejich kritiky patřili i Mikuláš Kusánský a Juan de Torquemada. Za zmínku stojí pravidlo z této sbírky, podle něhož obviněný biskup musí být usvědčen 72 svědky, přední kněz s vyšším svěcením 44 svědky, nejvyšší kněz města Říma 36 svědky atd., až po nižšího klerika a chrámového dveřníka, jež usvědčí už pouhých 7 svědků. K odsouzení mohlo tedy dojít jen obtížně.

[17] Zdrojem našich poznatků o římském právu je rozsáhlý soubor zákonů nazvaný *Corpus Iuris Civilis* se čtyřmi částmi: *Codex*, *Institutiones*, *Novellae* a především nejrozsáhlejší *Digesta seu Pandectae* [Všeobsahující uspořádání]. (Najdeme jej na adrese www.ancienttexts.org/library/latinlibrary/justinian/digestXX.html, kde dosazujeme XX = 1, 2,..., 50 a dostaneme vybranou knihu z padesáti tvořících *Digesta.*) Soubor byl původně sestaven na příkaz východořímského císaře Justiniána (527–565) na základě děl starých právníků.

[18] V Digestech 48.19.5 se s odkazem na císaře Trajana píše, že je lépe dopustit, aby zločin byl nepotrestán než odsoudit nevinného [satius enim esse impunitum relinqui facinus nocentis quam innocentem damnari].

[19] Digest 22.5.3.2: ... hoc ergo solum tibi rescribere possum summatim non utique ad unam probationis speciem cognitionem statim alligari debere, sed ex sententia animi tui te aestimare oportere, quid aut credas aut parum probatum tibi opinaris.

z Boloně (asi 1150–1220). V takovém případě bylo možné požadovat přísahu, v dokumentech bylo provedeno srovnání písem a bylo bráno v úvahu také obecné mínění o obžalovaném, případně obecná znalost o případu (*fama*). Tu a tam se vyskytovalo i připuštění Božího soudu (*ordálie*), tj. rozhodnutí založeného na náhodě. Avšak IV. lateránský koncil v roce 1215 církevním představitelům striktně zakázal podílet se na podobné praxi. V této době rovněž došlo k vytvoření dodnes přetrvávajícího rozdílu mezi anglosaským a kontinentálním právem. Porota jako soudní orgán se začala tvořit za Jindřicha II. Plantageneta v souvislosti s jeho snahou omezit církevní soudnictví a po zákazu ordálií, tj. zhruba v roce 1220, se stala běžnou formou v Anglii.

Na evropském kontinentě zůstal rozhodující osobou soudce, jeho rozhodnutí se však muselo řídit obecně známými pravidly o přijatelnosti důkazů, zacházení se svědky a obžalovanými atd. Důsledkem této často obtížné praxe, komplikované církevním požadavkem nespoléhat se pouze na indicie a podezření, aby nebyl odsouzen nevinný, vedlo ke snaze získat za každou cenou doznání obviněného. Nezbytným důsledkem bylo pochopitelně čím dál tím častější užití útrpného práva, a to zvláště tam, kde materiální důkazy nezbytně chyběly – při obviněních ze znásilnění, zrady, hereze a čarodějnictví. Srovnání stupně nespravedlivosti anglosaského a evropského soudnictví je obtížné – poroty si nemusely dávat takovou práci se získáním doznání a odsuzovaly bez přesvědčivých důkazů nevinné, v Evropě se zase nevinní přiznávali pod tíhou tělesného utrpení.

Řešen je rovněž problém počtu svědků a jejich důvěryhodnosti. Hostiensis[20] konstatuje, že počet nemusí být vždy brán v úvahu, neboť dva odpovědní biskupové mohou v procesu stát proti stovce zapírajících hříšníků. Pravidlo pak zní, že když se svědci podstatně liší v důvěryhodnosti, úřední autorita váží víc, než počet. Při stejném počtu důvěryhodných svědků na obou stranách je řešení obtížné a pak může být předmět sporu rozdělen. Častý případ byl však spor dvou mužů o jednu ženu a pak si mohla žena vybrat sama, pokud chtěla.

Změněné podmínky života ve XIV. století, především rozvoj mezinárodního obchodu, vyžadovaly úpravy stávajícího římského práva. Tohoto úkolu se ujali tzv. postglosátoři, kteří rozpracovali volnější interpretaci soudních předpisů a zároveň vytvořili pravidla, z nichž mnohá jsou dodnes zachovávaná, např. že svědek vypovídá pouze fakta, co bezpečně ví nebo viděl, ale nečiní z nich žádné závěry – ty jsou plně přenechány soudci. Z významných postglosátorů jmenujme alespoň Bartola ze Sassoferata (1313–1357) a Balduse de Ubaldise (1327–1400), italské právníky věnující se sepisování pravidel pro rozhodování soudců v komplikovaných případech, snažící se postihnout mentalitu soudců a pomoci jim v rozhodování v případech, kdy obě možnosti jsou stejně pravděpodobné. Objevuje se pojem *indicie*, tj. fakt s hodnotou někde mezi polovičním důkazem a neodůvodněným podezřením (např. vyhrožování, pomluvy, údajné mimosoudní přiznání atd.). V jejich pracích se také objevuje přísné rozlišování mezi civilním a trestním soudem; v druhém případě jsou požadavky na vedení procesu a výsledné rozhodnutí podstatně přísnější, aby rozsudek byl nenapadnutelný.

Vývoj evropského práva se Baldusovým dílem dovršil a zároveň zastavil; teprve Leibniz se pokoušel – nutno poznamenat, že neúspěšně – vnést číselnou reprezentaci

[20] Henry of Segusio (asi 1200–1271), nazývaný Hostiensis podle Ostie, místa, kde byl kardinálem. Význačný italský znalec církevního práva, diplomat a církevní hodnostář. Napsal několik velmi populárních knih, všeobecnou vážnost mu získala *Summa Aurea*, zabývající se vztahy mezi církví a státem, papežským primátem, soudnictvím, pravidly křesťanského života atd. Je považován za největšího kanonistu XIII. století.

alespoň do některých odvětví civilního práva[21]. O totéž se, opět neúspěšně, pokoušel Jakob Bernoulli (o vzájemné výměně názorů na využití teorie pravděpodobnosti mezi Leibnizem a Jakobem Bernoulli viz [24]). Patrně lze říci, že v zásadě stejně kvalitativní je i soudnictví současné. Sice se pomocí pravděpodobnostních úvah pokoušíme numericky vyhodnotit interakci indicií, ale pokud se jedná o rozsudek samotný, odbývá se rozhodování soudců i porotců v oblasti pravděpodobnosti nenumerické.

Renesanční soudnictví nepřispělo k rozvoji práva ničím podstatným. Doba byla plná morových excesů obyvatelstva (upalování a topení domnělých původců epidemie, především židů) a také v podstatě politických procesů s předem určeným výsledkem (především v Anglii Jindřicha VIII. a Alžběty), v nichž k odsouzení často stačil jeden nedůvěryhodný svědek. Baldusovy formulace a pravidla byly přepisovány a vysvětlovány ve dvou obecně rozšířených právních kompendiích. Giuseppe Mascardi napsal třídílný spis *De probationibus* (vyšel v roce 1584) a pávijský universitní profesor Giacomo Menochio (1532–1607) napsal dvoudílné kompendium *De praesumptionibus, coniecturis, signis & indiciis* (1587). Obě díla se udržela v oběhu více než sto let, neboť jejich studium právníkům doporučoval i Leibniz. Nic nového však tyto knihy nepřinášejí.

Speciální charakter měly soudy inkviziční, které vznikají jíž v XII. století (tzv. *Středověká* resp. *Biskupská* inkvizice s počátkem kolem roku 1184), zejména však po dekretech Řehoře IX. z let 1231 a především 1233, kdy byly svěřeny dominikánskému a františkánskému řádu. Jednalo se o velmi temnou oblast soudnictví se zvláštními předpisy, vycházejícími z předpokladu, že obviněný vždy zapírá. Pro nás je dnes těžké uvěřit v dobré pohnutky soudců, jimiž měl být na jedné straně strach z rozvratu církevního společenství herezí a čarodějnictvím, na druhé straně péče o duše souzených. Přiznání dosažené útrpným právem bylo velmi časté a jeho následné odvolání bylo považováno za opětované upadnutí do hříchu a trestáno trestem nejvyšším. Přitom prohřešek sám nebyl často jasně definován, protože stanovit pevnou hranici mezi přípustnou a nepřípustnou odchylkou od jakékoliv ideologie je nemožné.

Aniž si to obecně uvědomujeme a přiznáváme, je soudnictví nejsledovanější, nejobtížnější a zároveň nejriskantnější oblastí aplikací nenumerické pravděpodobnosti. Má dosti chmurnou historii, protože vedle mimořádné obtížnosti korektního posouzení viny či nároku se již po staletí (nebo tisíciletí?) stává obětí mocenských a ideologických snah. Možná, že za svůj úspěšný rozvoj ve XII. až XIV. století vděčí skutečnosti, že bylo vyvíjeno jako zbraň v dílnách přibližně stejně mocných protivníků: císaře a papeže. Od dob renesance je bohužel často zbraní státu proti jeho občanům a pravděpodobnost je v soudních síních Popelkou.

2.2 Filosofie a náboženství

„Filosofie a náboženství jsou staří nepřátelé pravděpodobnosti," píše J. Franklin v [7] a dokumentuje to citátem z Platóna, v němž Sókrates odmítá úvahu založenou na pravděpodobnosti poukazem na bezcennost podobně odůvodněného matematického závěru. Filosofie i náboženství se nám totiž pokoušejí sdělit, jaké to *je*, a ne, jaké to *může být*. Vše je jisté a této jistotě máme přizpůsobit své chování. Nicméně pozornost byla pravděpodobnosti v řecké filosofii věnována často, termíny εικος a πιθανον značí zhruba naše pravděpodobný a přesvědčivý. Věnuje se jí podrobně např. Aristotelés ve své *Rétorice*, napsané zřejmě jako reakce na sofistický skepticismus zavládnuvší v Akademii po Platónově smrti. Obecně rozlišuje zkušenost, založenou na opakovaném poznatku,

[21] V práci *De Conditionibus* z roku 1665, kterou napsal jako sedmnáctiletý a která je také součástí pozdějšího spisu *Specimen iuris* z roku 1672, řeší problémy podmíněných majetkových nároků.

a vědění (moudrost), jež vzniká zpracováním zkušenosti, zná příčiny, a je proto více ceněno. Jeho vztah k tomu, co je nahodilé, je spíše negativní. Připomeňme v *Metafyzice* několikrát opakované tvrzení: *... je třeba nejprve o jsoucnu nahodilém říci, že netvoří předmět vědeckého zkoumání. Známkou toho je, že se o ně nestará žádná věda, ani věda o jednání, ani věda o tvoření, ani věda, jejímž cílem je pozorování... Neboť to, co je nahodilé, je zřejmě nějak blízko toho, co není.*[22] Aristotelské názory na pravděpodobnost jsou podrobně rozebírány v [7], stručný rozbor je také v práci [12].

Stoikové vycházejí z Aristotela a rozlišují dvě pravděpodobné možnosti: možné [πιθανον] je tvrzení, které je na první pohled pravdivé, ale nemusí platit vždy, rozumné [ευλογον] je tvrzení, pro něž máme celou řadu dobrých důvodů. Zároveň však tvrzení dělí na možná, nemožná [απιθανον] a obojaká (např. počet všech hvězd je sudý) a vcelku lze říci, že dávali přednost jistotám a za velmi špatné považovali, pokud někdo měl více než jedno mínění o nějaké věci. Odmítali empirický přístup a vycházeli z představy, že pravdu resp. přírodní zákon musíme odhalit uvažováním. Pravděpodobnost v našem slova smyslu v podstatě neuvažovali. Cicero toto slovo často používá, ale nikde nevysvětluje, pouze dává triviální příklad typu: když se vypravím odtud třicet stadií do Puteoli se spolehlivou posádkou a dobrým kormidelníkem, pak při příznivém počasí se zdá pravděpodobné, že se tam bezpečně dostanu.[23]

Již v antice se však objevuje filozofický směr, pro nějž nejistota a pravděpodobnostní nazírání bylo podstatné – skepticismus. Proto se aspoň krátce zmíníme o jeho významném představiteli – Karneadovi z Kyrény.[24] Klíčovým pojmem je pro něj *pravděpodobná prezentace*, kterou přesvědčíme posluchače o jistém či opačném tvrzení, přičemž pravda je však nepostižitelná. Můžeme se jí blížit opakovanými pozorováními a posuzováním z různých hledisek či pomocí různých svědectví. Čím je problém významnější, tím více svědectví je třeba shromáždit. U Karneada se objevují mnohé z pozdějších, neřku-li dnešních přístupů: různé stupně pravděpodobnosti, realizace akce na základě odhadu vysoké pravděpodobnosti úspěchu, zvýšení pravděpodobnosti koherentními důvody a pozorováními. Výsledná pravděpodobnost je však charakteristikou vjemu či dojmu, nikoliv tvrzení samotného; jedná se tedy o charakteristiku subjektivního zdání pravdivosti či o stupeň podobnosti pravdě.

Ve starověku najdeme také přesvědčené zastánce dnešní frekvenční interpretace pravděpodobnosti (viz např. [22]), podle níž správný odhad pravděpodobnosti jevu udává jeho (relativní) četnost při dostatečně početném opakování. Ve vykopávkách Herkulanea byl nalezen rukopis knihy *De Signis* od epikurejce Filodema z Gadary (okolo roku 60 př. Kr.).[25] Na konci knihy je debata mezi stoiky a epikurejci o možnosti nalézt zákon opakovaným pozorováním. Podle stoiků platnost tvrzení, že všichni lidé jsou smrtelní, je důsledkem lidské přirozenosti (tedy je to přírodní zákon, který jsme uvažováním

---

[22] Aristotelés: Metafyzika, kniha 6, kap. 2, 1026^b (překlad Antonína Kříže).

[23] M. T. Cicero: *Academica*, kniha II (XXXI), 100: Sed si iam ex hoc loco proficiscatur Puteolos stadia triginta, probo navigio, bono gubernatore, hac tranquillitate, probabile videatur se illuc venturum esse salvum. (Projekt Guttenberg http://www.gutenberg.org/etext/14970)

[24] Karneadés z Kyrény (214/3–129/8 př. Kr.), filosof, scholarch Akademie v letech 162 až 136 př. Kr. Karneadovy názory zachytil jeho žák Kleitomachos a jsou reprodukovány (s neznámou přesností) v dílech Diogena Laertia, Plútarcha, Cicerona aj. Je znám svou velmi ostrou kritikou astrologie. Byl mimořádně vynikajícím řečníkem, schopným obhájit každý názor. Známá je jeho úspěšná obhajoba dvou názorů na spravedlnost, totiž že je dcerou moudrosti a že je dcerou hlouposti. Údajně se však jednalo o důkaz tvrzení, že pravda je skrytá a nemůže být úplně pochopena. Viz též [25].

[25] Podrobnosti o nálezech, jejich obrazová dokumentace a rekonstrukce v rámci projektu UCLA jsou na internetové stránce http://www.humnet.ucla.edu/humnet/classics/philodemus/philhome.htm

objevili). Naproti tomu podle epikurejců je to výsledek pozorování, že všichni lidé umírají, získaný logickou indukcí. Zachovaná část papyru obsahuje především stoické argumenty, podle nichž z neúplného pozorování nemohu vyvodit obecné tvrzení, a jsou také uváděny příklady zcela unikátní (např. existuje pouze jediný čtverec, jehož obsah je číselně roven obvodu), jejichž zobecnění není možné. Epikurejci nakonec připustí, že oni nemusejí znát *celou* pravdu, ale že jim stačí pravda *přibližná*.

Problém indukce s pozoruhodně správným řešením (samozřejmě aristotelovským, ale podrobně vysvětleným) najdeme i u Tomáše Akvinského[26]. Píše: *Neexistuje žádná věda o jednotlivých budoucích náhodách. Může však existovat věda, v níž jsou uvažovány z hlediska svých příčin v tom smyslu, že některé vědy znají jisté tendence k uskutečnění těch či oněch jevů...*[27] A dále Tomáš Akvinský konstatuje, že v případě náhodných výsledků lze snáze předpovědět, co se stane ve větší skupině jevů, než jaký bude jeden konkrétní jev. Svou úvahu demonstruje v traktátu *Summa contra Gentiles* na problému životně důležitém pro žebravé řády, tj. na získávání darů: *Neboť [žebravý mnich] není závislý na rozhodnutí jedince, ale na vůli mnohých. A není pravděpodobné, že v množství věřících jich bude jen málo takových, kteří nedají nezbytné těm, které obdivují pro dokonalost jejich ctností*.[28] Na jiném místě ovšem konstatuje, že množství může mít také negativní důsledky, neboť *ve své většině se lidé chovají podle svých vrozených sklonů a propadnou svým náruživostem, a jen moudří je překonají svým rozumem*.[29]

Mimořádnou postavou XIV. století je Mikuláš z Autrecourtu[30], jehož osud i dílo byly na několik století téměř zapomenuty. Zájem o jeho filosofii se datuje od počátku XX. století, v němž vyšlo a do několika jazyků bylo přeloženo celé jeho dochované dílo, bylo napsáno několik desítek článků, studií a disertací; uveďme alespoň [21], [10], [5] a také českou podrobnou studii zařazenou v knize [6]. V řadě prací je charakterizován jako význačný oponent scholastické metafyziky založené na pojmu substance, především

---

[26] Tomáš Akvinský (1225–1274), italský teolog a filosof. Přes odpor rodiny vstoupil do dominikánského řádu, studium teologie (v Kolíně nad Rýnem a Paříži) dokončil v roce 1252, velký vliv na něj měl Albert Veliký (patrně 1206–1280). Celý život učil v Paříži, Kolíně n/R. a v Neapoli. Z velkého literárního odkazu je nejvýznamnější rozsáhlá, byť nedokončená *Summa theologiae*. V letech 1270 a 1277 bylo jeho učení silně závislé na Aristotelovi odsouzeno jako heretické na základě františkány prosazované augustiniánské teologie, popírající lidskou možnost porozumět Boží vůli i přínos aristotelské filozofie k teologii. Tomáš Akvinský byl kanonizován Janem XXII. v roce 1322, v roce 1875 byla jeho teologie prohlášena za oficiální učení katolické církve. Celé jeho dílo v latině je dostupné na adrese http://www.corpusthomisticum.org/sth0000.html, anglický překlad *Summa theologiae* je na http://www.newadvent.org/summa/.

[27] Sentencia De sensu, tr. 2 l. 1 n. 8 Dicendum autem est quod de futuris contingentibus, secundum se consideratis, non potest esse scientia; sed cum in causis suis considerantur, potest de eis scientia esse, prout aliquae scientiae cognoscunt esse inclinationes quasdam ad tales effectus.

[28] Summa Contra Gentiles, lib. 3 cap. 135 n. 19 Non enim dependet ex voluntate unius, sed ex voluntate multorum. Non est autem probabile quod in multitudine fidelis populi non sint multi qui prompto animo subveniant necessitatibus eorum quos in reverentia habent propter perfectionem virtutis.

[29] De veritate, q. 5 a. 10 ad 7: Ad septimum dicendum, quod multitudo ut in pluribus sequitur inclinationes naturales, inquantum homines multitudinis acquiescunt passionibus; sed sapientes ratione superant passiones et inclinationes praedictas.

[30] Nicolas d'Autrécourt (1298/9–1369), magistr umění, posléze právník a duchovní, učil na pařížské Sorboně, v roce 1340 byl povolán do Avignonu pro podezření z hereze a po šesti letech byl odsouzen k veřejnému odvolání 66 svých tezí a k veřejnému spálení knih, bylo mu odejmuto právo vyučovat a byl poslán do vyhnanství v Métách. V roce 1350 zde byl jmenován dómským děkanem a další zprávy o něm jsou jen kusé. Z jeho díla se zachoval především nedokončený traktát *Exigit ordo* a část jeho korespondence s Bernardem z Arezza a mistrem Gilem. Jeho názory lze však rekonstruovat ze zápisů a rozsudku avignonského soudu.

však jako význačný premoderní skeptik – *středověký Hume*[31]. Při studiu jeho myšlenek nás však napadají i další jména jako Descartes, Berkeley a Leibniz.

Učení Mikuláše z Autrecourtu vychází z jediného tzv. *prvního principu*, tj. nezpochybnitelné základní teze, kterou je u něj tvrzení: *Totéž nemůže zároveň náležeti a nenáležeti témuž a v témž vztahu*[32], které lze nazvat *zákon sporu*. Vazbu mezi podstatou věcí a jejich vlastnostmi odmítá (podobně jako Duns Scotus a Ockham), a to z důvodu, že by omezovala Boží všemohoucnost (když Bůh chce, chutná voda jako víno, jak se stalo při svatbě v Káně galilejské[33]). Konstatuje, že naše vnímání je omezeno na vlastnosti věcí a jejich substance[34] buď neexistuje nebo je nepoznatelná. Svět se mu poté rozpadá na jednotliviny, přičemž odmítá vztahy příčinnosti a kauzalitu jako takovou. V rámci empirického zkoumání můžeme s kauzalitou pracovat, ale musíme si uvědomovat, že neexistuje.

Při těchto ideových východiscích ve světě nic vzájemně nesouvisí, a proto nemá smysl hodnotit odlišnosti, protože navzájem zcela nesouvisející věci nemá smysl srovnávat. Nemá smysl ani hovořit o různých stupních dokonalosti a pokud nelze mluvit o rozdílnostech mezi věcmi, není žádné rozdílnosti ani mezi nimi a jejich Stvořitelem.

Z trosek scholastické metafyziky se Mikuláš z Autrecourtu vyprošťuje atomismem. Jemu je věnováno prvních pět kapitol *Exigit ordo*, zbývajících pět se zabývá ontologií a epistemologií. Základem všeho bytí jsou neměnné a věčné atomy, věci jsou jejich náhodná seskupení, která mohou přecházet jedno v druhé a také formálně zanikat tím, že jejich atomy vytvoří konglomeráty nové a zcela jiné. Proměnlivost věcí má za následek nemožnost pravdivého poznání, neboť nemůžeme zajistit, aby věc sledovaná v jednom okamžiku byla touž věcí v okamžiku následujícím; můžeme nanejvýš předpokládat, že tomu tak *pravděpodobně* je. Při tomto přístupu se nemůžeme zastavit ani před Bohem, a proto Mikuláš z Autrecourtu konstatuje, že jisti si nemůžeme být ani existencí Boha, jakkoliv je to vysoce pravděpodobné. Uveďme ještě několik příkladů tezí odsouzených církevním soudem, o nichž ovšem Mikuláš věděl, že jsou pouze pravděpodobné, což činilo jejich odvolání o něco snazším (čísla odpovídají soudnímu protokolu v [19][35]).

---

[31] Toto označení pochází z jedné z prvních moderních prací o Mikuláši z Autrecourtu, ze studie H. Rashdalla: *Nicholas de Ultricuria, a Medieval Hume*. Proceedings of the Aristotelian Society 7(1906/7), 1–27.

[32] Impossibile est aliquid eidem rei inesse et non inesse (v záznamu avignonského soudu v knize [19], s. 151, odst. 7). Populárně řečeno: Jedno nemůže být druhé.

[33] Jan 2:1–12.

[34] Připomeňme základní rozdíly mezi realisty (univerzalisty) a nominalisty, střetávajícími se ve středověké filosofii. Realisté předpokládali, že naše poznání je objektivní a že reálně existuje něco, co přesahuje existenci věcí a co je základem jejich jsoucna. Realismus rozlišuje dva typy jsoucnosti, téměř neměnnou substanciální (*substanci*) a proměnlivou akcidentální, přičemž svými smysly vnímáme pouze jsoucnost akcidentální, tj. okamžité vlastnosti (teplota, vůně, chuť). Přitom cílem pravého vědění je právě odhalení substance věcí a celého světa. Nominalisté naopak odmítali existenci něčeho obecného nad věcmi stejně jako účast jednotlivých věcí na něčem, co je přesahuje. Realisty byli Augustin, Anselm z Canterbury, Abelard, Tomáš Akvinský, nominalisty Roscelin, Ockham, Duns Scotus a samozřejmě Mikuláš z Autrecourtu. Tento rozdílný postoj se dodnes projevuje nejen ve filosofii, ale i ve vědách; např. v matematice byli podle [6] realisty Cantor a Frege, nominalisty Brouwer a Heyting. Vztah mezi realismem a nominalismem je poněkud analogický vztahu mezi idealismem a materialismem. Konkrétně třeba představa o existenci pojmu dobra, obecné etiky, universálních lidských práv apod. patří do realistického chápání světa.

[35] Podle [19], Appendix B: (6)... quod ex eo quad una res est, non potest evidenter, evidentia ex primo principio, inferri quod alia res sit. (10)... certitudo evidentie non habet gradus. (12)... de substantia materiali alia ab anima nostra non habemus certitudinem evidentie. (14)... hec consequentia non est evidens, evidentia deducta ex primo principio: ignis est approximatus stuppe; et nullum est impedimentum; ergo stuppa comburetur. (23)... non potest

(6) Z toho, že jedna věc existuje, nelze žádným způsobem pomocí prvního principu vyvodit, že existuje nějaká jiná věc.
(10) Jistota nemá žádné stupně.
(12) O existenci hmotné substance rozdílné od naší vlastní duše nemáme dokonalou jistotu.
(14) Z prvního principu nelze odvodit žádný důsledek typu: přiblížíme oheň ke koudeli a není mezi nimi žádná překážka, pak koudel vzplane.
(23) Nadřazenost jedné věci nad druhou nemůže být spolehlivě postižena.
(25) Když něco existuje, nemůžeme si být jisti, že to není Bůh; Bohem rozumíme nejvznešenější bytost.

A přece z naprosté beznaděje těchto logických úvah nachází Mikuláš pozoruhodné východisko. Hned na prvních stránkách *Exigit ordo* se dočteme, že tento svět tvořený jednotlivými věčnými atomy je uspořádán tak, že je dobrý, a co by dobré nebylo, to neexistuje.[36]

Lze přijmout, že vše ve vesmíru je správně uspořádáno, to znamená, že lze přijmout, že existují ty věci, o nichž platí, že je dobře, že existují, a ty věci neexistují, o nichž platí opak. Tomuto tvrzení porozumíme, když přezkoumáme, co se děje s věcmi v přírodě a v umění. V záležitostech umění je to umělec, kdo stanoví, co je dobré... a lidské přední zuby jsou ostřejší, aby rozkousaly potravu a zadní zuby jsou plošší, aby ji rozžvýkaly, což je příklad, který užívá Aristotelés.

Ale není to až tak úplně jednoduché, protože věci spolu navzájem souvisejí a ovlivňují se. A tak čteme dál v *Exigit ordo*[37]:

Druhým principem je to, že bytosti ve vesmíru jsou navzájem spojené, takže jistým způsobem tu jsou jedna kvůli druhé... odstraňte souvislost horka a deště, a odstraníte také užitečnost a potřebnost domu.
Třetí princip plyne z předchozího: vesmír je tak vzájemně propojený, že nic neexistuje, pokud není dobré pro množství věcí, že to existuje, takže jedno je tu pro druhé a druhé pro další atd.
Čtvrtý princip je, že vesmír je vždy stejně dokonalý.

Mikuláši z Autrecourtu odpustíme, že se v rozebírání a skládání Vesmíru zastavil už u atomů. Ale můžeme si být jisti, že rozklad atomů na elementární částice a jejich kvantově-mechanické hry by nám schválil. Svou logikou nás však zavedl k dalšímu tématu této kapitoly, k Bohu a náboženství ve vztahu k pravděpodobnosti či naopak.

Všechna náboženství jsou založena na tvrzení, že Bůh (či bohové) existují. Pro jeho (jejich) existenci mluví především uspořádání vesmíru a našeho světa. Při teleologickém

evidenter ostendi nobilitas unius rei super aliam. (25)... quaqumque re demonstrata, nullus scit evidenter quin ipsa sit Deus, si per ‚Deum' intelligamus ens nobilissimum.

[36]... ut accipiat quod entia universi sunt rectissime disposita et quod sic res sunt sicut bonum est eas esse et sic non sunt sicut malum esset eam esse. Et ista proposition venit apud intellectum inspecto eo quod contiguit in rebus naturae et in rebus artis. In rebus artic est artifici pro mensura bonum... Dentes anteriores hominis sunt magis acuti ad dividendum cibum etposteriores magis lati ad masticandum; quo exemplo utitur Aristoteles. *Exegit ordo* [21], s. 185.

[37] Secundum principium est istu, quod entia universi sunt connexa ad invicem, ita quod quadammodo unum videtur propter alterum... unde tolle conservationem a caumatibus et pluviis, statim videtur tolli bonitas et amabilitas domus.
Tertium principium est quod videtur sequi ex praecendent: ex quo universum est sic connexum, nihil est quin sit bonum toti multitudini entium ipsum esse; unde hoc ens est propter illud et illud propter aliud et sic semper.
Quartum principium est istud, quod universum est semper aequaliter perfectum... *Exegit ordo* [21], s. 186.

přístupu (např. u Tomáše Akvinského[38]) vyzdvihujeme řád a účelnost světa, v němž i nemyslící věci vzorně plní zadané úkoly (chování Slunce, Měsíce, planet i hvězd, vzájemně sladěný život organizmů na Zemi), a tento řád je nutně Božím dílem. Druhý přístup naopak zdůrazňuje, že na počátku musel panovat nezvládnutelný chaos a byl to Bůh, kdo do této náhodnosti vnesl řád. Důkazy existence Boha však někteří teologové popírali, protože dialektiku[39] založenou na našem poznání považovali za omezenou. Jedním z výrazných a obecně uznávaných kritiků byl Jan ze Salisbury.[40] Zastával názor, že teologie není plně závislá na filosofii, zvláště pak ne na poznání, protože nadpřirozené pravdy se nemohou přizpůsobit lidskému rozumu. Konstatoval, že žádný náš poznatek není absolutní, což demonstroval na představě, že žena může porodit dítě, jen měla-li předtím styk s mužem; a přece nejčistší nedotčená panna přivedla na svět dítě – Ježíše Krista. Podobně naše představa, že kdo se narodí, musí také zemřít, je příkladem jiného našeho poznatku vyvráceného Kristem. Biblické zázraky rovněž prokazují neplatnost řady jiných obecně uznávaných pravd. Jan ze Salisbury na základě těchto teologicky nezpochybnitelných příkladů popírá možnost cokoliv dokázat, neboť dokázané nesmí mít žádné výjimky, ani takové, které jsou způsobeny zázrakem. Všechny naše poznatky jsou proto jenom pravděpodobné a tato pravděpodobnost je tím větší, čím je snáze posouzena osobou vzdělanou. Jev, o němž nejsme příliš přesvědčeni, je nejistý, jiný je naopak podle našeho omezeného poznání tak pravděpodobný, že jej můžeme učinit předmětem své víry. Tomáš Akvinský naopak souhlasil s tehdy obecně přijatým názorem, že přinejmenším filosofická a matematická tvrzení lze bezpečně (tj. na 100%) prokázat; o něco menší jistotu připouštěl ve fyzice, která se zabývá proměnlivou hmotou.

Dalším zásadním teologickým a metafyzickým problémem bylo stvoření světa Bohem. Scholastikové byli vesměs přesvědčenými aristoteliány a Aristotelés tvrdil, že dokázal, že svět je věčný a tedy nestvořený. Naopak podle bible byl svět dílem Božím a jeho stvoření bylo podrobně popsáno. Tomáš Akvinský v této kritické záležitosti nemohl svého řeckého učitele opustit, a proto tvrdil, že problém je nerozhodnutelný, obě možnosti – stvoření i věčnost – jsou stejně možné, a tedy nám nic nebrání, abychom si ve shodě s křesťanskou víru zvolili první z nich. Měl však velmi silného oponenta ve svém současníkovi Sigerovi z Brabantu[41], představiteli tzv. latinského averroismu[42]. Siger je

[38] Tomáš Akvinský dokazoval existenci Boha ještě dalšími čtyřmi způsoby. 1) Mnohé kolem nás je v pohybu (opět Slunce, Měsíc atd.), někdo ten pohyb musel způsobit. 2) Pozorujeme řetězce příčin, v nichž jedna je příčinou druhé, druhá příčinou třetí atd., a nic není příčinou sebe sama; na počátku těchto řetězců tedy musela nutně být Prapříčina. 3) Různé věci přestávají být, je tedy třeba připustit, že jejich existence je možná, nikoliv však nutná a nic nevzniká samo ze sebe. Pak však někdy muselo být něco jako Počátek všeho tohoto možného, ale nikoliv nutného. 4) Ve všech oblastech života existuje stupnice hodnot: jedno je lepší, pravdivější, ušlechtilejší atd., než druhé. Něco tedy musí být na vrcholu této stupnice hodnot. Zároveň však Tomáš konstatuje, že Boha nelze poznat přímo, ale pouze z jeho díla; tento způsob reflektuje jeho pět způsobů.

[39] Připomeňme, že veškeré vědění se od raného středověku učilo v rámci svobodných umění, která se dělila na *trivium*, zahrnující rétoriku, gramatiku a dialektiku, a *quadrivium*, obsahující aritmetiku, geometrii, astronomii a hudbu. Jiné oblasti vědění byly zahrnuty do těchto svobodných umění; např. etika a historie patřily do rétoriky, gnozeologie a metafyzika do dialektiky.

[40] Jan ze Salisbury (asi 1120–1180), anglický kněz, diplomat, spisovatel a filosof, sekretář Tomáše Becketa. V letech 1176–1280 byl biskupem v Chartres. Byl výrazným odpůrcem vladařské diktatury, prosazoval odluku církve od státu. Jeho hlaví díla jsou *Metalogicus*, věnovaný scholastické filosofii, a *Polycraticus*, pojednávající o principech vlády a žádoucích vlastnostech vladařů.

[41] Siger z Brabantu (asi 1240–1280, vyskytuje se také 1235–1282 až 1284), reprezentant mladých učitelů na pařížské univerzitě v polovině šedesátých let XIII. století. V roce 1266 se dostává do sporu s papežským kardinálem-legátem Simonem de Brie (od roku 1281 papežem Mikulášem IV.), jeho učení je prohlášeno za heretické v roce 1270, v letech 1272 až 1276 je reprezentantem odporu proti rektorovi university zvolenému za nestandardních volebních podmínek. V roce 1277 pařížský biskup Étienne Sempier (na příkaz papeže Jana XXI.) sestavuje komisi, která odsoudí 219 tezí a několik knih. Siger však již patrně v průběhu roku 1276

velmi rozporuplná osobnost a rozporů jsou plny i vědomosti o něm. Na nejasnostech se podílí i Dante Alighieri, který Sigera oslavuje ústy Tomáše Akvinského v 10. zpěvu třetí části své Božské komedie (viz pozn. 41). Moderní zájem o Sigera vzbudil P. Mandonnet, který ve své rozsáhlé biografické studii [13] vydal do té doby neznámé Sigerovy práce. Od té doby zájem o Sigera neustává a vycházejí desítky vzájemně rozporných publikací.[43] Problém alespoň zčásti spočívá v tom, že přesně nevíme, co se v Paříži a na Sorboně v letech 1270 a později dělo a jaké tendence tam byly ve hře.[44] V dalším textu se omezíme na hlavní myšlenky Sigerova učení podle poněkud se lišících výkladů v [6], [9] a [20]. Siger učil, že látka (hmota) je věčná a že tedy nebyla stvořena Bohem, který do sublunární sféry příliš nezasahuje. Jedinec nemá duši, nýbrž se pouze podílí na společné lidské aktivitě, tj. na kolektivním nesmrtelném rozumu celého lidstva. Nemá také plně svobodnou vůli. Potud jde o charakteristické averroistické teze (viz pozn. 42). Siger dále tvrdil, že všechna metafyzická tvrzení jsou jenom pravděpodobná, zatímco poznatky o našem světě jsou dokazatelné. Pravděpodobnost se skutečností nemusí příliš souviset; je od ní totiž oddělena v tom smyslu, že to, co je pravděpodobné, nemusí vůbec platit resp. být možné.

Všechny Sigerovy teze byly ve zřejmém rozporu se současnou teologií, ale Siger prohlašoval, že jeho učení je čistě filosofické a že filosofie a teologie jsou na sobě zcela nezávislé. S něčím podobným se ovšem Tomáš Akvinský nemohl smířit a o to podivnější je jeho chvála Sigera v *Božské komedii*. Od Dantovy apoteózy se proto neustále odvíjejí pokusy dokázat pomocí nově nalézaných a Sigerovi připisovaných rukopisů, že jejich autor v posledním období svého života pozměnil své názory a přiklonil se k tomismu.

---

odchází z Paříže, v lednu 1277 předstupuje v Saint-Quentin před inkviziční soud a je zproštěn obvinění z hereze. Dále se snad věnuje svému místu kanovníka v Saint-Paul a někdy později se objeví v Orviettu, kde bylo sídlo papežské kurie. Zda se nový papež pokoušel znovu zahájit inkviziční řízení se Sigerem nevíme, zda byl na svobodě nebo v papežském vězení rovněž není známo, ale někdy mezi rokem 1281 a 1284 byl zavražděn – snad svým tajemníkem, který údajně zešílel.

V 10. zpěvu Dantova Ráje představuje Tomáš Akvinský Dantovi a Beatrice velké duchovní představitele lidstva (jsou mezi nimi Albert Veliký, Peter Lombardský, Severinus Boëthius (†525), Isidor ze Sevilly (†636), Beda Ctihodný (†735)) a poslední z nich stojící vedle Tomáše je právě Siger oslavený následujícími verši:

> Toť světlo Siegerova plápolání,
> jenž v Slaměné ulici přednášeje
> docházel pravd, že závist v srdce vhání.

[Essa e la luce eterna di Sigieri Che, leggendo nel vico degli strami, Sillogizzo invidiosi veri.] Dante Alighieri, Božská komedie, Ráj, X, 136–138. Překlad O. F. Babler, Vyšehrad, Praha, 1952.

[42] Averroes (1126–1198), vlastním jménem Ibn Rušd, právník, lékař a filosof žijící v Andalusii, pro své učení odsouzen k vyhnanství, zemřel v Marrákeši. Ve svých spisech propaguje Aristotela a kritizuje Platóna. Prosazoval filosofii vyhrazenou vzdělancům před náboženstvím určeným pro prosté věřící. Stejně jako Avicenna prohlašuje, že náš svět je od Boha oddělen deseti nebeskými sférami a vládne v něm *duše světa*, totožná s Aristotelovou ideou činného rozumu. Tento rozum je společný všem lidem, kteří se na něm podílejí; lidský jedinec tedy sám duši nemá. Averroovy spisy byly přeloženy do hebrejštiny a latiny a měly velký vliv na rozšíření Aristotelova učení v západní Evropě. Rovněž jeho učení o společné duši nalezlo přívržence, nazývané (latinští) averroisté. O tom, do jaké míry takový směr ve středověké filosofii skutečně existoval či zda je pouze moderním termínem zavedeným Ernestem Renanem (1823–1892), viz [20].

[43] Uveďme jako příklad alespoň internetový záznam posledních výsledků Australana J. A. Scotta: *Paradiso* 10. 49–51, 133–138: Saint Siger (http://www.princeton.edu/~dante/ebdsa/scott120806.html).

[44] Viz velmi seriozní rozbor na stránce Stanfordské university od H. Thijssena: *Condemnation of 1277*. http://plato.stanford.edu/entries/condemnation/. Podrobně jsou shrnuta bezpečně prokázaná fakta týkající se 219 heretických tezí odsouzených pařížským biskupem Étiennem Tampierem v březnu 1277. Teze zahrnují jak averroismus, tak i tomismus, jejich původci však nejsou explicitně vyjmenováni. Akce mohla být pokusem o omezení role Aristotela v teologii a filosofii nebo také snahou o řešení rozporů ve františkánském řádu.

V souvislosti se spory či smířením obou filosofů připomeňme zásluhu Tomáše Akvinského o dodnes často používaný a obtížně vysvětlitelný termín *přírodní zákon. Nic nebrání čemukoliv, aby se řídilo běžným přírodním zákonem, avšak opak je možný díky zvláštní milosti, jak je zřejmé ze vzkříšení mrtvého a vrácení zraku slepému. Také v lidských záležitostech s některým dostane zvláštní milosti přesahující běžný zákon.*[45] Podle [7] je takováto představa božích zákonů řídících přírodu ve středověku vyslovena Tomášem jako prvním. Na jiném místě také píše o zákonech v množném čísle: ... *tyto vzájemné sklony věcí chovat se podle svého určení nazýváme přírodními zákony.*[46]

A tak se tu střetávají dva názory a můžeme si vybrat. Podle Tomáše Akvinského tu máme přírodní zákony a náhoda je Boží vyslankyně dohlížející na jejich občasné neplnění. John ze Salisbury nespecifikuje, čí je náhoda vyslankyně, ale ať už ji poslal kdokoliv, v popisu její práce je to, aby tu žádné přírodní zákony nebyly. Skoro to vypadá tak, že jediný zákon je ona sama.

2.3 Půjčky, pojištění

Středověkým vyjádřením nejistoty především v obchodní oblasti se stává slovo *resicum*, objevující se kolem roku 1160 v latinsky psaných janovských a pisánských dokumentech. Jeho etymologie je podrobně rozebrána v příspěvku [18]; po zvážení řeckých a latinských kořenů je preferován arabský původ *rizq*, znamenající šanci nebo štěstí.[47] Původní užití týkající se záležitostí námořní dopravy, konkrétně půjček na přepravované zboží s uvážením možnosti potopení lodi nebo jeho odcizení piráty, se postupně rozšiřuje i do jiných oblastí, konkrétně na ručení za půjčky[48], osobní bezpečnost[49] a také v záležitostech dědických[50].

[45] Summa theologiae III, q. 77, art. 1 ad 1: Ad primum ergo dicendum quod nihil prohibet aliquid esse ordinatum secundum communem legem naturae, cuius tamen contrarium est ordinatum secundum speciale privilegium gratiae, ut patet in resuscitatione mortuorum, et in illuminatione caecorum, prout etiam in rebus humanis quaedam aliquibus conceduntur ex speciali privilegio praeter communem legem.

[46] Super De divinis nominibus, cap. 10.1: Sic igitur ipsae naturales inclinationes rerum in proprios fines, quas dicimus esse naturales leges...

[47] Současné formy jsou *risatio* (it.), *riesgo* (španěl.), *risk* (angl.), *Risiko* (něm.). Řecká etymologie vychází z termínu κακορριζε [nešťastný] z básně věnované roku 1159 byzantskému císaři Michalu Komnenovi, etymologie založená na klasické latině se odvolává na sloveso *resecare* [dělit, řezat], rozumí se situaci mezi nebezpečím [*periculum*] a štěstím [*fortuna*]. Připomeňme, že arabského původu je také slovo *hazard*, které bylo do Evropy dovezeno patrně křižáky. Jeho etymologie je dosud předmětem sporů. Jedno vysvětlení je odvozuje od *al zhar*, což je kostka, druhé od *asar*, značící obtížné. Další hypotéza odvozuje slovo ze jména syrské pevnosti *El Azar* (Hazait, Hazar), o níž se v souvislosti s hrou v kostky zmiňuje Godefroy de Bouillon (1061–1110), vůdce první křižácké výpravy a kníže jeruzalémský. Zmíněný text zní: *A Hazait s'en ala ung riche mendement, et l'apiel-on Hazait pour le fait proprement que ly dés fu fais et poins premierement* [Do Hazait jelo skvělé poselstvo a nazývá se Hazait právě proto, že tam byly původně vyráběny a tečkami značeny kostky]. Slova se začalo používat ve dvanáctém až třináctém století, nejstarší nalezené použití literární je v básnickém zpracování legendárního osídlení britských ostrovů Aeneovým pravnukem Brutem – *Roman de Brut* (1154) – od Wace z Jersey († po 1171) a v *Erekovi a Enidě* Chrétienna de Troyes (asi 1160).

[48] Marseilleský obchodník jako záruku zapůjčeného obnosu dává v roce 1284 věřiteli do zástavy čtyři muly s ujištěním, že riziko se zvířaty spojené (jejich uhynutí apod.) je na jeho straně [... recedere suis propriis expensis et suum rischium et fortunam].

[49] Ve smlouvě ukončující rozbroje mezi Mantovou a Ferrarou z roku 1239 se Mantované zavazují, že každý občan Ferrary, obchodník nebo kdokoli jiný, bude bezpečný proti okradení při přechodu mantovského teritoria [... ire et redire secure ad risigum et periculum Mantuae per totum suum districtum]. V opačném smyslu je riziko použito sienskou legislativou (v době před rokem 1288), podle níž každý návštěvník přebírá riziko za své lidi, koně a všechny ostatní věci [... recedere suis propriis expensios et suum rischium et fortunam in personis, equis vel rebus aliis quibuscumque].

Jedním z aktuálních etických problémů souvisejících s finanční tématikou se na konci XII. století stává definice lichvy, pod níž se obecně rozumí požadavek vrácení vyšší částky, než byla zapůjčena. Starozákonní a do křesťanské nauky přejatý termín i pravidla jej přesně vymezující se objevují v okamžiku, kdy se církev v souvislosti s rozvojem měst a komerce rozhodla, že i v této oblasti laického života bude určovat závazná pravidla. Do jisté míry to souvisí se sociální politikou církve té doby, v níž se prolínala snaha o zlepšení životních podmínek s bojem o moc.

Problematika lichvy je rozvíjena v těsné spolupráci kurie s fakultou práva Boloňské univerzity a s tvůrci kanonického práva. Prvním významným výsledkem je oficiální vyhlášení zákoníku nazývaného *Dekretály Řehoře IX.* [Decretales Gregorii noni] v roce 1234. Otázka lichvy je řešena tak, že se připouští pouze pokuta za pozdní splacení, a zároveň konstatuje, že zboží musí být dodáno za cenu odpovídající době půjčky. Připouští se však odměna za přijetí rizika s půjčkou spojeného. Avšak ani tato jednoduchá pravidla zřejmě nebyla systematicky dodržována. Podstatně přísnější je vyjádření Tomáše Akvinského v jeho *Summa Theologiae*, podle nějž jediným morálním nárokem věřitele je vrácení zapůjčené částky, neboť peníze nejsou zboží, ale pouze prostředkem k získání (zakoupení) něčeho.[51] Jejich hodnota je tedy pevná a nelze jich proto použít k vydělání dalších peněz. I když tento názor nebyl vždy striktně dodržován, stal se pro katolické věřící závazným a byl také schválen tridentským koncilem (1545–1563), který lichvu postavil na roveň zabití člověka[52].

Je zřejmé, že takové biblické pravidlo muselo být v rozvíjející se měšťanské společnosti s rostoucími obchodními aktivitami nejrůznějšími způsoby obcházeno. Nicméně dominikánská doktrína reprezentovaná Tomášem Akvinským se stala ve všech ohledech základem scholastického myšlení, *Summa Theologiae* vycházela a dodnes vychází v originále i překladech v řadě států a je dostupná i na internetu (viz odkazy v pozn. 22). V posledních letech je však věnována pozornost poněkud odlišným názorům zástupců františkánského řádu a zejména rozsáhlému, vesměs nepublikovanému a z latiny nepřeloženému dílu Pierra Jeana Olivi[53], který je znám jednak svou podporou doktríny o papežské neomylnosti, jednak striktním trváním na povinné chudobě františkánského řádu (tzv. pravidlo *usus pauper*). Jeho hlavní teologické dílo jsou rozsáhlé *Quaestiones in secundum librum sententiarum*, komentáře k velmi rozšířenému

---

[50] Savonský obchodník vydávající se roku 1180 na námořní plavbu svěřuje jmění své ženě Adelace, přičemž riziko bude na jeho straně a na straně jeho dětí [tractare et administrare tamquam sua propria et mandare ad laborandum ad meum et filii mei risigum].

[51] Summa Theologiae II, q. 78: Deinde considerandum est de peccato usurae, quod committitur in mutuis. ... Respondeo dicendum quod accipere usuram pro pecunia mutuata est secundum se iniustum, quia venditur id quod non est, per quod manifeste inaequalitas constituitur, quae iustitiae contrariatur. ... Pecunia autem, secundum philosophum, in V Ethic. et in I Polit., principaliter est inventa ad commutationes faciendas, et ita proprius et principalis pecuniae usus est ipsius consumptio sive distractio, secundum quod in commutationes expenditur.

[52] Deuteronomium 23:20: *Cizímu půjčíš na lichvu, ale bratru svému nedáš na lichvu, aby požehnal tobě Hospodin,...* Exodus 22:25: *Půjčíš-li peněz lidu mému, chudému, kterýž jest s tebou: nebudeš jemu jako lichevník, aniž ho lichvou obtížíš.*

[53] Pierre Jean Olivi (1248–1298), languedocký františkánský teolog a filosof. Jeho striktní obhajoba řádové chudoby vedla k řadě obvinění z hereze a poté k odchodu do Florencie, kde výrazně posílil hnutí italských františkánů podobného smýšlení (spirituálů). Po návratu do Paříže v roce 1289 přes různé spory pilně pracuje až do své smrti v Narbonne. V průběhu dalších sporů mezi papežem a spirituály odsuzuje Jan XXII. Oliviovu práci *Lectura super Apocallipsim* a obvinění je sejmuto až koncem XV. století. V současné době vycházejí jeho jednotlivé nikdy nepublikované práce; pouze výše zmíněné *Quaestiones* vyšly v letech 1922–26 ve třech svazcích v Bibliotheca Franciscana Scholastica Medii Aevi v Quaracchi. V současnosti jsou vydávána další Oliviova díla (viz internetová stránka Friedsam Memorial Library http://web.sbu.edu/friedsam/).

učebnímu textu pozdně středověkých universit od Petra Lombarda[54]. Jsou považovány za nejvýznamnější reprezentaci františkánského myšlení před vystoupením Dunse Scota[55] a Williama Ockhama[56].

Přísnost, kterou Olivi projevoval vůči svému řádu a celé církvi, však neuplatňoval na obchodní relace. Zisk věřitele považoval za přípustný, jestliže s půjčkou na sebe vezme také část rizika, přičemž zdůrazňoval, že obchodní ztráty při prodeji jsou častější než ztráty související s dopravou. V jednom ze svých traktátů (viz [1]) zmiňuje i hazardní hry a konstatuje, že se v podstatě jedná o kontrakt mezi hráči, v němž oba podstupují určité riziko; proto ani hru nelze považovat za lichvu. Není známo, že by podobný názor vyslovil dříve někdo jiný, naopak církevní právo hazardní hru považovalo za hřích. Oliviovy názory jsou pozoruhodné tím, že při náboženských úvahách respektují také okamžitou realitu, konkrétně např. probíhající společenské změny, a lze jej proto právem nazvat prvním scholastickým ekonomem. Podrobné studium řady dalších scholastiků zabývajících se touto problematikou obsahuje Langholmova kniha [11], v níž jsou porovnány zásluhy dominikánů a františkánů v oblasti chápání pozdně středověké ekonomiky s výsledkem, že menší bratři měli hlubší cit pro potřeby pastorační činnosti, a tedy i o obchodnickou mentalitu tvořícího se měšťanstva.

Z hlediska tématu přednášky je podstatné, do jaké míry vedle středověkého chápání rizika jako charakteristiky náhodnosti dochází také k vývoji idejí pravděpodobnosti a statistiky. Možnosti se různí. U jedněch badatelů se objevuje tvrzení, že středověcí obchodníci zainteresovaní na námořním obchodu pojem pravděpodobnosti již používali (např. I. Schneider v práci [23]) a podle D. C. Northa[57] byli schopni odhadovat

---

[54] Peter Lombard (kolem 1100–1160/1), italský teolog, ovlivněný Abelardem, profesor na církevní škole při katedrále Notre-Dame v Paříži, kolem roku 1158 až 1159 arcibiskup pařížský. Velké popularity dosáhla jeho kniha *Quatuor libri Sententiarum* [Sentence], podrobně komentovaná řadou významných teologů, jako např. Tomášem Akvinským, Albertem Velikým, Dunsem Scotem aj. Probírá formou otázek a odpovědí celou tehdejší teologii; komentáře a anglický překlad části díla aj. jsou dostupné na internetové stránce http://www.franciscan-archive.org/lombardus

[55] Joannes Duns Scotus (1265/6–1308), skotský františkánský mnich. Byl přesvědčeným realistou, tj. věřil stejně jako Tomáš Akvinský ve skutečnou existenci obecných vlastností, lišil se však od něj v tvrzení, že vlastnosti živých tvorů, tj. i lidí, jsou jediné a použitelné i pro Boha. Scotus učil, že člověk má plnou odpovědnost za svůj život a musí se realizovat neustálými aktivitami ve čtyřech vzájemně nesouvisejících směrech – láskou k Bohu, správným (tj. logickým) myšlením, morálním jednáním a respektováním přírodních zákonů.

[56] William Ockham (1285–1347/9), anglický teolog, příslušník františkánského řádu, přesvědčený realista. Přednášel v Oxfordu podle Lombardových *Sentencí*, avšak po sporech s kancléřem university Johnem Lutterellem odchází z Oxfordu v roce 1319 bez magisterského titulu a je následně obviněn z hereze. V letech 1324 až 1328 se Ockham v Avignonu podrobuje zkoumání svého učení, které bylo následně odsouzeno. Jeho osobní situace se vážně zhoršila, když se zapletl do sporu papeže s představeným františkánského řádu Michaelem Cesenou v otázce povinné chudoby a obvinil hlavu církve z hereze. Podařilo se jim oběma tajně uprchnout z Avignonu a zbytek života strávili pod ochranou římského císaře Ludvíka Bavora.

[57] Douglass C. North (*1920), americký ekonom, laureát Nobelovy ceny za ekonomii v roce 1993. Ze stručné biografie, kterou napsal u příležitosti jejího udělení, stojí za ocitování myšlenky velmi úzce související s tématem této přednášky: The development of a political-economic framework to explore long-run institutional change occupied me during all of the 1980's and led to the publication of *Institutions, Institutional Change and Economic Performance* in 1990. In that book I began to puzzle seriously about the rationality postulate. It is clear that we had to have an explanation for why people make the choices they do; why ideologies such as communism or Muslim fundamentalism can shape the choices people make and direct the way economies evolve through long periods of time. One simply cannot get at ideologies without digging deeply into cognitive science in attempting to understand the way in which the mind acquires learning and makes choices. Since 1990, my research has been directed toward dealing with this issue. I still have a long way to go, but I believe that an understanding of how people make choices; under what conditions the rationality postulate is a useful tool; and how individuals make choices under conditions of uncertainty and ambiguity are fundamental questions that we must address in order to make further progress in the social sciences.

věrohodnost budoucích událostí [16]. Naproti tomu např. I. Hacking [8] tvrdí, že vinou scholastického myšlení byl zrod teorie pravděpodobnosti odsunut až do XVII. století. Zdá se však, že toto druhé tvrzení se opírá spíše o současně převládající názor a nedostatečnou znalost dokumentů.

Přehled novějších poznatků ve Franklinově knize [7] a v dalších pracích [1], [2], [14], [15], [17], [18] vedl k poznatku, že teologické debaty o lichvě, vedené františkány a dominikány, ujasnily celou řadu problémů a vedly ke vzniku převážně nenumerické *logické pravděpodobnosti*.[58] Námořní doprava byla díky velké závislosti na náhodných jevech zřejmě nejvhodnější oblastí k aplikaci pravděpodobnostních úvah, uplatňujících se zvláště v oblasti námořního pojištění. Riziko dopravy se ve XIV. století stává objektem tzv. *předpojišťovacích* smluv, v nichž právě nejistota výsledku se stává předmětem smlouvy. V nich dochází patrně poprvé ke konstatování, že *nejistotu* můžeme vyjádřit *monetární hodnotou*, což bezprostředně vede k pravděpodobnostnímu přístupu opírajícímu se o co nejpřesnější vyhodnocení okamžité situace. Z poloviny XV. století se dochoval spis Benedetta Cotrugli [4][59], vypočítávající, co všechno musí být při uzavírání smlouvy bráno v úvahu. Explicitně je uváděno zjištění aktivity pirátů v příslušných vodách, místní války, příměří a odvety a všechny další možnosti ovlivnění dopravy, dále údaje o přístavech, které budou při přepravě navštíveny, i jejich vzájemné vzdálenosti. Dále pak kvality kapitána i pojištěných obchodníků, stav lodi a druh přepravovaného zboží. Zdrojem poznatků o obchodu na přelomu XIV. a XV. století je především archiv firmy *Datini*, obsahující na 150 000 dokumentů; je v něm cca 126 000 komerčních dopisů, kolem 400 pojistných smluv z let 1380 až 1410, a dále osobní korespondence F. di Marco Datini[60].

Uveďme některé příklady pojistných částek. Podle typu lodí se pojistné lišilo v závislosti na tom, zda se jednalo o nevyzbrojenou plachetnici odkázanou plně na vítr (pak např. z Benátek na Baleáry činilo pojistné 3 až 4 %) či naopak o vyzbrojenou galéru (pak třeba jen 1,5 % pro stejnou trasu). U kapitána byla hodnocena jeho minulost a zkušenosti: jestliže loď pod jeho velením byla v minulosti vícekrát obětí pirátů, bylo pojistné vyšší, případně až dvojnásobné. Pojistné se však vůbec nevztahovalo na případ, kdy náklad byl odcizen posádkou, a to ať pod velením kapitána či vzbouřenci proti jeho vůli; to však byly případy spíše výjimečné. Délka cesty nehrála podstatnou roli díky tomu, že nebezpečí většinou nepřinášela plavba na otevřeném moři, nýbrž pirátské aktivity v blízkosti pobřeží a přímo v přístavech.[61] Roční období na výši pojistného překvapivě rovněž nemělo podstatný vliv, resp. jej z korespondence obchodníků s pojišťovacími společnostmi nelze spolehlivě vyvodit; jisté zvýšení v pojistkách pro zimní období lze nicméně tu a tam najít.

---

[58] Tu však nelze směšovat s logickou interpretací pravděpodobnosti vytvořenou především J. M. Keynesem v XX. století, i když obchodní resp. ekonomické využití v obou případech bylo hlavním impulsem prováděných úvah a právě obchodní problematika vedla k přelomovému chápání náhody jako něčeho, co se můžeme pokusit předpovídat – na rozdíl od teologické interpretace náhody jako projevu Boží vůle.

[59] Spis B. Cotrugli byl donedávna považován za nejstarší dokument věnovaný námořnímu pojišťovnictví. V roce 1998 však J. Postma objevila rukopis obsahující kromě spisu Cotrugliova další instruktážní dílko *La riegola de libro* z první poloviny XV. století, viz [19].

[60] Francesco di Marco Datini (1335–1410), úspěšný toskánský obchodník v Prato. Jeho archiv je plně digitalizován a všechny dokumenty (v italštině) jsou na http://datini.archiviodistato.prato.it/www/.

[61] Ve XIV. století bylo pojistné ve výši 5,5 až 8 % typické pro plavbu ze španělských přístavů ve Středozemním moři do moře Severního (vzdálenost kolem 4000 km), zatímco pojistné od 8,5 % do 12 % pokrývalo plavbu z Toskánska do římského přístavu Ostia (vzdálenost zhruba 250 km). Ani o sto let později se pojištění plaveb z La Rochelle do Severního moře a plaveb mezi přístavy Středozemního moře prakticky neliší.

Specifikace přepravovaného zboží podle možností jeho znehodnocení vlhkostí (koření, cukr, zrno, vlna), poškozením nádoby (víno, olej) a rozbitím (sklo, porcelán) byla pojišťovacími společnostmi přísně vyžadována, nicméně podstatnou závislost výše pojištění na typu zboží nelze zjistit a zdá se, že přesný popis nákladu byl spíše administrativním požadavkem; někdy se však objevuje omezení na náklad nepřesahující jisté množství.

Nebezpečí pirátství a válečného stavu na plavebních cestách bylo tedy hlavním faktorem určujícím výši pojistného a zhruba lze říci, že představovalo polovinu výše pojišťovacího poplatku. Výjimečně mohlo být pojištění zcela odmítnuto s odkazem na současnou situaci.[62]

Závěrem této části lze konstatovat, že středověké pojišťovnictví se řídilo především jistou zavedenou praxí nehodnotící konkrétní počty pojistných událostí a jejich přesné okolnosti, ale intuitivně postihující obecnou situaci. V konkrétních případech se však vycházelo i z okamžité situace (rozšíření pirátství, válečný stav) a pojistné částky se výrazně měnily. Náhodné události již tedy nejsou projevem Boží vůle a ekonomické úvahy můžeme založit na svých znalostech. Ze strany obchodníků se v této souvislosti objevuje snaha redukovat své škody uzavíráním smluv mezi několika partnery, rozdělováním nákladu na menší plavidla, volbou delších cest na otevřeném moři apod. Podobně pojišťovací společnosti uzavírají smlouvy o vzájemném podílnictví několika společností, modifikují konkrétní smlouvy dodatečnými podmínkami vyplývajícími z konkrétních situací atd. V této souvislosti stojí za zmínku traktát Ioannise de Prato *Contractus* z poloviny XV. století (zmíněný ve [2]), rozebírající pojišťovnictví a konstatující, že výše pojistného musí odpovídat velikosti rizika a že tomuto riziku musí být vystaven jak pojišťovatel, tak i pojištěný; tím je zajištěna morální oprávněnost pojišťovnictví.

3 Závěr

Aplikace nenumerické pravděpodobnosti ve třech oblastech života lidské společnosti a myšlení demonstruje její význam v dějinách, jemuž je věnována až pozoruhodně malá pozornost. V soudnictví je její úloha nejobtížnější, protože ti, kteří s její pomocí mají rozhodovat, musejí vycházet z neúplných a účastníky procesů úmyslně i neúmyslně zkreslených dat. Následky chybných rozhodnutí jsou zhusta nenapravitelné a pro jejich oběti často zničující. Právo je založeno na svých historických kořenech, a s rostoucími možnostmi jednotlivců páchat trestné činy i s neúměrným růstem politické moci a její administrativy stále častěji prohrává, nejsouc schopno potlačit ani omezit kriminalitu vládců a jejich podaných.

V oblasti lidského myšlení, ve filosofii a náboženství, byli propagátoři pravděpodobnostního přístupu obvykle odpůrci vládnoucích církevních i sekulárních ideologií a jejich životy byly proto nezřídka tragické. Moc chce být dlouhodobá, když už ne na věčné časy, tak alespoň tisíciletá. Proto bude vždy potlačovat představu, že se k vládě dostala náhodou a že neovladatelné náhodné procesy ji mohou také ukončit. Pozvolný mocenský rozklad všech mocenských systémů v dějinách lidstva je pozoruhodnou demonstrací nezvládnutelných sil, a je pozoruhodné, že k němu dochází

[62] Např. v roce 1385 florentská firma odmítla pojišťovat lodi vyjíždějící z Famagusty, protože v kyperských vodách se nadměrně rozmohlo pirátství. Když si pak benátský kupec Benedetto Bon pojistné přece jenom vymohl, byla jeho výše nastavena na 85 %, což bylo ještě málo, protože jakmile se jeho loď dostala na širé moře, byla piráty vyrabována a zapálena. Jiné kuriózní omezení se objevilo v XVI. století v době anglo-španělského konfliktu: pojišťovna byla osvobozena od pojistného plnění v případě, že loď z Bordeaux do Londýna by byla napadena britskou nebo španělskou flotilou.

jak v bídě, tak v blahobytu. Příčinou je skutečnost, že každý realizovaný mocenský záměr má za následek spuštění velkého množství jemu odporujících procesů, jejichž vzájemná interakce vyvrcholí nezřídka náhodným nebo pro množství příčin nepředvídatelným jevem náhlého rozpadu moci a jejího odstranění.

Náhodné nebo chybně předvídané jevy v pozvolna se rodící obchodní společnosti měly v minulosti velmi rychle za následek likvidaci finančních prostředků neopatrného podnikatele a obešly se bez závažných společenských následků. Proto se domácí i mezinárodní obchod závislý pouze na jednotlivcích po staletí úspěšně rozvíjel a byl hybnou silou společenského vývoje. Byl také příkladnou oblastí aplikace nenumerických pravděpodobností, byť i částečně číselně charakterizovaných procentuálními hodnotami zisků, ztrát a pojistného. Z tohoto hlediska je třeba popisovanou tématiku půjček a pojištění považovat za nejoptimističtější oddíl příspěvku s obecně platnou důtklivou radou: *založte své jednání na podrobných znalostech úspěchů i neúspěchů svých i svého okolí a na spolehlivých prognostikách budoucích událostí.* Bohužel, vznik velkých a nadnárodních obchodních a finančních společností činí tuto radu jen obtížně použitelnou, protože spojováním drobných podnikatelů do velkých skupin ubývá dat. Drobné chyby, nezdary i úspěchy nejsou pozorovatelné, protože se navzájem vyruší, a příčiny celkového nepříznivého vývoje nejsme schopni ani spolehlivě rozpoznat, ani potlačit. Krize státních i nadnárodních hospodářských politik, k nimž dochází v posledních sto letech, to zřetelně dokazují. Náhodné jevy ovlivňující náš život a nebezpečí z nich plynoucí nelze potlačit, nanejvýš je můžeme vzájemně propojit a způsobit, že drobné nehody se změní v jednu velkou, což platí v životě jedince stejně jako ve větších společenstvích.

Literatura

[1] Ceccarelli G.: *Le jeu comme contrat et le risicum chez Olivi*. JEHPS 3(2007), n°1, 1–15.

[2] Ceccarelli G.: *The Price for Risk-Taking: Marine Insurance and Probability*. JEHPS 3(2007), n°1, 1–26.

[3] Cohen A.: *Talmud pro každého*. Sefer, Praha, 2006.

[4] Cotrugli B.: *Il libro dell'arte di mercatura*. A cura di Ugo Tucci, Venezia, 1990.

[5] O’Donnell J. R.: *Nicholas of Autrecourt*. Mediaeval Studies 1(1939), 179–280 [latinská verze *Exigit ordo*].

[6] Floss P.: *Architekti křesťanského středověkého vědění*. Karmelitánské nakladatelství, Nová Paka, 2004.

[7] Franklin J.: *The Science of Conjecture: Evidence and Probability before Pascal*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2001.

[8] Hacking I.: *The Emergence of Probability*. Cambridge University Press, London & New York, 1975.

[9] Heer F.: *Evropské duchovní dějiny*. Vyšehrad, Praha, 2000.

[10] Kaluza Z.: *Nicolas d’Autrécourt. Ami de la vérité*. Histoire Littéraire de la France 42–1, Rijk, Paris, 1995.

[11] Langholm O.: *Economics in the Medieval Schools: Wealth, Exchange, Value, Money and Usury According to the Paris Theological Tradition 1200–1350*. E. J. Brill, Leiden, 1992.

[12] Madden E. H.: *Aristotle's Treatment of Probability and Signs*. Philosophy of Sciences 24(1957), 167–172.

[13] Mandonnet P.: *Siger de Brabant et l'averroïsme latin au XIIIe siècle*. Institut supérieur de philosophie, Louvain, 1911.

[14] Meusnier N.: *Le problème des partis peut-il être d'origine arabo-musulmane?* JEHPS 3(2007), n^{o}1, 1–14.

[15] Meusnier N., Piron S.: *Medieval probabilities: Claims for a Reappraisal*. JEHPS 3(2007), n^{o}1, 1–5.

[16] North D. C.: *Institutions, institutional change and economic performance*. Cambridge University Press, New York, 1990.

[17] Piron S.: *Traitement de l'incertitude commerciale*. JEHPS 3(2007), n^{o}1, 1–31.

[18] Piron S.: *L'apparition du resicum en méditerranée occidentale*. JEHPS 3(2007), n^{o}1, 1–25.

[19] Postma J., Van der Helm A. J.: *La Riegola de Libro. Bookkeeping Instructions from the Mid-Fifteenth Century*. Předneseno na 8th World Congress of Accounting Historians, 19.–21. 7. 2000. Madrid.

http://home.hetnet.nl/~annejvanderhelm/paper.html

[20] Putallaz F.-X., Imbach R.: *Povoláním filosof. Siger z Brabantu a středověká universita*. Oikúmené, Praha, 2005.

[21] De Rijk L. M.: *Nicholas of Autrecourt. His Correspondance with Master Giles and Bernard d'Arezzo*. Brill, Leiden – New York – Köln, 1994.

[22] Saxl I.: *Filosofické interpretace pravděpodobnosti*. In J. Bečvář, E. Fuchs (eds.): Matematika v proměnách věků III., Edice Dějiny matematiky sv. 24, Výzkumné centrum pro dějiny vědy, Praha, 2004, 132–155.

[23] Schneider I.: *Why Do We Find the Origin of a Calculus of Probabilities in the Seventeeth century?* In: J. Hintikka, C. D. Gruender, E. Agazzi (eds.): Probabilistic Thinking, Thermodynamics and the Interaction of the History and Philosophy of Science. Reidel, Dordrecht, 1981, 3–24.

[24] Sylla E. D.: *The Emergence of Mathematical Probability from the Perspective of the Leibniz–Jacob Bernoulli Correspondence*. Perspectives of Science 6(1998), 41–76.

[25] Vojta J.: *Akademická skepse – Karneadés a Kleitomachos*. Text katedry filosofie FF MU Brno.

http://profil.muni.cz/01_2003/vojta_skepse.html

Adresa

RNDr. Ivan Saxl, DrSc.
Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: *saxl@math.cas.cz*

Obr. 1 Současná vydání talmudu i mišny obsahují řadu pozdějších komentářů a interpretací. Ukázka z tradičního vydání mišny s komentáři: je z oddílu věnovaného liturgii šabatu a svátků, část *Megila* 4:5-6. Vlastní text mišny je nahoře uprostřed, nad ním Maimonidův komentář z XII. století, po stranách komentáře z XV. až XIX. století, spodní část úzkého levého sloupce je antologie interpretací z novější doby.

Překlad textu z mišny: *Ten, jenž skončí čtení z Proroků, může vést i společnou modlitbu „Slyš, Izrael“. Přistoupí k arše [svatostánku] a zvedne ruce. Je-li to chlapec, zastoupí jej jeho otec nebo učitel. Chlapec může číst z tóry a recitovat z aramejského překladu. Nemůže však vést společnou modlitbu: „Slyš, Izraeli“ a přistoupit k arše a zvednout ruce.*

DIGESTORVM
SEV
PANDECTARVM LIBRI
quinquaginta,
Cum locorum aliquot in archetypo Pisano, mancorum & vacuorum repletione, multisque aliis ab antè in lucem nusquam editis, quæ præfatione ad Lectorem huic Tomo præfixa enumerantur.
LVGDVNI,
Apud Gulielmũ Rouillium.
1581.

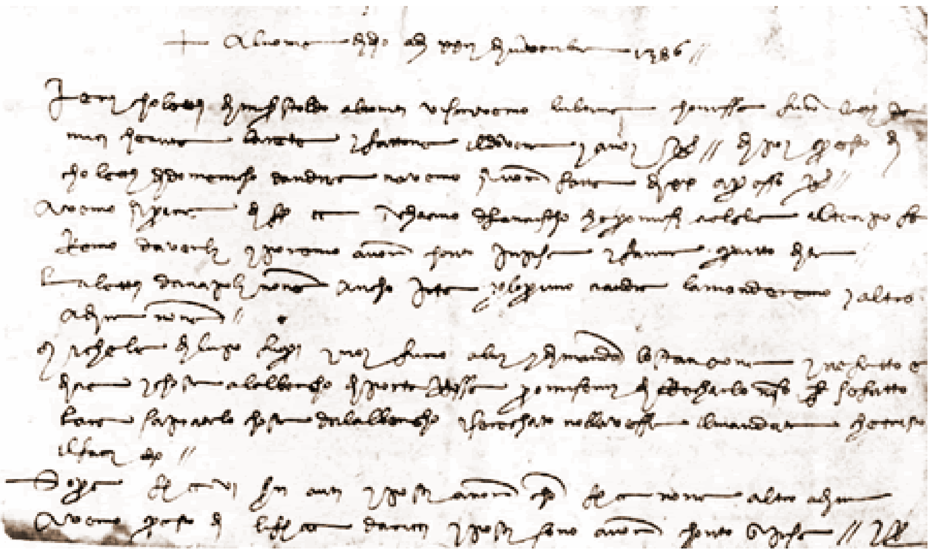
CORPUS
IURIS CIVILIS
ROMANI,
IN QUO
INSTITUTIONES, DIGESTA
CODEX ITEM ET NOVELLÆ,
JUSTINIANI EDICTA, LEONIS ET ALIORUM
DIONYSII GOTHOFREDI
FRANCISCI MODII
SIMON VAN LEEUWEN
HISTORIA ET CHRONOLOGIA JURIS CIVILIS
ROMANI.
EDITIO NOVISSIMA
SACRATISSIMO AC INVICTISSIMO
PRINCIPI AC DOMINO
DOMINO CAROLO VI.

Obr. 2 Titulní stránka vydání *Digest* z roku 1581 a z roku 1583.

Obr. 3 Giovanni di Paolo. Kruh dvanácti učitelů moudrosti v X. kapitole Dantova Ráje. 1442–1450, Londýn (*The British Library*)
(nahoře zleva Dante s Beatricí, zprava Tomáš Akvinský, Siger snad úplně vpravo).

TOMMASO DI PIERO DEL TROMBETTO
Ritratto di Francesco Datini
Prato, Palazzo Datini

Obr. 4a Portrét Francesca di Marco Datini (1335–1410) vytvořený 20 let po jeho smrti a dopis z archivu Datini (byl odeslán z Avignonu a došel do Florencie 1. 11. 1408).



Obr. 4b Dopis z archivu Datini z roku 1386.

PRÁCE HISTORIKA MATEMATIKY

JINDŘICH BEČVÁŘ, MARTINA BEČVÁŘOVÁ

Tento příspěvek je rekapitulací pozitivních i negativních zkušeností, které vyplynuly z naší dosavadní práce v historii matematiky, z vedení diplomových prací, ze školení doktorandů a vedení jejich doktorských disertací v oboru *Obecné otázky matematiky a informatiky* na MFF UK. Naznačíme problémy, která provázely a provázejí naši práci, pozastavíme se u některých otázek, které nás trápily a trápí.

Zamyslíme se nad prací historika matematiky, pokusíme se nastínit základní problémy, s nimiž se téměř každý na začátku svého studia a bádání setkává, jež někdy více, někdy méně úspěšně řeší, s nimiž se potýká, jejichž vyřešení ho povzbuzuje k další práci, resp. v případě neúspěchu od ní odrazuje. Snad bude tento příspěvek užitečný a motivující pro začátečníky, pro studenty a doktorandy, a tím i pro nás, kteří je vedeme a vychováváme.

1 Metodika práce

1.1 Zvolení tématu práce a její počátek

Před započetím badatelské práce se vyplatí věnovat velkou pozornost otázkám výběru vhodného okruhu problémů. Je třeba na jedné straně posoudit zajímavost a novost tématu,[1] jeho předpokládanou odbornou, jazykovou a časovou náročnost, na druhé straně zvážit všestrannou připravenost řešitele či týmu řešitelů, diplomanta a doktoranda, existenci informačních zdrojů (odborných monografií, časopisecké literatury, archivních materiálů apod.) a jejich dostupnost. Rovněž je třeba pečlivě rozmyslet způsoby zpracování a rozvážit metody práce, které budou pro dané téma vhodné, aby bylo zpracováno komplexně, aby bylo možno očekávat původní, správné a prokazatelné výsledky,[2] aby tedy byla diplomová či disertační práce obhajitelná, sepsaný článek publikovatelný v našem časopise či sborníku, nebo dokonce v nějakém zahraničním periodiku. Není marné rozmyslet ještě před začátkem bádání rámcový plán postupu prací na připravovaném tématu.

Pečlivá a promyšlená volba tématu, resp. souboru témat, na nichž pracuje současně nebo postupně více řešitelů, náčrt způsobů zpracování a postupu prací zabrání tříštění sil a přebíhání od tématu k tématu.[3] Současné rozšiřování obzorů a vnímání nejrůznějších souvislostí výrazným způsobem napomáhá při badatelské práci, inspiruje a motivuje.

---

[1] Nikdo se nemůže zcela vymknout trendům a „požadavkům“ doby. Není však příliš vhodné volit témata z oblastí, které již byly mnohokrát zpracovány, nebo z oblastí, které jsou již za zenitem svého vývoje. Poměrně riskantní bývá, a to z řady důvodů, volba témat módních.

[2] Poznamenejme, že správnost i původnost výsledků se v humanitních a mezních oborech jen těžko prokazuje, neboť na ně není možno aplikovat kritéria exaktních věd. Správnost matematického výsledku se prokazuje jeho exaktním důkazem, původností se rozumí, zhruba řečeno, priorita v publikaci.

[3] Poměrně častou chybou je těkání po tématech, rozmělňování sil, odbíhání k novým, v té chvíli třeba atraktivnějším tématům. Pokud chceme, aby naše práce byla úspěšná, je třeba vytrvat v jednou či dvou směrech bádání, dokud se zvolený problém nezmapuje, nezpracuje a práce nesepíše. Přitom se však badatel nesmí uzavírat před dalšími nápady; náměty pro další práci je třeba shromažďovat, na určité místo si je poznamenávat,

Vhodnost a nosnost tématu, jeho odbornou, jazykovou i časovou náročnost by měl dobře rozvážit jeho zadavatel, hlavní řešitel projektu, vedoucí diplomové práce, resp. školitel nastupujícího doktoranda.

1.2 Zaujetí tématem práce, pracovní nasazení

Každý student, doktorand, badatel či řešitel projektu by měl ke svému studiu a ke své badatelské práci přistupovat se zájmem, s opravdovým nasazením, měl by přicházet s vlastními nápady a řešeními, promýšlet své metody práce, výstižně řečeno – musí se svým výzkumným tématem žít, tj. ráno vstávat a večer uléhat. Školitel či vedoucí řešitelského kolektivu by měl svého diplomanta, doktoranda, resp. svůj řešitelský tým inspirovat a usměrňovat, navrhovat další možné cesty bádání, způsoby řešení, motivovat k vyhledávání dalších možných informačních zdrojů, současně však soustavně vést k samostatnosti a svéprávnosti v badatelské práci.

1.3 Metodika

Každý vědecký obor má svoji terminologii, způsoby sběru, třídění a vyhodnocování informačních zdrojů a dalších materiálů, výběr a zpracování jednotlivých témat, vlastní metody psaní článků a monografií, specifické způsoby citování apod. Poznání základních postupů a trendů zvoleného oboru, základní a přehledové literatury je pouze nutným předpokladem budoucí úspěšné práce.

V počáteční etapě práce je nutno se pečlivě seznámit se zavedenými způsoby psaní, s již publikovanými výsledky, se základní i rozšiřující literaturou a s etickou stránkou zveřejňování výsledků. Není možno stavět na písku, ignorovat dřívější výzkumy a výsledky.[4]

Důležitá je volba metody zpracování a třídění shromážděného a prostudovaného materiálu (literatury, archívních materiálů, počítačových zdrojů, měření apod.). Při studiu a využití velkého množství materiálů, kterému se historik matematiky nemůže vyhnout, je nutno postupovat pečlivě, přesně a systematicky a každou práci promýšlet do všech detailů tak, aby se dalo co nejvíce vytěžit ze studovaných materiálů a nebylo nutno se do nekonečna k již prostudovanému vracet. Nezbytné je též přesné a správné poznamenávání zdrojů, promyšlené pořizování kopií a jejich správné popisování. Zdánlivě nepodstatné, ale nesmírně důležité, je poznamenávat si i negativní výsledky a zkušenosti, protože jen tak se vyhneme bloudění v kruhu. Rovněž se osvědčuje pečlivé poznamenání, v jakém stavu zpracování se nachází studovaný problém, když práci na kratší či delší čas přerušuji. Pokud si poznamenáme, co jsme udělali, prošli, prostudovali, naměřili, kde zůstala bílá místa, nejasnosti a otazníky, nebudeme mít problém vrátit se i po delším čase ke studovanému a rozpracovanému tématu.

1.4 Klasické a moderní dovednosti

Ke klasickým dovednostem patří rychlá orientace v knihovnách (staré i nové fondy, katalogy, rejstříky apod.), v biografických a bibliografických slovnících, příručkách,

---

aby se k nim bylo možno vrátit po ukončení dosavadní práce. Vyplatí se svou pozornost postupně posouvat od jednoho tématu ke druhému, ale blízkému.

[4] Ignorování dřívějších výsledků se dnes objevuje často; začínající doktorandi vymýšlejí výzkumné projekty bez dostatečné znalosti základní i rozšiřující odborné literatury, bez znalosti dřívějších výsledků, provedených výzkumů a analýz. Tak se objevují výsledky již dávno v odborné komunitě známé.

encyklopediích, v základní literatuře, učebnicích, monografiích, odborných časopisech (indexy), v časopisecké literatuře, v referativních časopisech apod. Archivní bádání však vyžaduje zkušenosti jiného typu; práce s popisy archivních fondů (inventáře, rejstříky), vyhledávání a objednávání materiálů, práce s materiály v ochranném režimu (mikrofilmy, mikrofiše, čtečky). Poznání klasických informačních zdrojů podstatně napomůže přechodu k moderním metodám vyhledávání informací (internet, databáze, digitalizované knihovny, soupisy archivních fondů atd.).

Připomeňme, že knihovnami s rozsáhlými fondy jsou Národní knihovna ČR v Praze, Technická knihovna v Praze, Knihovna AV ČR, Knihovna MÚ AV ČR, Knihovna MFF UK, Státní pedagogická knihovna J. A. Komenského, Knihovna Národního muzea v Praze, Zemská moravská knihovna v Brně, Státní vědecká knihovna v Olomouci, Státní vědecká knihovna v Hradci Králové atd. Na začátku studia je nutné se seznámit se strukturou katalogů, způsoby objednávání literatury, s organizací výpůjček a možnostmi práce ve studovnách (např. připojení vlastního notebooku, scanneru, použití digitálního fotoaparátu, možnost kopírování apod.), s prací se čtecími a kopírovacími zařízeními. Je dobré vědět, že existuje meziknihovní (též mezinárodní) služba, s jejíž pomocí se dostaneme ke knihám, které v dosažitelných knihovnách nejsou.

Výše uvedené zdroje jsou dnes modernizované, mnoho informací lze získat pomocí Internetu. Lze nahlédnout do katalogů knihoven, našich i zahraničních, do soupisů archivních materiálů, do databází referativních časopisů, do katalogů digitalizovaných knihoven, s úspěchem je možno využít rozmanité způsoby vyhledávání. Mnoho knih, časopiseckých prací, biografických i bibliografických informací, které bylo dříve třeba pracně shánět, lze dnes bez větších problémů vyhledat přes Internet a vytisknout na tiskárně, aniž by bylo nutno vyvinout jiné úsilí než intelektuální.

Předpokladem úspěšné práce je využívání a soustavné rozšiřování počítačových dovedností. Bezpečné zvládnutí vhodného (případně požadovaného) textového editoru[5] je dnes nezbytné při sepisování publikací. Velmi často je třeba umět pracovat se scannerem, s nějakým programem na rýsování geometrických obrázků apod. Příprava prezentace pro vystoupení na konferencích a seminářích vyžaduje nějakou formu PowerPointu, práci s notebookem, dataprojektorem atd. Mnohdy nám v naší práci pomohou matematické programy (např. Mathematica, Maple, Cabri, CAD). Obrovské možnosti pro vyhledávání informací i nápadů poskytuje Internet (např. Google, Google Books, nejrůznější databáze apod.). Poznání a pochopení vhodných metod vyhledávání lze získat jen soustavnou prací. Vyhledané informace je však třeba velmi často nějak ověřit a analyzovat; v záplavě seriózních a neseriózních informací nejrůznějších webových stránek není jednoduché se zorientovat.

Samozřejmostí by měla být dobrá znalost domácí i zahraniční odborné produkce ve zvoleném oboru, ucelený přehled o základní i speciální literatuře, přehled o knihovnách, užitečných databází, o seriózních webových stránkách, které poskytují mimo jiné „free nabídky“ oscanovaných knih, monografií, učebních textů, časopiseckých prací, nahlížení do katalogů a databází světových knihoven a referativních časopisů. Je až s podivem, jak málo má dnešní mladá počítačová generace vybudovanou opravdovou internetovou gramotnost, bez níž není možno hledat souvislosti, návaznosti, inspirace apod.

[5] Např. Word, v matematickém světě některá forma TEXu, někdy je rozumné užít Exel.

1.5 Rozhled a prezentace výsledků

Nezbytnou součástí výzkumné práce je sledování dění ve vlastním oboru a v oborech příbuzných. Je třeba efektivně vyhledávat a vyhodnocovat informace na internetu, sledovat domácí i zahraniční dění, účastnit se domácích i zahraničních konferencí a přednáškových pobytů, pravidelně vystupovat se svými výsledky na seminářích, konferencích a odborných akcích, sledovat práci kolegů apod. Proto je vhodné si uvědomit, že kvalitní vystoupení se musí opírat o výsledky dlouhodobé poctivé práce a není možno jej připravit na „koleni“ a „přes noc“, pokud chceme mít rozumný výsledek a úspěch. Každý si musí prožít své první vystoupení, své úspěchy a neúspěchy spojené s dobrou či špatnou volbou prezentace (velikost písma, grafická úprava, čitelnost textu, překlepy a odborné a gramatické chyby, odborná náročnost zvolené prezentace, kvalita ústního podání, boj s časovou tísní, trémou apod.).

1.6 Neznalost aktuálního stavu problematiky

Častou chybou, zejména doktorandů a začínajících badatelů, je neznalost aktuálního stavu zkoumané problematiky, která většinou vyplývá z nedostatečného prostudování základní literatury a návazných prací. Spatřujeme zde poměrně velký dluh na straně školitelů, kteří by měli své doktorandy již na začátku jejich studia vhodně usměrnit, resp. na straně hlavních řešitelů, kteří nechají tým řešitelů svému osudu. Výchozím bodem každé odborné a vědecké práce musí být podrobné poznání jednak klasických, jednak nejnovějších výsledků v oblasti, v níž zahajujeme svoji práci.

Každá vědecká práce by měla vyjít ze základní rešerše obecněji zaměřené literatury, která poslouží k první orientaci ve zvoleném problému. Potom je třeba začít studovat speciální časopisecké práce, monografie, které se podrobně věnující dílčí problematice, a původní zdroje (tzv. primární prameny).

Chceme-li sepsat disertaci nebo hlubší práci, nevystačíme jen s úvodní rešerší, s četbou encyklopedické literatury a základních učebnic. Je zapotřebí shánět další informace, konfrontovat je, provádět jejich seriózní komparaci, ponořit se do původních, často velmi náročných prací.[6] Nelze pracovat jen s jedním zdrojem, musíme hledat četné souvislosti, procházet i slepé cesty a zavrhovat špatná řešení apod. Další chybou je přecenění vlastních sil a tužeb,[7] špatné rozvržení studia,[8] promarnění času, který nám již nikdy nikdo nedá.

1.7 Citování, původnost výsledků

Velkým problémem, a to nejen začínajících badatelů, je citování použitých zdrojů, klasických, moderních i archivních materiálů. Jeden extrém představují autoři, kteří necitují kromě svých vlastních prací téměř nic; domnívají se totiž, že uvedení použité literatury a dalších materiálů snižuje význam jejich práce, že jejich výsledky tím ztrácejí na ceně. Často se tak (úmyslně nebo neúmyslně) dopouštějí do určité míry plagiátorství, když necitují literaturu, kterou využili. Je však také možné, že žádnou literaturu a žádné

[6] Náročnost studia historických matematických textů je dána starou terminologií, odlišným jazykem, neobvyklou symbolikou a strukturou práce.
[7] Nejsou ojedinělé případy, že se zadá téma a v průběhu studia se zjistí, že řešitel nemá dostatečné matematické či jazykové vzdělání. Není ochoten pracovat a o studium vlastně nemá žádný zájem.
[8] Slavný spisovatel a profesor Hans Seley svým budoucím doktorandům kladl zdánlivě banální otázku: Kdy chcete začít pracovat? I podle jejich odpovědi na tuto jednoduchou otázku si pak vybíral ty, které považoval za perspektivní.

odborné práce nestudují a své výsledky staví často jen na zelené louce. Mnohdy až po dokončení práce zjišťují, že „objevili Ameriku“. Nejzávažnější případy, které jsou čas od času odhaleny, spočívají ve zcela úmyslném, téměř doslovném opisování cizích prací, které (z pochopitelných důvodů) citovány nejsou.

Někteří autoři naopak velmi intenzívně, ale násilně, citují při každé příležitosti své přátele; úspěšnost odborné a vědecké práce se totiž měří mimo jiné počtem citací. Existují dokonce určité komunity či klany, jejichž členové se takto přehnaně citují a poskytují si navzájem velké množství bodů za takto „vyrobené“ citace. Jiní naopak zcela záměrně ignorují některé své kolegy, které chápou jako obtížnou konkurenci, jako nepřátele.[9] Oba jevy – citování přátel a ignorování konkurentů – se většinou vyskytují ve vzájemné jednotě u stejných jedinců.

Každá vědecká práce má zcela jasně vymezit, z jakých informací vychází a jaké závěry z nich dělá. Musí zcela jasně a přesně rozlišit, co bylo vyčteno z literatury, jaké výsledky byly samostatně získány, jaké metody vedly, resp. nevedly k cíli, jaké experimenty byly provedeny, jaká statistická šetření zpracována apod. Jen tak je možno vyhnout se neúmyslnému opisování či dokonce plagiátorství. S úmyslným opisováním je třeba nemilosrdně bojovat.

2 Přehled základních zdrojů

V následujících odstavcích uvedeme některé důležité informační zdroje, které při své práci s úspěchem využíváme. V žádném případě se nejedná o vyčerpávající seznam, ale o jakýsi vstup do bohatého „informačního světa“, který otevírá mnoho možností pro práci v historii matematiky.

V klasických zdrojích, slovnících a encyklopediích, lze poměrně snadno nalézt základní informace biografické, bibliografické, matematické i historické, stejně tak i přehledové práce o vývoji jednotlivých matematických disciplín. V tzv. zdrojových knihách jsou otištěny stěžejní ukázky z významných matematických prací všech dob; navíc jsou většinou doplněny kvalifikovanými komentáři. Referativní časopisy obsahují stručné posudky (tzv. *review*) na časopisecky publikované práce, na vydané učebnice a monografie. Některé časopisy uvedené v seznamu 2.6 se věnují historii matematiky a exaktních věd, některé historii vědy, jiné jsou zaměřeny poměrně široce – od matematiky přes její historii až k otázkám didaktiky a vyučování matematice. Poznamenejme, že některé časopisy jsou čas od času doplněny přehlednými indexy shrnujícími informace o publikovaných pracích za dlouhé časové období (řazeny jsou podle autorů, podle oborů apod.). V současné době je řada klasických časopisů dostupná i v elektronické verzi, vznikají rovněž čistě elektronické časopisy.

V poslední době jsou možnosti těchto klasických zdrojů výrazně rozšířeny o nejrůznější internetové vyhledávání. Narůstá počet časopisů, které mají své webové stránky, na nichž jsou některé publikované práce dostupné zdarma, jiné za poplatek;

[9] Morální vyspělost badatele se pozná i na způsobech citování. Uveďme jeden příklad z české historie: František Josef Studnička (1836–1903), profesor matematiky na pražské a později české univerzitě, se léta nesnášel se svým kolegou Augustem Seydlerem (1849–1891), profesorem fyziky. Přesto např. ve své práci o kvaternionech z roku 1894 citoval výsledky svého zemřelého „konkurenta“ z roku 1881 a uvedl, že ho tyto výsledky inspirovaly.

bezplatně přístupné jsou často obsahy jednotlivých ročníků a někdy i abstrakty otištěných prací. Referativní časopisy jsou postupně digitalizovány, veškeré informace, které byly původně otištěny v jednotlivých jejich svazcích, jsou nyní obsaženy v rozsáhlých databázích umožňujících všestranné vyhledávání. Některé z těchto databází jsou volně přístupné, jiné jsou volně k disposici na MFF UK, PřF MU, MÚ AV ČR a některých dalších institucích. Existují též databáze matematických prací, které nebyly vytvořeny přímo z referativních časopisů.

V katalozích většiny klasických knihoven lze dnes knihy vyhledávat i objednávat přes internet,[10] často v nich nalezneme i životní data jednotlivých autorů. V digitalizovaných knihovnách, které jsou přístupné přes Internet, lze vyhledat některé časopisecké práce, učebnice i monografie a příslušné pasáže vytisknout. Takto jsou bezplatně dostupné např. sebrané spisy řady významných matematiků.

Nejmodernějšími zdroji poznatků všeho druhu jsou dnes webové stránky. Právě na nich lze poměrně snadno nalézt základní informace biografické, bibliografické, matematické i historické. Obsahují obrovský materiál usnadňující studium i odbornou a vědeckou práci. Poskytují mnoho informací, které bychom jinak těžko sháněli, nebo které by pro nás byly zcela nedostupné. Je však třeba si uvědomit, že webové stránky během doby vznikají, zanikají, proměňují se, vyvíjejí a jejich kvalita kolísá. Vedle velice seriózních stránek existují navíc i zcela bezcenné stránky s velice pochybnými informacemi; s tímto nebezpečím je třeba počítat. Objem materiálu, které webové stránky poskytují, však velmi rychle narůstá. Mnohé navíc skýtají obrovské možnosti mnohostranného vyhledávání, což je často podmíněno jejich vzájemným propojením.

Níže uvedený seznam uvádí, podle našeho mínění, jen ty webové stránky, které přinášejí seriózní informace. V žádném případě však nelze říci, že uveřejňujeme reprezentativní soupis všech důležitých webových stránek věnujících se úplně nebo jen částečně historii matematiky. Jedná se pouze o vstup do webového světa, který umožní rychlé získání poměrně spolehlivých informací všeho druhu, a to nejen z historie matematiky, ale i z matematiky samotné. Některé webové stránky jsou věnovány zejména biografickým záležitostem, jiné hlavně životům a dílům jednotlivých matematiků, zveřejňují však i jejich digitalizované práce a další materiály – např. *Galileo project* obsahuje některé Galileiho práce, *Leibniz-Archivs* tisíce stran Leibnizovy korespondence a výběr z jeho prací, *The Online Newton Project* umožňuje přístup k některým Newtonovým pracím, Eulerovy práce jsou přístupné na *The works of Leonhard Euler online*.

Poznamenejme, že zařazení jednotlivých pramenů do následujících odstavců je v řadě případů problematické; některé knižní tituly či webové stránky by mohly být podle svého obsahu, pojetí a zpracování uvedeny ve více kolekcích.

Vřele doporučujeme doktorandům a začínajícím badatelům podrobné seznámení s charakterem níže uvedených klasických i moderních informačních zdrojů. Je třeba vědět, kde a jak co nejrychleji získat spolehlivé informace o problematice, které se chceme věnovat.

[10] Dobře fungující vyhledávání poskytuje např. bohatě vybavená knihovna *Istituto matematico Guido Castelnuovo, Università di Roma "La Sapienza"*, http://library.mat.uniroma1.it/.

2.1 Slovníky (biografické, bibliografické, naučné, matematické)

- C. von Würzbach: *Biographisches Lexikon des Kaiserthum Oesterreich*, Wien, 1856–1890.
- *J. C. Poggendorff's biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften*, I.-VIII. Od roku 1863, též na CD-ROM, 2004.
- *Ottův slovník naučný*, I.-XXVIII., Vydavatel a nakladatel J. Otto, Praha, 1888–1909. *Ottův slovník naučný nové doby*, I.-VI. (12 svazků), 1930–1943. Reedice: 1996–2003.
- A. I. Borodin, A. S. Bugaj: *Biografičeskij slovar' dejatelej v oblasti matematiki*, Radjans'ka škola, Kiev, 1979, 607 stran; 2. vydání: *Vydajuščiesja matematiki. Biografičeskij slovar – spravočnik*, Radjans'ka škola, Kiev, 1987, 653 stran.
- A. N. Bogoljubov: *Matematiki, mechaniki. Biografičeskij spravočnik*, Naukova Dumka, Kiev, 1983, 639 stran.
- C. C. Gillespie (ed.): *Dictionary of Scientific Biography*, C. Scribner's sons, New York, 1970–1990.
- S. Gottwald, H.-J. Ilgauds, K.-H. Schlotte: *Lexikon bedeutender Mathematiker*, Bibliographisches Institut Leipzig, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, 1990, 540 stran; připravuje se další, rozšířené vydání.
- H. Wussing, W. Arnold: *Biographien bedeutender Mathematiker*, 4. vydání: Volk und Wissen, Volkseigener Verlag, Berlin, 1989.
- J. Folta, L. Nový: *Dějiny přírodních věd v datech*, Malá encyklopedie, svazek 8, Mladá fronta, Praha, 1979, 359 stran.

2.2 Encyklopedická díla

- P. L. Buter, D. Lohrmann: *Science in Western and Eastern Civilization in Carolingian Times*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1993.
- F. Cajory: *A History of Mathematical Notations. Two Volumes Bound As One*, Dover Publication, New York, 1993.
- H. Cancik, H. Schneider (eds.): *Der neue Pauly. Enzyklopädie der Antike. Das klassische Altertum und seine Rezeptionsgeschichte*, J. B. Metzler, Stuttgart, 1996–2003, 11 611 stran.
- H. Cancik, H. Schneider, M. Landfester, Ch. F. Salazar (eds.): *Brill's New Pauly. Encyclopaeda of the Ancient World,* Brill, 2006.
- G. Sarton: *Introduction to the History of Science*, I.-III., Baltimore, 1931–1947.
- A. Pauly, G. Wissowa, W. Kroll, K. Witte, K. Mittelhaus, K. Ziegler (eds.): *Paulys Realencyclopädie der classischen Altertumswissenschaft*. J. B. Metzler, Stuttgart, 1894–1980.

- E. Pascal: *Repertorio di matematiche superiori (Definizioni – Formole – Teoremi – Cenni bibliografici).* I. *Analisi*, II. *Geometria*, Ulrico Hoepli, Milano, 1898, 1900, xv + 642 stran, xviii + 928 stran.

- E. Pascal: *Repertorium der höheren Mathematik*, I. *Analysis*, II. *Geometrie*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1900, 1902, xii + 638, ix + 712 stran, německou verzi připravil kolektiv autorů pod vedením P. Epsteina a H. E. Timerdinga; 2. vydání: I.1: 1910, xv + 528 stran, I.2: 1927, xii, 529–1024, I.3: 1929, xii, 1025–1598, II.1: 1910, xvi + 536 stran, II.2: 1922, xii, 537–1165.

- *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, B. G. Teubner, Leipzig, 1898–1935.

- *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Gauthier-Villars, Paris, Teubner, Leipzig, 1904–1916; reprint: Gabay, 1992.

- L. Berzolari, G. Vivanti, D. Gigli (ed.): *Enciclopedia delle matematiche elementari* I-1, I-2, II-1, II-2, III-1, III-2, III-3, Ulrico Hoepli, Milano, 1930, 1932, 1937, 1938, 1947, 1950, 1953, xvi + 450, xvi + 609, xvi + 634, xi + 572, 1038, 218 stran. Ristampa: Roma, 2003–2004.

- *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, B. G. Teubner, Leipzig, 1950–1958.

- L. Nový a kol.: *Dějiny exaktních věd v českých zemích do konce 19. století*, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1961, 431 stran.

- I. M. Vinogradov (ed.): *Matematičeskaja encyklopedija* I.-V., Izdatel'stvo Sovetskaja encyklopedija, Moskva, 1977–1985; anglicky: M. Hazewinkel (ed.): *Encyclopedia of mathematics* I.-VI., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1995, *Supplement* I.-III., 1997, 2000, 2001.

- I. Grattan-Guinness (ed.): *Companion Encyklopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Vol. I., II., Routledge, London-New York, 1994, xi + xi + 1806 stran; reprint: J. Hopkins Paperback Edition, 2003.

2.3 Bibliografie

- K. O. May: *Bibliograhpy and Research Manual of the History of Mathematics*, University of Toronto Press, Buffalo, 1973, 818 stran.

- J. W. Dauben: *The History of Mathematics from Antiquity to the Present. A Selective Bibliography*, Garland, New York, 1985, xxxix + 467 stran; revised edition on CD-ROM, A. C. Lewis (ed.), AMS, Providence, RI, 2000.

2.4 Zdrojové knihy (source books, chrestomatie)

- A. Speiser: *Klassische Stücke der Mathematik*, Verlag Orell Füssli, Zürich und Leipzig, 1925, 170 stran.

- H. Wieleitner: *Mathematische Quellenbücher*, I.-IV., Berlin, 1927–1929.
- D. E. Smith: *A source Book in Mathematics* I., II., New York, 1929, xiii + 701 stran, reprint: Dover Publications, Inc., New York, 1959; reprint: McGraw-Hill Book Company, New York, 1985.
- J. R. Newman: *The World of Mathematics*, I.-IV., New York, 1956.
- H. O. Midonick: *The Treasury of Mathematics* I., II., Penguin Books, London, New York, 1965, 412 + 416 stran.
- J. van Heyenoort: *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematics, 1870–1931*, Cambridge, Mass., 1967.
- G. Birkhoff: *A Source Book in Classical Analysis*, Cambridge, Mass., 1973.
- A. P. Juškevič (red.): *Chrestomatija po istorii matematiki*, I. *Arifmetika i algebra, Teorija čisel, Geometrija*, II. *Matematičeskij analiz, Teorija verojatnostej*, Prosveščenie, Moskva, 1976, 1977, 319 + 224 stran.
- D. J. Struik (ed.): *A source Book in Mathematics 1200–1800*, Cambridge, Mass., 1969, xiv + 427 stran; reprint: Princenton University Press, Princeton, 1986, 1990.
- J. Fauvel, J. Gray: *The History of Mathematics. A reader*, The Open University, London, 1987.
- U. Bottazzini, P. Freguglia, L. Toti Rigatelli: *Fonti per la storia della matematica: aritmetica, geometria, algebra, analisi infinitesimale, calcolo delle probabilita, logica,* Sansoni editore, Firenze, 1992, vi + 521 stran.
- V. J. Katz (ed.): *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam. A Sourcebook*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2007, xiv + 685 stran.

2.5 Referativní časopisy

- *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik und Physik*. 1868 až 1942.
    - http://www.emis.ams.org/projects/JFM/
- *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*. Od roku 1870.
- *Revue semestrielle des publications mathématiques*. 1893–1933.
- *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete (reine und angewandte Mathematik, theoretische Physik, Astrophysik, Geophysik).* Od roku 1931.
    - http://www.zentralblatt-math.org/zmath/en/
- *Mathematical Reviews.* Od roku 1940.
    - http://www.ams.org/mathscinet/
- *Referativnyj Žurnal. Matematika*. Od roku 1953.
    - http://www.lib.vsu.ru/resurses/math.phtml

2.6 Časopisy

- *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*. 1877–1913.

- *American Mathematical Monthly*. Od roku 1894.
  - http://www.maa.org/pubs/monthly_toc_archives.html

- *Annals of Science*. Od roku 1936
  - http://www.tandf.co.uk/journals/tf/00033790.html

- *Archiv für die Geschichte der Mathematik, der Naturwissenschaften und der Technik*. 1918–1931.

- *Archives internationales d'histoire des sciences*. 1919–1926 jako *Archivio di storia della scienza*, 1927–1943 jako *Archeion*, od roku 1947 pod současným názvem.

- *Archive for History of Exact Sciences*. Od roku 1960.
  - http://www.springerlink.com/content/101548/

- *Bibliotheca Mathematica*. 1884–1886, 1887–1899, 1900–1913.

- *Bolletino di bibliografia e storia delle scienze matematiche*. 1898–1919.

- *Bolletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*. 1868–1887.

- *Bollettino di storia delle scienze matematiche*. Od roku 1981.
  - http://www.libraweb.net/sommari.php?chiave=92

- *The British Journal for the Philosophy of Science*. Od roku 1950.
  - http://bjps.oxfordjournals.org/

- *Bulletin Signalétique 522. Histoire des sciences et des techniques*. Od roku 1962.

- *Centaurus*. Od roku 1950.
  - http://www.blackwell-synergy.com/loi/CNT?open=1950&cookieSet=1

- *Dějiny věd a techniky*. Od roku 1968.
  - http://mujweb.cz/Veda/dejiny_ved_a_techniky/

- *Gnomon. Kritische Zeitschrift für die gesamte klassische Altertumswissenschaft*. Od roku 1925.

- *Isis*. Od roku 1913.
  - http://www.journals.uchicago.edu/Isis

- *Istoriko-matematičeskie issledovanija*. Od roku 1948.

- *Journal for the History of Astronomy*. Od roku 1970.
  - http://www.shpltd.co.uk/jha.html

- *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*. Od roku 1937.
  - http://warburg.sas.ac.uk/journal/

- *Hermes*. Od roku 1866.
    - http://www.ingentaconnect.com/content/fsv/hermes
- *Historia Mathematica*. Od roku 1974.
    - http://www.math.uu.nl/ichm/hm/hmtoc.html
    - http://www.sciencedirect.com/science/journal/03150860
- *History of Science*. Od roku 1971.
    - http://www.shpltd.co.uk/hs.html
- *Historia Scientiarum*. Od roku 1962.
    - http://wwwsoc.nii.ac.jp/jshs/historiascientiarum/
- *The Mathematical Intelligencer*. Od roku 1979.
- *Mitteilungen zur Geschichte der Medizin und Naturwissenschaften und Technik.* 1932–1941.
- *NTM, International Zeitschrift für Geschichte und Ethnik der Naturwissenschaften, Technik und Medizin*, Od roku 1960.
    - http://www.springerlink.com/content/0036-6978
- *Physis. Rivista internazionale di storia della Scienza*. Od roku 1959–1985, znovu od roku 1991.
    - http://www.olschki.it/riviste/physis.htm
- *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik.* 1930–1936.
- *Science in Context*. Od roku 1980.
    - http://journals.cambridge.org/action/displayJournal?jid=SIC
- *Scientia. (Rivista di scienza)*. 1907–1988.
    - http://acnp.cib.unibo.it/cgi-ser/start/it/cnr/df-p.tcl?issn=0036-8687
- *Scripta Mathematica: A Quarterly Journal Devoted to the Philosophy, History, and Expository Treatment of Mathematics*. 1932–1974.
- *Sudhoffs Archiv. Zeitschrift für Wissenschaftsgeschichte*. Od roku 1908.
    - http://www.steiner-verlag.de/Sudhoff/
- *Revue d'Histoire des Sciences*. Od roku 1947.
    - http://www.armand-colin.com/revues_info.php?idr=14
- *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications*. 1950–1984.
- *Voprosy istorii estestvoznanija i techniki*. Od roku 1980.
    - http://www.ihst.ru/viet/index.htm
- *Zeitschrift für Mathematik und Physik. Historisch-literatische Abteilung*. 1865–1900.
- *Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.* 1870–1944.

2.7 Digitalizované knihovny

- **Digital Mathematics Library – Bielefeld**
  - http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~rehmann/DML/dml_links.html
  - Obsahuje velký počet digitalizovaných matematických monografií, učebnic a časopiseckých prací.

- **Cornell University Library – Math Book Collection**
  - http://dlxs2.library.cornell.edu/m/math/
  - Obsahuje velký počet digitalizovaných matematických prací uložených v knihovně Cornell University. Tato digitalizovaná knihovna je propojena s knihovnami stránek *Goettinger Digitalizierung-Zentrum* a *The University of Michigan Historical Mathematics Collection* (viz dále).

- **Gallica**
  - http://gallica.bnf.fr/
  - Jedná se o projekt francouzské národní knihovny obsahující mimo jiné digitalizované verze prací zejména významných francouzských světových matematiků (A. L. Cauchy, C. Jordan, A.-M. Legendre, H. Poincaré atd.). Najdeme zde však řadu dalších digitalizovaných textů, např. Emila Weyra.

- **Goettinger Digitalizierung-Zentrum**
  - http://gdz.sub.uni-goettingen.de/en/
  - Obsahuje digitalizované verze více než 20 matematických časopisů, 400 monografií, 13 vícesvazkových děl.

- **JSTOR**
  - http://www.jstor.org/
  - Zveřejňuje práce z řady časopisů věnovaných mimo jiné též matematice a dějinám vědy.

- **Mathematicians and Philosophers of Mathematics**
  - http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/HomePages.html
  - Obsahuje digitalizované práce některých významných matematiků (např. G. Berkeley, G. Boole, W. R. Hamilton, B. Riemann, G. Cantor, I. Newton).

- **The University of Michigan Historical Mathematics Collection**
  - http://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/
  - Obsahuje digitalizované verze publikací zejména z knihovny v Michiganu. Najdeme zde např. i knihy Emila Weyra.

- **DML–CZ: Česká digitální matematická knihovna**
  - http://dml.cz/
  - Otevření této webové stránky se připravuje. Bude obsahovat nejdůležitější matematickou produkci vzniklou na našem území.

2.8 Webové stránky obecnějšího charakteru

- **The MacTutor History of Mathematics Archive**
  - http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/
  - Obsahuje kolekci biografií nejvýznamnějších matematiků (asi tisíc osobností, jejich abecední a chronologický index, mapa míst jejich narození, mnoho odkazů na další webové stránky).

- **History of Mathematics Home Page (David E. Joyce, Clark University)**
  - http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/mathhist.html
  - Obsahuje četné informace o vývoji matematiky v různých oblastech světa, o historii vybraných matematických témat, četné odkazy na knižní tituly a časopisy, klasické matematické texty, bibliografické informace atd.

- **The Mathematical Museum and Exhibitions**
  - http://www.math-net.de/links/show?collection=math.museum
  - Jedná se o část většího celku *Math-Net Links to the Mathematical World*, který byl vyvinut na *Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik, Berlin* (ZIB). Obsahuje informace o výstavách, muzeích, knihovnách a společnostech věnujících se historii matematiky.

- **Trinity College, Dublin, History of Mathematics**
  - http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/HistMath.html
  - Obsahuje některé původní matematické práce a zajímavé materiály o řadě matematiků (např. W. R. Hamilton, B. Riemann, G. Berkeley, G. Boole, G. Cantor, I. Newton). Jsou zde též biografie nejvýznamnějších matematiků 17. a 18. století.

- **Mathematics WWW Virtual Library**
  - http://www.math.fsu.edu/Virtual/
  - Jedná se o část WWW Virtual Library Project.

- **Most frequently linked pages in the MathSearch index**
  - http://www.maths.usyd.edu.au/MS-freq-link.html
  - Obsahuje adresy šedesáti nejužívanějších webových stránek o matematice a jejím vývoji.

- **Math on the Web**
  - http://www.ams.org/mathweb/index.html

- **Mathematics Education Database**
  - http://www.emis.de/MATH/DI.html

- **The Math Forum @ Drexel**
  - http://mathforum.org/library/topics/history/
  - Obsahuje více než šedesát webových adres vybraných z více než 650 nejužívanějších webových stránek věnovaných historii matematiky.

- **MathPages:History**
  - http://www.mathpages.com/home/ihistory.htm
  - Obsahuje asi čtyřicet textů Kevina Browna o významných matematických problémech.

- **Math Archives – History of Mathematics**
    - o http://archives.math.utk.edu/topics/history.html
    - Obsahuje abecední seznam nejlepších webových stránek o historii matematiky.

- **The Mathematical Atlas**
    - o http://www.math.niu.edu/~rusin/known-math/index/01-XX.html
    - Stručný úvod do studia historie matematiky doplněný množstvím odkazů. Vhodné pro začátečníky.

- **Ancient Geometry**
    - o http://members.aol.com/bbyars1/contents.html

- **Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics**
    - o http://members.aol.com/jeff570/mathword.html

- **Earliest Uses of Varios Mathematical Symbols**
    - o http://members.aol.com/jeff570/mathsym.html

- **Famous Problems in the History of Mathematics**
    - o http://mathforum.org/isaac/mathhist.html

- **Mathematical Quotations Server**
    - o http://math.furman.edu/~mwoodard/mqs/mquot.shtml

- **Materials for the History of Statistics**
    - o http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/welcom.htm

- **Euler–Your Portal to Mathematics Publications**
    - o http://www.emis.de/projects/EULER/

- **EMIS. The European Mathematical Information Service (EMS)**
    - o http://www.emis.de/

- **A Bibliography of Collected Works of Mathematicians**
    - o http://www.math.cornell.edu/~library/collectedwks.html
    - Jedná se o rozsáhlou stránku obsahující bibliografii předních matematiků a kolekci slavných matematických prací.

- **Portraits of Statisticians**
    - o http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/people
    - Jedná se o kolekci portrétů asi jedné stovky statistiků, kromě toho zde nalezneme zajímavé reference o pracích ze statistiky od 15. století do současnosti.

- **Richard Westfall's Archive of the Scientic Community in the 16th and 17th Centuries**
    - o http://galileo.rice.edu/lib/catalog.html
    - Obsahuje biografické detaily o více než šesti stech osobnostech vědy 16. a 17. století, z toho je 170 matematiků.

- **The British Society for the History of Mathematics**
    - o http://www.dcs.warwick.ac.uk/bshm/resources.html

- **Bibliography of Mathematics in Medieval Islamic Civilization**
    - http://www.math.uu.nl/people/hogend/Islamath.html

- **Mathematicians of the Seventeenth and Eighteenth Centuries**
    - http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/RBallHist.html

- **Vatican – Mathematics, Ancient Science and Its Modern Fates**
    - http://www.ibiblio.org/expo/vatican.exhibit/exhibit/d-mathematics/Mathematics.html

- **Významní matematici v českých zemích**
    - http://www.math.muni.cz/math/biografie/index.html
    - Tyto rozsáhlé stránky vytvořil na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity RNDr. Pavel Šišma, Ph.D.

2.9 Webové stránky věnované jednotlivým osobnostem

- **Archimedes**
    - https://www.cs.drexel.edu/~crorres/Archimedes/contents.html
    - http://www.archimedespalimpsest.org/

- **Euclid**
    - http://www.obkb.com/dcljr/euclid.html
    - http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

- **The works of Leonhard Euler online**
    - http://math.dartmouth.edu/~euler/

- **George Green**
    - http://www.nottingham.ac.uk/~ppzwww/green

- **Galileo project**
    - http://www.imss.fi.it/biblio/ebgaloleana.html

- **William Rowan Hamilton**
    - http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/

- **Hypatia of Alexandria**
    - http://www.poly.polyamory.org/~howard/Hypatia

- **Leibniz-Archivs**
    - http://www.nlb-hannover.de/Leibniz/Leibnizarchiv/Veroeffentlichungen/

- **Newtonia**
    - http://www.newton.org.uk

- **The Online Newton Project**
    - http://web.mit.edu/dibner/

- **Henri Poincaré**
    - http://poincare.uni-nancy2.fr/Outilsetfonds/

- **Bernhard Reimann**
    - http://www.fh-lueneburg.de/u1/gym03/homepage/chronik/riemann/riemann.htm
    - http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Geom/

2.10 Neevropská matematika – speciální stránky

- **Mesopotamian Mathematics**
    - http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath/index.html

- **Mathematicians of the African Diaspora**
    - http://www.math.buffalo.edu/mad/index.html

- **Mayan Math**
    - http://www.hanksville.org/yucatan/mayamath.html

2.11 Filozofie matematiky, matematika a umění

- **Stanford Encyclopedia of Philosophy**
    - http://setis.library.usyd.edu.au/stanford/contents.html

- **The Internet Encyclopaedia of Philosophy**
    - http://www.utm.edu/research/iep
    - Jedná se o internetovou verzi Encyklopedie filozofie.

- **The Bertrand Russell Archives**
    - http://www.mcmaster.ca/russdocs/russell.htm
    - Obsahuje některé práce, dokumenty a dopisy Bertranda Russella.

- **Mathematik und Kunst**
    - http://www.math-inf.uni-greifswald.de/mathematik+kunst/

2.12 Výpočetní technika

- **Abacus. The Art of Calculating with Beads**
    - http://www.ee.ryerson.ca:8080/~elf/abacus/

- **Alan Turing**
    - http://www.turing.org.uk/turing

- **Charles Babbage’s Analytical Engine**
    - http://www.fourmilab.ch/babbage/contents.html
    - Obsahuje základní informace o prvním počítacím stroji.

- **The Virtual Museum of Computing**
    - http://vmoc.museophile.com/
    - Rozsáhlý dokument o historii výpočetní techniky.

2.13 Matematická muzea

- **IMSS–The Institute and Museum of the History of Science, Florence: Galileo Room**
  - http://galileo.imss.firenze.it/museo/b/egalilg.html

- **Library of Congress Vatican Exhibit Mathematics Room**
  - http://www.ibiblio.org/exps/vatican/exhibit/Main_Hall.html
  - Oficiální stránka Vatikánské apoštolské knihovny – matematická část (řecké a latinské matematické a astronomické rukopisy, matematické práce středověké Evropy od 9. až do 15. století).

- **The Museum of the History of Science, Oxford**
  - http://www.mhs.ox.ac.uk
  - Má tři části: měření (matematika v 16. století), geometrie 1500–1750, věda.

- **The Art of Renaissance Science: Galileo and Perspective**
  - http://www.crs4.it/Ars/arshtml/arstitle.html
  - Pěkná diskuse o vztahu umění a vědy v renesanci.

- **Galileo Project**
  - http://es.rice.edu/ES/humsoc/Galileo

- **The Perseus Project**
  - http://www.perseus.tufts.edu/Texts/chunk TOC.html
  - Obsahuje práce nejvýznamnějších řeckých matematiků a filozofů.

2.14 České webové stránky s informacemi z historie matematiky

- **Osobní stránka Jindřicha Bečváře**
  - http://www.karlin.mff.cuni.cz/~becvar/
  - Obsahuje informace o doktorském studiu v oboru *Obecné otázky matematiky a informatiky* na MFF UK, o přednáškách a seminářích z dějin matematiky a dějin vyučování matematice na MFF UK, o celostátních konferencích a seminářích z dějin matematiky, o literatuře apod.

- **Osobní stránka Martina Bečvářové**
  - http://www.fd.cvut.cz/personal/nemcova/
  - Obsahuje informace o přednáškách, seminářích a konferencích z dějin matematiky na FD ČVUT a MFF UK, o celostátních konferencích a seminářích z dějin matematiky, o literatuře apod.

- **Osobní stránka Eduarda Fuchse**
  - http://bart.math.muni.cz/~fuchs
  - Obsahuje informace o historii teorie množin a řadu odkazů na další webové stránky.

- **Osobní stránka Magdaleny Hykšové**
  - http://euler.fd.cvut.cz/publikace/HTM/Index.html
  - Obsahuje stránku o životě a díle matematika Karla Rychlíka.

- **Osobní stránka Pavla Šišmy**
  - http://www.math.muni.cz/~sisma/history/uvod.html
  - Obsahují biografické a bibliografické informace o českých a slovenských matematicích, německých matematicích působících na našem území, informace o vývoji německé techniky v Brně, informace o akcích týkajících se dějin vědy a techniky, mnoho užitečných odkazů na další webové stránky věnované historii vědy a vývoji matematiky.

- **Historie matematiky na olomoucké univerzitě**
  - http://www.sweb.cz/navarikp/uvod.html
  - Diplomová práce Pavly Navaříkové o historii matematiky na olomoucké univerzitě.

- **Slavní vědci**
  - http://vedci.wz.cz/
  - Obsahuje stručné biografie nejvýznamnějších osobností vědy.

- **Výzkumné centrum pro dějiny vědy**
  - http://www.vcdv.cas.cz
  - Stránka *Výzkumného centra pro dějiny vědy*, které existovalo v letech 2000 až 2004. Věnovalo se zejména vývoji české vědy od druhé poloviny 19. století do současnosti.

Literatura

[1] Bečvářová M.: *Czech Project in History of Mathematics (Biographical Monographs. Evaluation of Scientific and Pedagogical Work)*. N.T.M. 12(2004), 40–48.

[2] Folta J.: *Stručný úvod do metodiky odborné práce v dějinách a filozofii matematiky*, E. Fuchs a kol.: Světonázorové problémy matematiky IV., SPN, Praha, 1987, 5–16.

Adresy

Doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *becvar@karlin.mff.cuni.cz*

Doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
Ústav aplikované matematiky
Fakulta dopravní ČVUT v Praze
Na Florenci 25
110 00 Praha 1
e-mail: *nemcova@fd.cvut.cz*

KONFERENČNÍ PŘÍSPĚVKY

Archimedes Eratosthenovi pozdrav vzkazuje.

Odeslal jsem Ti dříve některé z nalezených vět, napsav jejich obsah, a vybídl jsem Té, bys nalezl tyto důkazy, které jsem až do přítomné doby nevyslovil. Byly pak nalezených vět obsahy tyto:

První: Vepíše-li se do přímého hranolu, majícího za základnu rovnoběžník, válec, mající základny v protilehlých rovnoběžnících, plášť pak na ostatních stěnách hranolu, a proloží-li se rovina středem kruhu, který jest základnou válce a jednou stranou čtverce v protilehlé rovině, odetne proložená rovina z válce úsek, který jest omezen pláštěm válce a dvěma rovinami a to jednou proloženou, druhou však, v níž jest základna válce, a pláštěm válce mezi řečenými rovinami. Jest pak úsek z válce oddělený šestým dílem celého hranolu.

Druhé věty obsah jest tento: Vepíše-li se do krychle válec, mající základny v protilehlých rovnoběžnících, plášť však dotýkající se ostatních čtyř stěn a vepíše-li se pak do téže krychle jiný válec, mající základny v jiných rovnoběžnících, plášť však dotýkající se ostatních čtyř stěn, jest útvar omezený plášti válců, který jest v obou válcích obsažen, polovicí celé krychle.

Přihází se však, že tyto výsledky zkoumání se liší od těch dříve vyslovených. Neboť zajisté ony útvary, totiž sféroidy a konoidy a jejich úseky, srovnali jsme co do velikosti s útvary kuželů a válců, žádný však z nich nebyl shledán rovný tělesnému útvaru omezenému rovinami; z těchto však útvarů dvěma rovinami a plášti válců omezených každý jednomu tělesnému útvaru z omezených rovinami rovný se shledává. Těchto tedy vět důkazy v této knize napsav Tobě odesílám. Vida pak Tebe, jak právě říkám, ve vědě horlivého a v popředí filosofie stojícího pamětihodně . . . . a zkoumání si vážícího, rozhodl jsem se Tobě dopsati a do této knihy vložiti zvláštnost jakéhosi způsobu, kterým Ti bude dána příležitost obdržeti prostředky, aby se mohlo něco z oboru mathematiky zkoumati pomocí mechaniky. Jsem pak přesvědčen, že toto jest prospěšno nicméně i k důkazu vět samých. A přece, ačkoliv se mně některé z nich dříve objevily mechanicky, byly dokázány později i geometricky, poněvadž zkoumání pomocí tohoto způsobu jest jakoby bez důkazu; snadnější však zajisté jest podati důkaz, když se napřed obdrží pomocí tohoto způsobu

ARCHIMÉDOVY PRÁCE ČESKY

MARTINA BEČVÁŘOVÁ

1 Archimédes

Archimédes (asi 287 až 212), řecký matematik, astronom, fyzik a inženýr, se narodil v Syrakusách na Sicílii jako syn astronoma a matematika Feidia. Na Sicílii prožil většinu svého života. O jeho životě a rodině není mnoho známo, ačkoli byl jedním z nejvýznamnějších a všestranně talentovaných učenců starověku. Tvrdí se, že během svého života navázal osobní kontakt s vědci tehdejšího největšího střediska vzdělanosti – Alexandrií, zejména s matematiky Kononem ze Samu (asi 280 až 220) a Eratosthenem z Kyrény (asi 276 až 194). V roce 212 se aktivně účastnil obrany Syrakus před Římany, zkonstruoval obranné stroje, které svou údernou silou udivovaly tehdejší svět, v němž právě probíhala jedna z etap punských válek. Při obraně Syrakus zahynul.

Archimédes napsal řadu významných prací, na něž navázala až novověká matematika a fyzika. Většina z nich se zachovala v latinských, řeckých a arabských přepisech, o jiných jeho spisech víme jen z komentářů a poznámek pozdějších autorů. K Archimédovým neznámějším spisům patří: *Měření kruhu* (Kyklu metresis), *Počítání písku* (Psammites), *O kvadratuře paraboly* (Tetraginismos parabole), *O kouli a válci* (Peri sfairas kai kylindru), *O spirálách* (Peri helikon), *O konoidech a sféroidech* (Peri konoideon kai sfaireideon), *Kratochvíle* (Stomachion), *O rovnováze neboli těžištích rovinných obrazců* (Epipedon isorhopion e kentra baron epipedon), *Poselství Eratosthenovi o mechanické metodě řešení geometrických úloh* (Peri ton mechanikon theorematon pros Erathostenen efedos) – které získalo stručný název *O metodě*, dále spis *O plovoucích tělesech* (Ochumenon), *Poučky* (Lemmata) a *Problém dobytka* (Problema boeikon).[1]

Archimédovy matematické myšlenky umožňující výpočty obsahů rovinných útvarů, povrchů a objemů těles představují vrchol antické matematiky; v novověku na ně volně navázala matematická analýza a analytická geometrie (studium vlastností křivek a ploch). Ve fyzikálních spisech prozkoumal umístění těžiště různých ploch a těles, jejich rovnováhu, objasnil fyzikální podstatu a použití „jednoduchých strojů" a objevil zákon o nadlehčování těles ponořených do kapaliny, který dnes nese jeho jméno a je součástí všech kurzů fyziky.

V odborných studiích a učebnicích věnujících se historii vědy bývá Archimédes oprávněně označován za jednoho z největších matematiků a fyziků starověku, který byl navíc schopen své výsledky úspěšně využít v praxi (využití kladky, páky, kladkostroje, nakloněné roviny, šroubu, konstrukce mechanických strojů apod.).[2]

---

[1] Podrobněji o jednotlivých dílech se lze dočíst např. v [3] a [4].

[2] O Archimédovi a jeho spisech viz J. L. Heiberg: *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii I.–III.*, Leipzig, Teubner, 1910, 1913 a 1915; T. L. Heath: *The Works of Archimedes, edited in modern notation with introductory chapters*, Cambridge University Press, 1897 (německy, Berlin, 1914, reprint: Dover Publications, Inc., 2002); P. Eecke: *Les Oeuvres Complètes d'Archimède*, Paris, Bruxelles, 1921; Ch. Mugler (ed.): *Archimède, Texte et traduction*, I.–IV., Paris, 1970–1972; P. Midolo: *Archimede e il suo tempo*, Siracusa, Prem. Tipografia del „Tamburo", 1912; F. Kagan: *Archimedes*, Orbis, Praha, 1953 (překlad z ruštiny); E. J. Dijksterhuis:

2 České překlady klasických prací

Od šedesátých let 19. století, kdy se postupně rozšiřovala výuka matematiky v českém jazyce na středních školách a začaly se objevovat české matematické přednášky na pražské polytechnice, citelně chyběly české učební texty a pomůcky. Proto se rozšířily snahy sepsat první české středoškolské i vysokoškolské učebnice matematiky a prosadily se tendence směřující ke vzniku překladů matematických děl klasiků i některých moderních monografií.[3]

První takovéto české překlady matematických děl vznikly v sedmdesátých letech 19. století.[4] Jejich autoři byli tehdy aktivními členy *Jednoty českých mathematiků*, kteří teprve nedávno ukončili svá vysokoškolská studia a s mladickým nadšením a energií se pustili do obtížné práce. V osmdesátých letech se objevily další překlady[5], hlavní pozornost českých matematiků byla však v té době zaměřena především na sepisování původních odborných prací, monografií a českých učebnic. Další překlady nalezneme až na počátku 20. století.

Značná pozornost byla věnována překladu stěžejního matematického díla všech dob – *Eukleidovým Základům* – tj. knize, která ovlivňovala vývoj matematiky a její vyučování od třetího století př. n. l. více méně až do současnosti.[6] Přeloženy byly také nepatrné zlomky z díla René Descarta (1596–1650), Blaise Pascala (1623–1662) a Bernarda Bolzana (1781–1848).[7]

3 Překlady Archimédových prací

V následujícím textu se budeme věnovat třem českým překladům Archimédových prací, z nichž dva jsou od svého vzniku v povědomí české matematické obce, třetí však zůstal zcela na okraji zájmu a byl až do roku 2008 zcela zapomenut.

Archimedes, Copenhagen, Ejnar Munksgaard, 1956 (reprint: Princeton, NJ, 1987); I. Schneider: *Archimedes. Ingenieur, Naturwisenschaftler und Mathematiker*, Darmstadt, Wiss. Buchgesellschaft, 1979.

[3] Poznamenejme, že v této době se česká vědecká komunita pokusila i o překlad jednoho Aristotelova logického spisu. Antonín Jaroslav Vrťátko přeložil roku 1860 Aristotelův spis *Kategorie*, který vydal pod názvem *Aristotela Katégorie*. Podruhé tento spis přeložil v roce 1918 Pavel Vychodil. První ucelený český překlad logických Aristotelových spisů (Organon) je spjat až se jménem Karla Berky, jehož překlady vycházely od roku 1958 až do roku 1978. Podrobněji o českých překladech matematických děl klasiků a moderních monografií viz [2], str. 263–279.

[4] Například na počátku 70. let 19. století Emil Weyr přeložil dvě monografie italského geometra Luigi Cremony *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* (Cremonovy geometrické transformace útvarů rovinných) a *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (Úvod do geometrické teorie křivek rovinných), Martin Pokorný přeložil slavnou učebnici německého matematika Richarda Baltzera *Die Elemente der Mathematik* (Dra Richarda Baltzera Základové matematiky. Díl Prvý. Prostá aritmetika) a Karel Zahradník přeložil významnou práci italského matematika Giusta Bellavitise *Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di geometria analitica (Calcolo delle equipollenze)* (Methoda equipollencí čili rovnic geometrických).

[5] Například na počátku 80. let 19. století František Josef Studnička přeložil slavný článek Bernarda Bolzana *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichunge liege* (Ryze analytický důkaz poučky, že mezi dvěma hodnotami, jež poskytují opačně označené výsledky, leží nejméně jeden realný kořen rovnice).

[6] Cesta *Eukleidových Základů* světem od jejich vzniku až do současnosti, charakteristika jejich obsahu i analýza jejich významu, stejně jako vznik a osudy českých překladů jsou popsány v [1], str. 7–111.

[7] Více viz [2], str. 263–279.

3.1 Měření kruhu

Dochovaná část Archimédova *Měření kruhu* je asi jen zlomkem jeho původní práce; známe z ní pouze tři matematické věty. V první je vysloven důležitý vztah mezi obvodem a obsahem kruhu – obsah kruhu je roven obsahu pravoúhlého trojúhelníka, jehož délky odvěsen jsou rovny poloměru a obvodu kruhu. Důsledkem je skutečnost, že ve vzorci pro obsah i obvod kruhu figuruje stejná konstanta, kterou dnes označujeme symbolem π (poměr obvodu a průměru kruhu). Ve druhé větě je uveden přibližný odhad této konstanty, třetí věta uvádí daleko přesnější odhad.

Je pravděpodobné, že se jedná jen o jakýsi výtah z původního Archimédova díla, v němž asi navíc došlo k chybnému zařazení druhé věty, která je jen jednoduchým důsledkem věty třetí.[8] Archimédův spis *Měření kruhu* byl od svého vzniku patrně často studován, přepisován a komentován. Patřil k oblíbeným spisům, protože obsahoval matematicky jednoduchou, dobře představitelnou a pochopitelnou látku.[9]

V roce 1903 vydal Miloslav Valouch[10] český překlad Archimédova *Měření kruhu*.[11] Doplnil jej dvanáctistránkovým úvodem, v němž podal stručné informace o Archimédově životě a díle, o jeho významu a připojil seznam literatury. Vyložil základní myšlenky některých metod výpočtu druhé odmocniny, aby objasnil, jaké výpočty a úvahy Archimédes prováděl. K překladu použil kritické vydání Archimédových prací, které v letech 1880 až 1881 vydal Johan Ludwig Heiberg (1854–1928), největší znalec Archimédova díla.[12] Český čtenář tak získal jazykově věrný, pečlivě vypracovaný překlad rozšířený o poznámky, výklady méně srozumitelných míst a komentáře.

Poznamenejme pro zajímavost, že o existenci českého překladu Archimédova *Měření kruhu* nenajdeme žádnou zmínku ani v *Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky* ani ve výročních zprávách *Jednoty českých mathematiků* či v zápisech ze zasedání jejího výboru. M. Valouch byl tehdy mladým, řadovým učitelem, aktivitu v Jednotě českých matematiků a fyziků měl teprve před sebou.

---

[8] O Archimédově spise *Měření kruhu* viz např. [6] až [9].
[9] O historii tohoto spisu viz např. [3].
[10] Miloslav Valouch (1878–1952) působil po studiích na pražské univerzitě jako středoškolský profesor matematiky a fyziky na středních školách v Olomouci, Rokycanech, Litomyšli a Praze. Od roku 1918 až do svého penzionování v roce 1927 pracoval na Ministerstvu školství a národní osvěty, kde se věnoval otázkám vyučování a reformy školství. Podílel se také na přípravě nových gymnaziálních učebnic, které reagovaly na změny osnov tohoto typu středních škol. Po odchodu do penze aktivně pracoval v Jednotě československých matematiků a fyziků (dlouhá léta byl jejím ředitelem). Sepsal mnoho článků, několik knížek a středoškolských učebnic. Známý se stal díky logaritmickým tabulkám (první vydání 1904), které v jeho úpravě vycházely několik desetiletí a dočkaly se více než 15 vydání.
[11] *Archimedovo měření kruhu*, Výroční zpráva c. k. státního vyššího gymnasia v Litomyšli, 1903, 25 stran.
[12] Viz J. L. Heiberg: *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii. E codice Florentino recensuit, latine vertit notisque illustravit ..., Vol. I.–III.*, Lipsiae, 1880–1881. Poznamenejme, že J. L. Heiberg byl slavný a světově uznávaný dánský klasický filolog a největší odborník na klasickou řeckou matematiku. V letech 1896 až 1925 přednášel klasickou řečtinu na kodaňské univerzitě. V letech 1880 až 1881 vydal výše zmíněné třísvazkové dílo obsahující veškeré známé Archimédovy práce (druhé upravené a rozšířené vydání bylo publikováno v letech 1910 až 1915). V letech 1883 až 1888 vydal novou kritickou řeckou verzi *Eukleidových Základů* a spolu s H. Mengem vydával v letech 1883 až 1916 Eukleidovo souborné dílo (*Euclides Opera Omnia*), v letech 1891 až 1893 vydal dva svazky Apollóniových prací, v letech 1898 až 1907 dva svazky Ptolemaiových prací, v letech 1912 až 1914 dva svazky Hérónových prací. K dalším jeho odborným zájmům patřilo řecké lékařství. Přeložil, komentoval a vydal Hippokratovy spisy (5. stol. př. n. l.) a dílo lékaře Paula z Angíny (7. stol. n. l.). Proslavil se též jako autor prací o vývoji řecké matematiky. Jeho kritická vydání řeckých klasiků se stala základem moderních překladů do národních jazyků.

3.2 Počet pískový

Archimédes vyložil v tomto svém spise postup, kterým je možno slovně vyjádřit obrovská přirozená čísla, a to pomocí číselné soustavy, jejímž základem je oktáda, tj. číslo 10^8. Současně ukázal, že počet pískových zrn, která by vyplnila celou sféru stálic, je nesrovnatelně menší než čísla, která jeho soustava popisuje. Spis *Počet pískový* obsahuje též Archimédovy úvahy o uspořádání vesmíru a odhady jeho velikosti. Pro historii vědy je cenná Archimédova informace o názorech jeho předchůdce Aristarcha ze Samu (asi 320 až 230 př. n. l.), jehož práce *Hypotheses* obhajující heliocentrický názor, se nedochovala. Archimédův *Počet pískový* se dochoval v kompletnější verzi[13] než jeho *Měření kruhu*.

V roce 1906 uveřejnil M. Valouch komentovaný český překlad Archimédova pojednání *Počet pískový*.[14] I k tomuto překladu použil Heibergovo kritické vydání Archimédových spisů. V *Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky* najdeme o existenci tohoto překladu jen malou zmínku, a to v přehledu matematických článků, které byly uveřejněny ve školním roce 1905/06 ve výročních zprávách českých středních škol.[15]

Výroční zpráva
c. k.
STÁTNÍHO
vyššího gymnasia
v LITOMYŠLI.
Podává
ředitel ústavu za školní rok
1903.

OBSAH:
1.) Archimedovo měření kruhu. Napsal skut. učitel M. Valouch.
2.) Zprávy školní. Podává ředitel ústavu Em. Seifert.

V LITOMYŠLI.
Tiskem V. Augusty. — Nákladem c. k. vyš. gymnasia.

Výroční zpráva
c. k.
státního vyššího gymnasia
v LITOMYŠLI
ROKU
1905–06.

OBSAH:
1. Archimeda Syrakusského Počet pískový. Přeložil prof. Miloslav Valouch.
2. Zprávy školní. Podává ředitel ústavu Em. Seifert.

V LITOMYŠLI.
Tiskem V. Augusty v Litomyšli. — Nákladem c. k. vyšš. gymnasia.

---

[13] O historii tohoto spisu viz např. [3] a [11].

[14] *Archimeda Syrakusského Počet pískový*, Výroční zpráva c. k. státního vyššího gymnasia v Litomyšli, 1905–1906, 13 stran. V roce 1993 Česká matice technická nechala Valouchův překlad přetisknout. Nové neprodejné vydání určené pro členy České matice technické vytiskla Střední průmyslová škola stavební v Praze 1.

[15] Viz *Hlídka programů českých škol středních*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 36(1907), 294–296; Valouchův překlad je citován na straně 296. Nepatrná zmínka o tomto překladu je též v referativním časopise Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik und Physik (viz 37(1906), str. 39).

3.3 Objev ztraceného Archimédova spisu O metodě

Popišme nyní zajímavou historii a překvapivý objev středověkého rukopisu obsahujícího mimo jiné Archimédovu práci *O metodě*.[16] Rukopis obsahující řadu Archimédových děl byl sepsán pravděpodobně ve druhé polovině 10. století[17] v Konstantinopolu, kde byla od devátého století zásluhou Lva Matematika[18] studována matematika, opisovány práce klasiků a postupně doplňovány významné práce, které v konstantinopolské knihovně chyběly. Byly tak konzervovány výsledky antické vědy (Eukleides, Archimédes, Apollónios, Diofantos, Ptolemaios atd.).[19] Vznik rukopisu spadá do období největšího rozkvětu byzantské říše, která byla centrem politiky, křesťanství, obchodu i kultury celého východního Středomoří.

Roku 1899 objevil Papadopoulus-Kerameus, docent Petrohradské univerzity, při zpracovávání katalogu[20] knihovny kláštera Metochion Panagiou Taphou v Istanbulu (dceřiný klášter jeruzalémského kláštera Božího hrobu)[21] řecky psanou modlitební knížku se zajímavým matematickým textem prosvítajícím pod náboženským textem, tj. palimpsestový kodex.[22] Rukopis katalogizovaný pod číslem MS 355 pečlivě prohlédl a odhalil nápis, že v 16. století patřil klášteru Sv. Saba ve Svaté zemi.[23]

Není zcela jasné, jak se kodex do kláštera sv. Saba dostal, muselo to být nejpozději v 16. století. V Metochionu však musel být již roku 1840, neboť v tomto roce klášter navštívil slavný biblista Lobegott Friedrich Konstantin Tischendorf,[24]

---

[16] Historie objevu rukopisu je podrobně popsána v [10].

[17] Podle všech dosavadních výzkumů se předpokládá, že rok 975 je rokem vzniku rukopisu.

[18] Lev Matematik (asi 790 až 869) byl polyhistorem, výraznou osobností byzantské vědy a zakladatelem palácové školy v Konstantinopolu. Více viz [1].

[19] Archimédovy spisy nebyly ve starověkém Řecku všeobecně známé. Pouze některé jeho práce byly komentovány Héronem, Pappem a Theonem. Podrobnější studium Archimédových prací začíná až v 6. století, kdy Eutokios z Askalónu (kolem roku 500) komentuje práce *O kouli a válci*, *Měření kruhu* a *O rovnováze ploch*, tj. nejpopulárnější Archimédovy práce. Zvýšený zájem o Archimédovy výsledky můžeme pozorovat v byzantském světě od 6. do 10. století, v arabském světě od 8. do 13. století, v západní Evropě až od 12. století.

[20] Papadopoulus-Karameus vydal pětisvazkový katalog knihovny pod názvem *Hierosolymitikē Bibliothēkē ētoi katalogos tōn en tais bibliothēkais tou hagiōtatou apostolikou te kai katholikou orthodoxou patriarchikou throunou tōn Hierosolymōn kai pasēs Palaistinēs apokeimenōn hellēnikōn kōdikōn*, Petersburg, 1891–1915 (reprint: Brussels, 1963).

[21] Jedná se o řecký patriarchální klášter, který se nacházel v Istanbulu. V něm byly uchovávány cenné rukopisy patřící původně klášteru Božího hrobu v Jeruzalémě. Slovo metochion označuje v ortodoxní církvi tzv. církevní ambasádu (vyslanectví); metochion je nezávislý na okolních klášterech.

[22] Palimpsest je pergamenový svitek nebo kodex, který byl mechanickou a chemickou cestou zbaven původního textu a popsán novým textem. Mnohdy byly původní listy ještě rozřezány, ořezány a svázány do kodexu zcela jiného formátu.

[23] Klášter sv. Saba byl založen roku 483 (podle některých zdrojů až roku 492) několik mil východně od Betléma. Byl vybudován jako obrovská pevnost v poušti. Od prvopočátku patřil mezi intelektuální centra Svaté země. Až do konce 12. století měl skvěle organizovanou písařskou dílnu, která produkovala skvostné rukopisy pro celou Svatou zemi. Roku 1834 jeho knihovna uchovávala více než 1000 starých rukopisů. Roku 1839 ji navštívili reverend George Croly a David Roberts, člen královské londýnské malířské akademie, kteří se pokusili zhotovit několik obrázků kláštera, navštívit klášterní knihovnu a sestavit její katalog. Mniši jim však rozsáhlejší průzkum knihovny nepovolili.

[24] Lobegott Friedrich Konstantin Tischendorf (1815–1874) byl protestantský teolog, který se věnoval restauraci Nového zákona. Německou vládou byl nejprve vyslán do Paříže, aby studoval rukopisy ve francouzské Národní knihovně, později pracoval v čelných evropských knihovnách a cestoval po klášterech v Egyptě, Palestině, Sýrii a Malé Asii. Ze svých cest přinesl mnoho cenných rukopisů, mimo jiné starozákonní pergamenový C*odex Friderico-Augustanus* a nejstarší řecký rukopis Bible *Codex sinaiticus*. Byl jedním z největších znalců klasických starozákonních a novozákonních textů.

který roku 1846 popsal svoji cestu a svá studia na „Východě“. Napsal, že v klášteře neviděl nic zajímavějšího než starou řecky psanou modlitební knížku, palimpsest s prosvítajícím tajemným matematickým textem.

L. F. K. Tischendorf záhadnou cestou získal jeden list rukopisu, který byl po jeho smrti roku 1879 zakoupen do sbírek Cambridge University Library a katalogizován jako C.U.L. Ms. Add. 1879.23. Tischendorfův objev nevzbudil žádnou pozornost. List z jeho pozůstalosti byl prostudován teprve roku 1968 Nigelem Wilsonem, který zjistil, že se jedná o část nalezeného a později opětovně ztraceného palimpsestu obsahujícího Archimédovy práce.

Roku 1899 Papadopoulus-Kerameus ještě netušil, jak zajímavý a pro vědu cenný rukopis objevil. Opsal dva dobře čitelné řádky prosvítajícího matematického textu a zaslal je tehdejšímu největšímu znalci antických matematických textů, J. L. Heibergovi. Ten roku 1906 navštívil knihovnu kláštera Metochion Panagiou Taphou, nalezl palimpsest, pečlivě jej ofotil a prostudoval. Podle typu písma a úpravy zjistil, že starší text pochází z 10. století a obsahuje některé známé Archimédovy práce (např. celý řecký text spisu *O plovoucích tělesech*) a světu neznámý text ztraceného Archimédova spisu *O metodě*. Později se ukázalo, že v kodexu je též zlomek Archimédovy matematické hříčky *Kratochvíle* (Stomachion).[25] Kritický rozbor studovaného rukopisu publikoval J. L. Heiberg již roku 1907.[26]

Není jasné, co se s kodexem dělo během dalších devadesáti let. Objevil se 28. října 1998 na aukci slavné aukční síně Christie's New York a byl deklarován jako rukopis ze soukromé anonymní francouzské kolekce. Den po oznámení aukčních podmínek se řecká vláda a řecký patriarcha pokusili aukční prodej zastavit.

---

[25] Na přelomu 19. a 20. století byl nalezen ještě jeden arabsky psaný rukopis obsahující Archimédovo ztraceného dílko *Stomachion*. Zmínky o existenci tohoto Archimédova hlavolamu (*loculus Archimedius*), jeho popis a vysvětlení nalézáme v antické literatuře například u římského básníka a politika Ausonia, který o něm ve 4. století n. l. napsal báseň. Archimédes hlavolam nevymyslel; patrně však popsal jeho konstrukci. Více viz [3].

[26] Informace o Heibergově objevu byly otištěny německy v časopise Bibliotheca Mathematica (1906 a 1907), anglicky ve zprávách American Mathematical Society (1908) a v časopise Monist (1909). Objev rukopisu byl kompletně zpracován až v novém souborném vydání Archimédova díla viz J. L. Heiberg (ed.): *Archimedes Opera omnia cum commentariis Eutocii*, Leipzig, 1910, 1913, 1915 (reprint: 1972). Nejnověji viz též [5], [10] a [11].

Obrátili se na soud s tím, že se jedná o ukradené řecké kulturní dědictví. Soud však konstatoval, že francouzská rodina prokazatelně vlastnila rukopis od 60. let 20. století, ale že není možno prověřit její tvrzení, že rukopis měla již ve 20. letech 20. století.[27] Dražba byla nakonec povolena. Anonymní americký sběratel zakoupil kodex za 2 miliony dolarů a slíbil, že jej poskytne k vědeckému studiu. V lednu 1999 jej deponoval do muzea *The Walters Art Museum* v Baltimore. Rukopis zpřístupnil k nutné záchranné konzervaci, pečlivému vyobrazení a rozsáhlému vědeckému studiu. V roce 1999 byl sestaven velký mezinárodní tým špičkových specialistů a odborníků, který při své práci využívá nejmodernější technologie.[28]

Ukázalo se, že modlitební knížka, v níž Archimédova práce přežila, od Heibergových časů velmi utrpěla. Ztratily se tři listy, které J. L. Heiberg ještě 1906 roku prostudoval, fotografoval a komentoval; zůstaly nám tedy jen jejich staré fotografie. Kniha sama byla poškozena plísní a vlhkostí, neboť byla špatně a neodborně skladována. J. L. Heiberg ji viděl v podstatně lepším stavu, mohl ji tedy studovat. Dnes jsou velké plochy textu stěží identifikovatelné i s použitím nových metod. Další pohromou bylo zcela neobvyklé přemalování čtyř starých obrázků, na nichž byli evangelisté. Podařilo se ukázat, že nové obrázky evangelistů byly pořízeny po roce 1929 podle obrázků v rukopise *Manuscripts Grecs de la Bibliothéque Nationale*, který je uložen v Národní knihovně v Paříži.

Nejnovějším studiem se podařilo ukázat, za jakých okolností palimpsest vznikl. Z historie víme, že relativně příznivý vývoj byzantské říše byl poprvé vážněji narušen roku 1203, kdy byla vyhlášena papežem Innocencem III.[29] čtvrtá křížová výprava na obranu Svaté země, a podruhé následujícího roku, kdy italská vojska účastnící se křížové výpravy Konstantinopol vydrancovala.[30] Poválečné období nebylo nakloněno studiu a rozvoji matematiky, objevilo se naopak brojení proti vědě. Tento čas byl obecně považován za dobu vzniku palimpsestu, usuzovalo se tak z tvaru písma a typu ilustračních obrázků. V roce 2002 profesor John Lowden z Courtauld Institute použil ke studiu rukopisu ultrafialové světlo a rozluštil „tiráž“ na spodní části rubové strany prvního listu, v níž se objevilo datum 13. duben 1229. Zdá se tedy, že toto datum ukazuje na dobu zrodu modlitební knížky, která byla napsána na staré pergameny obsahující text Archimédových prací. Jednotlivé listy byly očištěny od původního textu, rozřezány, otočeny o 90 stupňů, oříznuty, nově popsány a sešity v jeden kodex. Tak došlo k nenávratnému poškození některých částí původního textu.

[27] Podle výsledků soudního procesu je pravděpodobné, že rukopis byl kolem roku 1922 z klášterní knihovny Metochion v Istanbulu odcizen.

[28] Výsledky práce jsou postupně zveřejňovány v odborném tisku a na webové stránce projektu [10].

[29] Innocenc III. (1160–1216) byl papežem v letech 1198 až 1216. Díky svému rozsáhlému vzdělání, politické prozíravosti, obratnosti a taktu reorganizoval římskou kurii a upevnil její postavení v Itálii. Za jeho vlády dosáhlo papežství jednoho ze svých vrcholů. Poznamenejme, že roku 1204 uznal Přemysla Otakara I. (asi 1155–1230) za českého krále, přiznal našim zemím výsadu království a Přemyslovcům dědičný královský titul.

[30] V tomto čase Konstantinopol ovládali Benátčané, kteří dalšímu rozvoji svého velkého námořního rivala příliš nepřáli. Benátčané následně založili kolonie v Egejském moři a na Krétě, s podporou římského stolce vzniklo tzv. Latinské císařství, Nikajské císařství, Epirský despotát, Trapezuntské císařství a další menší státní celky. S pomocí Janova, který byl odvěkým námořním a obchodním konkurentem Benátek, se Konstantinopol roku 1261 zbavil západního vlivu a Benátčany vyhnal.

Není vyloučené, že se ve starých klášterních knihovnách a archivech na Blízkém Východě mohou nacházet další knihy, kodexy, svitky a dokumenty obsahující ztracená díla antických i středověkých myslitelů. Příběh spisu *O metodě* ukazuje, že různá překvapení jsou i v budoucnosti možná.

3.4 Český překlad Archimédova spisu O metodě

V roce 1909 publikoval František Vrána[31] ve výroční zprávě českého gymnázia v Prostějově překlad Archimédovy práce *O metodě*,[32] v níž se Archimédes zabýval výpočtem objemů úsečí paraboloidu, elipsoidu a hyperboloidu a kterou sepsal ve formě dopisu, jehož adresátem byl Eratosthenes. K překladu použil Heibergovo řecko-německé vydání z roku 1907.[33] Český čtenář tak obdržel ve velmi krátké době jazykově věrný a pečlivě provedený překlad nově objeveného Archimédova díla.[34] Svůj překlad doplnil stručným úvodem popisujícím historii objevu této ztracené Archimédovy práce a charakteristikou Archimedovy matematické produkce.

Je podivné a těžko vysvětlitelné, že o tomto překladu nalezneme jedinou nepatrnou zmínku v *Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky*, nenajdeme však žádnou informaci ve výročních zprávách *Jednoty českých mathematiků* či v zápisech ze zasedání jejího výboru. Není vyloučeno, že Jednota byla tehdy intenzívně soustředěna na vydávání nových učebnic pro základní a střední školy, na úpravu osnov v duchu Marchetovy reformy, není vyloučeno, že zájem o překlady klasiků se zcela vyčerpal vydáním Servítova překladu Eukleidových *Základů*, a to právě v roce 1907.[35]

---

[31] František Vrána (?–?) byl v letech 1902/03 až 1918/19 středoškolským profesorem matematiky a fyziky na gymnáziu v Prostějově. Roku 1919/20 byl přeložen na českou reálku v Praze VII. Týdně míval 17 až 24 hodin matematiky a fyziky, vedl fyzikální a matematický kabinet a pravidelně býval třídním učitelem. Ve výročních zprávách prostějovského gymnázia publikoval články*: Paměti válečné (osobní) našeho ústavu*, 10. výroční zpráva c. k. státního gymnasia v Prostějově, 1915/16, str. 3–22, a 12. výroční zpráva c. k. státního gymnasia v Prostějově, 1917/18, str. 3–17, *†Jeho veličenstvo císař a král František Josef I*, 11. výroční zpráva c. k. státního gymnasia v Prostějově, 1916/17, str. 5–6, a *Nastoupení nového mocnáře na trůn Habsburský*, 11. výroční zpráva c. k. státního gymnasia v Prostějově, 1916/17, str. 7–12. Více viz 1. až 13. výroční zpráva c. k. státního gymnasia v Prostějově za školní roky 1902/03, ..., 1917/18 a 13. a 14. výroční zpráva státního gymnasia v Prostějově za školní roky 1918/19 a 1919/20. O jeho dalším pedagogickém a odborném působení není nic známo. Aktivit české matematické komunity se neúčastnil.

[32] *Archimédův výklad Eratosthenovi o mechanických způsobech zkoumání. (Z řečtiny přeložil Fr. Vrána)*, 3. výroční zpráva c. k. státního gymnasia v Prostějově za školní rok 1908/09, tiskem knihtiskárny Václava Horáka v Prostějově, Prostějov, str. 2–18.

[33] J. L. Heiberg: *Eine neue Archimedes-Handschrift*, Hermes – Zeitschrift für klassische Philologie 42(1907), str. 235–303 + 1 tabulka.

[34] V roce 1908 vyšla „*Metoda*“ rusky (překlad Heibergovy práce otištěný v časopise vědecké společnosti v Oděse), 1910 anglicky (autor J. L. Heiberg) a roku 1913 holandsky (autor J. A. Vollgraf).

[35] Stručnou zmínku o existenci Vránova překladu nalezneme v referativním časopise Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik und Physik (viz 40(1908), str. 6 – referát K. Petra obsahující jen překlad názvu práce a výroční zprávy střední školy, rok vydání a počet stran), krátkou informaci uvádí také článek Q. Vettera: *Několik poznámek in margine Archimedových spisů, zvláště „Metody“*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 49(1920), str. 224–244 (o Vránově překladu je na straně 224). V této studii je také jediný podrobný česky psaný rozbor Archimédovy metody, jehož vznik byl pravděpodobně inspirován uveřejněním latinsko-řecké přepracované Heibergovy monografie *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii I.–III.*, Leipzig, Teubner, 1910, 1913 a 1915; vydáním německého překladu Heathovy monografie *The Works of Archimedes, edited in modern notation with introductory chapters*, Cambridge University Press, 1897 (německy, Berlin, 1914), a Arendtova německy psaného článku *Zu Archimedes* (Bibliotheca Mathematica 14(1914), 3. série, str. 289–311).

4 Zamyšlení na osudem českých překladů

Oba čeští překladatelé Archimédových děl vyšli z osvědčeného zdroje (Heibergovy kritické a komentované překlady). Jejich české verze jsou jazykově věrné a srozumitelné, cenné jsou rovněž připojené komentáře. Osud jejich překladů však byl odlišný.

Valouchovy překlady dvou Archimédových spisů byly od dvacátých let 20. století v české matematické komunitě v povědomí. Patrně byly známé a uznávané i díky Valouchovým rozsáhlým organizačním aktivitám v Jednotě českých mathematiků.[36]

Vránův překlad byl až do vydání monografie [2] zcela zapomenut. Je pravděpodobné, že tomu bylo i proto, že František Vrána s Jednotou nespolupracoval, nebyl ani jejím členem,[37] o propagaci svého překladu se asi příliš nestaral. Nutno však poctivě přiznat, že na počátku 20. století šlo asi jen obtížně sledovat výroční zprávy všech českých středních škol a předávat čtenářům *Časopisu* přehled o článcích s matematicko-fyzikálním obsahem.[38]

Není vyloučeno, že existují i další české překlady menších klasických matematických děl. Mohly by být otištěny ve výročních zprávách českých středních škol z druhé poloviny 19. století a první třetiny 20. století. Pokud však nebyla zveřejněna jejich recenze nebo alespoň informace o jejich vydání, upadly rychle v zapomnění.

5 Závěr

Vývoj zájmu matematiků a historiků matematiky o Archimédovy práce, jeho metody a rukopisy obsahující jeho práce naznačuje databáze referativního časopisu *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik und Physik*,[39] v němž bylo od roku 1868 do roku 1941 referováno o 103 monografiích, studiích, odborných i popularizačních článcích. Vynořily se v několika vlnách po vydání Heibergovy nebo Heathovy monografii, po uveřejnění série článků o objevu nových či ztracených rukopisů obsahujících Archimédovy práce nebo po vydání katalogů starých klasických knihoven, v nichž byly uloženy zapomenuté rukopisné práce.

V současné době archimédovské téma opět zažívá zvýšený zájem matematiků i historiků vyvolaný dražbou archimédovského palimpsestu v roce 1998 a jeho následným odborným studiem.[40]

---

[36] Viz např. F. Veselý: *K desátému výročí úmrtí Miloslava Valoucha*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 7(1962), str. 127–134; o překladech na straně 129: *Bylo to Měření kruhu (1903) a Počet pískový (1906), které vyšly tiskem ve výročních zprávách gymnasia v Litomyšli. Jsou to jediné překlady Archimedových spisů do češtiny.*

[37] V knize *Dějepis Jednoty českých mathematiků k padesátému výročí jejího založení*, kterou sepsal V. Posejpal a vydala Jednota českých mathematiků v roce 1912, není uvedeno Vránovo jméno ani mezi zakládajícími a činnými členy ani mezi přispívajícími členy.

[38] Poznamenejme, že *Jednota českých mathematiků* na počátku 20. století prostřednictvím výzev otištěných v *Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky* opakovaně žádala své členy o informace o matematických a fyzikálních článcích vycházejících ve výročních zprávách středních škol.

[39] Referativní časopis je dostupný na adrese http://www.emis.ams.org/projects/JFM/.

[40] Viz http://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Books/ArchimedesBooks.html, kde je možno vyhledat stručné informace o 21 archimédovských monografiích vydaných v celém světě od roku 1962, z nichž 9 vyšlo po roce 1998.

Literatura

[1] Bečvářová M.: *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 20, Prometheus, Praha, 2002.

[2] Bečvářová M.: *Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, Matfyzpress, Praha, 2008.

[3] Bečvář J., Štoll I.: *Archimedes. Největší vědec starověku*. Edice Velké postavy vědeckého nebe, svazek č. 11, Prometheus, Praha, 2004.

[4] Gow M.: Archimedes: *Mathematical Genius of the Ancient World*. Great Minds of Science Series, Enslow Publishers, Inc., Berkeley Heights, NJ, U.S.A., 2005.

[5] Netz R., Noel W.: *The Archimedes Codex. How a Medieval Prayer Book is Revealing the True of Genius of Antiquity's Greatest Scientist*. Orion Publishing Group, Weidenfeld & Nicolson, London, Da Capo Press, Cambridge, Mass., 2007.

[6] Pickover C. A.: *Archimedes to Hawking: Laws of Science and the Great Minds Behind Them*. Oxford University Press, Oxford, 2008.

[7] Knorr W. R.: *Archimedes' "Dimension of the circle": a view of the genesis of the extant text*. Archive for History of Exact Sciences 35(1986), 281–324.

[8] Knorr W. R.: *Archimedes and the measurement of the circle: a new interpretation*. Archive for History of Exact Sciences 15(1975/1976), 115–140.

[9] Sato T.: *Archimedes' "On the measurement of a circle", Proposition 1: an attempt at reconstruction*. Japan Studies on History of Science 18(1979), 83–99.

[10] http://www.archimedespalimpsest.org [cit. 23. 5. 2008]

[11] http://www.ibiblio.org/expo/vatican.exhibit/exhibit/d-mathematics/Greek_math.html [cit. 23. 5. 2008]

Adresa

Doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
Ústav aplikované matematiky
Fakulta dopravní ČVUT
Na Florenci 25
110 00 Praha 1
e-mail: *nemcova@fd.cvut.cz*

BÉZIER A CASTELJAU U VZNIKU CAGD

KATEŘINA DOBIÁŠOVÁ

1 Úvod

1.1 CAGD jako matematický obor

S nástupem počítačů a jejich použitím ve strojírenském průmyslu vyvstala v polovině dvacátého století otázka, jak jednoduše reprezentovat geometrické útvary (křivky a plochy) v počítači. V tehdejších automobilových firmách se začíná rozvíjet nová disciplína, která tuto problematiku řeší, která je zprvu součástí počítačové grafiky. V roce 1974 se stává samostatným oborem nesoucím název Computer Aided Geometric Design (CAGD). Od té doby se neustále rozvíjí na základech vybudovaných v padesátých letech 20. století ve firmách Citroën a Renault.

1.2 Bézierova křivka

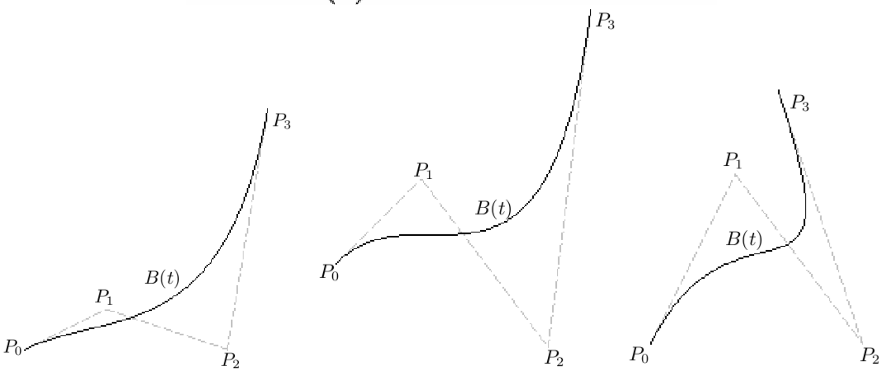
S mírnou nadsázkou je možno říci, že CAGD vzniklo spolu s „objevem“ Bézierovy křivky. Proto připomene její definici, kterou doplníme několika názornými obrázky.

Definice: Nechť je v reálném afinním prostoru libovolné dimenze dána uspořádaná množina n + 1 bodů $\mathbf{P_0}, \ldots, \mathbf{P}_n$ (tzv. řídící polygon). Bézierova křivka, je křivka stupně n definovaná předpisem

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i \mathbf{b}_{i,n}(t), \quad t \in [0,1]$$

kde $\mathbf{b}_{i,n}(t)$ jsou Bernsteinovy polynomy stupně n, které tvoří bázi vektorového prostoru polynomů stupně n:

$$\mathbf{b}_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, \ldots n$$



Na obrázcích je možno pozorovat, jak se mění tvar Bézierovy křivka se změnou řídícího polygonu.

2 Casteljau a Bézier

2.1 Prvopočátky rozvoje CAGD

Přestože je CAGD velmi mladý obor, který se intenzivně rozvíjí až v posledních padesáti letech, zdá se, že jeho počátky sahají až k začátku našeho letopočtu. Tehdejší stavitelé námořních lodí potřebovali vytvořit šablonu lodi, a tím si uchovat její geometrii, aby mohli stejnou loď postavit několikrát. Tehdy řešili tuto úlohy tak, že umístili kovová závaží nazývaná uzly do zvolených kontrolních bodů, a vypínali podle nich tenkou kovovou nebo dřevěnou palubku. Změna polohy uzlu nejvíce ovlivnila křivku v okolí tohoto uzlu. Pokud bylo potřeba v některých oblastech křivku více ovlivnit, jednoduše se přidalo více uzlů. Tyto techniky byly zdokonalovány od třináctého do šestnáctého století. V té době neexistovaly žádné výkresy popisující trup lodi. Vše se uchovávalo pomocí modelů. Pravděpodobně první známá zmínka o takových křivkách pochází z roku 1752 z knihy *Elements de l'Architecture Navale ou Traite Pratique de la Construction des Vaissaux, H. L. Duhamel du Monceau*.

V době moderní, na počátku čtyřicátých let dvacátého století, Isaac Jacob Schoenberg, Apalatequi (Douglas Aircraft) a Roy Liming (North American Aircraft) vytvořili několik matematických prací zabývajících se křivkami, tentokrát v souvislosti s leteckým průmyslem. Především Roy Liming převedl klasické návrhářské konstrukce na numerický algoritmus a proto mohla být data uchovávána v jednoznačných tabulkách, což odstranilo problémy, které vyvstávaly s různými výklady výkresů.

2.2 Důvody rozvoje CAGD

Ke konci první poloviny dvacátého století vznikají první, v praxi zatím nepoužitelné, počítače, které se však poměrně rychle vyvíjí v počítače použitelné ve strojírenském průmyslu. Počítače byly schopny řídit stroje numerickými pokyny. Všechna data pro tyto stroje však byla uchovávána pomocí modrotisku a nebyl znám způsob, jak tato data předat počítači v numerické podobě. Metoda Roy Liminga nebyla ještě v této době v jiných kruzích než letectví známa. Objevily se pokusy, jak tento problém vyřešit, avšak nebyly úspěšné. Tento problém vyřešili na sobě nezávisle Paul de Casteljau pro firmu Citroën a Pierre Bézier pro firmu Renault.

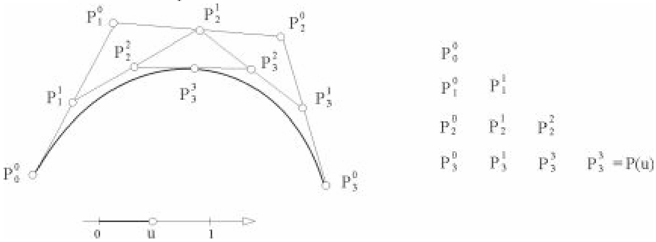
2.3 Casteljau

Paul de Faget de Casteljau se narodil 19. listopadu 1930 ve francouzském městě Besançon. Jeho studentská léta spadají do období druhé světové války, která ho donutila vystřídat několik katolických škol v oblasti *Franche-Comté* (region východní Francie hraničící se Švýcarskem). Nakonec výtečně maturuje na *Lyccé Victor Hugo*, což mu umožňuje studovat *Ecole Normale Supérieure*, kde se zapisuje ke studiu matematiky a fyziky.

Po studiích vykonává vojenskou službu v Alžírsku. Po návratu se v Paříži v roce 1958 uchází o místo fyzika ve firmě Citroën. Svůj přijímací pohovor líčí ve své autobiografii jako pro něj velmi nepříjemnou situaci, při které získává pocit, že nemá dostatečné předpoklady pro místo, o které se uchází, a má špatné svědomí, že je nechává věřit tomu, že by jim mohl být k něčemu užitečný. Téhož roku však vyvíjí v rámci vědecké skupiny myšlenky vedoucí k řešení problému reprezentace křivek v počítačových programech. Casteljau začíná pomocí Bernsteinových polynomů vyvíjet zcela nový systém, který naprosto opouští dosavadní metody. Místo toho, aby byly křivky zadávány pomocí bodů na nich ležících, zadávají se pomocí bodů ležících v blízkosti křivek. Křivka kopíruje tvar kontrolního polygonu, tvořeného zadanými body. Vzniká tak nový postup, dnes známý jako „algoritmus de Casteljau“.

Jedná se o rekurzivní algoritmus, který v podstatě udává postup, jak pro danou hodnotu parametru najít bod na křivce, je-li dán řídící polygon $P_0, \dots , P_n$. Bod na křivce najdeme jako bod P_n^n, podle rekurentního vzorce:

$$P_i^j(t) = \begin{cases} (1-t)P_{i-1}^{j-1}(t) + tP_i^{j-1}(t) & j > 0 \\ P_i & \text{jinak} \end{cases}$$



Tento algoritmus je možné interpretovat i geometricky. Je-li například dán řídící polygon $P_0, \dots , P_4$, a chceme-li najít bod na křivce pro hodnotu parametru $t = 0{,}5$, sestrojíme bod P_1^1 jako střed úsečky P_0P_1, bod P_1^2 jako střed úsečky P_1P_3, … Dále pak bod P_2^1 jako střed úsečky $P_1^1P_1^2$. Takto pokračujeme dále, až sestrojíme bod P_4^4, který leží na křivce.

Je zřejmé, že tento algoritmus umožňuje zadat křivku pomocí řídícího polygonu. Řídící polygon lze reprezentovat jako numerická data, se kterými se v počítačových programech snadno zachází. Velikou výhodou je, že se změnou jednoho bodu, se křivka nejvíce změní v okolí měněného bodu (tzv. lokální řízení tvaru).

Casteljau objevil tuto metodu zadání křivky pomocí řídícího polygonu jako první. Jeho práci však držela firma Citroën v tajnosti, a proto je tato křivka pojmenována podle Béziera, který ji vynalézá až později pro firmu Renault. Casteljau odchází v roce 1989 do důchodu, a začíná se věnovat publikování.

2.4 Bézier

Pierre Etienne Bézier se narodil 1. prosince 1910 v Paříži. Po vzoru svého otce i dědečka, kteří byli inženýři, se věnuje studiu strojního inženýrství na *Ecole des Arts et Métiers*, které úspěšně završil v roce 1930. Ve stejném roce nastupuje na *Ecole Supérieure d’Electricité*, kde studuje elektroinženýrství. O rok později tuto školu dokončuje.

V roce 1933 nastupuje na místo seřizovače do firmy Renault, kde pracuje dalších 42 let, během kterých se stává ředitelem některých oddělení. V roce 1960 vede kolektiv zaměstnanců pro technický rozvoj. Tuto funkci vykonává až do roku 1975, kdy odchází do důchodu. Během působení v této funkci si Bézier uvědomuje, že by bylo potřebné nalézt metodu, jak reprezentovat strojírenské součástky v počítačových programech. Bézier věděl, že podobnou otázkou se zabývají v konkurenční firmě Citroën, postupoval však naprosto nezávisle. Jeho prvotní myšlenkou bylo popsat základní křivku jako průnik dvou eliptických válcových ploch, definovaných uvnitř hranolu. Později Bézier přechází k formulaci této myšlenky pomocí polynomů.

Dá se ukázat, že křivka vyvinutá Bézierem je shodná s křivkou de Casteljau. Bézier však své výsledky publikuje. Brzy si jich povšimne A. R. Forrest, který si uvědomí, že Bézierovu křivku je možno vyjádřit pomocí Bernsteinových polynomů a tyto poznatky publikuje. Jedná se o stejné vyjádření, které vytvořil Casteljau. Forrestův článek, sepsaný na toto téma, napomáhá, aby Bézierovy křivky vešly v známost, a proto dnes nesou jeho jméno, přestože Casteljau je vyvinul dříve.

V roce 1968 se Bézier stává profesorem provozního inženýrství na *Conservatoire National des Arts et Métiers* a věnuje se publikování. Pierre Etienne Bézier umírá 25. listopadu 1999 v Paříži.

3 Závěr

V dalších letech obor CAGD prožívá obrovský rozvoj, který podporují průmyslové firmy jak v Evropě, tak v USA. V roce 1974 se koná konference v Utahu zabývající se zmíněnými otázkami, na níž je poprvé použit název Computer aided geometric design a CAGD se oficiálně stává samostatným matematickým oborem. Do dnešní doby je v tomto oboru realizována řada výzkumných projektů a stále jsou prezentovány nové výsledky. Důkazem toho je také neustále vycházející časopis nesoucí název CAGD.

Literatura

[1] Farin G., Hoschek J., Kim M.-S.: *Handbook of computer aided geometric design*, Elsevier Science Publishers B. V., Netherlands, 2002.

[2] Alias: *History of splines*[online]. http://www. alias. com/eng/support/studiotools/documentation/Using/About4. html.

[3] Casteljau P.: *CAGD Volume 16, Issue 7: De Casteljau's autobiography: My time at Citroën*, Elsevier Science Publishers B. V., 1999.

[4] Bieri H. P., Prautzsch H.: *CAGD Volume 16, Issue 7: Preface*, Elsevier Science Publishers B. V., 1999.

[5] Cychosz J.: *CAGD Volume 22, Issue 7: Pierre Bézier*, Elsevier Science Publishers B. V., 1990.

[6] Rogers D. F.: *Computer-Aided Design Volume 34: Pierre Etienne Bézier (1910–1999), in memoriam*, Elsevier Science Publishers B. V., 2002.

Adresa

Mgr. Kateřina Dobiášová
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *dobiasova@braille. mff. cuni. cz*

POSTAVA MATEMATIKA V BELETRII A VE FILMU

HELENA DURNOVÁ

1 Úvod

Matematikové, případně fyzikové, mívají v beletrii a filmu často nezáviděníhodnou úlohu jakýchsi podivínů, kteří se neorientují v běžném každodenním životě. V tomto krátkém příspěvku najde laskavý čtenář několik poznámek o využití či zneužití postavy slavného matematika a srovnání fikce se skutečností.

2 John Forbes Nash (* 1928)

se narodil 13. června 1928 v Bluefieldu v USA. Jeho otcem byl elektroinženýr John Forbes Nash, a proto bývá ke jménu významného matematika často přidáván přídomek „Jr.“. Mladý Nash byl pohledný a geniální, ale také velmi excentrický a arogantní. Jako člověk nebyl příliš oblíbený a neměl mnoho přátel.

V roce 1950 získal Nash doktorát. Jeho disertace se zabývala nekooperativními hrami. Název napovídá, že práce patří do teorie her. Tato teorie má dva základní pilíře, von Neumannovu větu o minimaxu (1928) a Nashovu větu o bodě rovnováhy (1950). [5]

Nashova závratná kariéra geniálního matematika byla kolem roku 1958 na dlouhou dobu přerušena duševní chorobou, pravděpodobně schizofrenií [5]. Během 70. a 80. let 20. století se Nash zázračně uzdravil a začal se znovu zapojovat do matematického života. Uznání Nashova díla vědeckou komunitou vyvrcholilo v roce 1994, kdy byla Nashovi udělena Nobelova cena za ekonomii.

Čtivá biografie Johna F. Nashe *A Beautiful Mind* z pera Sylvie Nasar byla vydána v roce 1998, tedy v roce, kdy se Nash dožil 70 let. Na motivy této biografie natočil Ron Howard v roce 2001 stejnojmenný film. Český divák může film obdivovat v české verzi pod názvem *Čistá duše*.

2.1 Sylvia Nasar: *A Beuatiful Mind* (biografie, 1998) a *Čistá duše* (film, 2001)

Podle Sylvie Nasar byl John F. Nash považován za podivína, kterému se většina kolegů vyhýbala kvůli jeho aroganci. Film *Čistá duše* však přináší spíše obraz neoprávněně opomíjeného génia. Filmu se jistě nedá upřít množství detailů; často se však jedná spíše o detaily pikantní. Pokud jde o znázornění Nashe jako podivína a matematika, opakuje film zavedená schematická vyobrazení podivínských profesorů, kteří nevnímají třídu a mluví raději „do tabule“.

Objev nové definice bodu rovnováhy, zpochybňující 150 let starou teorii Adama Smithe, je asi nejpůsobivějším momentem filmu natočeného podle stejnojmenné biografie. Jako postgraduální student nechtěl Nash ztrácet čas psaním průměrných článků, nýbrž chtěl přijít s něčím novým, převratným. To se mu dlouho nedařilo. Teprve když Nash formuloval svou větu o rovnováze, přišel zlom. Podle filmu došel mladý Nash ke své teorii při návštěvě baru se svými kolegy a několika dívkami, z nichž jedna byla výrazně atraktivnější než ostatní. Zatímco Adam Smith ve své teorii tvrdil, že každý chce sobecky a bezohledně největší užitek jen pro sebe, Nash tvrdí, že když budou všichni usilovat o nejkrásnější dívku, ostatní se rozutečou a ona překrásná blondýna uteče také, protože stejně nemůže chodit s pěti mládenci.

Ve zbytku filmu se dozvídáme o dalších osudech Johna F. Nashe. O něco později najde svou manželku mezi svými studentkami; přesněji řečeno, spíše si ona najde jeho. Záhy se však projeví Nashova duševní choroba, schizofrenie. Zde považuji za vhodné přenechat soudy o tom, zda filmové znázornění odpovídá realitě, spíše psychiatrům.

3 Alan Mathison Turing (1912–1954)

se narodil 23. června 1912 v Londýně. Jako mladý se zajímal o přírodní vědy, ale také o filosofické otázky. V letech 1931 až 1934 studoval na King's College (Cambridge, Anglie). V roce 1935 zde obhájil disertační práci o centrální limitní větě.

Pro vědce v oblastech čisté matematiky a teoretické informatiky je jeho jméno nerozlučně spjato s tzv. Turingovým strojem. Teoretický základ k tomuto pojmu podal Turing v článku „On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem“, uveřejněném v roce 1936

V období 2. světové války se Turing podílel na luštění německých zpráv šifrovaných strojem Enigma v Bletchley Park (jihovýchodní Anglie). Na prozkoumání obrovského počtu možností navrhl sestrojit stroj přezdívaný „Bomba“. Své schopnosti využil Turing během války také v USA, kam byl v listopadu 1942 vyslán.

Po válce (1945-1947) pracoval v Národní fyzikální laboratoři v Londýně na návrhu ACE (Automatic Computing Engine), prvního britského počítače. Od roku 1948 působil na univerzitě v Manchesteru, kde mj. pracoval na programu pro počítač *Manchester Mark I.* V letech 1952 až 1954 se zabýval také matematickou biologií.

V roce 1952 byl Turing obviněn z „hrubé neslušnosti“, totiž z homosexuálního styku, který byl v Británii v 50. letech 20. století trestný. Turing byl podmínečně odsouzen. Na svobodě se mohl pohybovat pouze tehdy, když svolil k hormonální terapii. Tato terapie byla Turingovi nepříjemná, to však nebylo všechno. Na základě odsouzení mu byla odepřena bezpečnostní prověrka, což mu v podstatě znemožnilo pracovat. Snažil se vycestovat do zahraničí, avšak bez úspěchu.

Zemřel 7. června 1954 ve svém domě ve Wilmslow (poblíž Manchesteru) po pozření kousku jablka otráveného kyanidem draselným. Je velmi pravděpodobné, že Turing spáchal sebevraždu [3].

První biografii Alana Turinga (nazvanou prostě *Alan Turing*) vydala v roce 1959 jeho matka Sara [6]. Procítěnou biografii o Alanu M. Turingovi, *Alan Turing: The Enigma* [3], vydal poprvé v roce 1992 anglický matematik Andrew Hodges. Román *Enigma* o německém šifrovacím stroji Enigma, v němž se s Turingem setkáme pouze okrajově, napsal roku 1995 Richard Harris. Podle této předlohy napsal scénář pro stejnojmenný film Tom Stoppard. Film *Enigma* měl premiéru v roce 2001.

3.1 *Enigma* (román, 1995 a film, 2001)

Nelze mluvit o postavě matematika ve filmu a nezmínit se o filmu *Enigma* (2001, režie Michael Apted). Na začátku filmu máme možnost sledovat matematika jménem Tom Jericho, který se po nervovém zhroucení vrací zpět k práci v Bletchley, šifrovacím centru britské armády. Zná-li divák osudy Alana M. Turinga, je zmaten, neboť někdy se zdá, že hlavní hrdina (Tom Jericho) má představovat Turinga, jindy by to rozhodně Turing být nemohl. Proč?

Za prvé, Tom Jericho je heterosexuál, který se zamiloval do krásné blondýnky – agentky a byv odmítnut, nervově se zhroutil. Homosexuála Alana Turinga by se zcela jistě námluvy, natož odmítnutí, krásné dlouhonohé blondýnky celkem nijak nedotklo.

Za druhé, Alan Turing se v době, do níž je celý příběh zasazen, v Bletchley vůbec nevyskytoval. Tou dobou již Turing pobýval v USA.

Románová předloha se s těmito fakty vypořádala lépe: románový Tom Jericho nemůže být Alanem Turingem, a ani to není v románu naznačeno. Naopak, Turing se objevuje pouze jako legendární postava v pozadí.

Proč by si naopak měl či mohl filmový divák myslet, že hlavní postava Toma Jericha má představovat Alana Turinga? Zejména proto, že se ve filmu mluví o Turingově slavném článku z roku 1936, v němž se zabývá vypočitatelnými čísly a jejich užitím pro rozhodovací problém („Entscheidungsproblem“). Ve filmu je naprosto zřejmé, že autorem článku je Tom Jericho. S tímto článkem je také spojena největší absurdita celého filmu: v jedné z klíčových scén krásná agentka Claire sebere Tomovi Jerichovi právě tento článek, který však nemůže obsahovat informace, o něž by Claire jako agentka mohla mít zájem. Claire poté nechce Tomovi článek vrátit, on se s ní pere a přitom ji škrábne, což je údajný důvod k rozchodu. Proč by však měl matematik mít takový urputný zájem o separát svého vlastního článku?

Na konci filmu, po válce, se Tom Jericho ožení s kamarádkou Hester, s jejíž pomocí rozluštil v Bletchley tajné zprávy o masakru v Katyni. Postava Hester by teoreticky také mohla být inspirována skutečnou ženou v Turingově životě, neboť Turing se v Bletchley spřátelil s dívkou jménem Pat. Kdyby si byl Turing zvolil cestu životem, v níž by se vyhnul přiznání své homosexuality, mohl by snad osud Alana Turinga pokračovat svatbou s Pat. To se však (jak ukazuje Andrew Hodges ve čtivé biografii Alana Turinga) nestalo. Dá se tedy říci, že pokud jde o Alana Turinga, obsahuje film mnoho zavádějících informací. K naprosto opačnému závěru dojdeme při rozboru hry *Breaking the Code.*

3.2 Hugh Whitemore: *Breaking the Code* (drama, 1986)

Název dramatu *Breaking the Code* uvádím záměrně v angličtině, neboť v českém překladu „Porušení zákona“ nebo naopak „Rozluštění šifry“ by nebyly patrné oba významy. Celou hrou se prolíná Turingovo porušení zákona (měl pohlavní styk s mužem) a rozluštění šifry v Bletchley.

Odhalení Turingovy homosexuality je v dramatu (a bylo i ve skutečnosti) svázáno s vloupáním do Turingova domu. Turing vloupání ohlásí policii a při vysvětlování toho, jak k činu dle Turinga došlo, pojme policista podezření o Turingově homosexualitě. Mezi výslechy se dozvídáme různé detaily z Turingova života: dozvídáme se o jeho příteli z mládí Christopheru Morcomovi, o Turingově matce, kterou synova homosexualita zaskočila, či o dívce Pat z Bletchley. Právě v konverzaci se svou kamarádkou Pat, nyní vdanou matkou dvou synů, prozradí Turing divákům, že byl odsouzen a propuštěn podmínečně na svobodu. Podmínka, která možná světu předčasně vzala jednoho z vynikajících matematiků, spočívala v hormonální terapii. Druhým důvodem k Turingově sebevraždě mohlo být odepření bezpečnostního osvědčení na základě jeho homosexuality.

Autorovi dramatu se podařilo barvitě zprostředkovat Turingovy myšlenky divákovi. Například v konverzaci Turinga s prostým mužem se Whitemoreovi podařilo ukázat, jak komplikované je pro Turinga mluvit o předmětu svého výzkumu. Fiktivní rozhovory mezi Sarou Turingovou a jejím synem Alanem zase dávají nahlédnout do vztahu matky a jejího geniálního syna. V konverzaci s Pat ukazuje autor hry Turingovu lidskou stránku, jeho ohleduplnost a uvědomění si vlastní situace.

K názvu této hry je podle autorských práv vždy nutno připojit dodatek, že hra vznikla podle biografie *Alan Turing: The Enigma* [3]. Je tedy na místě dodat, že tím, komu se skutečně podařilo vcítit se do Turingovy duše, je Andrew Hodges. Na závěr uveďme, jak popsal absurditu situace sám Turing:

Turing tvrdí, že stroje myslí. Turing spí s muži. Tudíž stroje nemyslí.

4 Závěr

Většina matematiků, a podobně i jiných vědců, by asi souhlasila s tvrzením, že kde a jak se odehrávají převratné objevy, lze těžko znázornit ve filmu. Podobně nelze než souhlasit s prvním odstavcem Hodgesovy recenze [2], že totiž těžko může být historická fikce zcela pravdivá. Přesto však existují horší a lepší varianty polofiktivních děl o matematicích. Zatímco u filmu *Čistá duše* lze spíše spekulovat o tom, do jaké míry je nám Nashova genialita předkládána jako omluva pro jeho schizofrenii [1], v případě filmu *Enigma* je překroucení skutečností takové, že i jen trochu informovaný divák nakonec neví, zda Tom Jericho měl či neměl představovat Alana Turinga. Naprosto odlišný charakter má hra *Breaking the Code*, která si neklade za cíl ukázat Turingův osud nebo jeho část, nýbrž spíše divákovi zprostředkovává Turingovy pocity a prožitky, tedy to, co si ve stručné biografii nepřečteme a v matematických článcích už vůbec ne.

Literatura

[1] Bradshaw P.: *A Beuatiful Mind. A Review.* The Guardian, 22. února 2002.

[2] Harris R.: *Enigma.* Hutchinson, London, 1995.

[3] Hodges A.: *Alan Turing: The Enigma*. Vintage, Random House, London, 1992.

[4] Hodges A.: *Enigma. A Review.* British Society for the History of Mathematics Newsletter, podzim 2001.

[5] Nasar S.: *A Beautiful Mind.* Simon & Schuster, 1998.

[6] Turing S.: *Alan M. Turing.* W. Heffer, Cambridge, 1959.

[7] Whitemore H.: *Breaking the Code*. A play based on the book Alan Turing, The Enigma by Andrew Hodges. Samuel French, London, 1986.

Adresa

Helena Durnová, Ph.D.
Ústav matematiky
FEKT VUT v Brně
Technická 8
616 00 Brno
e-mail: *durnova@feec.vutbr.cz*

AXIOMS, ALGORITHMS & ANACHRONISMS: DAVID HILBERT AND MECHANISED PROOFS[1]

JIŘÍ HUDEČEK

1 Introduction

In 1982, Wu Wen-Tsun, a Chinese mathematician (*1919), wrote an article [1] linking the method of automated theorem proving in elementary geometry he designed 4 years earlier to a rarely cited passage in David Hilbert's (1862–1943) *Grundlagen der Geometrie*. In this and several subsequent articles, Wu argued that Hilbert, perhaps unknowingly, thereby opened the way to feasible mechanisation of geometry.

Wu's claim is not a simple acknowledgment of use of someone else's results: it is consciously employed to support his central thesis that there are two opposing currents of thought in history of mathematics, and that his own method is a culmination of the one that has long been suppressed but is going to prevail.

Practitioners writing about the development of their discipline are in particular danger of anachronism. Mathematicians see far-reaching connections: historians point out the uniqueness of the object under study. By contrasting Wu's Whiggish evaluation of Hilbert's passage with a more contextual investigation, I intend to show that even mathematicians would benefit from avoiding anachronism.

2 Wu's Method and Hilbert's Theorem 62

Wu Wen-Tsun's method of mechanisation of proofs avoids logical analysis and resolution of terms, the more common approach to automated theorem proving [2]. Instead, he designed a decision procedure checking the content of geometrical theorems by mechanical solution of coordinate equation systems representing the premises and the conclusion:

$$\begin{gathered} f_1(u_1, \ldots, u_d, x_1) = 0, \\ f_2(u_1, \ldots, u_d, x_1, x_2) = 0, \\ \ldots \\ f_r(u_1, \ldots, u_d, x_1, \ldots, x_r) = 0, \\ g(u_1, \ldots, u_d, x_1, \ldots, x_r) = 0. \end{gathered}$$

If such a system holds for any values of the parameters $u_1, ..., u_d$, the theorem is true.[2]

Every theorem decidable by this procedure describes a configuration of points. Annoyingly, the result of the procedure depends upon the choice of free parameters u_i and variables x_j determined by them among the coordinates of these points. In [1], Wu Wen-Tsun showed that adding coordinates in the sequence in which the points would be constructed guarantees the correct outcome of his decision procedure. And he noted that this guarantee is expressed in theorem 62 of David Hilbert's Grundlagen:[3]

---

[1] This paper is a revised version of my essay written under the supervision of Prof. Jeremy Gray in the Department of History and Philosophy of Science, University of Cambridge.

[2] This is a very simplified description: there are important subsidiary conditions to this statement.

[3] Transl. auct. The text includes the preceding definition of a pure intersection theorem (reine Schnittpunktsatz).

“We understand under the concept ‘pure intersection theorem’ a theorem that contains an assertion about the joined position of points and straight lines and about parallelism of straight lines, without employing further relations such as congruence or orthogonality. Every pure intersection theorem of a plane geometry can be brought into the following form:

Select, first of all, an arbitrary system of finitely many points and straight lines, afterwards draw in a prescribed manner arbitrary parallels to some of these straight lines, choose arbitrary points on certain ones of the straight lines and draw arbitrary straight lines through them. If, in some known manner, we construct the straight lines joining the given points, the points of intersection and the parallels through already given points, we shall obtain finally a definite system of finitely many straight lines, of which our proposition asserts that they all pass through the same point.” ...

“Every pure intersection proposition valid in a plane geometry where axioms I 1-3, II, IV* [i.e. axioms of connection in a plane, ordering and parallels] and Pascal’s theorem hold, turns out to be a combination of finitely many Pascal configurations by the aid of suitably constructed auxiliary points and straight lines.“ [3]

Wu Wen-Tsun labels this theorem “Hilbert’s Mechanisation Theorem”. He thus links it explicitly to the dichotomy he sees between what he calls “axiomatisation” and “mechanisation”. For Wu, mathematics is always an empirical science describing numbers and shapes as they exist in the material world; axiomatised mathematics abstracts these entities into concepts and investigates their properties by ingenious deductive arguments, as represented by the Greek mathematical tradition; mechanised mathematics models these entities by elementary objects, and finds solutions to problems involving these objects by repeated mechanical (stereotyped and unreflective) operations, as represented by the Chinese tradition. With the advent of computers, mechanisation becomes in Wu’s view much more powerful than axiomatisation, and this should also help rejuvenate Chinese mathematics, which is the main reason why he started research on mechanisation of mathematics in the first place. [4]

Wu also asserts that mechanisation has, since the time of Descartes, always been present in modern mathematics, but overlooked in favour of axiomatisation. Both tendencies clash in the particular theorem in *Grundlagen*:

“The great merit of Hilbert’s classic ‘Grundlagen der Geometrie’ of 1899 is universally recognised as being representative for axiomatization of mathematics ... In fact, this classic is also representative for the mechanization of geometry, showing clearly at the same time the way to achieve it.” [1]

From the perspective of Wu’s method, Hilbert’s theorem is indeed a tool for mechanisation of elementary geometry. But let us investigate what it means in Hilbert’s book and in his mathematics.

3 Hilbert’s Theorem 62 in its Own Time

Hilbert’s *Grundlagen der Geometrie (Foundations of Geometry)* were first published in 1899. Hilbert wrote up lecture notes for his course of the same name, in fact a result of a longer period of engagement with geometry [5]. Rather than simply providing rigorous foundations for Euclidean geometry, the course investigated implications of particular axioms – understood as assumptions rather than indubitable truths – for geometry and especially its relation to arithmetic.

One of Hilbert’s major concerns was the axiomatic foundation of two fundamental theorems – Desargues’ and Pascal’s (Pascal-Pappos). Theorem 62 appears in this context at the very end of the last-but-one chapter of the *Grundlagen*. It is an assertion that a subset of plane geometry can be based on Pascal’s theorem taken as an axiom.

Hilbert’s general approach in the *Grundlagen* is to create arithmetical models for his various axiomatisations and draw conclusions from these models. In line with this approach, theorem 62 is also tested on an algebraic model, and this makes it so useful and appealing for Wu Wen-Tsun. But this also reveals that axiomatisation can be “mechanised” (=performed in a systematic and predictable, almost algorithmic, way), and “mechanisation” always involves a choice of axioms, even when they are not labelled so.

Such “mechanised axiomatisation” was in fact routinely applied in Hilbert’s school to projective geometry. Hilbert himself gave a lecture course on projective geometry in 1920/1 (later published as [6]) and emphasised the role of Pascal’s theorem, and thus theorem 62, in this field. In fact the theorem was only created – in its numbered and largely revised version cited by Wu – after this course, for the 7th edition of *Grundlagen* in 1930.

This edition was mostly prepared by Hilbert’s student Arnold Schmidt. Schmidt’s dissertation “Derivation of Reflection from the Plane Motion” (a shorter version [7]) is also a systematic axiomatisation effort making explicit use of the “pure intersection theorems” enabled by *Grundlagen* theorem 62. But we find perhaps the clearest example of the “mechanised axiomatisation”, resembling even in form very strongly Wu Wen-Tsun’s method, in a paper on foundations of projective geometry by Hilbert’s more senior student Max Dehn:

“An intersection theorem is therefore to be formulated arithmetically:
From the equations

$$A\colon \{x_{ni}x_{ni'} + x_{mi}x_{mi'} + l_i = 0\}$$

between the numbers x_1, x_2, … follow the equations

$$B\colon \{x_{n'i}x_{n'i'} + x_{m'i}x_{m'i'} + x_{li} = 0\}$$

between the numbers x_1, x_2, …, i.e. every system of numbers that satisfies equations *A* also satisfies equations *B*.” [8]

Does it mean that Wu’s method was in fact already discovered by Hilbert and his followers? I think it only means that Hilbert-style axiomatisation was driven by a desire to reduce mathematical research to a systematic use of a basic set of well-developed techniques. The same desire that drives Wu Wen-Tsun’s “mechanisation”, in fact its defining feature. There seem to be no two clashing tendencies.

4 Take-home Message for Historians of Mathematics

Sabetai Unguru wrote in 1994 [9]:

“The history of mathematics is history not mathematics. It is the study of the idiosyncratic aspects of the activity of mathematicians who themselves are engaged in the study of the nomothetic, that is, of what is the case by law.”

In the same text, he makes this useful distinction:

"In every interpretive textual task one can distinguish between (1) an 'objective', semantic interpretation that conceives the text as a physical object, a material, neutral, self-contained and independent entity incorporating all its lessons and messages and (2) an intentional, voluntaristic interpretation that denies the possibility of understanding the text properly, i.e., historically, severed from the intentions of its author. "

Mathematicians are trained to see deep and hidden connections. But this makes them often overlook that a result does not inherently contain all its future uses. It is the task of the historian to show what were the original uses and what motivated them. Often, as in the case of Wu Wen-Tsun, mathematicians' understanding of their own work could benefit from awareness of these historical contexts. The intellectual but also social motives may, after all, be the real hidden connections.

References

[1] Wu Wen-Tsun: *Toward Mechanization of Geometry – some Comments on Hilbert's "Grundlagen der Geometrie"*. Acta Mathematica Scientia 2(1982), 125–138.

[2] Bledsoe W. W., Loveland D. W.: *Automated Theorem Proving: After 25 Years*. American Mathematical Society, Bookstore, 1984.

[3] Hilbert D.: *Grundlagen der Geometrie*. 7th edition, Teubner, Stuttgart, 1930.

[4] Wu Wen-Tsun: *Mathematics Mechanisation*. Kluwer, 2000.

[5] Toepell M.-M.: *Über die Entstehung von David Hilberts "Grundlagen der Geometrie"*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1986.

[6] Hilbert D., Cohn-Vessen S.: *Anschauliche Geometrie*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 37, Springer, Berlin, 1932.

[7] Schmidt A.: *Die Herleitung der Spiegelung aus der ebenen Bewegung*. Mathematische Annalen 109(1934), 538–571.

[8] Dehn M.: *Über der Grundlagen projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme*. In Blumenthal O. (ed.): Festschrift David Hilbert zu seinem sechzigsten Geburtstag am 23. Januar 1922, Springer, Berlin, 1922, 184–194.

[9] Unguru S.: *Is Mathematics Ahistorical? An Attempt to an Answer Motivated by Greek Mathematics*. In Gavroglu K., Christianidis J., Nikolaidis E. (ed.): Trends in the Historiography of Science, Kluwer, 1994, 203–220.

Address

Mgr. Ing. Jiří Hudeček
Department of History and Philosophy of Science, University of Cambridge
Darwin College, CB3 9EU, Cambridge, England
e-mail: *hujirui@gmail.com*

FILOZOFICKÉ POJETÍ PRAVDĚPODOBNOSTI V DÍLE T. G. MASARYKA A K. VOROVKY

MAGDALENA HYKŠOVÁ

1 Úvod

Tomáš Garrigue Masaryk se pravděpodobností zabýval v pojednáních [5], [6] a patřil mezi nadšené zastánce její logické interpretace. Karel Vorovka se filozofii pravděpodobnosti věnoval v pojednáních [13], [14] a logickou interpretaci naopak ostře kritizoval.

Článek navazuje na příspěvek [3] z předminulé konference, věnovaný mimo jiné přínosu českých matematiků k interpretacím pravděpodobnosti (zejména pracím B. Bolzana, V. Šimerky a O. Pankraze), a na článek [8], shrnující filozofické interpretace pravděpodobnosti a jejich historický vývoj. V úvodu proto jen velmi stručně připomeňme, že při hledání odpovědi na otázku, *co je to vlastně pravděpodobnost* a *co znamená pro náš život*, se zpravidla rozlišují dvě zásadně rozdílné interpretace pravděpodobnosti: *objektivní*, která pravděpodobnost považuje za objektivní vlastnost světa, nezávislou na konkrétním jedinci, znalosti či víře, a *epistemologická*, která pravděpodobnost ztotožňuje s mírou stupně znalosti nebo přesvědčení o určitém jevu. V dalším se budeme zabývat jen interpretací epistemologickou, kterou lze dále rozdělit na *logickou* a *subjektivní*. Logická interpretace považuje pravděpodobnost za míru racionálního přesvědčení či míru vyplývání. Mezi její nejznámější představitele patří J. M. Keynes (1883–1946) a R. Carnap (1891–1970); dnes poněkud pozapomenutými, avšak neméně důležitými představiteli jsou rovněž B. Bolzano (1781–1848, viz [1]) a J. von Kries (1853–1928). Subjektivní interpretace ztotožňuje pravděpodobnost se stupněm osobního přesvědčení nebo víry ve výskyt určitého jevu či události. Za její zakladatele jsou zpravidla považováni F. P. Ramsey (1903–1930) a B. de Finetti (1906–1985); již o půl století dříve však podobné myšlenky zformuloval V. Šimerka (1818–1887, viz [9]–[10]).

2 Tomáš Garrigue Masaryk (1850–1937)

Osobnost prvního československého prezidenta není třeba představovat. Proto jen připomeňme, že v roce 1878 se Masaryk habilitoval na vídeňské univerzitě, a to na základě sociologického pojednání *Sebevražda jako hromadný společenský jev moderní civilizace*; mezi pěti filozofy, kteří jej nejvíce ovlivnili, zde uvedl D. Humea, k jehož odkazu se vracel i v pozdějších pracích. V roce 1882 byl Masaryk jmenován mimořádným profesorem filozofie na české univerzitě v Praze. Pro svou inaugurační přednášku, jež se konala dne 16. 10. 1882, si zvolil téma *Humova skepse a počet pravděpodobnosti*, které pak dále rozvinul ve stejnojmenném spise [5] z roku 1883; o rok později vyšla stručnější a poněkud upravená německá verze [6]. I když se ostatní Masarykovy práce týkaly především filozofie, sociologie a později také politiky, projevil zde mimořádnou znalost vývoje teorie pravděpodobnosti, zejména v souvislosti s induktivní logikou.

Podívejme se nyní ve stručnosti na českou verzi tohoto pojednání. V úvodu Masaryk píše, že se tímto tématem zabývá již dlouhou dobu a chtěl by je podrobněji zpracovat v rozsáhlejším spise o teorii induktivní logiky. Protože se však obává, že k tomu z nedostatku času v dohledné době nedojde (a jak dnes víme, nedošlo k tomu nikdy), vydává alespoň tuto stať, v níž jsou základní myšlenky objasněny na pozadí historického vývoje tak, aby je zájemci mohli snadno dále rozvinout. Přímo také poznamenává, že pojednání ukazuje logický význam počtu pravděpodobnosti; v dnešní terminologii lze tedy říci, že práce spadá do oblasti *logické interpretace pravděpodobnosti*. Spis je odpovědí na Humeovu myšlenku, že závěry neúplné indukce jsou výlučně založené na zvyku, a protože idea kauzální souvislosti neodpovídá žádnému dojmu ani vnější ani vnitřní zkušenosti, je to pojem zcela bezobsažný. Podstatu *Humeovy skepse* Masaryk charakterizuje takto: *Pouze matematika zasluhuje naši důvěru, empirické vědy jsou nejisté, protože nám uniká poznání kauzálních souvislostí fakt; neboť o empirických faktech bychom mohli získat bezpečné poznatky pouze na základě evidentního vztahu mezi příčinou a účinkem.* ([5], str. 24) V hlavní části svého pojednání Masaryk podává historický popis pokusů o filozofické vyvrácení Humeovy skepse, které však považuje za nedostatečné. Začíná myšlenkami T. Reida, J. Beattieho, J. Oswalda, J. G. Sulzera, I. Kanta a F. E. Benekeho. Pokračuje příspěvky, které se snažily Humeovu skepsi vyvrátit pomocí induktivní logiky, a to pracemi M. Mendelssohna, J. M. Degéranda a S. D. Poissona. Potom se obrací k využití počtu pravděpodobnosti v induktivní logice a příspěvkům G. W. Leibnize, Jakoba Bernoulliho, P.-S. Laplace, L. A. J. Quételeta, J. Herschela, A. A. Cournota, H. R. Lotze, F. Überwega, C. W. von Sigwarta, W. S. Jevonse a J. Venna, u nichž však chybí přímý odkaz na Humea. Právě v tomto směru Masaryk vidí možnost Humeovu skepsi skutečně vyvrátit, a propojení uvedených příspěvků s Humem považuje za jejich chybějící pointu.

3 Karel Vorovka (1879–1929)

Masarykově optimismu oponoval Karel Vorovka, filozof matematiky, který bývá právem označován za prvního českého myslitele, jenž se po Bolzanovi systematicky zabýval základy přírodních věd (viz [7], str. 5). Připomeňme nejprve, že Vorovka vystudoval matematiku a fyziku na filozofické fakultě pražské univerzity (1897–1901) a pak dlouhá léta působil jako středoškolský profesor. Svou disertační práci [11] věnoval teorii integrálů, záhy se však obrátil především k filozofickým otázkám matematiky. V roce 1921 se habilitoval z filozofie přírodních věd na zatím ještě nerozdělené filozofické fakultě pražské univerzity, o šest let později byl jmenován profesorem filozofie exaktních věd na fakultě přírodovědecké. Ve fyzikálních kruzích je Vorovka znám také jako zastánce a propagátor Einsteinovy teorie relativity.

Teorií pravděpodobnosti a jejím filozofickým významem se Vorovka zabýval od roku 1912, kdy zemřel H. Poincaré. Jednota českých matematiků a fyziků tehdy uspořádala cyklus přednášek věnovaných různým oborům činnosti tohoto myslitele. Vorovkovi připadl úkol pronést přednášku na téma *Henri Poincaré jako filosof* (přednáška se konala 25. ledna 1913 a o rok později byla publikována – viz [15]). Studium Poincaréových matematicko-filozofických úvah Vorovku velmi ovlivnilo; snad největší inspiraci nalezl v úvahách o náhodě a pravděpodobnosti. Kromě matematického článku [12] věnovaného problému ruinování hráčů je Poincaréův vliv patrný ve Vorovkových pojednáních [13] a [14]. První z nich bylo otištěno v roce 1913 ve filozofickém časopise Česká mysl pod názvem *Filosofický dosah počtu pravděpodobnosti* [13]. Vorovka zde kritizuje filozofické interpretace pravděpodobnosti včetně prací P.-S. Laplace [4], T. G. Masaryka [5]a V. Šimerky [9]. Objasňuje zde základní problém logické interpretace, kterým je určení *apriorních pravděpodobností* v Bayesově vzorci pro pravděpodobnost určité hypotézy, podmíněnou daným pozorováním či zkušeností (viz dále). Na rozdíl od Masaryka se Vorovka domnívá, že Humeovy námitky jsou oprávněné a teorií pravděpodobnosti je nelze vyvrátit; své úvahy shrnuje takto: *Počet pravděpodobnosti a Humeova skepse náleží dvěma zcela různým oblastem duševním a není možno je uvésti do racionálního vztahu. Hodí se zde dobře následující přirovnání. Kdo by* *chtěl aplikovati počet pravděpodobnosti na Humeovu skepsi, krájel by atom nožem. Kdo by zaváděl Humeovu skepsi do počtu pravděpodobnosti, brousil by atomy v noži.* ([13], str. 25)

Podobné úvahy lze nalézt i v článku *O pravděpodobnosti příčin* [14], publikovaném v roce 1914 v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky (dále jen ČPMF). Tato práce byla určena zejména středoškolským studentům, obsahuje proto méně filozofie a více matematiky a ilustračních příkladů. I zde se Vorovka zabývá možnostmi využití Bayesovy věty, kterou nazývá *teorémem o pravděpodobnosti příčin*, pro prokázání kauzální souvislosti určitých jevů a ukazuje, že tyto možnosti jsou značně omezené. Základní problém formuluje takto: Byl pozorován určitý úkaz, který musel být způsoben jedním z konečného počtu n různých jevů (*příčin*), z nichž každý má jistou apriorní pravděpodobnost ω_k, že nastane; libovolné dva jevy se navzájem vylučují a jiné možnosti neexistují, tj. $\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = 1$. Nastane-li k-tý z těchto jevů, pak pozorovaný jev nastane s pravděpodobností p_k. Pravděpodobnost, že příčinou pozorovaného úkazu byl k-tý jev (neboli platí k-tá hypotéza), lze podle Bayesovy věty vyjádřit ve tvaru:

$$h_k = \frac{\omega_k p_k}{\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \cdots + \omega_n p_n} . \tag{1}$$

Jak však určit apriorní pravděpodobnosti ω_k? V některých případech je to poměrně snadné, v jiných je to však obtížnější či zcela nemožné. Pro ilustraci Vorovka uvádí několik příkladů, z nichž nejjednodušší je následující: Uvažujme dvě osudí, o kterých je známo, že jedno obsahuje dvě bílé koule a druhé jednu kouli bílou a jednu černou. Náhodně zvolíme jedno osudí a z něj náhodně vytáhneme jednu kouli. Je-li bílá, jaká je pravděpodobnost, že se jedná o druhé osudí? V tomto případě položíme $\omega_1 = \omega_2 = 1/2$ (náhodně jsme vybrali jedno ze dvou osudí), $p_1 = 1$ a $p_2 = 1/2$. Pravděpodobnost, že se jedná o druhé osudí, je podle (1) rovna 1/3. Na jiném příkladu pak Vorovka ukazuje, že často je určení apriorních pravděpodobností nemožné: Petr hraje v kostky s neznámým hráčem; největší výhra připadá tomu, kdo prvním vrhem dvěma kostkami hodí dvě šestky. Protihráči se to podařilo hned napoprvé. Jaká je pravděpodobnost, že je to falešný hráč? Kdybychom v duchu Laplaceova přístupu opět položili $\omega_1 = \omega_2 = 1/2$, byla by tato pravděpodobnost rovna 0,97, což však odporuje zdravému rozumu. Bez dalších informací proto úloha není řešitelná. Závěr pojednání [14] pak celou kritiku přece jen poněkud mírní: *Avšak proto přece nesmíme Bayesův theorém podceňovati. Jest přece jen pro počet pravděpodobnosti nepostradatelným, a to jednak pro applikace na takové zjevy, které jsou ovládány Zákonem velkých čísel, jednak pro vnitřní logickou souvislost celého počtu* ... ([14], str. 93). V pojednání [13] navíc Vorovka uvádí, jak lze v některých případech určit apriorní pravděpodobnosti pomocí Poincaréovy metody libovolných funkcí.

4 Závěr

Práce T. G. Masaryka a K. Vorovky představují dvě zcela odlišná chápání pravděpodobnosti. Masaryk byl zastáncem logické interpretace, která byla rozvíjena až koncem devatenáctého a především v první polovině dvacátého století (ponecháme-li stranou Bolzanův spis [1]). Jeho pojednání jsou pozoruhodná i proto, že dokládají dobré znalosti teorie pravděpodobnosti a její historie, nadšení pro induktivní logiku a vysoké mínění o matematice. Tím také prvního československého prezidenta ukazují v méně obvyklém světle. K. Vorovka naopak patřil ke kritikům logické interpretace; zastával názor, že teorii pravděpodobnosti nelze aplikovat na filozofické problémy, a proto by se měla stát na filozofii zcela nezávislou. Dodejme, že k tomu zanedlouho skutečně došlo: ve třicátých letech 20. století byla teorie pravděpodobnosti A. N. Kolmogorovem postavena na axiomatický základ a matematiky byla přijata jako „opravdová“ matematická disciplína; ve stejné době navíc logická interpretace čelila ostré kritice F. P. Ramseyho a B. de Finettiho, která vedla k tomu, že v druhé polovině 20. století byla logická interpretace postupně opouštěna. Jak jsme viděli v předchozí části, jádro této kritiky lze nalézt téměř o dvacet let dříve právě ve Vorovkových pojednáních. Nicméně na otázku, do jaké míry z dané evidence plyne určitá hypotéza neboli jaká je *podmíněná pravděpodobnost*, že určitá hypotéza je pravdivá, narážíme během svého života neustále. I když není vždy možné tuto pravděpodobnost určit přesně, její rozumný odhad je často životně důležitý. Je proto povzbudivé, že se v poslední době objevují vážné snahy logickou interpretaci oživit (podrobnosti lze nalézt v článku [8]).

Literatura

[1] Bolzano B.: *Wissenschaftslehre*. Sulzbach, 1837 [dokončeno kolem roku 1830].

[2] Hume D.: *Philosophical Essays concerning Human Understanding*. A. Millar, London, 1748.

[3] Hykšová M.: *Příspěvek českých matematiků k teorii pravděpodobnosti*. In: Bečvářová M. (ed.): 27. mezinárodní konference Historie matematiky, Praha, 2006, 30–31.

[4] Laplace P.-S. de: *Essai Philosophique sur les Probabilités*, Paris, 1814.

[5] Masaryk T. G.: *Humova skepse a počet pravděpodobnosti*. J. Otto, Praha, 1883.

[6] Masaryk T. G.: *Dav. Hume’s Skepsis und die Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Carl Konegen, Wien, 1884.

[7] Pelikán F.: *Osobnost a dílo Karla Vorovky*. In: Pelikán F. (ed.): *Vorovkův sborník*, Československá grafická unie, Praha, 1937, 3–24.

[8] Saxl I.: *Filosofické interpretace pravděpodobnosti*. In: Bečvář J., Fuchs E. (eds): Matematika v proměnách věků III, VCDV, Praha, 2004, 132–155.

[9] Šimerka V.: *Síla přesvědčení*. ČPMF 11(1882), 75 –111.

[10] Šimerka V.: *Die Kraft der Überzeugung*. In: Sitzungsberichte der Philos.-Historischen Classe der Kaiserlichen Akad. der Wiss. 104(1883), 511–571.

[11] Vorovka K.: *Integrál partikulární jakožto obálka*. ČPMF 32(1903), 229–240.

[12] Vorovka K.: *Poznámka k problému ruinování hráčů*. ČPMF 41(1912), 562–567.

[13] Vorovka K.: *Filosofický dosah počtu pravděpodobnosti*. Česká mysl 14(1913), 17–30.

[14] Vorovka K.: *O pravděpodobnosti příčin*. ČPMF 43(1914), 81–93.

[15] Vorovka K.: *Jak soudil H. Poincaré o vztazích mathematiky k logice*. ČPMF 43(1914), 154–162.

Adresa

RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D.
Ústav aplikované matematiky
Fakulta dopravní ČVUT
Na Florenci 25
110 00 Praha 1
e-mail: hyksova@fd.cvut.cz

WILHELM MATZKA (1798–1891) VE VÍDNI

MICHAELA CHOCHOLOVÁ

1 Stručný běh životem Wilhelma Matzky[1]

Wilhelm Matzka se narodil dne 4. listopadu 1798 v Litobratřicí na jižní Moravě. V devatenácti letech začal studium na filozofické fakultě v Praze, které ukončil po dvou letech s výtečnými výsledky.[2] Po studiu na pražské univerzitě pobýval v letech 1819 až 1837 ve Vídni. V srpnu roku 1837 byl jmenován řádným profesorem elementární matematiky při nově zřízeném „filozofickém učilišti“ v Tarnově, kde působil do roku 1849. Mezitím, v srpnu roku 1843, vykonal na univerzitě v Olomouci rigorózní zkoušky a byl promován doktorem svobodných umění a filozofie.[3] Roku 1849 uspěl v konkurzu na místo řádného profesora elementární matematiky a praktické geometrie na pražské technice.[4] V dubnu roku 1850 byl jmenován řádným profesorem matematiky s německou vyučovací řečí na pražské univerzitě, kde vedl výuku až do roku 1871.[5] Od roku 1850 byl řádným členem *Královské české společnosti nauk*.[6] W. Matzka zemřel dne 9. června 1891 v Praze.[7]

2 Aktivity ve Vídni

2.1 Kariéra v rakouské armádě

W. Matzka nastoupil vojenskou službu u druhého dělostřeleckého pluku ve Vídni dne 16. září 1819. Dne 6. února 1821 byl přeložen jako bombardér k vídeňskému bombardérskému sboru, následně byl dne 18. září 1822 povýšen na ohněstrůjce. Dne 25. května 1826 se stal vrchním ohněstrůjcem a konečně dne 1. června 1831 poručíkem

[1] Wilhelm Matzka byl významným matematikem a vysokoškolským profesorem poloviny 19. století v českých zemích. Blíže o jeho životě, pedagogickém působení a publikační činnosti viz Chocholová M.: *Wilhelm Matzka (1798–1891) a jeho práce z teorie determinantů*, in M. Bečvářová (ed.): 28. mezinárodní konference Historie matematiky, Praha, 2007, 41–44.

[2] V prvním i druhém ročníku absolvoval výklady z náboženství, historie a řečtiny. V prvním ročníku také povinnou teoretickou filozofii a matematiku, ve druhém ročníku praktickou filozofii a matematickou fyziku. Náboženství ho učil Bernard Bolzano (1781–1848), historii Franz Nicolaus Tietze (1769–1858), řečtinu Alois Klar (1763–1833), teoretickou i praktickou filozofii František Xaver Němeček (?–1821), matematiku Josef Ladislav Jandera (1776–1857) a matematickou fyziku Franz Ignac Cassian Hallaschka (1780–1847). Více viz *Katalog über die Hörer der Philosophie an der k. k. Prager Universität, vom Schuljahre 1818, 1819*, Archiv Univerzity Karlovy.

[3] Dne 8. srpna 1843 složil předepsanou zkoušku z obecné historie, dne 16. srpna 1843 zkoušku z obecné filozofie, a toho samého dne byl promován. Viz fond *Univerzita Olomouc, Série děkanů, profesorů a doktorů promovaných na filozofické fakultě, seznam rigorosantů a promocí, 1828–1851*, Zemský archiv Opava, pobočka Olomouc.

[4] W. Matzka byl jmenován řádným profesorem elementární matematiky a praktické geometrie na pražské technice dne 8. dubna 1849. O jeho působení viz Jelínek K.: *Das ständisch-polytechnische Institut zu Prag, Programm zur fünfzigjährigen Erinnerungs-Feier an die Eröffnung des Institutes am 10. November 1856*, Prag, 1856.

[5] W. Matzka byl jmenován řádným profesorem matematiky na pražské univerzitě dne 9. dubna 1850. O jeho působení viz *Ordnung der Vorlesungen an der k. k. Universität zu Prag 1849/50, …, 1870/71* a *Personalstand der k. k. Universität zu Prag 1850/51, …, 1872/73*, Archiv Univerzity Karlovy.

[6] W. Matzka byl dne 9. února 1845 zvolen dopisujícím členem *Královské české společnosti nauk*, dne 2. ledna 1850 byl zvolen jejím řádným členem; v letech 1852 až 1884 pracoval pro společnost jako pokladník.

[7] Zprávu o jeho úmrtí podává *Jahresbericht der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften 1891*.

bombardérského sboru a současně byl jmenován učitelem matematiky ve škole bombardérského sboru. Na této pozici setrval až do 31. srpna 1837.

2.2 Das k. k. Bombardier-Corps

Roku 1778 bylo císařem Josef II. ve Vídni zřízeno tzv. dělostřelecké lyceum. Po osmi letech bylo přetvořeno v c. k. bombardérskou sborovou školu nazývanou též bombardérský sbor.

Hlavní činnost školy spočívala v přípravě budoucích dělostřelců, tedy v přípravě na obsluhu houfnic, moždířů, obléhacích děl a k výrobě střeliva. Nadanější žáci byli vzděláváni v matematice, kreslení od ruky, fortifikaci a mechanice.

Původně čtyřtřídní škola se od svého počátku neustále rozšiřovala, roku 1815 byla již sedmitřídní. Jednotlivé ročníky byly pojmenovány podle hlavních předmětů, které se v nich vyučovaly, totiž – 1. ročník Aritmetika, 2. ročník Geometrie, 3. a 4. ročník Vyšší matematika, 5. ročník Mechanika, 6. ročník Fyzika a 7. ročník Chemie. Hlavní pozornost byla věnována především rozvoji matematických a přírodovědných znalostí studentů. Ostatní předměty (např. nauka o dělostřelbě, geometrální a situační rýsování) byly průběžně rozděleny do všech ročníků; navíc byly vyučovány vedlejší předměty (např. fortifikace, vojenská geografie, dějepis, taktika, administrativa a francouzský jazyk). Prvních pět ročníků se nazývalo nižší kurs, šestý a sedmý ročník vyšší kurs. V tomto uspořádání fungovala bombardérská sborová škola ve Vídni až do roku 1849, kdy byla přeložena do Olomouce.[8]

W. Matzka byl v bombardérské sborové škole profesorem vyšší matematiky; v letech 1832 až 1833 přednášel algebraickou analýzu a analytickou geometrii, roku 1834 diferenciální a integrální počet a v letech 1835 až 1837 vyšší mechaniku.

Úroveň bombardérské sborové školy v prvních letech její existence pozvedl Slovinec Georg Freiherr von Vega (1754–1802), který se proslavil nejen jako udatný vojín, ale také jako matematik a učitel.[9]

2.3 Studium na vídeňské univerzitě a technice

V době svého působení ve Vídni si W. Matzka doplňoval a prohluboval vzdělání nejen studiem odborných předmětů vyučovaných na dělostřelecké škole, ale také studiem na vídeňské univerzitě a technice. Na vídeňské univerzitě navštěvoval přednášky z vědecké a praktické astronomie Josepha Johanna Littrowa (1781–1840), z vyšší matematiky a fyziky Andrease von Ettingshausena (1796–1878) a z mineralogie Friedricha Mohse (1773–1839). Na vídeňské polytechnice poslouchal technologii, kterou vedl Georg Altmütter (1787–1858).

---

[8] O historii bombardérského sboru a výuce ve sborové škole viz [3].

[9] G. F. von Vega je autorem matematických prací *Logarithmentafeln*, Leipzig, 1783, *Logarithmisch-trigonometrische Tafeln*, Leipzig, 1797, *Vorlesungen über die Mathematik*, čtyři svazky, Wien, 1782–1800, aj. O Vegovi více viz [4] a viz sborník z konference pořádané k 250. výročí Vegova narození *Proceedings of Conference Jurij Vega and His Time*, Ljubljana, 2004.

3 Práce vydané ve Vídni

W. Matzka publikoval v letech 1828 až 1888 více než pět desítek odborných prací z matematiky a fyziky, ale také práce zasahující do chronologie, astronomie či geodézie. Je autorem německy psaných učebnic, historických, metodických a populárních prací. Kompletní seznam Matzkových publikací zatím neexistuje; jeho vytvoření je jedním z hlavních přínosů mé disertační práce nazvané *Život a dílo Wilhelma Matzky*. V současné době mám zmapováno 67 Matzkových prací[10], které uveřejňoval v odborných časopisech[11] nebo je vydával samostatně jako monografie, učebnice či spisy.

V následujících odstavcích zmíníme Matzkova díla, která mají vztah k Vídni. Některá z nich pocházejí přímo z doby, kdy zde pobýval, některá byla sice ve Vídni publikována, ale pocházejí až z doby jeho působení v Tarnově.

Z vídeňského působení pochází Matzkův rukopis *Stellungen zu den 100 Schachspielgeheimnissen des Arabers Stamma*[12] z roku 1828 věnující se teorii šachové hry. Z dnešního hlediska se zdá, že se tento stostránkový rukopis zabývá šachovými kompozicemi, tj. uměle vytvořenými pozicemi[13] se zadaným problémem, který má být vyřešen (např. „bílý táhne a dá mat ve třech tazích“). Matzkův spisek obsahuje 100 navržených šachových schémat, z nichž je 12 analyzováno.[14]

G. F. von Vega sepsal pro potřeby výuky v bombardérském sboru čtyřdílné *Vorlesungen über die Mathematik* s podtituly (zkráceně) *Rechenkunst und Algebra* (1782), *Geometrie, sphärische Trigonometrie und die Infinitesimal-Rechnung* (1784), *Mechanik der festen Körper* (1788) a *Hydrostatik, Aerostatik, Hydraulik, und der Bewegung fester Körper* (1800). Učebnice srozumitelně uváděly do studia matematické a fyzikální problematiky, proto byly používány jako základní učební text a byly do roku 1850 několikrát přepracovány a znovu vydány. Autorem posledních vydání byl právě W. Matzka, který dvakrát přepracoval první[15] a druhý[16] díl a jednou třetí[17] díl.

---

[10] Při tvorbě seznamu mi jako odrazový materiál posloužily dílčí informace uvedené v biografických slovnících [5] a [6]. Tyto informace a částečné seznamy děl jsem pečlivě prověřila, upřesnila a v současné době je stále doplňuji a upravuji.

[11] *Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, Archiv für Mathematik und Physik, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Astronomische Nachrichten, Annalen der Wiener Sternwarte, Annalen der Physik und Chemie*.

[12] Philipp Stamma (1705–1755) je známý jako šachový hráč a teoretik syrského původu, působící ve Francii a Anglii. Proslul zejména svou knihou *Essai sur le Jeu des Echecs* (Paris, 1737), která obsahovala 100 šachových koncovek se schématy. Jako první užila pro záznam průběhu šachové hry (krátkou) algebraickou šachovou notaci, téměř výhradně používanou až do současnosti.

[13] Pro označení šachových figur W. Matzka použil: K (der König) – král, D (die Dame) – dáma, T (der Turm) – věž, L (der Läufer) – střelec, B (der Bauer) – pěšec.

[14] To jsou partie 1–11 a 15.

[15] *Georg Freiherrn von Vega, Vorlesungen über die Mathematik sowol überhaupt zu mehrerer Verbreitung mathematischer Kenntnisse in den k. k. Staaten, als auch insbesondere zum Gebrauche des k. k. Artillerie-Corps. – Erster Band. Rechenkunst und Algebra*. Sechste Auflage, Durchgesehen, verbessert und vermehrt von Wilhelm Matzka. Fr. Bech's Universitäts-Buchhandlung, Wien, 1838, 612 stran. Siebente Auflage, Ueberarbeitet von Wilhelm Matzka. Fr. Bech's Universitäts-Buchhandlung, Wien, 1850, 624 stran.

[16] *Georg Freiherrn von Vega, Vorlesungen über die Mathematik sowol überhaupt zu mehrerer Verbreitung mathematischer Kenntnisse in den k. k. Staaten, als auch insbesondere zum Gebrauche des k. k. Artillerie-Corps. – Zweiter Band, die theoretische und practische Geometrie, die geradlinige und sphärische Trigonometrie, die höhere Geometrie, und die Infinitesimal-Rechnung enthaltend*. Siebente Auflage, Durchgesehen, verbessert und vermehrt von Wilhelm Matzka. Verlag von F. Tendler, Buchhändler, Wien, 1835, 712 stran + 16 tabulek. Achte

W. Matzka publikoval přepracovanou verzi části prvního dílu Vegových *Vorlesungen über die Mathematik* obsahující tabulky prvočinitelů, mocnin a odmocnin čísel a převodních vztahů fyzikálních jednotek.[18]

Roku 1844 vyšla ve Vídni Matzkova rozsáhlá publikace *Die Chronologie in ihrem ganzen Umfange …*,[19] kterou lze z dnešního pohledu zařadit do matematické chronologie.[20] Matzkovy výsledky jsou do kontextu světového vývoje chronologického bádání zařazeny v [2].

Literatura

[1] Bečvářová M.: *Česká matematická komunita v letech 1848–1918*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, Matfyzpress, Praha, 2008.

[2] Bláhová M.: *Historická chronologie*. Libri, Praha, 2001.

[3] Gatti F., Obermayer A. E. von: *Geschichte des k. k. Bombardier-Corps, der k. k. Artillerie-Hauptschule und der k. k. Artillerie-Akademie, 1786–1869.* Wien, 1905.

[4] Velflík A. V.: *Dějiny technického učení v Praze*. Díl I., Unie, Praha, 1906 a 1909.

[5] Poggendorff J. C.: *Biographisch-Literarisches Handwörterbuch*. Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1904.

[6] Würzbach C.: *Biographisches Lexikon*. Druck und Verlag der k. k. Hof- und Staatedruckerrei, Wien, 1867.

Adresa

Mgr. Michaela Chocholová
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *chochol@karlin.mff.cuni.cz*

Auflage, Ueberarbeitet von Wilhelm Matzka. Verlag von Tendler & Compagnie, Wien, 1848, 660 stran + 15 tabulek.

[17] *Georg Freiherrn von Vega, Vorlesungen über die Mathematik sowohl überhaupt zu mehrerer Verbreitung mathematischer Kenntnisse in den k. k. Staaten, als auch insbesondere zum Gebrauche des k. k. Artillerie-Corps. – Dritter Band. Mechanik der festen Körper*. Fünfte verbesserte Auflage. Verlag von Tendler & Schaefer, Wien, 1839, 433 stran + 11 tabulek.

[18] *Tafel der Primfactoren der Zahlen von 1 bis 16397, Tafel der vierten bis achten Potenzen der Zahlen von 1 bis 100, Tafel der zweiten und dritten Potenzen der Zahlen von 1 bis 1000, Tafel der zweiten und dritten Wurzeln der Zahlen von 1 bis 1000, Tafel zur Verwandlung der Fuße, Zolle, Linien und Puncte des zwölftheiligen Maßes in Decimaltheile der Klafter, des Fußes und des Zolles, wie auch umgekehrt. Zum bequemen Gebrauche bei Rechnungen mit besonderen Zahlen*. Besonderer Abdruck aus dem ersten Bande von Vega's Vorlesungen über Mathematik, überarbeitet vonWilhelm Matzka. Fr. Bech's Universitäts-Buchhandlung, Wien, 1838, 32 stran.

[19] *Die Chronologie in ihrem ganzen Umfange, mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Anwendung in der Astronomie, Weltgeschichte und Urkundenlehre, nebst einem Vorschlage zu einer streng wissenschaftlich geregelten Zeitrechnung; durch höhere Arithmetik begründet und erläutert*. In der Fr. Bech'schen Universitäts-Buchhandlung, Wien, 1844, VIII + 543 stran.

[20] *Chronologie je nauka o měření času, jeho způsobech a prostředcích k tomu používaných; … dělí se na dvě oblasti, na chronologii matematickou neboli astronomickou, a chronologii technickou neboli historickou. … Matematická (astronomická) chronologie využívá poznatků astronomie a jiných příbuzných věd, sleduje pohyby nebeských těles, zkoumá, do jaké míry přicházejí v úvahu pro stanovení časových jednotek, a stanoví na jejich základě objektivní jednotky měření času.* ([2], str. 24)

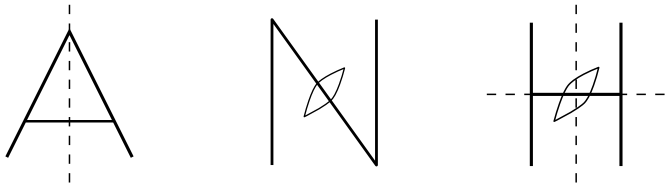
ROVINNÉ GRUPY SYMETRIÍ VO VÝTVARNOM UMENÍ[1]

LUCIA ILUCOVÁ

1 Grupy symetrií

Rovinné mozaiky (ale i ďalšie ornamenty) s bohatými motívmi v Alhambre či obrazy s motívom pravidelného delenia roviny holandského grafika M. C. Eschera fascinujú a inšpirujú laikov, umelcov i vedcov, a to nielen bohatosťou použitých tvarov, ale aj pravidelnosťou a symetriou svojho usporiadania. Tie je možné popísať jednorozmernými alebo dvojrozmernými grupami symetrie. Túto problematiku budem posudzovať najmä z pohľadu teselácií[2] a zameriam sa najmä na dvojrozmerný prípad, na historické pozadie výskumu grúp symetrií a ich výskyt v teseláciách v Alhambre a obrazoch Eschera.

Symetria (súmernosť) *vzoru* (vo všeobecnosti *symetria útvaru*) je euklidovská zhodnosť, ktorá zobrazuje vzor na seba samého. Existujú štyri možné typy symetrií vzoru: *translácia, rotácia, zrkadlenie* a *posunuté zrkadlenie*. Množina symetrií vzoru vytvára grupu nazývanú *grupa symetrií* vzoru.



Obr. 1 Symetrie písmen – veľké tlačené A *je symetrické podľa vertikálnej osi, písmeno* N *v rotácii o 180º okolo stredu „strednej priečky"; písmeno* H *má dve na seba kolmé osi symetrie a symetriou je aj rotácia o 180º okolo priesečníku týchto osí.*

Jednorozmerné grupy symetrií vzoru nazývame *frízové vzory* (je ich sedem), dvojrozmerný prípad *tapetové vzory* (je ich sedemnásť), 230 priestorových grúp sa nazýva *kryštalografické*[3]. V Tab. 1 je označenie pre rovinné grupy symetrií a ich stručný opis, Obr. 2 zobrazuje teselácie reprezentujúce jednotlivé rovinné grupy symetrií.

Kryštalografia používa rôzne symboly a zápisy na označenie grúp symetrie. Označenia z prvého stĺpca v Tab. 1 sú prevzaté z Medzinárodných tabuliek pre röntgenovú kryštalografiu[4], symboly sú nanajvýš štvorčlenné a skratky v označeniach majú nasledovný význam:

m – zrkadlenie podľa osi (mirroring in an axis), *g* – posunuté zrkadlenie (glide reflection), 1 – posunutie o jednotku (translation by one unit), 2, 3, 4, 6 – dvoj-, troj-, štvor-, šesť- násobná rotácia (2, 3, 4, 6- fold rotation), *p* – primitívna rovinná bunka (primitive cell), *c* – centrovaná rovinná bunka (centred lattice).

---

[1] Príspevok bol podporený grantom AV ČR IAA 100110502 a projektom AVOZ 10190503.

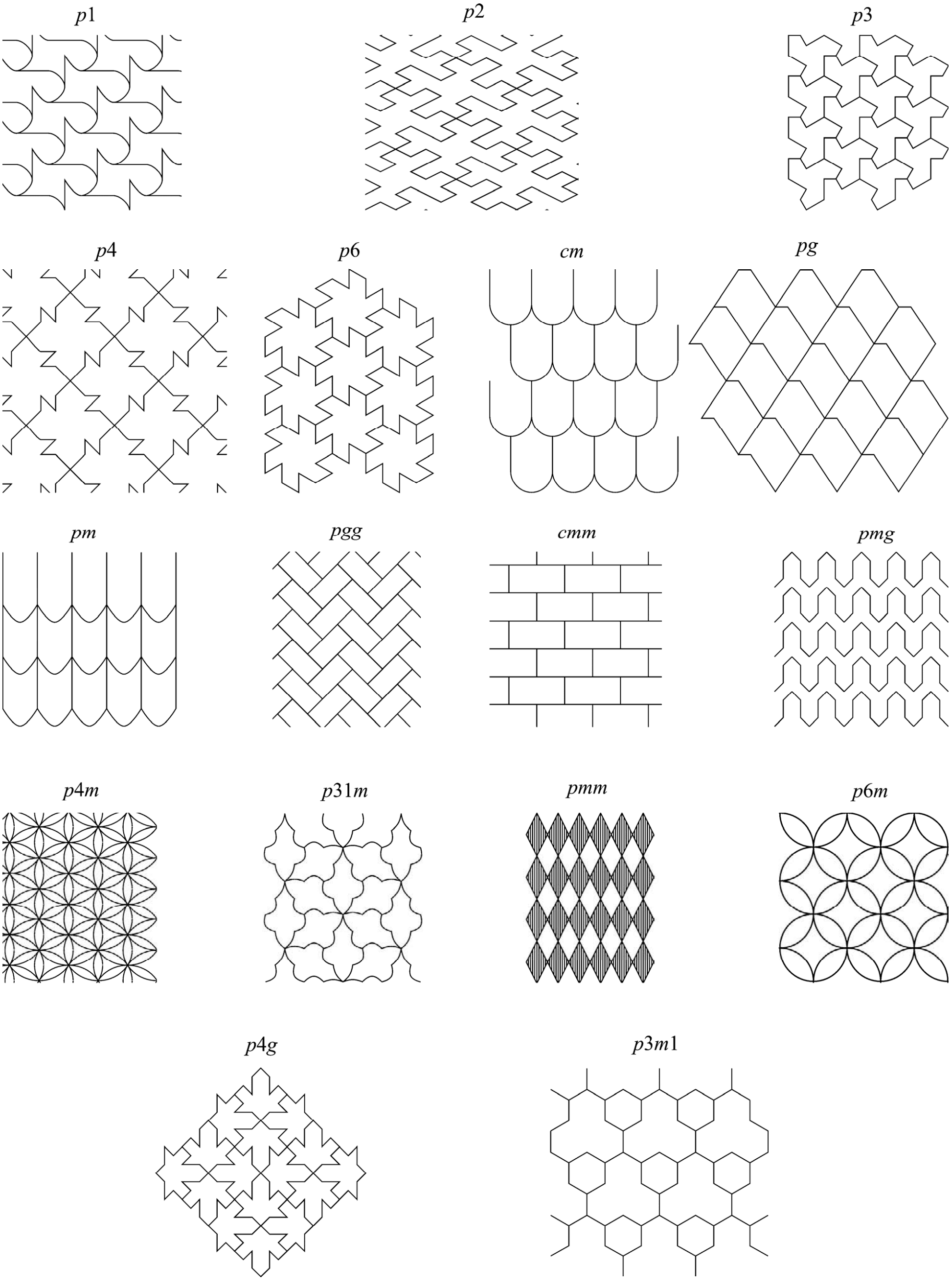
[2] Rovinná teselácia je vyplnením roviny útvarmi bez medzier a prekrytí.

[3] V anglickej literatúre sa používajú pojmy *frieze patterns, wallpaper patterns, crystallographic patterns.*

[4] Henry N. F. M., Lonsdale K.: *International Tables for X-Ray Crystallography.* Vol. 1, Kynoch Press, Birmingham, 1952.

Medzinárodné tabuľky pre RTG kryštalografiu	*Označenie podľa G. Pólya*	*Operácie*	*Časť generujúceho útvaru*
$p1$	C_1	2 translácie	1
$p2$	C_2	3 rotácie o 180º	½
pm	D_1kk	2 zrkadlenia a 1 translácia	½
pg	D_1gg	2 rovnobežné posunuté zrkadlenia	½
cm	D_1kg	1 zrkadlenie a 1 rovnobežné posunuté zrkadlenie	½
pmm	D_2kkkk	4 zrkadlenia na stranách rovnobežníka	¼
pmg	D_2kkgg	1 zrkadlenie, 1 posunuté zrkadlenie a 2 rotácie o 180º	¼
pgg	D_2gggg	2 kolmé posunuté zrkadlenia	¼
cmm	D_2kgkg	2 kolmé zrkadlenia a 1 rotácia o 180º	¼
$p4$	C_4	1 rotácia o 180º a 1 rotácia o 90º	¼
$p4m$	D_4*	3 zrkadlenia na stranách rovnoramenného (45º, 45º, 90º) trojuholníka	1/8
$p4g$	D_4^0	1 zrkadlenie a 1 rotácia o 90º	1/8
$p3$	C_3	2 rotácie o 120º	1/3
$p3m1$	D_3*	1 zrkadlenie na stranách rovnostranného trojuholníka	1/6
$p31m$	D_3^0	1 zrkadlenie a 1 rotácia o 120º	1/6
$p6$	C_6	1 rotácia o 180º, 1 rotácia o 60º a 1 rotácia o 120º	1/6
$p6m$	D_6	3 zrkadlenia na stranách pravouhlého (30º, 60º, 90º) trojuholníka	1/12

Tab. 1 Označenia jednotlivých grúp symetrií podľa Medzinárodných tabuliek pre röntgenovú kryštalografiu a podľa G. Pólyu (prvé dva stĺpce), a ich stručný opis (podľa [3], [12]).



Obr. 2 Sedemnásť dvojrozmerných grúp symetrií (podľa obrázkov G. Pólyu uvedených v [13]).

2 Rovinné grupy symetrií a kryštalografia

17 rovinných grúp symetrií sa vyskytuje už v starom Egypte, bohatými periodickými vzormi sa môžu pýšiť i ďalšie kultúry (perzská, maurská, ...); matematické skúmanie tejto problematiky sa datuje ale až oveľa neskôr. Zaujímavosťou je, že kompletnému určeniu počtu dvojrozmerných grúp symetrií predchádzalo vyriešenie počtu trojrozmerných kryštalografických grúp[5]. Ich odvodenie začína spisom M. E. C. Jordana[6] *Mémoire sur les groupes de mouvements*[7] a L. Sohnckem[8], ktorý v knihe *Entwickelung einer Theorie der Kristallstruktur*[9] odvodil 65 periodických diskrétnych grúp v priestore. V roku 1890 ruský kryštalograf J. S. Fjodorov[10] podal klasifikáciu všetkých grúp symetrií priestoru[11], o rok neskôr dané výsledky prezentoval aj Nemec A. M. Schönfliess[12] v pojednaní *Über Gruppen von Transformationen des Raumes in sich*[13]. Odvodili ich nezávisle na sebe; jeden geometrickými metódami, druhý s využitím algebraickej teórie grúp. Je zaujímavé, že ani jeden ich na začiatku nenašiel všetky (Fjodorov našiel 229 možných kombinácií častíc v kryštáloch, Schönfliess 227). Vďaka vzájomnej korešpondencii si navzájom svoje zoznamy doplnili a od tej doby sa počet kryštalografických grúp – 230 (je ich v podstate 219, z toho 11 zrkadlových párov, teda spolu 230) – nezmenil (viď [4, 10]). Fjodorovove a Schönfliessove výsledky boli dlho chápané len ako matematická zábava bez vzťahu k realite. Až v roku 1912 M. von Laue[14] so svojimi spolupracovníkmi objavil difrakciu röntgenových lúčov na kryštáloch, ktorá experimentálne overila teóriu symetrií kryštálov.

V roku 1891 J. S. Fjodorov dokázal [15], že každá rovinná symetrická teselácia (a každý periodicky opakujúci sa vzor) môže byť podľa spôsobu opakovania vzoru zaradená do jednej zo sedemnástich grúp symetrií. Tento problém však zamestnával radu vedcov už

---

[5] Z mnohých odkazov na internete ponúkajúcich prehľad dôležitých príspevkov v kryštalografii odporúčam [9].

[6] Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922), francúzsky matematik, známy svojimi prácami v algebre a pri budovaní teórie grúp.

[7] Jordan C.: *Mémoire sur les groupes de mouvements.* Ann. Mat. Pur. App. (2) 2 (1868/1869), 167–215 a 322–345.

[8] Leonhard Sohncke (1842–1897), nemecký fyzik, nasledovník Johna von Neumanna (1798–1859), ktorý bol význačným expertom fyziky kryštálov z Königsbergu.

[9] Sohncke L.: *Entwickelung einer Theorie der Kristallstruktur*. Teubner, Leipzig, 1879.

[10] Jevgraf (Evgraf) Stepanovič Fjodorov (1853–1919), ruský kryštalograf. Svoju prvú monografiu *Načala Učenija o Figurach* začal písať už v 16-tich rokoch (je považovaná za jednu z najhlbších monografií o elementárnej geometrii), v mladosti bol organizátorom ilegálnych socialistických novín *Načala*. 10 rokov pracoval pre geologickú komisiu, kde vytvoril geologické mapy severozápadného Ruska (vyvinul všeobecnú teodolickú metódu pre mineralógiu a petrológiu). Vystúpil s mnohými príspevkami pred St. Petergburskou mineralogickou spoločnosťou, tie vychádzali v ich zborníku. 230 kryštalografických grúp sa v Rusku tiež označuje ako Fjodorovove grupy.

[11] Фёдоров Е. С.: *Симметрия правильных систем фигур*. Записки Минералогического Общества (2), 28 (1891), 1–146. (Napriek tomu, že články Fjodorovova i Schönfliessa o kryštalografických grupách sú z roku 1891, podľa [4] Fjodorov všetky grupy skompletizoval trošku skôr.)

[12] Arthur Moritz Schönfliess (1853–1928), nemecký matematik. Po ukončení štúdia matematiky v Berlíne pôsobil ako stredoškolský učiteľ; počas tohoto obdobia pokračoval vo svojej vedeckej práci, čo ho priviedlo až k miestu profesora aplikovanej matematiky v Göttingene. Tam sa zaoberal geometrickými vlastnosťami stupňov voľnosti tuhého telesa, čím nadviazal na výskumy M. E. C. Jordana spred 20 rokov a L. Sohnckeho spred 10 rokov.

[13] Schönfliess A. M: *Über Gruppen von Transformationen des Raumes in sich.* Kristallsystems und Kristallstruktur, Teubner, Leipzig, 1891.

[14] Max von Laue (1879–1960), nemecký fyzik, v roku 1914 získal Nobelovu cenu za objav difrakcie röntgenových lúčov na kryštáloch.

[15] Фёдоров Е. С.: *Симметрия на плоскости.* Записки Минералогического Общества (2), 28 (1891), 345–390.

pred ním; Fjodorovova tabuľka ukazuje, že 16 z týchto 17 grúp opísal už v roku 1869 M. E. C. Jordan, 14 grúp L. Sohncke o päť rokov neskôr, viď [2]. Fjodorovove príspevky o rovinných grupách symetrií boli napísané v ruštine, a tak klasifikáciu rovinných grúp symetrií spopularizovali až George Pólya (1887–1985) a P. Niggli[16] v roku 1924 svojimi článkami[17] zaoberajúcimi sa tapetovými vzormi a kryštálovými štruktúrami.

Po mnohých rokoch úsilia bolo pomocou počítačov zistené, že v štvorrozmernom priestore existuje 4783[18] kryštalografických grúp (z toho 112 sa rozdeľuje zrkadlovo). Počet grúp v päťrozmernom priestore doteraz nie je známy, ale je konečný podľa viet Bieberbacha[19] (1910) a Frobenia[20] (1911) (viď [6, 15]). Teóriu rovinných grúp symetrií rozšírili v roku 1951 A. V. Šubnikov a N. V. Belov[21] kombináciou periodického opakovania tvarov s periodickým opakovaním farieb. Táto tzv. *polychromatická symetria* dopĺňa 17 rovinných grúp o ďalších 46 dvojfarebných, 6 trojfarebných, 6 štvorfarebných a 3 šesťfarebné (viď [2]).

3 Rovinné grupy symetrií, Alhambra a M. C. Escher

Pravdepodobne jedným z najznámejších príkladov výskytu tapetových vzorov je Alhambra[22] v španielskej Granade. Je výsledkom vplyvu viacerých moslimských panovníckych rodov a práce mnohých staviteľov i umelcov, ktorí jej vtlačili osobitý šarm. Po navrátení vlády do kresťanských rúk v roku 1492 sa Alhambra na nejaký čas stala kresťanským palácom (svojím pôvabom očarila panovnícky pár Ferdinanda a Izabelu), potom schátrala a stala sa z nej ruina. Až v 19. storočí ju „znovuobjavili“ romantickí cestovatelia a básnici. Následné nesprávne zvolené a prevedené reštaurátorské práce spolu s vandalským správaním niektorých turistov a ďalšie negatívne vplyvy (niekoľkokrát zemetrasenie, požiar, výbuch skladu strelného prachu a vojny) zanechali na Alhambre nenapraviteľné škody. Napriek tomu je to jedna z najzaujímavejších pamiatok maurskej architektúry a umenia na európskom kontinente.

[16] Paul Niggli (1888–1953), švajčiarsky kryštalograf, zaviedol systematický prístup do štúdia kryštálov použitím röntgenových lúčov.

[17] Polya G.: *Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene.* Zeitschrift für Kristallographie, 60, 1924, 278–282. Niggli P.: *Die Flächensymmetrien homogener Diskontinuen.* Zeitschrift für Kristallographie, 60, 1924, 283–298. V niektorých zdrojoch (napr. [8]) sa uvádza nesprávne tvrdenie, že práve G. Pólya je autorom klasifikácie rovinných grúp symetrií.

[18] Brown H., Bülow R., Neubüser J., Wondratschek H., Zassenhaus H.: *Crystallographic Groups of Four-Dimensional Space.* Wiley, New York, 1978.

[19] Ludwig Georg Elias Moses Bieberbach (1886–1982), nemecký matematik, jeho dizertačná práca (1911) na tému grupy euklidovských pohybov predstavovala dôležitý krok k vyriešeniu 18. Hilbertovho problému.

[20] Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917), nemecký matematik, známy svojimi prácami v teórii diferenciálnych rovníc, teórii grúp a čísel.

[21] Alexej Vasiljevič Šubnikov (1887–1970), Nikolaj Vasiljevič Belov (1891–1982), ruskí kryštalografi, venujúci sa teórii farebnej symetrie a antisymetrie.

[22] Alhambra (názov má arabské korene z „al-Hamrá“, čo znamená červená pevnosť alebo zámok; podľa rozprávania bola Alhambra stavaná pri svetle fakieľ a ich odraz dodal stenám ich jedinečné zafarbenie) bola sídelným a správnym komplexom nasrovskej dynastie (jej zakladateľ Muhammad I. Ibn al-Ahmar (1203–1273) získal moc v Granade okolo roku 1238). Vo vnútri Alhambry sa nachádzalo 6 palácov, kasáreň, veľká mešita a malé mestečko, zoologická záhrada, voliéra a priemyslové dielne; všetko zaberalo plochu približne 14 hektárov a odhadom tu mohlo žiť asi až 40 tisíc ľudí. Preto arabské zdroje Alhambru označujú ako „madína“ = mesto a nie „kasr“ = palác (viď napríklad [8]).

Použitie tapetových vzorov je významným rysom abstraktnej dekorácie Alhambry. Nachádzajú sa na dekoráciách podláh, stien, stropov, ale i zachovaných látkach[23] a nábytku. Často sa uvádza tvrdenie, že v Alhambre je možné nájsť všetkých 17 rovinných grúp symetrie. Ako to ale naozaj je? E. A. Müllerová[24]. ako prvá zisťovala, ktoré zo 17 grúp symetrií sa vyskytujú na ornamentoch v Alhambre. Vo svojej dizertačnej práci z roku 1944 *Gruppentheoretische und Strukturanalytische Untersuchungen der Maurischen Ornamente aus der Alhambra in Granada*[25] zdokumentovala výskyt 12 tapetových vzorov medzi ornamentami v Alhambre[26]. Postupne ďalší autori predkladali príklady z alhambrskej výzdoby reprezentujúce jednu alebo viacero príkladov rovinných grúp symetrií, niektorí ale prišli s tvrdením o výskyte všetkých grúp. Vďaka preberaniu informácií bez ďalšieho detailnejšieho skúmania sa toto tvrdenie veľmi rozšírilo.

V roku 1987 vyšla kniha J. M. Montesinosa *Classsical Tessellations and Three-Manifolds*[27]. V jednej jej časti sú fotografie ornamentov – vzorov z Alhambry, a autor tvrdí, že dokazujú výskyt všetkých 17 grúp symetrií. Podľa B. Grünbauma[28] [7], J. M. Montesinos považuje za symetriu všetko, čo našiel ako vhodné, v knihe sa ale nenachádza vymedzenie pojmu ornament, autor niekedy berie do úvahy aj farby dlaždíc, inokedy si farebnosť nevšíma, nie je vysvetlené, aká veľkosť, resp. rozsah ornamentu je dostatočný na to, aby reprezentoval niektorú z grúp (niekedy je príkladom celá teselácia alebo jedna vyzdobená dlaždica, inokedy je to detailná časť ornamentu). Počas návštevy v roku 1983 B. Grünbaum skúmal dekorácie v Alhambre a našiel reprezentantov 12 tapetových vzorov od E. A. Müllerovej a jedného, ktorý sa v jej práci nenachádzal[29]. A tak dvojica autorov B. Grünbaum a G. C. Shephard [5] tvrdí, že v Alhambre sa vyskytuje 13 zo 17 tapetových vzorov, dve zo štyroch ďalších chýbajúcich grúp symetrií boli nájdené v španielskom Tolede a pochádzajú približne z toho istého obdobia (*p*3 bola nájdená v kostole, *p*3*m*1 v synagóge). Autori upozorňujú na to, že je pravdepodobné, že zostávajúce dve grupy (*pg* a *pgg*) sa v islamskom umení nevyskytujú vôbec, a že na jeho opis je okrem geometrických tvarov a ich opakovania dôležité sledovať i farebné zmeny alebo vzory prepletania. Preto, aby bolo možné určiť presný počet grúp symetrií vyskytujúcich sa v Alhambre, je potrebné určiť jednoznačné pravidlá, na základe ktorých by sa hľadali jednotliví reprezentanti.

Práve krásami Alhambry a bohatosťou abstraktných geometrických vzorov maurského umenia sa nadchýnal Mauritius (Mauki) Cornelis Escher (1889–1972).

---

[23] Značný počet látok, ktoré pôvodne zdobili Alhambru, sa zachoval dodnes (väčšina je umiestnená v múzeu Alhambry). Z doby pred nástupom Nasrovcov na trón sa na kobercoch a látkach ešte objavujú figuratívne motívy, nasrovský hodváb sa už vyznačuje prísnymi geometrickými dekoráciami.

[24] Edith Alicia Müllerová (1918–1995), napriek svojim matematickým začiatkom sa stala veľmi známou astronomičkou. V liste z roku 1984 spomenula, že pretrváva jej záujem o tému z dizertačnej práce a plánuje ju znovu publikovať; k tomu ale už nedošlo (viď [7]).

[25] Müller E. A: *Gruppentheoretische und Strukturanalytische Untersuchungen der Maurischen Ornamente aus der Alhambra in Granada*. PhD. thesis, Universität Zürich, Baublatt, Rüschlikon, 1944. Prácu písala pod vedením Andreasa Speisera (študent D. Hilberta), ktorý napísal v roku 1922 text o teórii grúp spojených s výskumom grúp symetrií v ornamentoch a ilustruje to niekoľkými vzormi zo starovekého Egypta.

[26] Podľa [10] E. A. Müllerová našla 11 grúp, o ďalšie dve zoznam rozšíril H. S. M. Coxeter.

[27] Montesinos J. M.: *Classsical Tessellations and Three-Manifolds.* Springer, New York, 1987. Autor José Maria Montesinos – Amibilia pracuje na katedre geometrie a topológie na univerzite Complutense v Madride.

[28] Branko Grünbaum (1929), americký matematik chorvátskeho pôvodu, pracuje na Univerzite Washington v Seattli. Je autorom viac než 200 článkov (najmä z oblasti diskrétnej matematiky), spoluautor jednej z najrozsiahlejších a najkomplexnejších prác k téme *Tilings and Patterns* [6].

[29] Podľa fotografií a obrázkov v prácach [6] a [7] hľadá Grünbaum reprezentantov medzi teseláciami, resp. dlaždicami tvoriacimi teselácie.

Prvýkrát toto miesto navštívil v roku 1922, a mnohé zo vzorov použil už v tom období v svojich prácach. Kvôli časovej náročnosti a ich nízkej kvalite bol v začiatkoch znechutený, výsledkom však bolo niekoľko teselácií vyznačujúcich sa symetriami. V roku 1936 Escher navštívil Alhambru po druhýkrát už so svojou manželkou Jettou; počas niekoľkodňového pobytu pár urobil veľké množstvo skíc, ktoré sa stali Escherovým dlhodobým zdrojom inšpirácie. V roku 1936 ho nevlastný brat Beer[30] upozornil na súvislosť medzi teseláciami a kryštalografiou a odporúčal mu pozrieť *Zeitschrift für Kristallographie*. O pár dní neskôr mu Beer poslal zoznam desiatich článkov k problematike, všetky boli napísané v nemčine a publikované v spomínanom časopise. Väčšina z nich bola príliš odborná pre laikov, ale jeden z nich aj tak zaujal Eschera. Bol to už spomínaný článok Georgea Pólyu o 17 rovinných grupách symetrií. Pólyovým prínosom bola najmä celostránková ilustrácia s príkladmi teselácií pre každú zo 17 grúp symetrií; trinásť z nich boli klasicky známe, štyri vytvoril sám (Obr. 2). Escher študoval tieto teselácie, aby pochopil ich geometrickú štruktúru, t.j. vzájomné usporiadanie jednotlivých ciel a uvažoval, aj o tom ako môžu byť tieto teselácie vyfarbené minimom farieb tak, aby to bolo kompatibilné so symetriami teselácie. Napriek vážnemu záujmu Eschera o kryštalografickú literatúru mu ale použité systémy a označenia nevyhovovali. Preto si vypracoval vlastný systém, ktorý opísal v 40-stránkovej knihe s farebnými ilustráciami vydanej v roku 1958 pod názvom *Regelmatige Vlakverdeling*[31] [Pravidelné delenie roviny].

Escher nakreslil v svojich náčrtníkoch 137 periodických vzorov[32], pričom sa zameral na grupy neobsahujúce zrkadlenie (viď [14]). Okrem toho pracoval aj s farebnou symetriou. Dvojfarebnú symetriu (alebo tiež antisymetriu) používal už na začiatku svojej tvorby, v matematike sa objavila až na konci 20-tych a v polovici 30-tych rokov; vzory s troj- a štvorfarebnou symetriou vytvoril Escher na konci 30-tych rokov, matematici začali štúdium *n*-farebnej symetrie až v 50-tych rokoch. Takže je možné povedať, že Escher bol v tejto oblasti pionierom.

Escher sa priatelil s viacerými matematikmi (okrem G. Pólyu[33] napríklad i s H. S. M. Coxeterom), navzájom obdivovali a vážili si svoju prácu, v jeho dielach je vidieť vplyv plodnej diskusie s matematikmi ako napríklad boli R. Penrose alebo kryštalografička C. H. MacGillavryová[34]. Escher o sebe povedal: „Hoci nemám žiadne vzdelanie v exaktných vedách, často sa mi zdá, že mám viac spoločného s matematikmi ako s mojimi kolegami – umelcami“ [1; str. 55].

---

[30] Berend (Beer) G. Escher, profesor geológie, paleontológie a kryštalografie na univerzite v Leidene. Escherov otec o reakcii Beera na bratove teselácie napísal: „Beer v tom videl viac ako som si myslel, videl spojenie s problémami z kryštalografie; to potešilo M. veľmi [1; str. 56]“.

[31] Táto esej bola napísaná na požiadanie súkromného vydavateľstva De Roos Foundation. (Text je možné nájsť v anglickom preklade v [1, str. 156–172]).

[32] Mnohé z týchto teselácií je možné nájsť na oficiálnej stránke spoločnosti M. C. Eschera v sekcii Picture Gallery (www.mcescher.com). Náčrtníky sú v anglickej literatúre spomínané ako „regular division drawings notebooks“.

[33] V novembri 1937 Escher získal od svojho brata adresy matematikov, ktorým si prial napísať o svojej práci. V zozname bola adresa G. Pólyu ako prvá, ďalej boli spomenutí P. Niggli a A. Speiser.

[34] Caroline Henriette MacGillavryová (1904–1993), profesorka kryštalografie na Amsterdamskej univerzite, autorka knihy *Symmetry aspects of M. C. Escher's periodic drawings* (Oosthoek, Utrecht, 1965), ktorá obsahuje viac než 40 umelcových prác a výklad vysvetľujúci kryštalografické súvislosti (pôvodne bola kniha publikovaná pre Medzinárodnú kryštalografickú úniu, používala sa ale aj ako učebnica pre študentov). Na pamiatku C. H. MacGillavryovej sa udeľuje štipendium v oblasti prírodných vied pre doktorandov pochádzajúcich z Južnej Afriky.

Literatúra

[1] Bool F. H., Ernst B., Kist J. R., Locher J. L., Wierda F.: *Escher. The Complete Graphic Work.* Thames & Hudson, New York, 2000.

[2] Coxeter H. S. M.: *Introduction to Geometry.* J. Wiley & Sons, New York, 1989.

[3] Darvas G.: *Symmetry* (*Cultural-historical and ontological aspects of science-arts relations*). Birkhäuser, Berlin, 2007.

[4] Galiulin R. V.: *To the 150th Anniversary of the Birth of Evgraf Stepanovich Fedorov (1853–1919).* Crystallography Reports 48(2003), 965–980.

[5] Grünbaum B., Shephard G. C.: *Symmetry in Moorish and other ornaments.* Computers and Mathematics with Applications 12B (1986), 641–653.

[6] Grünbaum B., Shephard G. C.: *Tilings and Patterns.* W. H. Freeman and Company, New York, 1987.

[7] Grünbaum B.: *What Symmetry Groups Are Present in the Alhambra?* Notices of the AMS 53(2006), 670–673.

[8] Irwin R.: *Alhambra.* BB/art, Praha, 2004.

[9] Joyce D. E.: *History of crystallographic groups and related topics.* Copyright 1997 [citované 6. 6. 2008].

http://www.clarku.edu/~djoyce/wallpaper/history.html

[10] Levitin K.: *Geometrická rapsódie.* SNTL, Praha, 1991.

[11] Pérez-Gómez R.: *The Four Regular Mosaics Missing in the Alhambra.* Comput. Math. Applic. 14(1987), 133–137.

[12] Schattschneider D.: *The Plane symmetry groups: their recognition and notation.* Amer. Math. Monthly 85(1978), 439–450.

[13] Schattschneider D.: *The Pólya-Escher Connection.* Mathematics Magazine 60(1987), 293–298.

[14] Schattschneider D.: *Visions of Symmetry: Notebooks, Periodic Drawings, and Related Work of M. C. Escher.* W. H. Freeman, New York, 1990.

[15] Schulte E.: *Tilings.* In: Gruber P. M., Wills J. M. (eds.): Handbook of Convex Geometry. Vol. B, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1993, 899–932.

Adresa

RNDr. Lucia Ilucová
Matematický ústav
Akademie věd České republiky
Žitná 25
110 00 Praha 1
e-mail: *ilucova@gmail.com*

LEONARDO PISÁNSKÝ – LIBER ABACI

MARTINA JAROŠOVÁ

1 Leonardo Pisánský – Fibonacci

Leonardo Pisánský – nejvýznamnější matematik středověké Evropy. Je znám spíše pod svojí přezdívkou Fibonacci, též Leonardo z Pisy (také Filius Bonacci, tj. syn Bonacciův). Přesné časové vymezení jeho života neznáme. Narodil se v Pise kolem roku 1170 a zemřel zřejmě roku 1240.

Fibonacci sepsal několik významných matematických spisů:

- *Liber abaci* – Kniha o abaku; z roku 1202, přepracována roku 1228.
- *Practica geometriae* – Praxe geometrie; vydána v roce 1221.
- *Flos* – Květ; z roku 1225.
- *Epistola suprascripti Leonardi ad Magistrum Theodorum phylosophum domini Imperatoris* – Dopis podepsaného Leonarda Mistru Theodorovi, císařskému filozofovi; nedatováno.
- *Liber quadratorum* – Kniha čtverců; vydána v roce 1225.

Nedochovala se bohužel Fibonacciho kniha o obchodní aritmetice ani jeho traktát o iracionalitách.

Fibonacci shromáždil a uspořádal obrovské množství poznatků, postupů i úloh. Čímž přispěl k rozvoji matematického myšlení v Evropě.

2 Liber Abaci

Liber Abaci (Kniha o abaku) – kniha má poněkud matoucí název, poněvadž nepopisuje počítání na abaku, nýbrž uvádí velké množství početních metod aritmetiky, algebry a teorie čísel a řadu demonstrujících příkladů. Obsahuje 15 kapitol a 459 stran.

Liber Abaci byla inspirativním dílem a svou rozmanitostí a úplností překonala úroveň ostatních matematických spisů 12. – 14. století.

Ve druhém rozšířeném vydání této knihy se ve dvanácté kapitole poprvé objevila zajímavá *úloha o králících*, jejímž řešením je posloupnost, kterou Édouard Lucas[1] ve druhé polovině 19. století poprvé nazval *Fibonacciho posloupností*.

3 Rozbor úloh

3.1 Fibonacciho řešení úloh

V této podkapitole ukážeme, jak Fibonacci řešil úlohy pomocí matematických prostředků své doby. Například uvedeme úlohu o čtyřech mužích s denáry.

O čtyřech mužích s denáry – překlad úlohy z [5]

Máme čtyři muže, přičemž první, druhý a třetí dohromady vlastní 27 denárů. Druhý, třetí a čtvrtý muž mají dohromady 31 denárů. Potom třetí, čtvrtý a první muž vlastní dohromady 34 denárů. A pak ještě čtvrtý, první a druhý muž mají v součtu 37 denárů. Vypočtěte kolik denárů vlastní jednotliví muži.

[1] *Édouard Lucas* (1842–1891), francouzský matematik, jenž je znám především svými výsledky z teorie čísel.

Fibonacciho řešení úsudkem

Když sečteme všechna tato čtyři čísla dohromady, získáme číslo 129, které je trojnásobkem celkového součtu denárů všech 4 mužů. V tomto součtu je tedy obnos denárů každého muže započítán třikrát. Proto obnos vydělíme třemi a získáme číslo 43, což je počet všech denárů. Z tohoto součtu budeme odečítat nejprve denáry prvního, druhého a třetího muže, tedy 27, čímž nám zůstane 16 denárů pro muže čtvrtého. Obdobně, jestliže od 43 denárů odečteme 31 denárů druhého, třetího a čtvrtého muže, získáme 12 denárů pro muže prvního. Opět, pokud odečteme ze 43 denárů 34, tedy denáry třetího, čtvrtého a prvního muže, pak zůstane 9 denárů pro muže druhého. A konečně, jestliže odečteme od 43 denárů 37 denárů čtvrtého, prvního a druhého muže, zůstane nám 6 denárů pro muže třetího. Tedy 12 denárů prvního muže přičtených k 9 denárům druhého muže a k 6 třetího a k 16 denárům čtvrtého muže bezpochyby přináší již zmíněných 43 denárů v součtu.

Rozbor úlohy pomocí současných matematických prostředků

Označme písmeny *a*, *b*, *c*, *d* počty denárů jednotlivých mužů. Úlohu pak můžeme přepsat do soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} a + b + c \phantom{{}+d} &= 27 \\ b + c + d &= 31 \\ a + \phantom{b+{}} c + d &= 34 \\ a + b + \phantom{c+{}} d &= 37 \end{aligned}$$

Koeficienty u proměnných *a*, *b*, *c*, *d* a absolutní členy z pravých stran rovnic zapíšeme pomocí rozšířené matice soustavy. Přidáme součet všech řádků, jež nemění množinu řešení:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 31 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 34 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 37 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 3 & 129 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 31 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 34 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 37 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 43 \end{array}\right)$$

Následnými elementárními řádkovými úpravami získáváme:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 31 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 34 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 37 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow \quad a = 12$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 31 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 34 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 37 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right) \Rightarrow \quad b = 9$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 31 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 34 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 37 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \quad c = 6$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 31 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 34 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 37 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 16 \end{array}\right) \Rightarrow \quad d = 16$$

3.2 Jak lze úlohu řešit dnes?

Obdobně označíme písmeny *a*, *b*, *c*, *d* počty denárů jednotlivých mužů a opět vycházíme ze soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} a + b + c \phantom{{}+d} &= 27 \\ b + c + d &= 31 \\ a + \phantom{b+{}} c + d &= 34 \\ a + b + \phantom{c+{}} d &= 37 \end{aligned}$$

K výpočtu soustavy lineárních rovnic využijeme Gaussovu eliminační metodu. Koeficienty u proměnných *a*, *b*, *c*, *d* a absolutní členy z pravých stran rovnic opět zapíšeme pomocí rozšířené matice soustavy a matici převedeme do schodovitého tvaru:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 31 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 34 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 37 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 31 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 31 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 38 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 31 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 16 \end{array}\right)$$

Po konečném počtu ekvivaletních řádkových úprav jsme získali matici ve schodovitém tvaru. Soustava lineárních rovnic má tedy jedno řešení:

$$\begin{aligned} d &= 16 \\ c &= 6 \\ b &= 9 \\ a &= 12 \end{aligned}$$

Literatura

[1] Bečvář J.: *Leonardo Pisanský – Fibonacci*. In Matematika ve středověké Evropě, Dějiny matematiky, svazek 19, Prometheus, Praha, 2001, 264–339.

[2] Koshy T.: *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.

[3] Knott R.: *Who was Fibonacci?* [online]. 1996 – 2008. Poslední revize 21. listopadu 2007 [cit. 09.06.2008].

http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibBio.html.

[4] Nicholson W. K.: *Elementary Linear Algebra with Applications*. PWS-KENT Publishing Company, Boston, Second Edition, 1990.

[5] Sigler L. E.: *Fibonacci's Liber Abaci*. Springer Verlag, New York, 2002.

[6] Vorobiev, N. N.: *Fibonacci Numbers*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.

[7] Wikipedia (The free encyclopedia): *Liber Abaci*. [online]. Poslední revize 11. května 2008 [cit. 09.06.2008].

http://en.wikipedia.org/wiki/Liber_Abaci.

Adresa

RNDr. Martina Jarošová
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity
Janáčkovo náměstí 2a
602 00 Brno
e-mail: *mjarosov@math.muni.cz*

FERMAT MĚL NÁSTROJE K DŮKAZU VĚT!?

JOSEF JEŽEK

1 Úvod

Z Fermatovy pozůstalosti, kterou světu předložil jeho prvorozený syn Clément Samuel, se dozvídáme, že: *„**Krychli nerozdělíš na dvě menší**“*. Ptejme se: „Existoval v první polovině sedmnáctého století matematický aparát pro podání důkazu k Velké Fermatově větě?“ Tento příspěvek se nesnaží dokázat, že Fermat důkaz opravdu podal a ten se ztratil (viz [1]). Spíše se zamýšlí s odstupem 370ti let nad tím, jestli jsme my všichni po Fermatovi, během této poměrně dlouhé doby, nepřehlédli nějaký detail, světélko, skulinku či náznak k jejímu řešení. V mém rodném kraji se už dlouhá desetiletí používá ke štípání žuly obyčejné vody.

Toto téma se od roku 1994 stalo pro odbornou veřejnost nezajímavým, neboť tehdy pan Andrew Wiles přednesl důkaz *„Velké domněnky“* pomocí eliptických funkcí metodou využití Kolyvaginova-Flachova porovnávání množin a dalšími nástroji moderní matematiky (viz [2]). Neznám nikoho, kdo by se v současné době intenzívně zabýval tímto problémem. Pokusme se v úvahách vystačit s nástroji, které Fermat zcela jistě měl k dispozici. Byly to elementární poznatky z kombinatoriky a teorie pravděpodobnosti, na níž s Pascalem dle dochované korespondence spolupracoval. Dále znal kanonický rozklad čísla. Operoval s polynomy a obecnými mocninami. A v neposlední řadě on to byl, kdo se podílel na výstavbě základů „*Teorie čísel*“. Zabýval se například „*Dokonalými čísly*“, „*Magickými čtverci*“, nezávisle zpracovával základy analytické geometrie (viz [3]).

2 Nové výsledky

Připomeňme, že Fermat přišel s tříděním prvočísel na „součtová“ a ta ostatní. Ze starověku, od Euklida, také věděl, že každé liché číslo se dá vyjádřit jako rozdíl dvou druhých mocnin sousedních přirozených čísel, a proto i pythagorejských trojic čísel že je neomezeně mnoho. Dále pak věděl, že jakákoliv přirozená mocnina sudého čísla je číslo sudé a jakákoliv přirozená mocnina lichého čísla je číslo liché. A tato informace mohla být rozhodující pro jeho výrok. Kvalita přirozeného, potažmo celého čísla, se nemění s jeho přirozenou mocninou. Ale o to právě jde. Když si napsal *Velkou domněnku*: $\mathbf{C^N = A^N + B^N}$, pak se mohl ptát, jaké kvality mohou být tři celá čísla (A; B; C) s přirozeným exponentem (N). Pokud si to tehdy řekl, pak nastal průlom v hledání odpovědi. Ze tří zdánlivě relevantních kvalitativních uspořádání zbývá pouze jediné. **Sudé s lichým dává liché**. Zbývající dvě jsou nepoužitelná. Sudé se sudým dá sudé, ale takové uspořádání lze krátit. Dostaneme buď výše zmíněné, nebo takové, kdy liché s lichým dá sudé. Toto uspořádání je však zdrojem iracionality. Vede ke sporu se zadáním. Zadání znělo, zda existují tři celá čísla.

Fermat zajisté věděl, že krychli lze rozdělit na tři menší krychle, ale takový cíl si nezadal. Mohl jej však utvrdit v tom, že schéma rozpadu třetí a vyšší mocniny celého čísla na dvě mocniny celých čísel musí respektovat hlavní logickou cestu. A ta byla v předchozím odstavci vyslovena. Po úvodní a zásadní úvaze už mohl nastoupit jeho počtářský talent. Seskupením dvou lichých čísel na jednu stranu rovnice, přičemž na straně druhé zůstalo osamocené číslo sudé, by si mohl uvědomit, že každé liché číslo představuje binom, tvořený složkou sudou (2n) a složkou lichou, nejlépe jednotkou (1). Obecný rozvoj binomu s exponenty i koeficienty nám zanechal jeho mladší přítel Blaise Pascal.

Pokud by se dopracoval až sem, pak pro liché N by viděl, že je zde spor. Na jedné straně rovnice je evidentně sudé číslo, na druhé straně liché číslo. Pokud by se sudost rovnala lichosti, pak bychom už tuto matematickou ránu nikdy nezhojili. Krychli nelze rozdělit na dvě menší krychle. Pátou, sedmou, devátou a další lichou mocninu také nelze rozdělit na dvě páté, sedmé, deváté. Zůstal by mu však ještě nevyřešený problém. Jak naložit s mocninou sudou. A tady by musel sebrat všechny obecné poznatky o práci s polynomy obecného stupně, binomickými koeficienty a práci s exponenty shodných základů.

3 Závěr

Zdá se mi, že za určitých okolností by Fermat mohl podat důkaz ke své poznámce na širokém okraji francouzského překladu Diofantovy aritmetiky, ale z dalších jeho prací a pozdějších snah to však není patrné. Spíše se zdá, že se vydal cestou počtářskou než logickou.

Jsem však přesvědčen, že Wilesovo řešení Velké Fermatovy domněnky není jediné možné a že se najde i řešení jednodušší a kratší. Takovéto řešení však musí prokázat, že platí obecně i pro N = 1 a N = 2 (pro všechny pythagorejské trojice celých čísel). Co když právě dvojka, nositelka sudosti, je tou vodou co štípe skály velkých neřešitelných problémů.

Literatura

[1] Teresi D.: *Ztracené objevy*. Albatros, Praha, 2004.

[2] Singh S.: *Velká Fermatova věta.* Academia, Praha, 2002.

[3] Lepka K.: *Historie Fermatových kvocientů (Fermat – Lerch).* Edice Dějiny matematiky, svazek č. 14, Prometheus, Praha, 2000.

Adresa

Ing. Josef Ježek
Jevan sdružení
Nádražní ulice 331
584 01 Ledeč nad Sázavou
e-mail: *jezek.josef@iex.cz*

GEORGES-LOUIS LECLERC DE BUFFON

ANNA KALOUSOVÁ

1 Úvod

Georges-Louis Leclerc de Buffon je považován za zakladatele geometrické pravděpodobnosti, i když nebyl prvním, kdo geometrii pro výpočet pravděpodobnosti nějakého jevu použil. Jeho úlohy byly dále zobecňovány a staly se základem tohoto odvětví. Buffon se věnoval matematice především v mládí, později se začal více zajímat o botaniku a přírodu vůbec. Je autorem rozsáhlé (44 svazků, z nichž 8 vyšlo až po jeho smrti) encyklopedie *Histoire naturelle générale et particullière*, ve které shrnul všechno tehdejší poznání o přírodě a své názory na vznik Země a života na ní.

Od jeho narození uplynulo vloni již 300 let, přesto je stále připomínán. Jedním z důvodů je jistě jeho dlouhověkost a to, že si až do pozdního věku udržel intelektuální i fyzickou svěžest. Dalším důvodem je obrovská šíře jeho zájmů – byl matematikem, přírodopiscem, spisovatelem, filosofem, správcem, finančníkem, stavitelem, lesníkem, majitelem hutí a neúnavným experimentátorem. Ve všech těchto činnostech byl úspěšný.

2 Jak šel život

2.1 Dětství a mládí

Narodil se 7. 10. 1707 v burgundském městečku Montbard jako první syn Benjamin-François Leclerca, presidenta solné komory, a Anne-Christine Marlin. Jméno Georges získal po svém kmotrovi, matčinu bezdětném strýci Georges Blaisotovi, výběrčím daní savojského vévody, jméno Louis po svém dědovi Louis Leclercovi, královském prokurátorovi. V průběhu následujících pěti let přibyly v rodině další čtyři děti.

V roce 1714 zemřel Georges Blaisot a o tři roky později i jeho manželka. Otec Benjamin-François za zděděné peníze koupil *terre de Buffon*, malou vesničku ležící šest kilometrů severně od Montbard. Koupil si také úřad generálního komisaře jízdní policie, který o tři roky později opět prodal a koupil si úřad poradce v burgundském parlamentu. Rodina se proto odstěhovala do Dijonu. Zde mladý Georges-Louis studoval na jezuitské *Collège des Godrans*. V této době prý sám odvodil binomickou větu. V roce 1723 se na přání otce zapsal na dijonskou právnickou fakultu. Jakmile však v roce 1726 získal *licence de droit*, opustil přes odpor rodiny práva i soudnictví a začal se věnovat vědě. V roce 1727 napsal první dopis Gabrielu Cramerovi (1704–1752), který, ač jen o několik let starší, byl již v Ženevě profesorem. Odešel do Angers studovat medicínu, četl Newtona, zajímal se o matematiku a sbíral rostliny. Poté, co v souboji zabil mladého chorvatského důstojníka, musel z Angers uprchnout.

Někdy v té době se seznámil s mladým anglickým šlechticem, vévodou of Kingston, který cestoval se svým preceptorem Nathanielem Hickmanem po Evropě. Georges-Louis se k nim na této cestě připojil. Projeli jižní Francií a pokračovali do Itálie. Cestou však musel své přátele opustit, neboť jeho matka v srpnu 1731 zemřela. Brzy po pohřbu se opět vydal na cesty, navštívil v Ženevě Cramera a odjel za vévodou of Kingston do Itálie. V červenci 1732 se vrátil do Francie a usadil se v Paříži. Když se dozvěděl, že se jeho otec chce znovu oženit (s dvaadvacetiletou Antoinette Nadault), vrátil se na Montbard, aby mu to rozmluvil a ochránil tak své dědictví. Svatbě nezabránil, ale žádal otce, aby mu složil účty z majetku po matce. Vyvolal proces a svou při v roce 1733 vyhrál. Mohl si zpátky koupit *terre de Buffon*, kterou otec v roce 1728 musel prodat, a začal se podepisovat *de Buffon*.

Pevně se rozhodl pokračovat ve vědecké dráze. Uvědomoval si, že je k tomu třeba být členem *Académie royale des sciences*. V roce 1733 bylo v Akademii čteno jeho pojednání *Solutions de problèmes sur le jeu du franc-carreau*, ve kterém se poprvé objevila známá *Buffonova úloha o jehle*, a také pojednání *Fine mécanique*. Obě byla akademiky příznivě přijata, a tak byl Buffon v následujícím roce králem jmenován *adjoint mécanicien* v Akademii.

2.2 Akademikem a správcem Jardin du Roi

Na rozdíl od ostatních akademiků pobýval Buffon často mimo Paříž. Od prvního roku trávil čas od jara do podzimu v Montbard, kde rozšiřoval rodný dům, věnoval se lesnictví, a prováděl své pokusy. V Akademii přednášel o lesnictví, zpočátku ve spolupráci s Henri Louis Duhamelem de Monceau (1700–1782), později sám. Z angličtiny přeložil dílo Stephena Halese (1677–1761) *Vegetable staticks*, překlad opatřil rozsáhlou předmluvou, ve které se postavil za vědu eperimentů (jako Newton (1643–1727) a na rozdíl od Reného Descartesa (1596–1650), který upřednostňoval úsudek). V roce 1739 přeložil posmrtně publikované (1736) dílo Isaaca Newtona *Method of fluxions and infinite series*, také tuto knihu opatřil předmluvou, která je vlastně historií infinitesimálního počtu. V březnu téhož roku opustil v Akademii sekci mechaniky a odešel do sekce botaniky, nejprve jako *adjoint*, v květnu byl povýšený na *associé*.

Charles de Cisternay du Fay (1698–1739), správce *Jardin du Roi*, onemocněl planými neštovicemi a 16. července 1739 zemřel. Pro Buffona to byla velká příležitost. Podařilo se mu přesvědčit umírajícího, aby ho králi doporučil za svého nástupce. 26. července byl Buffon jmenován správcem *Jardin du Roi* a také *Cabinet d'histoire naturelle*. Mezi přírodopisci to vyvolalo skandál, očekávalo se jmenování někoho staršího, třeba Duhamela de Monceau. Ale následující roky ukázaly, že to byla správná volba.

V roce 1740 byla založena *Académie de Dijon* a Buffon se stal jejím členem. V roce 1744 byl jmenován doživotním pokladníkem v *Académie des sciences*. V září 1748 byl dokončen tisk prvního dílu *Histoire naturelle*. V srpnu následujícího roku byly souborně vydány první tři díly a o rok později byly přeloženy do němčiny. Dílo vyvolalo velmi rozporuplné reakce, bylo dokonce zkoumáno na teologické fakultě pařížské university.

22. září 1752 se Buffon oženil s dvacetiletou Marie-Françoise de Saint-Belin-Malain, dívkou ze zchudlé starobylé burgundské šlechtické rodiny. 25. května 1758 se narodila dcera Marie-Henriette; ta však v říjnu následujícího roku zemřela. 22. května 1764 se narodil syn Georges-Louis-Marie, záhy přezdívaný *Buffonet*. 9. března 1769 zemřela paní de Buffon na následky pádu z koně. Buffon byl její ztrátou hluboce zasažen.

V roce 1753 byl Buffon zvolen členem *Académie royale française* a při přijetí pronesl známý *Discours sur le style*. V roce 1760 se stal jejím ředitelem. V únoru 1771 Buffon vážně onemocněl, předpokládá se, že měl úplavici nebo ledvinové kameny. Lékaři mu nedávali žádnou naději. V nocí z 16. na 17. se však jeho stav najednou zlepšil a v dubnu Buffon znovu začal pracovat. V červenci následujícího roku král povýšil *terre de Buffon* na hrabství. Buffon pokračoval v psaní a vydávání své *Histoire naturelle*, přidal díly o ptácích a minerálech a také dodatky. Stále se staral o rozšiřování *Jardin du Roi*. V dubnu 1888 se znovu objevily vážné problémy s ledvinovými kameny. 15. dubna přijal poslední pomazání a 16. dubna čtyřicet minut po půlnoci zemřel. V roce 1789 vydal Bernard Germain, comte de Lacépède (1756–1825), poslední, sedmý díl Dodatků.

Buffon zemřel na konci jednoho období francouzských dějin. Za čtyři měsíce svolává Ludvík XVI. Generální stavy, 14. července 1789 je dobyta Bastila a začíná Velká francouzská revoluce. Jí padne za oběť i mladý Buffonet, který je na počátku roku 1794 zatčen a 10. července (22. messidor) popraven.

3 Oblasti zájmu

3.1 Buffon – matematik

Jak bylo uvedeno výše, Buffon se matematikou zabýval především v mládí. Pak ji opustil, protože se mu zdála málo konkrétní. Díky Bernardovi le Bouyer de Fontenelle (1657–1757) máme zachyceno jeho první pojednání čtené v Akademii [6]. V roce 1736 vystoupil s rozšířením tohoto pojednání, ale to se, stejně jako pojednání *Sur les mesures* z roku 1738, nezachovalo. Později se obě pojednání stala součástí [1]. Buffon také podporoval počítání v desítkové soustavě, v [5] popsal způsob, jak převádět čísla z jedné soustavy do druhé. Věnoval se také demografii. V [4] počítal na základě tabulek úmrtnosti, které sestavil Nicolas François Dupré de Saint-Maur (1695–1774), pravděpodobnou délku života. Podobně v [3], kde počítal, jak je pravděpodobné, že se člověk, kterému je nyní n let, dožije (nebo nedožije) $n+1$, $n+2$, …, 99, 100 let. V [2] srovnával délku života v Paříži a na venkově a v Paříži a v Londýně. Dospěl k názoru, že v Londýně lidé žijí déle, protože je tam zdravější ovzduší.

3.2 Buffon – přirodopisec

Když se Buffon stal správcem *Jardin du Roi*, byl požádán, aby popsal sbírky v *Cabinet d'histoire naturelle*. Ale Buffon nebyl člověk katalogů, nechtěl popisovat sbírky, rozhodl se, že popíše celou přírodu včetně její historie. Asi deset let pracoval, aniž něco publikoval. Četl všechny autory, staré i současné, kteří mu mohli být nějak užiteční; dopisoval si s množstvím informátorů, polovinu roku žil v těsném kontaktu s přírodou, pozoroval ji a přemýšlel. V roce 1748 oznámil, že *Histoire naturelle* bude mít 15 dílů. Nakonec jich bylo za jeho života vydáno 36, po smrti pak dalších 8. Měl hodně spolupracovníků, ale většina textů je z Buffonova pera.

Sklízel slávu, ale také odpor jak ze strany teologů, tak i významných představitelů vědy. Byl odpůrcem klasifikace zvířat, třídění podle druhů, říkal, že klasifikace jsou umělé, existují jen v naší mysli a neříkají nám nic o věci samé. Tím šel hodně proti duchu doby, která byla posedlá tříděním. Popudil především Carla von Linné (1707–1778), autora *Systema naturae*. Ale vystoupili proti němu i jiní, třeba René Antoine Ferchault de Réaumur (1683–1757); Voltaire (1694–1778) ho posměšně nazýval „Archimède II" a jejich smíření v roce 1774 bylo jen navenek; Duhamel de Monceau mu neodpustil, že se místo něj stal správcem *Jardin du Roi*. Otevřel i další kontroverzní témata, snažil se určit stáří Země na základě chladnutí, představoval si, že se Země odštípla od Slunce, účastnil se debat o reprodukci (*génération*, jak se říkalo), která dělila vědce do několika táborů. Některé jeho názory byly mylné, v některých svou dobu předběhl.

3.3 Buffon – správce Jardin du Roi

V *Jardin du Roi* pracovala malá skupina významných vědců, kteří se dělili do tří skupin podle oborů – botanika, chemie a anatomie člověka a zvířat. Buffon jim nechával naprostou volnost. Jeho vlastní doménou byl *Cabinet d'histoire naturelle du Roi*, předchůdce dnešního *Muséum national*. Byla tam vycpaná zvířata, kostry, škeble, minerály, fosílie i „kuriozity" všeho druhu. To vše bylo přístupné veřejnosti. Buffon povolal do Paříže svého přítele lékaře Louis Jean-Marie Daubenton (1716–1800) a svěřil mu dohled nad sbírkami. V roce 1771 koupil pavilon, dnes nazývaný *maison de Buffon*, udělal z něj sídlo správce a předchozí sídlo poskytl sbírkám, které se značně rozrostly. Rozrůstala se i zahrada, v letech 1771 až 1788 se její plocha zdvojnásobila.

3.4 Buffon – stavitel

Buffon se nejlépe cítil ve svém rodném kraji. Jeho otec obýval velký dům v Dijonu, ale on se každé léto vracel na Montbard, kde u ruin starého hradu burgundských vévodů stál dům jeho rodičů. Ten přebudoval na prostorné komfortní sídlo s oranžerií, stájemi, besídkou a voliérou. V roce 1734 opravil dvě věže hradu, zbytek srovnal se zemí a vytvořil rozsáhlou zahradu, do které se vystupovalo z domu přes třináct teras tvořících impozantní schodiště. To vše vyžadovalo mnoho peněz a mnoho práce. Po zhruba dvacet let dával Buffon práci všem nezaměstnaným z města i okolí, říká se, že tam pracovalo až dvě stě dělníků. Nevynechal také žádnou příležitost, kdy mohl své panství rozšířit. Před smrtí vlastnil lesy pokrývající asi tisíc hektarů.

Na Montbard se v roce 1770 vrátil i jeho podruhé ovdovělý otec. Také jeho děti z druhého manželství byly přijaty do rodiny; Pierre, řečený rytíř de Buffon, a Antoinette Nadault, krásná manželka poradce burgundského parlamentu.

4 Závěr

Mohli bychom psát o dalších oblastech činnosti hraběte de Buffon. O hutích, v nichž zaměstnával asi čtyři sta dělníků a které pojímal jako velkou chemickou laboratoř, o pokusech se zápalnými zrcadly konstruovanými podle Archiméda, která dokázala zapálit dřevěnou chýši a roztavit železo, o ověření hypotézy o elektrické povaze blesku, o hromosvodu, který nechal postavit na svém domě … Snad i tento malý popis Buffonových aktivit ukazuje šíři jeho zájmů a svědčí o tom, že Georges-Louis Leclerc, hrabě de Buffon, byl mimořádnou osobností i ve století, které bylo na velikány bohaté.

Literatura

[1] Buffon G.-L. Leclerc de: *Essai d'arithmétique morale.* Histoire naturelle, générale et particullière, servant de suite à l'Histoire naturelle de l'Homme, Supplément, tome IV., Imprimerie Royale, Paris, 1777, 46–148.

[2] *État général des naissances, des mariages et des morts…* . ibid. 265–323.

[3] *Des probabilités de la durée de la vie*. ibid. 149–264.

[4] Buffon G.-L. Leclerc de: *De la vieillesse et de la mort.* Histoire naturelle de l'Homme in Histoire naturelle, générale et particullière, tome II., Imprimerie Royale, Paris, 1749, 557–603.

[5] Buffon G.-L. Leclerc de: *Formule sur les échelles arithmétiques*, Mémoire de l'Académie royale des sciences, en 1741, Imprimerie Royale, Paris, 1744, 219–221.

[6] Fontenelle B. le B. de: *Histoire de l'Académie royale des sciences, en 1733*. Imprimerie Royale, Paris, 1735, 43–45.

Adresa

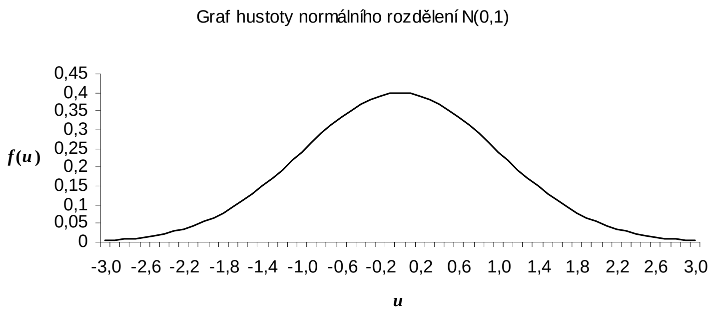
RNDr. Anna Kalousová
Katedra matematiky, FEL ČVUT
Technická 2, 166 27 Praha 6
e-mail: *kalous@math.feld.cvut.cz*

HISTORIE ROBUSTNÍCH MATEMATICKO-STATISTICKÝCH METOD

HANA KOTOUČKOVÁ

1 Úvod

Ve statistice se běžně setkáváme s tzv. normálním rozdělením N(μ,σ^2), které je známo také pod názvem Gaussovo. Jedná se o rozdělení spojité náhodné veličiny se dvěma parametry – střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Z hodin statistiky si spíše než vztah pro hustotu tohoto rozdělení pamatujeme známou Gaussovu křivku, tedy křivku hustoty normálního rozdělení. Na obrázku č. 1 je graf hustoty normálního rozdělení s parametry μ = 0 a σ^2 = 1, tedy tzv. standardizovaného (normovaného) normálního rozdělení.



Obr. 1. *Graf hustoty standardizovaného normálního rozdělení*

2 Počátky robustních metod

2.1 Dogma normality

Normální rozdělení je sice nazváno po Gaussovi, nicméně poprvé toto rozdělení představil Abraham De Moivre (1667–1754) ve své knize *Miscellanea Analytica* z roku 1730. Ukazuje, že limitou binomického rozdělení[1] pro velký počet pokusů je právě normální rozdělení.

Normální rozdělení bylo dlouho považováno za rozdělení, kterým se řídí většina náhodných veličin, především pak rozdělení chyb. Často uváděný citát z roku 1912 (*Calcul des Probabilités*), který Poincaré přisuzuje Lippmannovi (pravděpodobně

[1] Binomické rozdělení Bi(n, p) je diskrétní rozdělení se dvěma parametry n a p, kde n je počet nezávislých pokusů a p je pravděpodobnost úspěchu v každém z těchto pokusů. Potom pravděpodobnost, že úspěch nastane právě v x pokusech z celkových n, se vypočte jako:

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

francouzskému fyzikovi Gabrielu Lippmannovi), by se dal přeložit následovně: „Všichni věří v normální rozdělení chyb: experimentátoři, protože je pokládají za matematický teorém, a matematikové, protože je pokládají za experimentální fakt.”

Dogma normality bylo možné popřít až v době výkonných počítačů. Nicméně již v roce 1965 Kagan, Linnik a Rao dokázali, že odhad metodou nejmenších čtverců je optimální pro normální rozdělení chyb, zatímco v jiných případech může úplně selhat. Když se podíváme na Gaussovo zavedení normálního rozdělení, zjistíme, že Gauss vlastně zavádí normální rozdělení tak, aby vyhovovalo aritmetickému průměru. K vytvoření dogma normality přispěla nejspíš i Gauss-Markovova věta (nejlepší lineární nestranný odhad očekávané hodnoty je aritmetický průměr) a Centrální limitní teorém (součet mnoha malých na sobě nezávislých chyb je přibližně normální).

2.2 Vývoj robustních statistických metod

Z uvedeného vyplývá, že ne vždy je nejlepší používat klasické statistické charakteristiky a postupy (např. metodu nejmenších čtverců). Bylo tedy potřeba vynalézt takové postupy, které by byly dostatečně dobré i v případě, že se odchýlíme od normálního rozdělení. Jedním z řešení jsou právě robustní statistické postupy, které si zachovávají určitou optimalitu v okolí nějakého základního rozdělení, např. normálního. Robustní[2] statistické metody, jak je známe dnes, se vyvíjely především od čtyřicátých let 20. století. Nicméně prapočátky se dají vysledovat již mnohem dříve.

Už v devatenáctém století si Adrien Marie Legendre (1752–1833) všiml, že právě metoda nejmenších čtverců není vždy optimální. Ve své práci *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des cométes* z roku 1805 doporučuje nejprve „zamítnout měření, která jsou příliš velká, než aby mohla být považována za přípustná.“ Právě zamítání odlehlých pozorování bylo jedním ze způsobů, jak se vyrovnat s nenormalitou dat. Jak však odhadnout, která pozorování jsou opravdu odlehlá? První návrh pro stanovení odlehlých hodnot publikoval roku 1852 Benjamin Peirce (1809–1880), profesor astronomie a matematiky na Harvardu. Nicméně Peirce se příliš nezajímal o vlastnosti následného odhadu a o to, jaká informace mohla být tímto postupem ztracena.

Nejspíš poprvé si všimli citlivosti klasických statistických charakteristik, jako je průměr a rozptyl, k odlehlým hodnotám astronomové a fyzikové při určování různých fyzikálních, geofyzikálních a astronomických konstant. Jedním z nich byl i James Short (1710–1768), astronom a výrobce dalekohledů. Short v roce 1761 odhadoval paralaxu[3] Slunce pozorováním oběžné dráhy Venuše. Usoudil, že prostý aritmetický průměr není v tomto případě tou nejvhodnější charakteristikou. A proto se rozhodl zprůměrovat tři průměry: prostý průměr, průměr všech pozorování s rezidui menšími než jedna sekunda a průměr pozorování s rezidui menšími než půl sekundy.

[2] Slovo robustní bylo používané dříve spíše v negativní konotaci ve smyslu vulgární, silný, surový. Statistický význam dal slovu až G. E. P. Box ve svém článku *Non-Normality and Tests on Variance* z roku 1953

[3] V astronomii se paralaxou rozumí úhel, o který se na obloze posune nebeské těleso, pokud je pozorováno z krajních bodů vhodně zvolené základny. Paralaxa se používá především pro měření vzdáleností objektů ve vesmíru.

Nenormality rozdělení si povšiml i americký astronom Simon Newcomb (1835–1909). Při pozorování oběžné dráhy Merkuru v roce 1878 zjistil, že množina 684 reziduí založených na těchto pozorování má mnohem těžší konce[4] než příslušné normální rozdělení.

Mezi moderní robustní odhady patří i tzv. *L*-odhady. Tyto odhady jsou vlastně váženou lineární kombinací pozorování, kde váhy jsou přiřazeny pouze na základě pořadí daného pozorování. Do této třídy můžeme zahrnout i charakteristiky, které mají poměrně dlouhou historii, jako např. medián[5] nebo variační rozpětí[6]. Mediánem se zabývá ve své práci *Théorie Analytique des Probabilités* z roku 1818 Pierre Simon Laplace (1749–1827). Medián často používal i Francis Galton (1822–1911). Spíše než nedůvěra k normálnímu rozdělení však byla Galtonovou motivací jednoduchost výpočtu mediánu a snadnost jeho interpretace.

Jak již bylo řečeno, moderní robustní metody se rozvíjely především od čtyřicátých let dvacátého století. Nicméně se občas stávalo, že některé moderní výsledky byly objeveny již dříve, ovšem zůstaly nepovšimnuty. Matematik Percy John Daniell (1889–1946) byl jedním z těchto dlouhá léta nepovšimnutých autorů na poli robustních odhadů. Roku 1920 publikoval Daniell v *American Journal of Mathematics* článek *Observations Weighted According to Order*. Jak už napovídá název, Daniell se ve svém článku zabývá tím, co bychom dnes nazvali *L*-odhady. Uvažuje zde dnes známé výsledky (asymptotický odhad parametrů polohy i měřítka, asymptotický rozptyl). Nicméně jeho článek zůstal nepovšimnut. Možná kvůli tomu, že Daniell byl především matematik. Je znám zejména pro své práce z integrálního počtu a matematické zpracování Markovových procesů. Trvalo dalších třicet let, než byly jeho výsledky znovuobjeveny.

3 Závěr

Historií bychom mohli putovat stále dál až do současnosti. Zásadním mezníkem ve vývoji robustních metod byla tzv. Princetonská studie. Neboli kniha *Robust Estimates of Location, Survey and Advances* z roku 1972, kterou publikovala skupina autorů známých jmen D. F. Andrews, P. J. Bickel, F. R. Hampel, P. J. Huber, W. H. Rogers, J. W. Tukey. Vývoj však pokračoval dál. A nekončí ani dnes. Stále je co objevovat. Nicméně v tomto článku nešlo o to zmapovat celý vývoj a popsat všechny typy robustních odhadů. Spíše poodkrýt malou část historie a ukázat zárodky robustních metod.

Literatura

[1] Andrews D. F., Bickel P. J., Hampel F. R., Huber P. J., Rogers W. H., Tukey J. W.: *Robust Estimates of Location. Survey and Advances.* Princeton University Press, Princeton, 1972.

[2] Box G. E. P.: *Non-Normality and Tests on Variances*. Biometrika 40(1953), 318–335.

[3] Daniell P. J.: *Observations Weighted According to Order*. American Journal of Mathematics 42(1920), 222–236.

[4] Výraz těžší konce rozdělení znamená, že oproti normálnímu rozdělení se více hodnot vyskytuje na koncích (chvostech) tohoto rozdělení.

[5] Medián je prostřední hodnota uspořádaného souboru.

[6] Variační rozpětí se vypočte jako rozdíl největší a nejmenší hodnoty v souboru.

[4] Hodges J. L., Lehmann E. L.: *Estimates of Location Based on Rank Tests*. The Annals of Mathematical Statistics 34(1963), 598–611.

[5] Jurečková J.: *Robustní statistické metody*. Karolinum, Praha, 2001.

[6] Jurečková J., Picek J.: *Robust Statistical Methods with R*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2006.

[7] Pearson E. G.: *The Analysis of Variances in Cases of Non-Normal Variation*. Biometrika 23(1931), 114–133.

[8] Stigler S.: *R. H. Smith, a Victorian Interested in robustness*. Biometrika 67(1980), 217–221.

[9] Stigler S.: *Simon Newcomb, Percy Daniell, and the History of Robust Estimation 1885–1920*. Journal of the American Statistical Association 68(1973), 872–879.

[10] Van Zwet W. R.: *Van de Hulst on robust statistics. A historical note.* Statistica Neerlandica 39(1985), 81–95.

Adresa

RNDr. Ing. Hana Kotoučková
Katedra managementu informací
Fakulta managementu, Vysoká škola ekonomická
Jarošovská 1117/II
377 01 Jindřichův Hradec
e-mail: *hana.striteska@centrum.cz*

VÝVOJ POJMU FRAKTÁLNÍ DIMENZE

LIBOR KOUDELA

1 Teorie míry a dimenze na počátku 20. století

Potřeba zobecnit pojmy délky, obsahu a objemu geometrických objektů i pro případ obecnějších bodových množin v $\mathbf{R}^m$ vedla na konci 19. století ke vzniku teorie míry. Émile Borel zavedl pojem míry jako množinovou funkci, která musí splňovat jisté předepsané vlastnosti. Jeho definice míry se stala Henri Lebesgueovi podnětem pro vytvoření nové obecné teorie integrálu na počátku 20. století.

V roce 1914 formuloval Constantin Carathéodory obecnější teorii míry založenou na pojmu vnější míry [2]. Carathéodoryho teorie umožňovala vyjádření s-dimenzionální míry v $\mathbf{R}^m$ pro $s < m$. Felix Hausdorff použil v roce 1919 stejný přístup k zavedení míry a s ní související dimenze (nyní zvané Hausdorffovy), která připouští i neceločíselné hodnoty [4]. Technický aparát pro práci s Hausdorffovou dimenzí rozpracoval později Abram Samoljovič Bezikovič [1].

2 Hausdorffova dimenze

Nechť E je neprázdná podmnožina m-rozměrného eukleidovského (obecně libovolného metrického) prostoru a nechť $|U| = \sup\{|x - y|;\, x, y \in U\}$ je průměr množiny U. Konečný nebo spočetný systém množin $\{U_i\}$ nazveme δ-pokrytím množiny E, jestliže $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ a zároveň pro každé i platí $0 \le |U_i| \le \delta$. Pro s ≥ 0 definujeme s-dimenzionální Hausdorffovu míru $H(E)$ množiny E jako

$$H(E) = \lim_{\delta \to 0} H_\delta(E),$$

kde

$$H_\delta(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s;\ \{U_i\} \text{je } \delta - \text{pokrytí } E\right\}.$$

Číslo $\dim_H E$, pro které platí

$$\dim_H E = \inf\{s; H(E) = 0\} = \sup\{s; H(E) = \infty\}$$

nazýváme Hausdorffovou dimenzí množiny E.

Hausdorff ukázal, že existují množiny, pro něž Hausdorffova dimenze nabývá neceločíselných hodnot. Speciálně klasická Cantorova ternární množina má Hausdorffovu dimenzi $\frac{\log 2}{\log 3}$ ([4], s. 172).

Hausdorffova dimenze se ukázala být vhodným kvantitativním prostředkem při vyjadřování komplexnosti struktur, pro které Benoît Mandelbrot zavedl označení fraktály. Množiny považované běžně za fraktály byly v matematice známy již dříve, hrály však často roli výjimečných (patologických) objektů používaných jako protipříklady k některým intuitivně chápaným pojmům či definicím.

Právě pojem fraktální (Hausdorffovy) dimenze posloužil Mandelbrotovi k vymezení pojmu fraktálu. Podle původní Mandelbrotovy definice je fraktál objekt, jehož fraktální dimenze je větší než jeho dimenze topologická ([3], s. xxv). V konkrétních případech může být nicméně určení Hausdorffovy dimenze úkolem značně náročným. I z tohoto důvodu byla formulována další pojetí dimenze, která ve speciálních případech umožňují snadnější a rychlejší výpočet.

3 Jiná pojetí fraktální dimenze

Georges Bouligand použil v roce 1928 pojem Minkowského obsahu k zavedení neceločíselné dimenze zvané nyní Minkowského-Bouligandova, příp. mřížková dimenze ([6], s. 22). Jiná formulace pochází od Lva Semjonoviče Pontrjagina a Lva Genrichoviče Šnirelmana z roku 1932 ([5]).

Hausdorffova a mřížková dimenze nabývají u poměrně široké třídy množin stejných hodnot, bohužel to ale neplatí zcela obecně. Např. množina racionálních čísel v intervalu [0, 1] má mřížkovou dimenzi 1, avšak její Hausdorffova dimenze je rovna 0.

Bouligandovi náleží zřejmě i zásluha za formulování pojmu dimenze vycházejícího ze soběpodobnosti, vlastnosti, která je charakteristická pro většinu fraktálů. Tento druh dimenze se stal díky Mandelbrotovi známý jako soběpodobnostní dimenze (self-similarity dimension).

Literatura

[1] Besicovitch A. S.: *On linear sets of points of fractional dimension*. Mathematische Annalen 101(1929), 161–193.

[2] Carathéodory C.: *Über das lineare Mass von Punktmengen, eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs*. Nachr. Gesell. Wiss. Göttingen 1914, 404–426.

[3] Falconer K.: *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, Chichester, 2003.

[4] Hausdorff, F.: *Dimension und äusseres Mass*. Mathematische Annalen 79(1919), 157–179.

[5] Pontrjagin L.; Schnirelmann L.: *Sur une propriété métrique de la dimension*. Annals of Mathathematics (2) 33(1932), 156–162.

[6] Tricot C.: *Curves and Fractal Dimension*. Springer-Verlag, New York, 1995.

Adresa

Mgr. Libor Koudela
Ústav matematiky
Univerzita Pardubice
Studentská 95
532 10 Pardubice
e-mail: *libor.koudela@upce.cz*

CARAMUEL Z LOBKOVIC – MATEMATICKÁ TEORIE JAZYKA V 17. STOLETÍ

MIROSLAVA OTAVOVÁ

1 Myšlenka dokonalého jazyka

Počátek 17. století v Evropě, tj. počátek klasického novověku, byl poznamenán krizí stávajících kulturních a společenských institucí, které byly postaveny na předpokladu universality křesťanské civilizace. Ztráta náboženské jednoty vedla posléze až k vypuknutí třicetileté války. V oblasti intelektuální se projevila nutnost nového chápání vědy odklonem od dosavadních scholastických principů k matematické přírodovědě. Snaha nalézt nové základy poznání opřené o formální disciplíny se projevila také v pokusech vytvořit jazyk, který by umožnil jednoznačné a přesné formulace a byl nejen nástrojem vědeckého poznání, ale i napomohl k dohodě mezi znesvářenými stranami.

Úvahy o dokonalém jazyce mají v evropském prostoru dlouhou historii a v počátku byly spojeny se studiem textu orientálního původu, totiž bible, a to především s knihami Starého zákona. Důležitým vkladem v tomto směru byla středověká kabala, proud hebrejského mysticismu, který vypracoval tradici výkladu tóry v tom smyslu, že stvoření světa chápe jako jazykový jev. Vznikl-li svět stvořitelským slovem Božím, tj. pomocí písmen abecedy, lze předpokládat, že jazyk odráží, ba přímo vytváří strukturu universa. Myšlenka paralelismu jazykové struktury a struktury skutečnosti pak vyzývá k pokusu vytvořit jazyk, který by se svými bohatými možnostmi snažil napodobit akt stvoření. Pro tyto účely vytvořila kabala aparát, který je v podstatě matematické, přesněji kombinatorické povahy. Hebrejská abeceda obsahuje 22 písmen (pouze souhlásky), která zároveň označují číslice. Metoda gematrie umožňuje komparovat slova s odlišným významem a stejným ciferným součtem. V baroku tolik oblíbené umění anagramu založené na možnosti vytvářet z daného slova slova nová pomocí permutací a ars notoria, kdy jeden text je nositelem textu dalšího, protože přečtením pouze počátečních písmen slov původního textu se odhalí skryté sdělení, mají svůj původ v kabale.

Dalším důležitým předpokladem pro studium dokonalého jazyka byl směr spekulativní gramatiky, pěstovaný na universitách od 13. století. Jeho cílem bylo původně vytvořit optimální podmínky pro pěstování filosofie a theologie, postupně vykrystalizovala snaha najít ideální mluvnici, na které by participovaly jednotlivé přirozené jazyky. Její hledání nevystačilo s pouhým lingvistickým přístupem, ale vyžadovalo rozvíjení prostředků logických, byť většinou zůstalo v rámci logiky aristotelské.

V 17. století se potřeba dokonalého, uměle vytvořeného jazyka ozvala s velkou naléhavostí a v řešení problému se angažovala řada osobností (z nejslavnějších jmenujme alespoň Komenského a Leibnize). Zde připomeneme originálního myslitele, který znamenal velké obohacení pražského filosofického života doby pobělohorské a v matematickém přístupu k umělému jazyku anticipoval myšlenky, které zhodnotilo teprve 20. století. Jeho návrhy šifrovacích klíčů nalézají analogie v metodách strojového překladu.

2 Caramuelův příspěvek k problematice umělých jazyků

Jan Caramuel byl po otci Lucemburčan, po matce Čech, narodil se v Madridu roku 1606. Již v deseti letech začal studovat filosofii na universitě v Alcale, kde se patrně seznámil s kabalou a vzhledem k svému matematickému nadání si později uvědomil, jaké prostředky jsou zde k dispozici, když se nauka oprostí od mystického nánosu. Po vstupu do cisterciáckého řádu studoval ještě theologii na universitě v Salamance. Od roku 1635 působil na theologické fakultě v Lovani, kde se stal uznávanou vědeckou osobností. Zde také publikoval svůj první příspěvek k teorii jazyka. Byla to komentovaná edice spisu Jana Trithemia, který byl od roku 1609 na indexu zakázaných knih pro podezření z čarodějnictví. Caramuel pochopil, že steganografie umožňuje tvorbu šifrovacího klíče a navíc otvírá možnost interpretace textu v neznámém, resp. umělém jazyce. Důsledkem této edice bylo Caramuelovo pozvání do Prahy ke dvoru císaře Ferdinanda, kde měl značnou zásluhu na úspěšném uzavření vestfálského míru, tj. ukončení třicetileté války. V době pražského pobytu vzniklo Caramuelovo nejzávažnější dílo, *Theologia rationalis*. Roku 1657 byl papežem povolán do Itálie. Také zde pokračoval v rozvíjení myšlenky dokonalého jazyka. Zemřel roku 1682 jako biskup ve Vigevanu.

Caramuelův přístup dobře ilustruje *Grammatica audax* (Odvážná mluvnice, součást jeho *Theologie rationalis*), kde nejprve zkoumá počet různých slabik, které lze vytvořit z písmen abecedy. Vychází z možností latiny a rozlišuje přitom roli samohlásek a souhlásek ve snaze zahrnout všechny reálně vyslovitelné slabiky. Výsledné množství radikálně přesahuje počet slov nesoucích význam a to nabízí možnost v intencích spekulativní gramatiky doplnit „mezery“ a odstranit nedostatky zatěžující stávající přirozené jazyky. Konkrétní ukázkou je zpřesnění slovesa esse (být) jeho nahrazením umělými slovesy „sare, sere, syre, sore, sure” s diferencováním významu podle způsobu chápání existence pro potřeby Caramuelova metafyzického dialektu.

Literatura

[1] Caramuel z Lobkovic J.: *Steganographiae nec non claviculae Salomonis Germani, Ioannis Trithemii Abbatis Spanheimensis Ordinis S. Benedicti genuina, facilis dilucidatio, declaratio etc.* Coloniae Aggripinae, 1635.

[2] Caramuel z Lobkovic J.: *Theologia rationalis sive in auream angelici doctoris summam meditationes, notae et observationes etc.* Francofurti, 1654.

[3] Sousedík S.: *Univerzální jazyk v české filosofii 17. století.* Studia Comeniana et Historica 20(1990), 42–73.

[4] Sousedík S.: *Filosofie v českých zemích mezi středověkem a osvícenstvím.* Vyšehrad, Praha, 1997.

[5] Eco U.: *Hledání dokonalého jazyka.* NLN, Praha, 2001.

Adresa

Miroslava Otavová, prom. mat.
Katedra matematiky VŠE
Ekonomická 957
148 00 Praha 4
e-mail: *otavova@vse.cz*

EUKLIDŮV ALGORITMUS V UČEBNICÍCH MATEMATIKY PRO REÁLKY A GYMNÁZIA (1852–1907)

KAREL PAZOUREK

1 Úvod

1.1 Euklidův algoritmus v učebnicích

Euklidův algoritmus se používá ke zjišťování největšího společného dělitele (NSD) dvou přirozených čísel nebo polynomů. Obě varianty algoritmu se v učebnicích z období 1852 až 1907 vyskytují. Název „Euklidův algoritmus“ se však nepoužíval, metoda byla známa jako *postupné dělení* (Bydžovský [1]) nebo *řetězové dělení* (Tůma [15]).

Euklidův algoritmus se objevuje v českých učebnicích (algebrách a aritmetikách) pro střední školy od počátku jejich vydávání. Aritmetiky byly psány pro nižší stupně škol, algebry pro vyšší stupeň, čemuž odpovídá i způsob výkladu. Algoritmus byl vysvětlován v kapitole dělitelnosti, která se vyučovala v prvních ročnících nižších i vyšších gymnázií a reálek. Tato kapitola má v algebrách i aritmetikách podobnou strukturu.

1.2 Pozice dělitelnosti v učebnicích

Kapitola o dělitelnosti se ve většině studovaných učebnic objevuje po zopakování číselných operací mezi kapitolou o vícejmenných veličinách (počítání s jednotkami a veličinami v dnešním slova smyslu) a kapitolou o zlomcích.

Místo pojmu přirozené číslo se používala celá čísla (v pozdějších učebnicích, například v Bydžovského Aritmetice [1] se před kapitolou o dělitelnosti objevuje poznámka, že se v ní uvažují pouze kladná celá čísla; Machovec [7] však přechází k celým číslům).

Kapitola o dělitelnosti mívá obvykle následující strukturu: Začíná definicí dělitelnosti, prvočísla, nesoudělných čísel, složeného čísla, sudých a lichých čísel. Následují pravidla dělitelnosti pro 2, 3, 4, 5, 9, 8, 11. Pak se objevují pravidla pro mocniny dvou, pěti, deseti, pravidlo dělitelnosti složeným číslem je obvykle vysvětleno na dělitelnosti 6.

V algebrách bývají dokazována obecná pravidla dělitelnosti včetně základního tvrzení Euklidova algoritmu: *Společná míra dělence a dělitele jest i měrou zbytku.* (Taftl [14], str. 44)

Následují pojednání o prvočíselném rozkladu, největším společném děliteli (míře) a nejmenším společném násobku (násobném). Močnik [8] pojem společného dělitele vůbec nezavádí.

Soldát [10] a Hoza [5] doplňují text historickými poznámkami.

2 Euklidův algoritmus

2.1 Euklidův algoritmus pro (přirozená) čísla

Euklidův algoritmus je obvykle uváděn až po metodě nalézání největšího společného dělitele pomocí prvočíselného rozkladu.

Někteří autoři aritmetik algoritmus přímo neformulují, pouze se omezují na konkrétní příklady bez jakékoholi vysvětlení (např. Jarolímek [6], Starý [11], Smolík [9]), jiní vysvětlují algoritmus na konkrétních příkladech (Fischer [2]). V učebnicích algebry autoři naopak uvádějí obecný algoritmus, někdy formulují větu a připojují její důkaz (Hora [4]). Někdy vysvětlují i konečnost postupu: *Dělení takové musí se jednou ukončiti; poněvadž každý zbytek menší jest než dělitel jemu náležící, tak že čísla ta stále klesají a zápornými státi se nemohou.* (Šimerka [13], str. 37)

Schéma, v němž se algoritmus zapisuje, se v jednotlivých učebnicích mění:

$$
\begin{array}{rr|r|l}
 & A & B & \\
 & 1560 & 540 & 2\ (P) \\
(Z) & 480 & 60\ (Z') & 1\ (P') \\
 & ,, & & 8\ (P'')
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
\underline{4277}:637 = 6 \\
\underline{637}:\ 455 = 1 \\
\underline{455}:182 = 2 \\
182:\ 91 = 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \overset{3}{\cup} & & \overset{2}{\cup} & & \overset{2}{\cup} & & \overset{3}{\cup} & & \\
\underline{40194} & : & \underline{11781} & : & \underline{4851} & : & \underline{2079} & : & 693 & = & \text{nejv. sp. m.} \\
4851 & & 2979[\textit{sic}!] & & 693 & & ,, & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
389 & \\
143 & 2 \\
\hline
103 & 1 \\
40 & 2 \\
23 & 1 \\
17 & 1 \\
6 & 2 \\
5 & 1 \\
1 & 5 \\
0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|r|l}
510 & 374 & 1, 2, 1, 3. \\
163 & 102 & \\
34 & 0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
4312: & 2856: & 1456: & 1400: & 56 \\
\hline
 & 1, & 1, & 1, & 25
\end{array}
$$

Obrázek 1: Schémata Euklidova algoritmu. Nahoře: Fleischer [3], str. 48; Jarolímek [6], str. 30. Uprostřed: Šimerka [Ši1868], str. 56; Fischer [2], str. 95. Dole: Studnička [12], str. 34; Taftl [14], str. 45.

Zvláště oblíbená byla schémata podobná Fleischerovu nebo Fischerovu, pravděpodobně pro podobnost se schématy používanými při prvočíselném rozkladu nebo vypisování všech dělitelů.

Machovec [7] přistoupil k Euklidovu algoritmu odborně. Věty i algoritmus formuluje a dokazuje obecně pro výrazy a čísla. Navíc uvažuje dělitelnost na množině celých čísel, proto si může dovolit zrychlení algoritmu použitím nejmenších zbytků v absolutní hodnotě. Dostává tak například schéma:

$$
\begin{array}{l|r|c}
1035 & 322 & 3 \\
69 & -23 & 5 \\
0 & & 3
\end{array}
$$

Obrázek 2: Machovcovo schéma se záporným zbytkem. (Machovec [7], str. 70–71)

Je zajímavé, že se zabývá i složitostí algoritmu (tento matematický pojem se v té době teprve utvářel):

Že při svrchu vytčeném postupném dělení musíme konečně dospěti zbytku = 0, *vychází na jevo z toho, že všecky zbytky jsou vyjádřeny čísly celými, o jichž absolutních hodnotách platí nerovnosť*

$$B > R_1 > R_2 \dots > R_{n-1} > R_n .$$ [1]

Budiž podotčeno, že výkon se urychlí, béřeme-li za R_1, R_2, R_3 *... zbytky nejmenší. Potom jest*

$$2R_1 < B,$$
$$2R_2 < R_1$$
$$2R_3 < R_2$$
$$2R_4 < R_3$$
$$\vdots$$
$$2R_n < R_{n-1}$$

Znásobením obdržíme $2^n R_1 R_2 \dots R_n < BR_1 R_2 R_3 \dots R_{n-1}$ *a dělíme-li tuto nerovnosť rovnicí* $R_1 R_2 \dots R_{n-1} = R_1 R_2 \dots R_{n-1}$, *obdržíme* $2^n R_n < B$, *a poněvadž* R_n *jest rovno aspoň 1, musí býti tím spíše* $2^n < B$. *Uvážíme-li, že bylo vykonáno v celku* $(n+1)$ *dělení, jest z této nerovnosti patrno.*

Přihlížíme-li při vyhledávání největší společné míry postupným dělením ke zbytkům nejmenším, jest potřebí vykonati nejvýš o jedno dělení více, než udává mocnitel nejvyšší mocniny čísla 2, *která jest ještě menší než B, t. j. než menší z daných čísel. Je-li na př. menší z daných čísel* 125, *jest nám vykonati nanejvýš* 7 *dělení, poněvadž* $2^6 = 64$ *a* $2^7 = 128$. (Machovec [7], str. 70–71)

2.2 Euklidův algoritmus pro polynomy

Algoritmus postupného dělení pro polynomy se objevuje pouze v učebnicích algebry, nenajdeme ho v učebnicích aritmetiky. V učebnicích algebry byly mnohočleny chápány jako druh veličin, proto dělitelnost polynomů je uvedena obvykle jen několika poznámkami. Text se obvykle přímo odkazuje na předcházející algoritmus pro (přirozená) čísla.

Často se vyskytuje tvrzení: *Největší společnou míru veličin A a B nezměníme, jestliže A číslem nějakým buď násobíme buď dělíme, není-li číslo toto činitelem veličiny B; totéž platí naopak o veličině B ...* (Fleischer [3], str. 49) Uvedené tvrzení se pak používá ke zjednodušení výpočtů, tj. polynomy s racionálními koeficienty se převedou na polynomy s celočíselnými koeficienty.

Řešené příklady a úlohy k procvičení obsahují polynomy stupňů 5 a menších.

2.3 Euklidův algoritmus - obecně

Hora ve své učebnici [4] poznamenává:

S tímto způsobem určování největší společné míry bez rozvádění daných čísel na prvočinitele souhlasí také postup při vyhledávání nejv. spol. míry kterýchkoli dvou veličin stejnorodých (u př. dvou přímek). Odnímáme totiž menší veličinu od větší tolikráte, pokud možná, pak od menší veličiny zbytek, od toho opět nový zbytek a t. d. Není-li zbytku při některém tom odnímání, jest poslední zbytek, jenž nezmizí, nejv. sp. měrou obou daných veličin. (Hora [4] str. 47–48)

Je to však ojedinělý případ, žádný jiný studovaný autor zobecnění neuvádí.

[1] *B* značí prvního dělitele.

3 Závěr

Euklidův algoritmus má v učebnicích algebry a aritmetiky v letech 1852 až 1907 pevně dané místo v probíraných partiích teorie čísel. Vývoj didaktických metod jeho výkladu je rozmanitý, v celém zkoumaném období lze pozorovat snahu o zpřehlednění a zpřístupnění tohoto tématu.

Literatura

[1] Bydžovský B.: *Arithmetika pro IV. třídu škol realných*. JČM, Praha, 1910, 149 stran.

[2] Fischer F. X.: *Arithmetika pro první a druhou třídu nižšího gymnasia*. F. X. Fischer, Praha, 1870, 242 stran.

[3] Fleischer J.: *Mathematika. První díl. Algebra.* K. Winiker, Brno, 1862, 388 stran.

[4] Hora F. A.: *Dra Frant. Ryt. Močníka aritmetika i algebra pro vyšší třídy škol středních*. B. Tempský, Praha, 1875, 367 stran.

[5] Hoza F.: *Algebra pro vyšší reálky*. I. L. Kober, Praha, 1892, 264 stran.

[6] Jarolímek Č.: *Počtářství pro první a druhou třídu nižší realné školy*. Ant. Augusta, Praha, 1863, 161 stran.

[7] Machovec F.: *Algebra pro vyšší třídy škol středních*. Vydání pro reálky. F. Tempský, Praha, 1886, 423 stran.

[8] Močník F.: Kniha *početní pro první třídu nižší realní školy*. Vídeň, 1852, 168 stran.

[9] Smolík J.: *Početní kniha pro nižší gymnasium*. I. díl. Druhé opravené vydání. J. G. Calve, Praha, 1863.

[10] Soldát H.: *Dra Em. Taftla algebra pro vyšší třídy středních škol českých*. Páté vydání pro reálky. JČM, Praha, 1901, 272 stran.

[11] Starý V.: *Arithmetika pro první, druhou a třetí třídu škol realných*. Čtvrté vydání, opravené dle učebné osnovy z r. 1879. F. Tempský, Praha, 1882, 284 stran.

[12] Studnička F. J.: *Algebra pro vyšší třídy škol středních*. F. J. Studnička, Praha, 1877, 248 stran.

[13] Šimerka V.: *Algebra čili počtářství obecné pro vyšší gymnasia*. Edv. Grégr, Praha, 1863, 169 stran.

[14] Taftl E.: *Algebra*. Max. Čermák, Klatovy, 1883, 228 stran.

[15] Tůma F.: *Arithmetika pro prvou a druhou třídu škol gymnasijních.* F. Tůma, Praha, 1887, 208 stran.

Adresa

Mgr. Karel Pazourek
Katedra didaktiky a matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *pazourek@karlin.mff.cuni.cz*

NEOBVYKLÉ REPREZENTACE ČÍSEL

EDITA PELANTOVÁ

Zápis čísel pomocí symbolů prošel dlouhým historickým vývojem. V různých etnikách měl své specifické formy, které se postupně měnily pod vlivem kulturních a obchodních kontaktů, aby nakonec vyústily v jediný prakticky dnes používaný systém, a to zápis v desítkové soustavě.[1]

1. Poziční systém s pevným základem

Nejdůležitější charakteristikou decimálního systému je význam polohy symbolu pro hodnotu čísla. Symboly 0,1,2, ..., 9 – nazývané číslice nebo cifry – čtené zleva doprava představují počet jednotlivých mocnin desítky (počínaje tou největší), které se v reprezentovaném čísle nacházejí. Zápis 206 představuje číslo $2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$. Když připustíme i záporné mocniny desítky a povolíme nekonečné součty, můžeme zapsat v desítkové soustavě libovolné kladné reálné číslo.

Poziční soustava v dnešní podobě mohla vzniknout až potom, co byl zaveden symbol 0 pro „nic", „prázdno". Historii použití nuly v zápisech čísel i modifikaci její grafické podoby je věnováno hodně studií. My se však budeme věnovat pozičním systémům, kde koeficienty, které se objevují před mocninami základu, mohou být i záporné.

I když se ve francouzském prostředí traduje, že Cauchy byl první, kdo přišel s myšlenkou používat číslice se zápornou hodnotou, objevují se symboly $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, ..., $\underline{9}$ představující hodnotu –1, –2, ..., –9 už v práci Johna Colsona [1]. Tento nástupce Isaaca Newtona na univerzitě v Cambridge se věnoval hlavně překladům matematických prací z latiny do angličtiny a sám k rozvoji matematického poznání výrazněji nepřispěl. To byl i důvod, proč na jeho práci nikdo nenavázal. Colson motivuje zavedení záporných cifer potřebou urychlit aritmetické operace, zvláště násobení, které se v jeho době provádělo ručně. Po více než sto letech zavádí záporné číslice v práci [2] Augustin Cauchy. Jak říká samotný název článku, jeho cílem je předejít chybám ve výpočtech. Je pozoruhodné, jak v dnešní době, kdy se počítaní s tužkou v ruce stává extravagancí, našly Cauchyho myšlenky uplatnění při provádění násobení počítačem.

Vyjádření čísla v desítkové soustavě pomocí koeficientů $\underline{9}$, $\underline{8}$, ..., $\underline{1}$, 0, 1, 2, ..., 9 není jednoznačné. Např. zápisy 62 a $1\underline{4}2 = 1 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$ představují stejné číslo. Proto můžeme množinu přípustných cifer redukovat. Snadno nahlédneme, že každé číslo lze napsat v desítkové soustavě, i když povolíme koeficienty pouze v rozmezí $\underline{4}$, $\underline{3}$, $\underline{2}$, $\underline{1}$, 0, 1, 2, ..., 5. V tomto případě je reprezentace čísla už jednoznačná. Povšimněme si, že při násobení dvou čísel v tomto vyjádření potřebujeme umět malou násobilku pouze po součin 5 krát 5. Kdybychom nahradili základ 10 základem 3 a uvažovali cifry $\underline{1}$, 0, 1, nemuseli bychom se učit žádnou malou násobilku. O zvláštnostech ternární soustavy a optimálnosti základu 3 je pojednáno v populárním článku [3]. Nelze však očekávat, že binární soustava, která je snadno technicky realizovatelná stavy vypnuto – zapnuto, bude vytlačena ternární soustavou. Navíc argument s malou násobilkou je v binární soustavě falešný. Násobení v binární soustavě je pouze opakované sčítání; počet sčítání je dán počtem nenulových cifer v zápisu násobitele. Máme-li násobit skutečně velká čísla, je pro

---

[1] Používání jiných historických zápisů (např. římskými číslicemi) je okrajové. O binární soustavě v technickém použití se ještě zmíníme.

rychlost operace násobení už podstatný i počet jedniček v binárním zápisu čísla. Poznamenejme, že nejčastěji používaná šifrovací metoda RSA je založená na násobení čísel velkých řádově 10^{100}.

Uvažujme binární soustavu s ciframi $\underline{1}$, 0, 1, tzv. balancovanou binární soustavu. Protože sčítání a odečítání je stejně náročné, zavedení cifry $\underline{1}$ nekomplikuje sčítání. Nejednoznačnost zápisu čísla v této soustavě představuje její velkou výhodu. Mezi různými reprezentacemi čísla si můžeme vybrat tu, která má minimální počet nenulových cifer. Např. číslo zapsané dekadicky jako 30 má v obvyklé binární soustavě tvar 11110 = $1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$; zápis v balancované binární soustavě s minimálním počtem nenulových koeficientů je $1000\underline{1}0$. Zvolili jsme příklad tak, aby se projevila výhoda možnosti použít koeficient –1. U čísla tvaru 2^n se výhoda neprojeví. Důležitý je však průměrný počet Φ nenulových cifer definovaný jako limita počtu nenulových cifer v zápisu prvních n přirozených čísel děleného počtem všech použitých cifer. Je zřejmé, že u klasické binární soustavy je Φ rovno polovině. U balancované binární soustavy je Φ pouze třetina.

2. Zobecněný poziční systém

Poziční systém s pevným základem b lze interpretovat jako systém, ve kterém dané číslo kombinujeme pomocí povolených koeficientů z členů posloupnosti $(a_n) = (b^n)$. Následující člen posloupnosti (a_n) tak vznikne vynásobením předchozího členu pevným základem b, tj. $a_{n+1} = a_n \cdot b$. G. Cantor [4] uvažoval numerační systémy, kde násobitel b se mění v závislosti na indexu n. Přesněji uvažoval posloupnost (b_n) přirozených čísel větších než jedna a ukázal, že každé reálné číslo x lze zapsat ve tvaru

$$x = c_0 + c_1/b_1 + c_2/b_1b_2 + c_3/b_1b_2b_3 + c_4/b_1b_2b_3b_4 + c_5/b_1b_2b_3b_4b_5 + \ldots,$$

kde koeficient c_0 je celé číslo a koeficienty c_k jsou celá nezáporná čísla menší než b_k. Při pevné bázi jsou koeficienty na libovolné pozici menší než b, teď se množina přípustných cifer mění s měnící se pozicí.

Např. číslo e vyjádřené jako e = 2 + 1/2! + 1/3! + 1/4! + 1/5! + 1/6! + ... je vlastně zapsáno v Cantorově reprezentaci, kde $b_n = n + 1$. Cantor zavedl své reprezentace při odvozování nových kritérii pro iracionalitu čísla.

V roce 1968 využil Carlitz [5] pro reprezentaci přirozených čísel posloupnost Fibonacciho čísel definovanou předpisem

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 2 \quad \text{a} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{pro každé } n \geq 0.$$

Ukázal, že libovolné přirozené číslo lze vyjádřit jako součet různých Fibonacciho čísel. Toto vyjádření není zdaleka jednoznačné. Např. 11 = $F_5 + F_3 = F_4 + F_3 + F_2 + F_1$. Když přidáme požadavek, aby se v zápisu nevyskytovala dvě po sobě jdoucí Fibonacciho čísla, je zápis čísla jednoznačný. Tedy číslo kombinujeme z členů Fibonacciho posloupnosti pomocí cifer 0 a 1 a zakazujeme výskyt dvou nenulových cifer vedle sebe.

Obecně jsou studovány a dnes již dobře popsány číselné soustavy, kde místo Fibonacciho posloupnosti vystupuje posloupnost zadaná lineární rekurencí libovolného řádu. Přesto Fibonacciho soustava vyniká půvabem nad jinými soustavami. V roce 1982 byly překvapivě objeveny pevné látky, jejichž difrakční obraz vykazoval pětičetnou rotační symetrii zapovězenou pro krystaly [6]. Ukázalo se, že tyto látky – dnes nazývané kvazikrystaly – lze dobře popisovat matematickými modely, ve kterých hraje klíčovou roli Fibonacciho soustava. Navíc balancovaná Fibonacciho soustava s ciframi 1, 0, 1 je pro počítačové násobení ještě výhodnější než balancovaná binární. Pro ní je průměrný počet nenulových cifer Φ roven pětině.

V roce 1957 navrhl A. Rényi studovat jiný typ zobecnění pozičního systému [7]. Báze je pevná, tedy používáme posloupnost (b^n), ale báze b může být libovolné reálné číslo větší než jedna. Nepřekvapí, že když zvolíme za bázi b zlatý řez, dostaneme numerační systém v mnohém připomínající Fibonacciho soustavu.

Závěrem poznamenejme, že jsme se vůbec nezmínili o jiných než pozičních způsobech zápisu reálného čísla. Mezi známé zápisy patří např. řetězové zlomky.

Literatura

[1] Colson J.: *A short Account of Negativo-affirmative Arithmetic*. Philosophical Transaction of the Royal Society 34(1726), 161–173.

[2] Cauchy A.: *Sur les moyens d´éviter les erreurs dans les calculs*, (Novembre 1940) In: Œuvres complètes, série 1, tome 5, 431–442.

[3] Hayes B.: *The third base.* American Scientist, November/December 2001, 490–494.

[4] Cantor G.: *Über die einfache Zahlensysteme.* Zeitschrift für Mathematik und Physics 14(1869), 121–128.

[5] Carlitz L.: *Fibonacci Representations.* Fibonacci Quaterly 6(1968), 193–220.

[6] Shechtman D., Blech I., Gratias D., Cahn J.: *Methalic phase with long range orientational order and no translation symmetry*. Phys. Rev. Lett. 53(1984), 1951–1954.

[7] Rényi A.: *Representations for real numbers and their ergodic properties*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar 8(1957), 477–493.

Adresa

Prof. Ing. Edita Pelantová, CSc.
Katedra matematiky
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT
Trojanova 13
120 00 Praha 2
e-mail: *edita.pelantova@fjfi.cvut.cz*

MÉNĚ ZNÁMÁ FAKTA Z HISTORIE TEORIE MNOŽIN

ANTONÍN SLAVÍK

1 Úvod

Tento příspěvek je věnován historii dvou důležitých vět z teorie množin. V jejich názvech se objevuje jméno G. Cantora, zakladatele této teorie. Důležitou roli při vzniku teorie množin hrál ovšem také R. Dedekind a jeho korespondence s Cantorem. Byl to právě Dedekind, který roku 1873 zaslal Cantorovi důkaz spočetnosti množiny všech polynomů s celočíselnými koeficienty, ze kterého plyne také spočetnost množiny všech algebraických čísel. Poté, co Cantor dokázal nespočetnost množiny reálných čísel, použil Dedekindův výsledek k důkazu existence transcendentních čísel. (Je pozoruhodné, že Cantorův článek s důkazem nespočetnosti R nese název Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.) Vztahy mezi Cantorem a Dedekindem nebyly vždy ideální, Dedekind dokonce na čas korespondenci přerušil. Důvodem byla pravděpodobně skutečnost, že Cantor publikoval některé výsledky, které mu Dedekind písemně sdělil, a „zapomněl“ se zmínit o tom, komu za ně vděčí.

V Dedekindově práci Was sind und was sollen die Zahlen se také objevuje definice nekonečné množiny (je to množina, která má stejnou mohutnost jako její vlastní podmnožina). Toto pojednání je poměrně obtížně srozumitelné, některé pasáže zřejmě nebyly jasné ani Cantorovi (viz dále). Pro současného čtenáře je užitečný anglický překlad [2], který je navíc psán pomocí moderní matematické symboliky.

Následující text popisuje historii Cantorovy-Bernsteinovy a Cantorovy věty; příslušné informace jsem čerpal z knihy [1].

2 Cantorova-Bernsteinova věta

Připomeňme nejprve znění Cantorovy-Bernsteinovy věty (CB): Jsou-li M, N dvě množiny takové, že existují prostá zobrazení $f\colon M\to N$ a $g\colon N\to M$, pak M a N mají stejnou mohutnost (tj. existuje bijekce mezi M a N).

V dopise z června 1877 popisuje Cantor Dedekindovi svůj důkaz tvrzení, že interval (0,1) a čtverec $(0,1)\times(0,1)$ mají stejnou mohutnost (odsud pak snadno plyne existence bijekce mezi $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}^2$). Poté, co jej Dedekind upozornil na chybu, opravil Cantor svůj postup, a našel tak prosté zobrazení $(0,1)\times(0,1)$ do (0,1). Protože nalezení prostého zobrazení (0,1) do $(0,1)\times(0,1)$ je triviální, je s ohledem na větu (CB) ekvivalence čtverce a úsečky dokázána.

Cantor si uvědomoval, že intuitivně zřejmé tvrzení (CB) je potřeba dokázat, důkaz se mu ale nedařilo najít. O svých těžkostech se zmiňuje i Dedekindovi, např. v dopise z roku 1882. Dedekindovi se tvrzení (CB) podařilo dokázat roku 1887, Cantorovi se o tom ale kupodivu nezmínil. Do svého pojednání *Zahlen* však zařadil podivné tvrzení (viz [2], poslední tvrzení v sekci 4), jehož důkaz přenechal čtenáři (uvedl pouze stručný návod), a nikde dále v knize je nevyužil; pomocí tohoto tvrzení lze (CB) snadno dokázat.

Cantor si nevšiml, že tvrzení (CB) z Dedekindova výsledku snadno plyne (Dedekind sám na to nikde neupozornil). V letech 1895 až 1897 vyšlo jeho pojednání [3], ve kterém přehledně a systematicky shrnul dosavadní výsledky svého bádání v teorii množin; tvrzení (CB) zde stále považuje za nedokázané. S Dedekindovým důkazem se seznámil až v roce 1899 a považoval jej za nový. Mezitím byl v roce 1898 publikován Schröderův důkaz, který byl ale chybný (přesto se někdy používá název Schröderova-Bernsteinova věta). Felix Bernstein, Cantorův student, dokázal (CB) roku 1897 nezávisle na Dedekindovi; během návštěvy v Harzburgu byl překvapen Dedekindovým prohlášením, že tvrzení je jednoduchým důsledkem jeho teorie.

První správný důkaz Cantorovy-Bernsteinovy věty byl publikován roku 1898 v Borelových Leçons sur la theorie des fonctions. Stejný důkaz jako Dedekind objevil nezávislé také Zermelo; objevuje se v jeho práci o základech teorie množin z roku 1908.

3 Cantorova věta

Je-li M libovolná neprázdná množina, pak podle Cantorovy věty (CV) je mohutnost potenční množiny P(M) (tj. množiny všech podmnožin M) větší než mohutnost M.

V souvislosti s (CV) jsou pro nás důležitá dvě pozorování:

Množinu P(M) můžeme ztotožnit s množinou všech funkcí f: M→{0,1} (každou takovou funkci chápeme jako charakteristickou funkci nějaké podmnožiny M).

Volíme-li za M množinu všech přirozených čísel N, pak P(M) je stejně velká jako množina R všech reálných čísel. Jako speciální případ (CV) tedy dostáváme tvrzení, že množina R je nespočetná, tj. má větší mohutnost než N.

Je zajímavé, že (CV) ve výše uvedené podobě u Cantora nenajdeme. Nespočetnost **R** dokázal v roce 1874. Roku 1883 se bez podrobnějšího zdůvodnění zmiňuje o tom, že množina všech reálných funkcí má mohutnost $\aleph_2$ (třetí nejmenší nekonečné kardinální číslo). K tomuto tématu se vrátil ve sdělení na kongresu německých matematiků roku 1891. Zde poprvé použil (dnes dobře známou) diagonální metodu k důkazu tvrzení, že množina všech nekonečných posloupností složených ze dvou symbolů (např. 0 a 1) je nespočetná. Poté poznamenal, že zcela stejnou metodou lze pro libovolnou neprázdnou množinu *L* dokázat existenci množiny *M* s větší mohutností než *L* – stačí za *M* vzít množinu všech funkcí *f: L*→{0,1}. Jako příklad vzal za *L* množinu všech reálných čísel a ukázal, že množina všech reálných funkcí s hodnotami {0,1} má větší mohutnost než **R**.

Cantorův výsledek je zřejmě ekvivalentní s (CV), množina funkcí *f: L*→{0,1} je totiž stejně velká jako *P(L)* - viz pozorování výše. Cantor však zůstal u formulace s množinou funkcí. Zdá se, že nepřipouštěl množiny, jejichž prvky by byly opět množiny. V přehledném pojednání [3] se neobjevuje ani výše zmíněná věta, ani pojem potenční množiny.

Je škoda, že Cantor tomuto výsledku nepřisuzoval větší význam – mohl jej využít např. při zavádění kardinálních čísel jako argument, že ke každé množině existuje množina s větší mohutností (Cantor místo toho použil jiné, poněkud pochybné zdůvodnění).

(CV) v dnešní podobě se objevuje v prvním desetiletí 20. století u Russella a Zermela. Je pozoruhodné, že Russell se ještě roku 1901 domníval, že (CV) neplatí, místo toho předpokládal existenci univerzální třídy (množiny). Tuto domněnku podporoval i paradox množiny všech kardinálních čísel: Uvažujeme-li množinu M všech kardinálních čísel, pak z (CV) plyne existence množiny větší mohutnosti, což vede ke sporu. Teprve později si Russell uvědomil, že k podobnému paradoxu („množina všech množin, které neobsahují samy sebe“) lze dospět i bez (CV), a že důkaz (CV) je v pořádku.

Literatura

[1] Ferreirós J.: *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*. 2nd edition, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2007.

[2] Joyce D. E.: *Notes on Richard Dedekind's „Was sind und was sollen die Zahlen“* [online]. http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/numbers/dedekind.pdf [cit. 13. 6. 2008].

[3] Cantor G.: *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*. Mathematische Annalen 46 (1895), 481–512, a 49 (1897), 207–246.

Adresa

RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8 – Karlín
e-mail: *slavik@karlin.mff.cuni.cz*

Z HISTORIE GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ – PTOLEMAIOVY VÝPOČTY

RADKA SMÝKALOVÁ

1 Klaudios Ptolemaios

Klaudios Ptolemaios (asi 85 až 165 n. l.) byl řecký geograf, astronom a astrolog, který pravděpodobně žil a pracoval v egyptské Alexandrii. Jeho největší dílo *Syntaxis megale* (Velká soustava), astronomický spis sepsaný okolo roku 140 a v 8. století přeložený do arabštiny pod názvem *Almagest*, byl založen na domněnce, že nehybná Země je umístěna ve středu vesmíru a nebeská tělesa kolem ní obíhají po předepsaných drahách. Našemu zájmu se těší Ptolemaiova tabulka tětiv, která je předmětem kapitoly 10 a 11 první knihy *Almagestu*. Tato tabulka udává délku tětivy v kruhu jako funkci středového úhlu, který ji vymezuje. Středový úhel, k němuž se délky vztahují, postupuje po 0,5° na intervalu od 0° do 180°. Z našeho hlediska se jedná vlastně o tabulku sinů úhlů od 0° do 90° postupujících po čtvrtině stupně. Označíme-li poloměr kruhu r, středový úhel řeckým písmenem α a délku tětivy $tet(\alpha)$, obdržíme vztah $tet(\alpha) = 2r\cdot\sin(\alpha/2)$. Ptolemaios rozdělil průměr kruhu na 120 stejných jednotkových dílů (délky 1^d), tedy poloměru r přiřazoval délku 60 dílů ($r = 60^d$). Jeho tabulka udává délky tětiv s přesností na dvě šedesátinná místa, tedy s chybou řádu 60^{-2}.

2 Jednotlivé metody

2.1

Uvedením jednotlivých metod, jak Ptolemaios postupně zmíněnou tabulku doplňoval, vytvoříme pro funkci $tet(\alpha)$ malou, avšak obsažnou teorii, kterou Ptolemaios ke svým výpočtům potřeboval. Stejně jako on budeme pracovat s poloměrem délky $r = 60^d$.

- Funkce $tet(\alpha)$ je definovaná pro α z intervalu $\langle 0; 180°\rangle$ a platí $0^d \le tet(\alpha) \le 120^d$.
- Hodnoty $tet(0°)$, $tet(60°)$, a $tet(180°)$ jsou zřejmé. Ze znalosti Pythagorovy věty Ptolemaios vypočítal $tet(90°)$.
- Výpočet hodnot $tet(\alpha)$, kde $\alpha = 36°$, resp. 72°, resp. 108°, resp. 144°.
- Pro výpočet všech dalších hodnot funkce $tet(\alpha)$ potřeboval Ptolemaios nový matematický nástroj. Tím se stala významná planimetrická věta, která dnes nese jeho jméno.
- S využitím dokázaného tvrzení našel Ptolemaios odpověď na dvě důležité otázky:
    - Jak z hodnot $tet(\alpha)$, $tet(\beta)$ vypočítat hodnotu $tet(\alpha - \beta)$?

      V tomto okamžiku mohl Ptolemaios díky znalosti všech dosavadních hodnot $tet(\alpha)$ vypočítat délky tětiv pro všechny úhly o velikosti $k\cdot 6°$, kde $k \in \aleph$.
    - Jak z hodnot $tet(\alpha)$, $tet(\beta)$ vypočítat hodnotu $tet(\alpha + \beta)$?

      Díky odvozenému vzorci pro $tet(\alpha + \beta)$ obdržel Ptolemaios pro případ $\alpha = \beta$ aparát na výpočet hodnot $tet(3°)$, $tet(1{,}5°)$ a $tet(0{,}75°)$ z hodnoty $tet(6°)$, kterou již znal.
- Aby mohl Ptolemaios sestavit tabulku délek tětiv s krokem 0,5°, potřeboval ještě vypočítat hodnotu $tet(1°)$ jako hodnotu ležící mezi $tet(0{,}75°)$ a $tet(1{,}5°)$. Použil k tomu duchaplnou metodu interpolace, která byla známa již astronomu Aristarchovi (asi 320 až 250 př. n. l.)

2.2

Nyní vylíčíme, jak mohl Ptolemaios pomocí své tabulky vyřešit jakýkoliv rovinný trojúhelník. Po vzoru Hipparcha budeme uvažovat trojúhelník vepsaný do kruhu. Popíšeme pouze ten nejjednodušší případ, kdy zkoumaný trojúhelník *ABC* bude pravoúhlý. Nutno však poznamenat, že Ptolemaios si věděl rady i s obecnými trojúhelníky, a to výpočty ve dvou pravoúhlých trojúhelnících, které dostaneme, když původní trojúhelník rozdělíme některou jeho výškou na dvě části. Na tomto postupu se v pozdějších dobách budovala *novější trigonometrie* až do své současné podoby.

Literatura

[1] Kolman A.: *Dějiny matematiky ve starověku*. Academia, Praha, 1968.

[2] Maor E.: *Trigonometric delights.* Princeton University Press, Princeton, 1998.

[3] Červený M.: *Vývoj vyučování goniometrických funkcí v českých matematických učebnicích - diplomová práce.* Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno, 2007.

[4] Heath T.: *A history of greek mathematics.* Clarendon Press, Oxford, 1921.

[5] Glenn E.: *Ptolemy's Table of Chords Trigonometry in the Second Century*. Poslední revize 28. června 1994.

http://hypertextbook.com/eworld/chords.shtml#table1.

[6] Boyer Carl B.: *A history of mathematics.* John Wiley and Sons, INC., New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1989.

[7] Katz Victor J.: *A history of mathematics.* Addison Wesley, Menlo Park, New York, Harlow, Don Mills, Sydney, Mexico City, Madrid, Amsterdam, 1998.

Adresa

Mgr. Radka Smýkalová
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta MU
Janáčkovo náměstí 2a
602 00 Brno
e-mail: *smyky@seznam.cz*

NÁSOBENÍ VE STŘEDOVĚKÉ INDII

IRENA SÝKOROVÁ

1 Úvod

1.1 Aritmetika

Studium matematiky ve staré Indii bylo obtížné, matematice rozumělo jen velmi málo lidí. Indická pojednání byla psána velmi úsporně, obsahovala jen známé vzorce a výsledky. Pravidla byla vyjádřena ve verších, které byly určeny k učení nazpaměť. Někdy byla stručnost až na úkor srozumitelnosti, ke správnému pochopení byl nutný výklad učitele. Snaha po stručnosti byla způsobena především nedostatkem psacího materiálu. Výpočty se prováděly na tabulce nebo na zemi pokryté pískem nebo prachem. Někdy se na tabulku psalo kouskem křídy nebo steatitu.[1] Napsaných čísel se na tabulku vešlo málo, proto bylo zvykem odstraňovat ta čísla nebo ty části výpočtů, které již nebyly potřebné.

Mnohé středověké indické práce pojednávaly o aritmetice. Indové nazývali aritmetiku *pátíganita*.[2] Tento název je odvozen z *pátí* (tabulka nebo deska) a *ganita* (věda o počítání). Provádění matematických výpočtů se také někdy říkalo *dhúlí-karma* (prachová práce), protože čísla byla psána do prachu rozprostřeného na tabulce nebo na zemi. Indové rozlišovali dvacet aritmetických operací: sčítání, odčítání, násobení, dělení, výpočet druhé mocniny, výpočet druhé odmocniny, výpočet třetí mocniny, výpočet třetí odmocniny, pět pravidel pro zlomky, pravidlo tří, obrácené pravidlo tří, pravidlo pěti, pravidlo sedmi, pravidlo devíti, pravidlo jedenácti, pravidlo směny. Prvních osm operací považovali Indové za základní. Operace zdvojnásobení a půlení, které byly pokládány za základní v Egyptě a Řecku, se v indických pojednáních nevyskytovaly. Ke zmíněným aritmetickým operacím řadili ještě osm typových úloh: na výpočet směsí, řad, rovinných obrazců, výkopů, zásob, řezů, hromad, stínů. Podle Brahmagupty (asi 598 až 670) je matematikem jen ten, kdo zná dvacet operací a osm dovedností včetně stínů.

1.2 Díla o aritmetice

Nejstarší dochovaná práce, která byla téměř výhradně věnovaná aritmetice, je anonymní rukopis *Bakhšhálí* (asi 200 n. l.). Existovalo také mnoho astronomických prací známých pod názvem *Siddhánty*, z nichž každá obsahovala část pojednávající o matematice.

Árjabhata I (asi 476 až 550) byl první, kdo zahrnul do své astronomické práce *Árjabhatíja* část věnovanou matematice. Bháskara I (asi 600 až 680) a Lalla (asi 720 až 790), přestože pokračovali v práci Árjabhaty I, napsali samostatná pojednání o aritmetice, která nebyla součástí jejich astronomických textů.

[1] Steatit je měkký minerál světlé barvy, druh mastku ($Mg_3Si_4O_{10}(OH)_2$).
[2] Někdy se aritmetice říkalo *vjakta-ganita* (počítaní se „známými“) na rozdíl od algebry, která se nazývala *avjakta-ganita* (počítaní s „neznámými“).

Brahmagupta (asi 598 až 670), autor díla *Bráhma-sphuta-siddhánta*, zdokonalil a obohatil *Árjabhatíju*. Brahmaguptovu práci komentoval Mahávíra (asi 800 až 870) v knize *Ganita-sára-samgraha*. Pro svou jednoduchost a srozumitelnost byla oblíbená *Trišatiká*, kterou napsal Šrídhara (asi 870 až 930).

K pozdějším autorům, kteří psali o matematice, patří Árjabhata II (asi 920 až 1000), Šrípati (1019–1066) a především Bháskara II (1114–1185), jehož práce *Lílávatí* obsahuje aritmetiku a geometrii. Bháskarovo dílo bylo velmi populární; jeho studiu a výkladu se věnovalo mnoho pozdějších komentátorů (např. v 16. století Ganeša).

2 Násobení

2.1 Terminologie

Běžně užívaný indický název pro násobení byl *gunana*. Tento výraz se vyskytoval už ve védských dílech. Existovaly i další termíny, např. *hanana, vadha, kšaja*, což jsou výrazy pro ničení nebo zabíjení. Tyto názvy se však objevily až později se vznikem nových metod a s desítkovým pozičním zápisem čísel. Při násobení se činitel-násobenec postupně „ničil" a na jeho místa se zapisovaly číslice součinu.

V rukopise *Bakhšhálí* se pro násobení používal výraz *parasparakrtam* (dávání dohromady). Starověká terminologie ukazuje, že násobení bylo chápáno jako opakované sčítání činitele-násobence tolikrát, kolik udával činitel-násobitel. Násobenec se nazýval *gunja*, násobitel *gunaka* nebo *gunakára*, výsledek násobení *gunana-phala*.

Uvedeme sedm různých metod násobení, které se v Indii užívaly, některé už ve 2. stol. př. n. l. Popíšeme je na příkladu $435 \times 12 = 5220$. Jejich společným základem je desítkový poziční zápis čísel a znalost malé násobilky (do 10×10).

2.2 Metoda dveřního pantu (závěsu)

Indové nazývali tuto metodu *kapáta-sandhi*.[3] Popsali ji například Šrídhara, Árjabhata II, Šrípati i někteří pozdější autoři. Rozlišovali přímý způsob a obrácený způsob. Například Šrípati popsal metodu takto (viz [3]):

> *Umísti násobence pod násobitele jako v pantu dveří a násob postupně* [číslice násobence] *posouváním* [násobitele] *v přímém nebo obráceném pořadí.*

V přímém způsobu se zapsal násobenec pod násobitele tak, že nejvyšší řád násobitele byl nad jednotkami násobence. Poslední číslicí násobence, jednotkami, se násobily číslice násobitele postupně od jednotek. Nejprve tedy $5 \times 2 = 10$, číslo 0 se zapsalo pod 2 a jednička se přenesla.[4] Pak se násobilo $5 \times 1 = 5$, přidala se přenesená 1, tedy dohromady 6. A protože číslo 5 už nebylo potřeba, smazalo se a na jeho místo se napsala 6. Nyní se násobitel posunul o jedno místo doleva. V následujícím kroku se násobilo další číslicí násobence – trojkou. Nejprve $3 \times 2 = 6$, tento součin se přičetl k číslici 6 stojící pod 2, tedy 6+6= 12, číslo 6 se smazalo a nahradila ho 2, jednička se

---

[3] *Kapáta* znamená dveře, *sandhi* je závěs.
[4] Začátečníci si pravděpodobně tyto hodnoty poznamenávali na jiném místě desky.

opět přenesla. Pak $3\times1=3$, $3+1=4$, číslo 3 se smazalo a na jeho místo se zapsala 4. Násobitel se opět posunul o místo doleva. Následovalo $4\times2=8$, $8+4=12$, 4 se smazala a nahradila ji 2, jednička se přenesla. Pak $4\times1=4$ a $4+1=5$, číslice 5 se zapsala místo 4. Nakonec se smazal i násobitel 12 a na tabulce zůstal jen výsledek 5220. Postupně se tedy na tabulce objevovalo:

12	12	12	12	12	12	12	12	12
435	4350	4360	4360	4320	4420	4420	4220	5220

Posun násobitele měl dva důvody. Číslice nejvyššího řádu násobitele ukazovala, kterou číslicí násobence se právě násobilo a částečný součin se přičítal k číslici stojící pod tou číslicí násobitele, která právě byla násobena.

V obráceném způsobu se čísla zapisovala pod sebe tak, že jednotky násobitele byly nad nejvyšším řádem násobence. Násobit se začalo první číslicí násobence, tj. čtyřkou, tedy $4\times2=8$, číslo 4 se smazalo a nahradilo číslem 8, pak $4\times1=4$, číslo 4 se zapsalo vlevo pod jedničku. Pak se násobitel 12 posunul o jedno místo doprava, aby se mohlo násobit další číslicí – trojkou. Tedy $3\times2=6$, číslo 3 se smazalo a na jeho místo se zapsala 6. Pak $3\times1=3$ a $3+8=11$, číslo 8 se nahradilo číslem 1 a $4+1=5$, číslice 5 se zapsala místo 4. Opět následoval posun násobitele doprava. Jako poslední se násobilo pětkou. Tedy $5\times2=10$, číslo 5 se smazalo a číslo 0 se zapsalo na jeho místo. Potom $5\times1=5$, $5+1=6$ a $6+6=12$, číslo 6 se nahradilo číslem 2 a 1 se přenesla. Nakonec ještě $1+1=2$, číslo 1 se nahradilo číslem 2. Výsledek je 5220. Sled úprav ukazuje následující tabulka.

12	12	12	12	12	12	12	12	12
435	835	4835	4835	4865	5165	5165	5160	5220

Někdy se používala i modifikace obráceného způsobu. Čísla se zapsala pod sebe stejným způsobem, násobit se začínalo také od první číslice násobence, ale násobilo se od první číslice násobitele. Tedy nejprve $4\times1=4$, číslo 4 se zapsalo pod 1, pak $4\times2=8$, číslo 8 nahradila 4. Pak se násobitel posunul o místo doprava a násobilo se číslicí 3 stojící pod jednotkami násobitele. Tímto způsobem se pokračovalo dál, dokud nebyly vyčerpané všechny číslice násobence. Postupné úpravy jsou v tabulce.

12	12	12	12	12	12	12	12	12
435	4435	4835	4835	5135	5165	5165	5215	5220

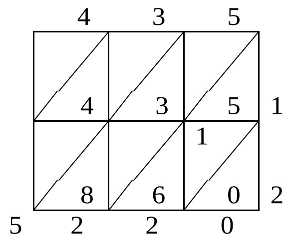
Protože číslice násobence se postupně přepisovaly, násobitel se na konci výpočtu také smazal, zůstal na desce jen výsledek Při tomto způsobu násobení s postupným mazáním mezivýsledků byla kontrola výpočtu velmi obtížná.

2.3 Metoda gelosia

Metodu popsal v 16. století Ganeša ve svém komentáři k práci Bháskary II *Lílávatí*. Ganeša tento postup řadil k metodám *kapáta-sandhi*. Název gelosia vznikl později v Itálii, pod tímto názvem byla metoda známá hlavně v Evropě.

Metoda spočívala v tom, že se nakreslila obdélníková tabulka, ve které počet sloupců byl roven počtu číslic násobence a počet řádků byl stejný jako počet číslic násobitele.

Každé políčko se navíc rozdělilo úhlopříčkou. Nad tabulku se zleva doprava zapsal násobenec, vpravo svisle shora dolů násobitel. Násobila se každá číslice násobence s každou číslicí násobitele a výsledky se zapisovaly do příslušných políček (do pravé „dolní“ poloviny jednotky, do levé „horní“ desítky). Nakonec se sečetla čísla v šikmých sloupcích (podél úhlopříček) a zapsala dolů pod tabulku. To byl výsledný součin.



Násobení podle tohoto postupu bylo jednoduché a názorné. Vzhledem k přehlednosti celého zápisu byla i kontrola výpočtu snadná.

2.4 Metoda křížového násobení (násobení křížem)

Tuto metodu popsali Šrídhara, Mahávíra, Šrípati i někteří pozdější autoři pod názvem *tastha*. Je to postup, při němž násobitel i násobenec stáli na místě, neposunovali se. Násobitel se zapsal pod násobence tak, aby jednotky obou čísel byly nad sebou. Jako první se násobily jednotky násobitele a násobence a součin se zapsal pod ně, resp. se zapsaly jen jednotky součinu a desítky se přenesly. Pak se násobily jednotky násobence desítkami násobitele a desítky násobence jednotkami násobitele, výsledky se sečetly a zapsaly dolů. Dále se násobily stovky jednotkami, desítky desítkami, jednotky stovkami, sečetly se a zapsaly do řádku dole. Takto se pokračovalo i se zbývajícími číslicemi. Ve spodním řádku pak byl uveden součin.

Násobenec:		435
Násobitel:		12
Jednotky:	$5\times2=10$	0
Desítky:	$3\times2+5\times1+1=12$	2
Stovky:	$4\times2+3\times1+1=12$	2
Tisíce:	$4\times1+1=5$	5
Součin:		5220

2.5 Násobení oddělením míst

Tato metoda byla známá jako metoda *sthána-khanda* nebo *sthána-vibhága*. Velmi stručně je popsána v díle Bháskary II (viz [2]):

Násob oddělením míst čísel a sečti dohromady.

Při užití tohoto postupu se jeden z činitelů rozdělil na jednotlivé číslice, každou z nich se vynásobil druhý činitel a dílčí součiny se sečetly podle pozic.

Existovaly různé způsoby zápisu, uvedeme jen dva základní. Ostatní se od nich nepodstatně liší.

$$\begin{array}{r} 12\ \ 12\ \ 12 \\ 4\ \ \ 3\ \ \ 5 \\ \hline 4860 \\ 36\ \ \\ \hline 5220 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 435\ \ 435 \\ 1\ \ \ 2\ \ \\ \hline 870\ \ \\ 435\ \ \ \ \\ \hline 5220\ \ \end{array}$$

2.6 Metoda „cikcak“

Tato metoda se nazývala *gomútriká*, je podobná metodě *sthána-khanda*. Popsal ji Brahmagupta. Číslice násobitele se zapsaly pod sebe a vedle každé se připsal násobenec, vždy posunutý o řád doleva. V každém řádku se čísla vynásobila, tedy v prvním řádku se násobilo číslo 435 jedničkou, ve druhém řádku se číslo 435 násobilo dvojkou. Začínalo se násobit od jednotek. Nejprve $2\times5=10$, číslo 5 se nahradilo číslem 0, pak $2\times3=6$ a 6+1= 7, číslem 7 se přepsalo číslo 3, nakonec $2\times4=8$, číslo 8 se zapsalo místo čísla 4. Částečné součiny se nakonec sečetly pod sebou.

$$\begin{array}{lll} 1 & 435 & 435\ \ \\ 2 & \ \ \ 435 & \ \ 870 \\ \cline{3-3} & & 5220 \end{array}$$

2.7 Násobení po částech

O této metodě, které se říkalo *rúpa-vibhága,* se zmiňují téměř všechny středověké práce. Existují dva způsoby.

Násobitel se rozdělil na součet dvou nebo více částí. Násobenec se pak násobil každou z nich zvlášť a výsledky se sečetly.

$$435\times12=435\times(10+2)=435\times10+435\times2=4350+870=5220$$

Druhá možnost byla rozdělit násobitele na součin dvou nebo více částí. Násobenec se násobil jednou z nich, získaný součin se pak násobil další částí atd., dokud nebyly všechny části vyčerpány.

$$435\times12=435\times(6\times2)=(435\times6)\times2=2610\times2=5220$$

Z těchto postupů je vidět, že si uvědomovali distributivitu a asociativitu násobení.

2.8 Algebraická metoda

Tato metoda byla známá jako *išta-gunana*. Popsal ji např. Brahmagupta nebo později Bháskara II. Existovaly dva způsoby podle toho, zda se vhodné číslo přičítalo nebo odečítalo. Číslo se volilo tak, aby násobení bylo co nejjednodušší. Bháskara II vysvětloval takto (viz [2]):

> *Násob násobitelem zmenšeným nebo zvětšeným o libovolně vybrané číslo,*
> *přidej nebo uber součin násobence a toho vybraného čísla.*

V prvním příkladě násobitele zvětšíme, nejlépe doplněním do další desítky.

$$435 \times 12 = 435 \times (12 + 8) - 435 \times 8 = 435 \times 20 - 435 \times 8 = 8700 - 3480 = 5220$$

Ve druhém příkladě násobitele zmenšíme na nižší desítku.

$$435 \times 12 = 435 \times (12 - 2) + 435 \times 2 = 435 \times 10 + 435 \times 2 = 4350 + 870 = 5220$$

3 Závěr

Výše popsané algoritmy násobení převzali Arabové, kteří se naučili od Indů desítkovou aritmetiku. Arabské rukopisy byly později studovány v Evropě a staré indické metody se v různých modifikacích objevily v dílech středověkých matematiků.

Metodu *kapáta-sandhi* popisoval ve svém díle Al Chvárízmí (asi 790 až 840) i další autoři. Protože však psali na papír, číslice nemazali, ale škrtali. Výpočet byl proto dost nepřehledný, výsledek se přečetl z nepřeškrtnutých číslic. V Evropě se metodě říkalo *galea* nebo *battello* (loď nebo člun), protože zápis výpočtu s trochou fantasie připomínal loď s napjatou plachtou.

Metoda *gelosia* byla známá v Itálii také pod názvem násobení ve čtvercích (multiplicare per quadrilatero). Luca Pacioli (1145–1517) zařadil metodu křížového násobení do svého díla *Summa* a tento způsob násobení si získal oblibu, neboť byl úsporný a rychlý.

Literatura

[1] Bečvář J. a kol.: *Matematika ve středověké Evropě*. Dějiny matematiky, svazek 19, Prometheus, Praha, 2001.

[2] Colebrook H. T.: *Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bháscara*. John Murray, London, 1817.

[3] Datta B., Singh A. N.: *History of Hindu Mathematics (part I)*. Molital Banarsidass, Lahore, 1935, 1938.

[4] Juškevič A. P.: *Dějiny matematiky ve středověku*. Academia, Praha, 1978.

[5] Rangacarya M.: *Ganita-sara-sangraha of Mahaviracarya with English Translation and Notes*. Government Press, Madras, 1912.

[6] O'Connor J., Robertson E.: *Index of Ancient Indian mathematics*. [cit. 6. 5. 2008]. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/Indians.html.

Adresa

RNDr. Irena Sýkorová
Vysoká škola ekonomická
Katedra matematiky
Ekonomická 957
148 00 Praha 4
e-mail: *sykorova@vse.cz*

UŽITÍ TEORIE PROPORCÍ U EUKLEIDA, ARCHIMÉDA A APOLLÓNIA

ZBYNĚK ŠÍR

1 Úvod

Řecká teorie proporcí patří k nejpozoruhodnějším výdobytkům antického matematického myšlení. Její objev je připisován Eudoxovi z Knidu[1] (1. pol. 4. stol. p. n. l.), rozpracována a doložena je však především v V. knize Eukleidových *Základů*. Po mnoho století tato teorie fascinuje další a další generace matematiků svoji hloubkou a propracovaností.

Zřejmě nejpozoruhodnějším rysem teorie proporcí je její univerzálnost. Nejenže ji lze použít na veličiny libovolného druhu, ale rovněž je schopna popsat jak racionální tak i iracionální poměry veličin. Z hlediska současné matematiky pak oprávněně zaujme především její podobnost s moderní definicí reálných čísel.[2] V našem příspěvku se chceme zaměřit na jiný a poněkud opomíjený aspekt teorie proporcí, totiž na její roli jako základního prostředku a jazyka určeného pro formulaci a důkaz matematických výsledků.

V našem příspěvku nejprve připomeneme místo teorie proporcí ve struktuře Eukleidova spisu, a rovněž naznačíme hlavní rysy této teorie. Poté se budeme věnovat užití teorie proporcí v šesté knize *Základů* a dále u Archiméda ze Syrákús a Apollónia z Pergy.

2 Teorie proporcí a její místo v Eukleidových *Základech*

Mezi třinácti autentickými knihami *Základů* nalézáme několik pasáží, které v jistém smyslu vybočují z celkového uspořádání. Samotný název *Základy* (*στοιχεῖα*) je odvozen od slov (*στοιχεῖον*), (*στοῖχος*), která v řečtině označují opracovaný blok kamene, vojáka stojícího v řadě, hlásku abecedy, obecně tedy člen doplňující posloupnost. Je rovněž užíván k označení čtyř živlů. Vžitý český překlad *Základy* je tedy poněkud zavádějící a je třeba mu rozumět ve smyslu *Základní prvky*. Má se pak jednat o základní prvky geometrie a aritmetiky. Rovinné geometrii jsou však věnovány knihy I–IV a VI, prostorové geometrii knihy XI–XIII a aritmetice knihy VII–IX. Zbývající knihy V a X jsou, stejně jako tzv. společné pojmy, věnovány obecné nauce o veličinách.[3]

2.1 Společné pojmy

Společné pojmy (*κοιναὶ ἔννοιαι*) jsou zařazeny na počátku první knihy a mají zcela obecný charakter. Jako příklad připomeňme první z nich: *Veličiny témuž rovné i navzájem rovny jsou.*[4] Aristotelés společné pojmy, které nazývá rovněž „axiomy“ či „společné úsudky“, považuje za o sobě jisté a nedokazatelné principy společné mnoha

---

[1] Diskusi objevu teorie proporcí z hlediska dochovaných pramenů lze nalézt v [2], díl 2, str. 508.

[2] Viz např. [3], str. 20.

[3] O knize X toto tvrzení platí jen částečně: ve své podstatě se zabývá především souměřitelností a nesouměřitelností obecných veličin, ale obsahuje i výsledky o konkrétních geometrických a aritmetických veličinách.

[4] Cituji dle [1]. Originál ovšem doslovně zní: *Co se rovná témuž, rovná se i navzájem*. Užití významově silně zatíženého termínu „veličina“, který se v originále objevuje až v V. knize, je z překladatelského hlediska na tomto místě nepřípustné a kvalitní cizojazyčné překlady se mu vyhýbají – viz např. [2], [6].

vědám. Jako příklad výslovně udává třetí z Eukleidových obecných pojmů: *Jestliže se od stejně velkých věcí odejmou stejně velké věci, pak se zbytky rovnají*. Tyto principy se podle Aristotela aplikují na každou vědu analogicky. Tak například ony „stejně velké věci“ nebudou tytéž v aritmetice a v geometrii.[5]

2.2 V. kniha *Základů*

V. kniha pokračuje v podobně obecném duchu. Jejími hlavními pojmy jsou: veličina (*μεγέθος*), poměr (*λόγος*) a úměra (*ἀναλογία*).[6] Podobně jako ostatní základní termíny není (a nemůže být) pojem *veličina* v *Základech* definován. Pojem *poměr* sice definován je, ale pouze jako vágní poukaz: *Poměr je jakýsi vztah* (*ποια σχέσις*) *dvou sourodých veličin podle jejich velikosti* (*κατὰ πηλικότητά*). Uchopitelná a následně v důkazech užitá je až definice totožnosti poměrů. Pomocí celých čísel jsou v ní poměry uspořádány s jemností, která odpovídá modernímu zavedení reálných čísel. Podle této definice rovnost poměrů A : B = C : D nastane, jestliže pro libovolná celá čísla *m*, *n* nastává mezi násobky *m*A a *n*B současně týž vztah nerovnosti či rovnosti jako mezi násobky *m*C a *n*D. Tato definice je matematicky velice hluboká a charakterizuje libovolný (i iracionální) poměr jeho postavením vůči poměrům celočíselným.[7] Zdůrazněme, že zatímco veličina A musí být stejného druhu jako B a veličina C stejného druhu jako D, naprosto není nutné, aby veličiny A, B byly stejného druhu jako C, D. Postačí, aby bylo možno znásobovat veličiny (přirozeným číslem) a porovnávat veličiny stejného druhu mezi sebou.[8]

Pro účely tohoto článku se z celého dalšího bohatého obsahu páté knihy omezíme pouze na základní technické manipulace s poměry a jejich rovnostmi, které jsou shrnuty v následující tabulce:

Mějme dánu rovnost poměrů A : B = C : D			
Pak platí rovnost	**Řecký termín**	**Latinský termín**	**Český překlad**
A : C = B : D	Ἐναλλὰξ	Alternado	Střídavě
B : A = D : C	Ἀνάπαλιν	Invertendo	Převráceně
(A + B) : B = (C + D) : C	Σύνθεσις	Componendo	Součtově
(A – B) : B = (C – D) : C	Διαίρεσις	Separando	Rozdílově
A : (A – B) = C : (C – D)	Ἀναστροφὴ	Convertendo	Obráceně

Jestliže je dána rovnost poměrů A : B = C : D, pak platí i rovnost dána střídavě, převráceně atd. (viz první sloupeček tabulky). Poměr, který nacházíme na levé straně rovnosti, se pak nazývá střídavým, převráceným atd. Názvy poměrů jsou zavedeny v definicích 12–15 a příslušné rovnosti poměrů jsou dokázány ve větách 16–19 páté knihy.

Abychom plně docenili význam uvedených rovností a řeckých i latinských termínů, je třeba si uvědomit, že až do 17. století se pro geometrii neužíval symbolický zápis. Vše bylo zapisováno slovním vyjádřením. Aby bylo možno sledovat řetězec odvozovaných

---

[5] Srv. Aristotelés, *Druhé analytiky*, 76b 11–16, viz [8].

[6] Z latinského *proportio*, kterým je překládáno řecké *ἀναλογία* pak vznikl i ustálený název *teorie proporcí.*

[7] Předpokládáme, že čtenáře je s touto klíčovou definicí a jejím matematickým významem obeznámen. Matematický rozbor lze nalézt kupříkladu v [3], str. 20, či v [4], díl I, str. 385. V těchto publikacích, nebo pochopitelně přímo v [1], je rovněž možno se seznámit s celkovým obsahem V. knihy *Základů*.

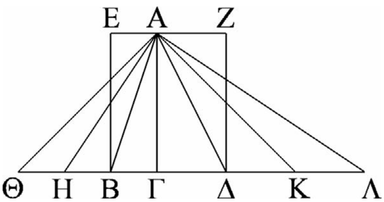
[8] Navíc Eukleidés postuluje tzv. Archimédův axiom, totiž aby se veličiny stejného druhu při znásobování vzájemně přesahovaly – tedy nepřipouští zde veličiny nekonečně malé.

rovností, bylo nezbytné mít standardizované „úpravy” rovností. Užitím termínu například „střídavě” se tedy autor odkázal nejen na všeobecně známý obrat, ale i přímo na příslušnou definici a větu *Základů*. Jak zmiňuje Leibniz, ještě v 17. století matematici znali Eukleidovo dílo tak dobře, že pro každé číslo věty ihned věděli její obsah. V současné době bychom příslušné klíčové slovo nejspíše nahradili jednoduchým „po úpravě”. Díky zběhlosti v úpravách výrazů by pak bylo jasné, jaká úprava vlastně byla provedena.[9]

3 Ukázky užití teorie proporcí

3.1 První věta šesté knihy *Základů*

Hned v první větě šesté knihy Eukleidés užívá definice rovnosti poměrů. Snadnost důkazu je třeba přičítat právě geniálnosti definice. Znění této věty je následující:

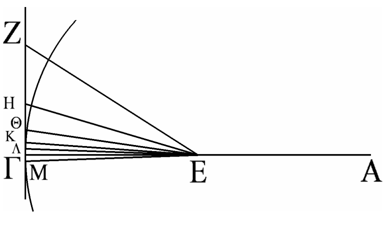


Trojúhelníky a rovnoběžníky s touž výškou se k sobě navzájem mají jako jejich základny. Mějme trojúhelníky ΑΒΓ a ΑΓΔ a rovnoběžníky ΕΓ a ΓΖ s touž výškou ΑΓ; tvrdím, že jako se má základna ΒΓ k základně ΓΔ, má se i trojúhelník ΑΒΓ k trojúhelníku ΑΓΔ a rovnoběžník ΕΓ k rovnoběžníku ΓΖ.

Při důkazu (zmíníme pouze případ trojúhelníků) Eukleidés užívá dříve dokázaného výsledku, že trojúhelníky se stejně velkou základnou a výškou mají stejný obsah. Nalevo od bodu Γ nanese libovolný počet (dnes bychom řekli m, obrázek znázorňuje situaci pro m = 3) úseček o délce ΒΓ. Stejně tak napravo nanese n-krát ΓΔ. Pro délky vzniklých úseček a obsahy trojúhelníků pak zjevně platí ΘΓ = mΒΓ, ΘΓΑ = mΒΓΑ, ΓΛ = nΓΔ a ΓΛΑ = nΓΔΑ. Ihned získáváme ekvivalence (mΒΓ <>= nΓΔ) $\Leftrightarrow$ (mΒΓΑ <>= nΓΔΑ). Tím je tedy splněna definice pro ΒΓ : ΓΔ = ΒΓΑ : ΓΔΑ.

3.2 Ukázka z Archimédova spisu *Měření kruhu*

Třetí věta Archimédova spisu je zcela zásadní pro celkový výsledek odhad čísla π. Na samém počátku odvození vidíme samozřejmost s jakou Archimédés užívá technických obratů.



Mějme kruh o průměru ΑΓ, středu Ε, ΓΛΖ nechť je tečnou a úhel ΖΕΓ nechť je třetinou pravého. ΕΖ je tedy k ΖΓ v poměru jako 306 : 153. ΕΓ je k ΓΖ v poměru větším než 265 : 153. Rozdělme úhel ΖΕΓ napůl úsečkou ΕΗ. Poměr ΖΗ k ΗΓ je tedy týž jako ΖΕ k ΕΓ[10] a rovněž střídavě a součtově. Takže ΖΕ se dohromady s ΕΓ má k ΖΓ stejně jako ΕΓ k ΓΗ. Takže poměr ΓΕ k ΓΗ je větší než poměr 571 : 153.

[9] V tomto kontextu je vhodné zdůraznit, že procvičování tzv. „úprav výrazů“, jemuž je věnována část výuky matematiky na základní a střední škole, je naprosto nezbytné – vytváří nutnou oporu matematického myšlení. Můžeme být jen vděčni, že máme k dispozici elegantní algebraický kalkulus a nemusíme trávit dlouhý čas zapisováním a úpravami slovních obratů.

[10] Zde Archimédés užívá klíčovou vlastnost pro svůj postup: Osa úhlu trojúhelníku dělí protilehlou stranu v poměru délek obou stran svírajících tento úhel. To je dokázáno v *Základech* – věta VI,3.

V tomto případě se tak z rovnosti poměrů ZH : HΓ = ZE : EΓ nejprve „součtově“ dovozuje rovnost (ZH + HΓ) : HΓ = (ZE + EΓ) : EΓ, posléze se „střídavě“ dovozuje (ZE + EΓ) : (ZH + HΓ) = EΓ : HΓ. Protože ZH + HΓ = ZΓ, dostáváme výslednou rovnost (ZE + EΓ) : ZΓ = EΓ : HΓ. Platí ZE : ZΓ = 306 : 153 a EΓ : ZΓ > 265 : 153 dostáváme, že EΓ : HΓ > 571 : 153, jak je uvedeno v textu.

3.3 Teorie proporcí v Apollóniových *Kuželosečkách*

Užití aparátu teorie proporcí u Apollónia nejlépe demonstrujeme tím, že do tištěné verze našeho příspěvku žádnou ukázku nezařadíme. Ve své práci *Kuželosečky* Apollónios odvozuje v prostoru základní vlastnosti kužele, které pak v osmi knihách svého spisu rozvíjí především úvahami rovinnými. Prostorový charakter kuželoseček spolu s faktem, že se jedná o křivky popsané kvadratickou vlastností, vede nezbytně k velmi bohatému a složitému užití teorie proporcí, které není možno zachytit v tomto článku. Spokojme se s konstatováním, že teorie kuželoseček byla v jazyce proporcí studována od Apollónia až do konce 17. století. Posledním z monumentální svazků přeplněných obraty náležejícími do světa teorie proporcí bylo zřejmě dílo Philippa de La Hire *Sectiones conicae* [5].

4 Závěr

V našem krátkém příspěvku jsme se nejprve věnovali výjimečnému postavení, které má kniha V v rámci Základů. S určitou nadsázkou by se dalo říci, že spolu se společnými pojmy by mohla tvořit samostatné dílo.

Pokusili jsme se rovněž obrátit pozornost na úlohu teorie proporcí jako jazyka a nástroje matematické práce. V tomto světle získávají poněkud nudné a zdlouhavé pasáže páté knihy Eukleidových *Základů* nový význam. Zároveň tak chceme upozornit na prospěšnost četby významných matematických pasáží v doslovném překladu. Tímto způsobem je možno dospět k porozuměním, která by zůstala ztracena při převodu autorova postupu do moderního symbolického zápisu.

Literatura

[1] *Eukleidovy základy*, př. F. Servít, Praha, 1907, 314 stran.

[2] *Les Eléments*, př. a kom. B. Vitrac, díly I–IV, Paris, 1990–2001.

[3] Bečvář J.: *Hrdinský věk řecké matematiky II*, in Bečvář J., Fuchs E.: Historie matematiky II, Prometheus, Praha, 1997.

[4] Heath T. L.: *A History of Greek Mathematics*, díly I-II, Oxford, 1921.

[5] La Hire Ph.: *Sectiones conicae in novem libros distributae*, Paris, 1685.

[6] *The Elements*, př. a kom. T. L. Heath, díly I–III, New York, 1956.

[7] Zeuthen H. G.: *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, Copenhagen, 1886.

[8] Aristotelés: *Druhé analytiky*, př. Antonín Kříž, Praha, 1962.

Adresa

RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: *zbynek.sir@mff.cuni.cz*

PRAVDĚPODOBNOST A NAŠE ZDRAVÍ

MILENA ŠPINKOVÁ[1]

1 Úvod

Pravděpodobnost a statistika nás provázejí po celý náš život. Už to, jací jsme se narodili, je výsledkem řetězce náhodných jevů. Člověk navíc svojí činností pravděpodobnost určitých jevů mění a ovlivňuje. Ještě před sto lety byla pravděpodobnost, že člověk zemře následkem dopravní nehody či pádu letadla, velice malá. Naopak pravděpodobnost, že zemře v důsledku zánětu či infekční choroby, byla vyšší, než je tomu dnes.

Přesto je vztah společnosti k pravděpodobnosti a statistice spíše negativní. Učitelé, údajně z nedostatku času, tuto látku vynechávají. Vždyť „se jedná jenom o kostky a mince“. Je to však omyl, jedná se o naše životy (kostky i mince jsou pouze nejjednodušší myslitelné modely základních situací). Proto jsem se v tomto příspěvku zaměřila na vybrané historické události a osobnosti, které pomohly zařadit pravděpodobnostní a statistické metody do boje s infekčními chorobami a šířením nákazy – viz také [1].

2 Stanovení účinnosti nových léků

Johannes von Kries (1853–1928) se zabýval pravděpodobností i filosofií, ale především to byl lékař a profesor fyziologie na univerzitě ve Freiburgu [2, 3]. Věnoval se experimentům na nervovém systému a jeho spojích (synapsích) s motorickými a senzorickými orgány a jeho zájem o pravděpodobnost byl mimo jiné spojen s měřením účinnosti nových léků. Zatím co při hodu kostkou máme 6 stejně pravděpodobných výsledků, zásadním problémem pro Kriese bylo v souvislosti s chorobami a jejich léky definovat soubor možných jevů. Jak můžeme určit, že lék byl účinný proti určité nemoci? Je lék účinný, i když pacient zemře o 10 dní později nebo když úspěšná léčba přivodí nějakou jinou nemoc? Měli bychom nahlížet stejně na všechny různé podoby jedné nemoci? Jak stanovit hranice mezi nemocemi, které mají stejné příznaky?

Již v 19. století upozorňoval na obtíže při aplikacích statistiky v lékařství. Pacienti, kteří onemocněli nějakou chorobou, nejsou nestranným výběrem – vybrala je choroba, a navíc jejich onemocnění nemá stejný stupeň, protože ten nedovedeme spolehlivě určit. Také schopnost pacientů uzdravit se i bez léku je různá. Konkrétní studovaný soubor je tedy v nejlepším případě nestranným výběrem z populace těch nemocných danou chorobou, kteří navštívili lékaře. Zejména při sledování dlouhodobých chorob je dalším problém úbytek pacientů (přestěhování, úmrtí z jiných příčin atd.) v průběhu pokusu. Pro testování účinků léku se využívají také zdraví dobrovolníci; ti sice mohou být vybráni nestranně, ale jejich reakce na lék může být zásadně odlišná od reakce nemocných. Dokonce podávaný lék může být pro zdravé jedince nebezpečný.

3 Očkování – dobrodiní z kravského vemene

Osmnácté století bylo stoletím hrůzy z neštovic. Koncem sedmnáctého století proběhly epidemie jak v Anglii, tak v Nové Anglii, kde evropským dobyvatelům usnadnily podrobení nového kontinentu. Neštovice byly příčinou každého pátého úmrtí

[1] Práce byla podpořena grantem AV ČR IAA 100110502 a projekty MSM 0021620839 a AVOZ 10190503.

a dostal je prakticky každý. Učedníci a sloužící se najímali s ohledem na to, zda prodělali neštovice, aby se jejich páni vyhnuli nákaze a případné smrti.

Už staří Číňané zřejmě proti pravým neštovicím „očkovali“ šňupáním zaschlých stroupků z kůže nemocných. Také v Turecku se očkování provádělo po celé generace. Zkušené staré ženy navštěvovaly shromážděné zájemce o očkování v počtu kolem patnácti a pomocí jehly jim vpravovaly hnis z neštovic do žíly.[2] Tato metoda nadchla manželku britského velvyslance v Konstantinopoli Lady Mary Wortley Montagu (1689–1762). Ona sama totiž ve věku dvaceti šesti let onemocnění neštovicemi sice přežila, ale zůstala trvale zohyzděna. Její mladší bratr na neštovice zemřel. Dala proto se vší rozhodností v roce 1718 očkovat svého šestiletého syna, po návratu do Anglie také svou dceru a doporučila to i celému dvoru. Snažila se tuto proceduru prosadit i ve společnosti, ale nedůvěra lékařů, církve i celé společnosti byla veliká. Přesto získala od Karolíny, princezny z Walesu, povolení učinit demonstrativní experiment na 6 vězních a 6 sirotcích. Výsledek byl příznivý a Mary získala od Karolíny souhlas.

Očkování bylo sice úspěšné, ale se značným rizikem propuknutí nákazy a vyvolalo také teoretickou diskusi o jeho racionalitě a rozhodování se mu podrobit. Daniel Bernoulli přednesl roku 1760 ve Francouzské akademii věd svůj odhad poklesu úmrtnosti na neštovice díky očkování. D’Alembert jeho studii zpochybnil poukazem na to, že Bernoulli neuvažuje psychologické aspekty, které mohou u některých lidí vést k jeho odmítnutí. Riziko spojené s očkováním odstranil až Edward Jenner (1749–1823), který v roce 1796 přenesl hnis z kravských neštovic do škrábnutí osmiletého Jamese Phippse. Dva měsíce po očkování ho infikoval hnisem z lidských pravých neštovic a nic se nestalo. Po několika měsících to zopakoval a zase se nic nestalo. Od té doby se pro takovou aktivní imunizaci používá termínu vakcinace (vacca = kráva).

4 Žlutá zimnice – první mapa šíření choroby

Jedním z inovativních a praktických použití grafického zobrazování bylo použití map ke znázornění šíření choroby. Přes 200 let badatelé užívali mapy k vizualizaci výskytu choroby a počty úmrtí pro odhalení vodítek k identifikaci zdrojů rizik.

Zatímco moderní mapy jsou často zaměřeny na rakovinu nebo jiné endemické nákazy, časné mapy pracovaly s děsivými epidemiemi, jakými byly např. cholera a žlutá zimnice. Mapy šíření nákazy vděčí za svůj překotný vývoj obrovské výzvě, kterou epidemické vzplanutí představovalo, na rozdíl od endemických nemocí, které jsou více méně stabilně aktivní. Obrovský stimul pro kartografickou tvořivost znamenal mor, žlutá zimnice a cholera – všechny exotické nemoci – jimž tuberkulóza nemohla konkurovat.

Na příklad velká epidemie žluté zimnice, která se rozšířila v New York City na konci 18. století [5], podnítila Dr. Valentine Seamana (1770–1817) k vytvoření bodové mapy úmrtí na žlutou zimnici v dnešní části Lower East Side Manhattanu, která je považována za první epidemiologickou mapu. Zdroj nákazy a způsob jejího přenosu byl v té době předmětem vášnivých debat. Na rozdíl od většiny představitelů medicíny, kteří věřili, že nákaza se přenáší z člověka na člověka, Seaman tvrdil, že k přenosu choroby vedou

[2] There is a set of old women, who make it their business to perform the operation, every autumn, in the month of September, when the great heat is abated. People send to one another to know if any of their family has a mind to have the small-pox; they make parties for this purpose, and when they are met (commonly fifteen or sixteen together) the old woman comes with a nut-shell full of the matter of the best sort of small-pox, and asks what vein you please to have opened. She immediately rips open that you offer to her, with a large needle (which gives you no more pain than a common scratch) and puts into the vein as much matter as can lie upon the head of her needle, and after that, binds up the little wound with a hollow bit of shell, and in this manner opens four or five veins (dopis Lady Montagu adresovaný Mrs. S. C. z Adrianopole [4]).

nečisté podmínky a přímý kontakt s nakaženou osobou nebo objektem. Použil tedy svou mapu k demonstraci souvislosti mezi úmrtím na žlutou zimnici, a jak říkal „zahnívajícím zápachem“. Zaměřil se zejména na odvodňovací kanál na Roosvelt Street, který považoval za zdroj nákazy, dlužno podotknout, že tento kanál byl pokryt množstvím rozkládajících se materiálů. Pomocí své mapy ukázal úzký vztah mezi výskytem choroby a polohou kanálu a vyčištěním označených míst došlo k dočasnému omezení epidemie.

Později se ukázalo, že Seamanova domněnka byla nesprávná, příčinou infekce nebyly zahnívající zbytky, ale moskyti. Více než 100 let po publikaci Seamanovy mapy v *The Medical Repository* (1798) prokázali Walter Reed a Reedův zmocněnec na Kubě během španělsko-americké války, že za šíření této nákazy je zodpovědný moskyt *Aedes aegypti.* To však nic nemění na objevené korelaci mezi výskytem choroby a kanálem, kde se moskyti množili. Navzdory Seamanově nesprávné teorii o přenosu žluté zimnice, neztrácí jeho příspěvek ke kartografii na důležitosti.

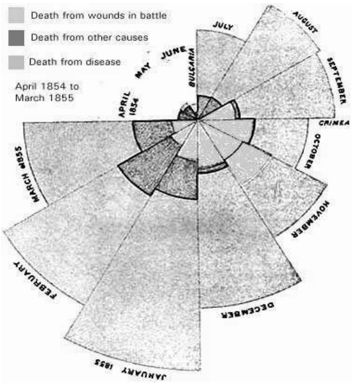
5 Cholera v Londýně – John Snow první epidemiolog

Mapa rozmístění bydlišť obětí cholery kolem nakažené studny

Ve 40. létech 19. století se v Londýně velmi rozšířila cholera. Částečně to bylo způsobeno používáním moderních splachovacích záchodů. Ty sice byly značným pokrokem ve srovnání s nočníky (které dříve používala většina obyvatel Londýna), zároveň však zvýšily spotřebu vody. Vzniklé splašky byly odváděny do žump napojených na veřejnou kanalizaci, která byla původně navržena pro odvod dešťové vody; současně do ní byly odváděny i odpady z továren a zápach splašků odtékajících do Temže zamořoval město silným zápachem a tak vznikla představa, že se cholera šíří vzduchem. Až v roce 1854 londýnský lékař John Snow (1813–1858) při epidemii cholery v Soho zakreslil počty obětí do mapy a zjistil, že zdrojem přenosu je voda [6]. Uvědomil si, že choroba se vyhýbá dělníkům docházejícím do zamořené oblasti a pijícím pivo nebo víno. Na rozdíl od toho místní obyvatelé, kteří pili vodu ze stejného zdroje vody, na choleru onemocněli. V roce 1848 byla ustanovena Metropolitní komise pro kanalizaci – sdružení místních úřadů pro řešení problémů s odváděním odpadních vod.

6 Krymská válka – čistota a pořádek

V roce 1854 začala Krymská válka, ve které bojovaly Anglie a Francie proti Rusku. Florence Nightingalová (1829–1910), jenž pocházela z úspěšné, vzdělané a vlivné anglické rodiny, napsala dopis válečnému sekretáři a nabídla mu svoji pomoc. Po příjezdu do nemocnice ve Scutari, která vznikla z kasáren prostým vybílením, zajistila pečlivý úklid, vybudování toalet a zřízení vývařovny a prádelny, čímž se postarala o hygienické potřeby, oblečení a stravování místní britské posádky. Florence Nightingalová shromažďovala zjištěná data, sestavovala časové tabulky úmrtí pacientů podle příčin a jimi dokazovala nedostatečnost nemocniční hygieny v polních podmínkách. Během půl roku se snížila úmrtnost raněných vojáků z neuvěřitelných 60% na udivující 2%. Jako první v historii zavedla radiální grafy, na nichž demonstrovala ohromující poměry mezi počty vojáků zemřelých v britské armádě na následky zranění (plochy středních úsečí) a v důsledku infekčních chorob (vysoce převažující plochy vnějších úsečí). Po návratu do Anglie měla Florence Nightingalová značný podíl na zásadním zlepšení armádní a posléze i všeobecné nemocniční péče. Byla výbornou organizátorkou a zastávala tři zásady úspěšné politiky: Vědět, co chcete, vědět od koho to žádat a vědět, jak dlouho si můžete dovolit čekat. Z bohaté literatury zabývající se Florence Nightingalovou připomeňme alespoň slavnou esej Lyttona Strachey [7].



Graf úmrtí vojáků podle příčin

7 Závěr

Uvedené příklady ukazují, že schopnost zpracovávat a správně vyhodnocovat statistická data může vést k zásadním vědeckým objevům a záchraně lidských životů. Proto pravděpodobnostní myšlení, schopnost pracovat s daty, jejich grafické vyjádření a statistická interpretace by měla být důležitou součástí systematického vzdělávání každého občana.

Literatura

[1] Saxl I., Ilucová L.: *Historie grafického zobrazování*. In: M. Bečvářová, J. Bečvář (eds): *Matematika v proměnách věků V*, Edice Dějiny matematiky, svazek č. 33, Matfyzpress, Praha, 2007, 97–136.

[2] Fioretti G.: *Von Kries and the other ´German logicians´: Non-numerical probabilities before Keynes*. Economics and Philosophy 17(2001), 245–273.

[3] Pivoňková M.: *Logická interpretace pojmu pravděpodobnost*. Ročníková práce, Filozofická fakulta UK, Praha, 2006.

[4] Montague M. W, Lady: *Letters of the Right Honourable Lady M--y W--y M--e: Written During her Travels in Europe, Asia and Africa ...* Printed for Thomas Martin, London, 1790, dopis č. 31 v internetovém vydání www.gutenberg.org/etext/17520.

[5] Arnebeck B.: *Destroying Angel: Benjamin Rush, Yellow Fever and the Birth of Modern Medicine.* http://www.geocities.com/bobarnebeck/fever1793.html (kniha napsaná pro internet, 1999).

[6] Snow J.: *On the Mode of Communication of Cholera*. John Churchill, London, 1855 (http://www.ph.ucla.edu/epi/snow/snowbook4.html).

[7] Strachey L.: *Eminent Victorians*. G. P. Putnam’s Sons, New York, 1918 (na internetové stránce http://www.bartleby.com/189/206.html je volně ke stažení).

Adresa

Mgr. Milena Špinková
Matematický ústav AV ČR
Žitná 25
115 67 Praha 1
e-mail: *milena.sp@centrum.cz*

CREMONOVY TRANSFORMACE A JEJICH CESTA Z MILÁNA DO PRAHY

DANA TRKOVSKÁ

1 Luigi Cremona (1830–1903)

L. Cremona se narodil 7. prosince 1830 v Pavii (Lombardie, dnešní Itálie). Vystudoval zde gymnázium, poté jej politické události revolučního roku 1848 přiměly další studia přerušit, zúčastnil se ozbrojené obrany Benátek před vpádem rakouského vojska. Po návratu do Pavie pokračoval ve studiu na tamní univerzitě, vystudoval pozemní stavitelství. Z politických důvodů neměl šanci získat oficiální učitelské místo, proto zpočátku působil jako soukromý učitel u několika rodin v Pavii. Přitom se věnoval matematickému bádání, v březnu 1855 sepsal svůj první matematický článek, který zřejmě ovlivnil jeho další působení. Získal povolení učit na přechodnou dobu fyziku na gymnáziu, kde sám dříve studoval. V květnu 1856 sepsal další matematický článek, který mu spolu s pověstí výborného učitele umožnil získat v prosinci 1856 místo mimořádného profesora na gymnáziu, v lednu 1857 byl jmenován profesorem řádným.

Roku 1859 došlo k osvobození Itálie a L. Cremona již dále nemusel z politických důvodů zůstávat v ústraní; 28. listopadu 1859 nastoupil jako profesor na *Liceo S Alessandro* v Miláně, 10. června 1860 byl na základě královského výnosu jmenován řádným profesorem vyšší geometrie na univerzitě v Bologni. Zde setrval do října 1867. Během této doby L. Cremona rozvinul teorii biracionálních transformací, později známých jako tzv. *Cremonovy transformace*, a sepsal své nejvýznamnější práce věnované transformacím rovinných křivek, za něž roku 1864 získal tzv. *Steinerovu cenu*.[1]

V říjnu 1867 byl L. Cremona dalším královským výnosem povolán na *Regio Istituto Tecnico Superiore di Milano*, kde mu byl udělen profesorský titul. Roku 1873 bylo L. Cremonovi nabídnuto místo generálního tajemníka nově ustavené italské vlády. Ačkoliv si této nabídky velmi vážil, odmítl ji, neboť se chtěl věnovat matematickému bádání. V říjnu 1873 přesídlil do Říma, kde byl jmenován ředitelem a profesorem nově založené školy *Scuola degli ingegneri in Roma*. V listopadu 1877 byl L. Cremona přijat na stolici vyšší matematiky na univerzitě v Římě. Cítil však, že by měl přeci jen vstoupit do politiky. Roku 1879 byl zvolen senátorem, v následujících letech působil ve funkci ministra školství a svou politickou kariéru zakončil jako víceprezident senátu.

Luigi Cremona zemřel na infarkt 10. června 1903 v Římě.

L. Cremona svými pracemi významně ovlivnil nejen italskou geometrii, byl jedním ze zakladatelů nové italské matematické školy, přepracoval a dokázal řadu tvrzení syntetické geometrie, objevil grafické metody řešení problémů statiky. Je autorem více než stovky vědeckých prací, v nichž se věnoval zejména projektivní a algebraické geometrii, grafické statice a aplikacím algebraických metod v geometrii.

[1] Cena byla pojmenována na počest významného švýcarského matematika Jacoba Steinera (1796–1863), který se věnoval syntetické a projektivní geometrii. Byla udělována Berlínskou akademií zpočátku každé dva roky, později každých pět let za nové výsledky v oblasti syntetické geometrie. Poprvé byla udělena roku 1864, kdy ji společně s L. Cremonou získal Rudolf Sturm (1841–1919), který se věnoval projektivní reprezentaci kubických ploch. L. Cremona tuto cenu obdržel ještě v roce 1874.

Mezi jeho nejvýznamnější práce patří *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (1862), *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* (1863, 1865), *Preliminari di una teoria geometrica della superficie* (1867), *Elementi di geometria projettiva* (1873), *Elementi di calcolo grafico* (1874), *Graphical Statics. Two Treatises on the Graphical Calculus and Reciprocal Figures in Graphical Statics* (1890).

Během života se mu dostalo několika ocenění. Roku 1879 byl jmenován dopisujícím členem Královské společnosti v Londýně a roku 1883 členem Královské společnosti v Edinburghu. Dále byl členem akademií a vědeckých společností v Bologni, Neapoli, Göttingen, Lisabonu, Benátkách, mimo jiné od roku 1871 prvním zahraničním čestným členem Jednoty českých matematiků.

2 Cremonovy (biracionální) transformace

Biracionální transformací rozumíme každou geometrickou transformaci, kterou lze analyticky vyjádřit pomocí racionálních funkcí nehomogenních souřadnic a která má tu vlastnost, že také inverzní transformaci lze vyjádřit racionálními funkcemi příslušných souřadnic. V homogenních souřadnicích jsou biracionální transformace a transformace k ní inverzní vyjádřeny pomocí homogenních polynomů.

Cremonovou transformací rozumíme každou biracionální transformaci projektivního prostoru dimenze n nad nějakým tělesem K. Cremonovy transformace daného prostoru tvoří grupu, kterou nazýváme *Cremonovou grupou*.

Nejjednodušším příkladem Cremonovy transformace je *kruhová inverze v rovině*, která zobecněné kružnice (kružnice nebo přímky) zobrazuje opět na zobecněné kružnice. Inverze byla první netriviální geometrickou transformací, která byla v souvislosti s biracionálními transformacemi studována. Dalším příkladem Cremonových transformací jsou *kvadratické biracionální transformace roviny*, které lze v nehomogenních souřadnicích vyjádřit lineárními lomenými funkcemi.

Jak kruhová inverze, tak kvadratické biracionální transformace jsou transformacemi druhého stupně.[2] Luigi Cremona se ve své práci *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* [O geometrických transformacích rovinných útvarů] zabýval otázkou, jak sestrojit obecnou biracionální transformaci libovolného stupně, tj. jak sestrojit transformaci, která přímky zobrazí na křivky libovolného stupně. Přitom odvodil dvě základní rovnice, které musí splňovat počty bodů společných všem takovým křivkám;

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + \dots + (n-1)^2 x_{n-1} = n^2 - 1, \tag{1}$$

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 + \dots + \frac{n(n-1)}{2} x_{n-1} = \frac{(n-1)(n+4)}{2}, \tag{2}$$

kde n je stupeň křivky, která při transformaci odpovídá libovolné přímce, x_r značí počet r-násobných bodů společných všem křivkám, které odpovídají přímkám.

Křivky příslušející při Cremonově transformaci přímkám tedy musí mít společný jistý počet (jednoduchých i vícenásobných) bodů, které nazýváme *fundamentálními body* dané transformace. Počet fundamentálních bodů přitom musí vyhovovat rovnicím (1) a (2). Tyto rovnice mají obecně více řešení, každé řešení pak určuje speciální transformaci.

[2] Stupněm transformace rozumíme stupeň křivky, na kterou se při této transformaci zobrazí obecná přímka.

Cremonovu transformaci získáme také složením libovolné posloupnosti kolineací (tj. lineárních transformací) a tzv. standardních kvadratických transformací. Obecné kvadratické transformace mají přitom v teorii Cremonových transformací fundamentální význam. Podle tzv. *Noetherova faktorizačního teorému*[3] totiž platí:

Je-li těleso K algebraicky uzavřené, lze každou Cremonovu transformaci projektivní roviny nad tělesem K složit z konečné posloupnosti kvadratických transformací.

Nezávisle na M. Noetherovi faktorizační teorém objevil také německý matematik Jacob Rosanes (1842–1922), který navíc dokázal, že každá vzájemně jednoznačná algebraická transformace roviny musí být Cremonovou transformací.

Při Cremonových transformacích se obecně nezachovává stupeň[4] ani třída[5] algebraických křivek, ale zachovává se jejich rod.[6] Cremonovy transformace rovinných algebraických křivek se využívají k redukci jejich singularit.

Cremonovy transformace vícedimenzionálních prostorů jsou značně složitější než transformace roviny. Hlavním důvodem je skutečnost, že na rozdíl od roviny v prostorech vyšší dimenze Cremonova transformace a její inverze nemusí být nutně stejného stupně. Nejvýznamnějším obecným výsledkem týkajícím se Cremonových transformací trojrozměrného prostoru je tzv. *Hudsonové faktorizační teorém*[7]:

V trojrozměrném prostoru neexistuje konečná množina typů Cremonových transformací, z nichž by bylo možno složit libovolnou Cremonovu transformaci tohoto prostoru.

3 Vliv na českou geometrickou školu

V českých zemích se problematikou biracionálních transformací zabývalo několik matematiků. Velké zásluhy na tom má Emil Weyr (1848–1894), který se geometrii začal věnovat kolem roku 1868, kdy ještě během studia pracoval jako asistent na pražské univerzitě. V roce 1869 získal doktorát filozofie v Lipsku, roku 1870 byl jmenován soukromým docentem novější geometrie na pražské univerzitě. O rok později získal místo mimořádného profesora matematiky na české polytechnice v Praze, roku 1875 byl povolán jako řádný profesor na vídeňskou univerzitu s odůvodněním, aby tam přednášel novou geometrii úspěšně rozvíjenou právě v Praze.

Emil Weyr se zpočátku zajímal o jedno-víceznačné geometrické transformace, ke kterým dospěl rozšířením principu korespondence naznačeného v Chaslesově *Aperçu historique* z roku 1837. V obsáhlých, německy psaných monografiích[8] z let 1869 a 1870 ukazuje, že vedle bijektivního vztahu vyjadřujícího jedno-jednoznačnou projektivní transformaci existují mezi dvěma útvary také zobrazení, která danému prvku jednoho útvaru přiřazují více prvků útvaru druhého a naopak.

[3] Max Noether (1844–1921), německý matematik, který se věnoval zejména algebraické geometrii.
[4] Stupněm algebraické křivky rozumíme maximální možný počet jejích průsečíků s obecnou přímkou.
[5] Třídou algebraické křivky rozumíme maximální možný počet tečen křivky jdoucích jedním bodem.
[6] Rod rovinné algebraické křivky n-tého stupně závisí na počtu a druhu singularit této křivky; pro daný stupeň n odpovídá maximální možná hodnota rodu regulární křivce, tj. křivce bez jakýchkoliv singularit.
[7] Hilda Phoebe Hudson (1881–1965), anglická matematička, která se věnovala teorii Cremonových transformací.
[8] Emil Weyr: *Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Curven und Flächen als deren Erzeugnisse*, Leipzig, 1869; *Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zwei-deutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung*, Leipzig, 1870.

Ve školním roce 1870/71 Emil Weyr absolvoval studijní pobyt v Miláně, při kterém navázal pracovní i přátelské vztahy s italskými geometry, zejména s Luigi Cremonou. Navštěvoval některé jeho přednášky, diskutovali spolu o geometrických otázkách. Byl prvním českým matematikem, který pochopil základní význam Cremonových geometrických prací o teorii biracionálních transformací pro další rozvoj projektivní geometrie. Po svém návratu do Prahy dvě nejvýznamnější Cremonovy práce přeložil do češtiny (viz [5] a [6]).

Společně se svým bratrem Eduardem Weyrem (1852–1903) je autorem první česky psané učebnice projektivní geometrie *Základové vyšší geometrie*, která vycházela v letech 1871 až 1878 ve třech pokračováních jako příloha časopisu Živa. Tato učebnice byla napsána s využitím francouzských a německých zdrojů, obsahuje základní i speciální látku doplněnou o vlastní vědecké výsledky a ve své době výrazně přesáhla úroveň tehdejší české odborné literatury.

Dalším matematikem, který se v Praze věnoval problematice biracionálních transformací, byl Seligmann Kantor (1857–1902), soukromý docent německé univerzity v Praze, který ve své práci *La trasformazione birazionale* z roku 1883 vyřešil úlohu zadanou neapolskou akademií, a to nalézt v rovině periodické Cremonovy transformace, které po *n*-násobném užití převádí geometrický objekt sám v sebe.

Literatura

[1] Hudson H. P.: *Cremona Transformations in Plane and Space*. Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

[2] Coolidge J. L.: *A Treatise on Algebraic Plane Curves*. Dover Publications, New York, 1959.

[3] Coolidge J. L.: *A History of Geometrical Methods*. Dover Publications, Mineola, New York, 2003.

[4] Čižmár J.: *Biracionálne transformácie 1860–1960, historický prehľad*. In: Bečvář J., Fuchs E. (ed.): Matematika v proměnách věků I, Dějiny matematiky, svazek 11, Prometheus, Praha, 1998, 79–98.

[5] Weyr E.: *Cremonovy geometrické transformace útvarů rovinných*. Živa X., nákladem Musea království Českého, Praha, 1872.

[6] Weyr E.: *Úvod do geometrické theorie křivek rovinných*. Jednota českých mathematiků, Praha, 1873.

[7] Bečvář J., Bečvářová M., Škoda J.: *Emil Weyr a jeho pobyt v Itálii v roce 1870/71*. Dějiny matematiky, svazek 28, Nakladatelství ČVUT, Praha, 2006.

[8] Folta J.: *Česká geometrická škola – Historická analýza*. Studie Československé akademie věd 9, Academia, Praha, 1982.

Adresa

Mgr. Dana Trkovská
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: *trkovska@karlin.mff.cuni.cz*

ZROD VEKTOROVÉHO POČTU A VEKTOROVÝCH PROSTORŮ

EVA ULRYCHOVÁ

1 Úvod

Lineární algebra má historické kořeny nejen v několika odvětvích matematiky – v geometrii, algebře a analýze, ale i ve fyzice a v dalších oborech. Zrod vektorového počtu je spojen jednak s objevem znázornění fyzikálních sil pomocí rovnoběžníku, jednak s objevem komplexních čísel a jejich geometrické interpretace, a zejména se vznikem a rozvojem teorie hyperkomplexních čísel. Vektor byl původně chápán jako orientovaná úsečka nebo jako uspořádaná dvojice či trojice reálných čísel. K zobecnění pojmu vektor a rozvoji myšlenek vedoucích ke vzniku definice vektorového prostoru v dnešním slova smyslu došlo až v druhé polovině 19. století. První axiomatická definice reálného vektorového prostoru, která je prakticky shodná s dnešním pojetím, pochází z r. 1888 od italského matematika Giuseppe Peana (1858–1932). Ani tehdy však myšlenka vektorového prostoru jako množiny prvků s axiomaticky definovanými operacemi nedošla všeobecného rozšíření. K tomu došlo až v první polovině 20. století.

2 Zrod vektorového počtu

2.1 Inspirace fyzikálními zákony

V r. 1687 uvedl anglický matematik, fyzik a filozof Isaac Newton (1643–1727) v díle Principia mathematica ideu znázornění skládání sil pomocí rovnoběžníku. Ačkoliv ještě nezformuloval exaktní ideu vektoru, byl jí blízko; zjistil totiž, že síly mající velikost i směr, mohou být „sčítány” a vytvořit tak novou sílu.

2.2 Inspirace komplexními čísly

Vznik vektorového počtu byl podnícen objevem komplexních čísel. Je zajímavé, že na přelomu 18. a 19. století v některých případech došli ke stejným závěrům hned dva autoři současně.

V r. 1799 nezávisle na sobě objevili dva badatelé myšlenku geometrické interpretace komplexních čísel: norský kartograf a geodet Caspar Wessel (1745–1818) v rámci řešení geodetických úloh podal základy vektorového počtu v rovině. Ve svém článku z r. 1799 jako první předložil geometrickou interpretaci komplexních čísel a operací s nimi jakožto s body či vektory v rovině. Snažil se nalézt analogii i pro trojrozměrný prostor. Ve své době nevzbudil článek psaný dánsky žádný zájem; ve známost vešel až o 100 let později, kdy byl vydán ve francouzském překladu – v době, kdy už publikovali myšlenku geometrické interpretace komplexních čísel i další autoři. Podle [4] ve stejné době vypracoval geometrickou interpretaci komplexních čísel i německý matematik a fyzik Carl Friedrich Gauss (1777–1855), své výsledky však publikoval až r. 1831. Stejně jako Wessel pokoušel se i Gauss o vytvoření čísel podobných komplexním, která by byla reprezentována body v trojrozměrném prostoru.

V r. 1806 se geometrickou interpretací komplexních čísel zabývali ve svých publikacích další dva autoři: amatérský francouzský matematik Jean Robert Argand (1768–1822) a abbé Bueé (1746–1826). V r. 1828 nezávisle na předchozích autorech uvádějí ve svých pracích geometrickou interpretaci komplexních čísel i Angličan John Warren a Francouz C. V. Mourey (1796–1852). Zatímco Warren se nezabýval možností rozšíření systému do tří dimenzí, Mourey považoval takové rozšíření za možné.

K všeobecnému rozšíření myšlenky interpretovat komplexní čísla jako body roviny došlo zejména po vydání Gaussovy práce *Theoria residuorum biquadraticorum* v r. 1831, v níž byl charakter komplexních čísel srozumitelně vysvětlen.

Rozvoj myšlenek spjatých s komplexními čísly se úzce pojí se jménem irského matematika, fyzika a astronoma Williama Rowana Hamiltona (1805–1865). V článku z r. 1833 reprezentoval Hamilton komplexní čísla jako dvojice reálných čísel s operacemi sčítání a násobení:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \qquad (x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx').$$

Komplexní čísla tedy Hamilton chápal jako dvousložková; další léta věnoval pokusům o nalezení obdobných čísel třísložkových. Hamilton zřejmě chápal význam asociativity, komutativity a distributivity operací, což nebylo samozřejmé v době, kdy nebyly známy výjimky z těchto pravidel.

Rozšířením oboru komplexních čísel na čísla třísložková (či vícesložková) se v té době zabývali i další matematici, zejména Arthur Cayley (1821–1895), bratři Charles (1810–1860) a John (1806–1870) Gravesovi a další. Až později bylo dokázáno, že rozšíření na třísložková čísla možné není.

V r. 1843 se však podařil Hamiltonovi významný objev – objev čtyřsložkových čísel, tzv. kvaternionů, tj. čísel tvaru $u + xi + yj + zk$, kde u, x, y, z jsou reálná čísla a i, j, k jsou různé imaginární jednotky s danými pravidly násobení. Operace s kvaterniony jsou definovány analogicky k operacím s komplexními čísly (násobení kvaternionů ovšem není komutativní). Hamilton si byl vědom důležitosti svého objevu a tématu kvaternionů věnoval v následujících letech mnoho dalších prací. V r. 1846 publikoval článek, ve kterém se poprvé objevily termíny skalár a vektor v následujícím smyslu: kvaternion $q = u + xi + yj + zk$ se dělí na skalární část (u) a vektorovou část ($xi + yj + zk$), kterou lze chápat jako uspořádanou trojici reálných čísel. Zde se už zřetelně objevily základy vektorového počtu: při sčítání kvaternionů se samostatně sčítají skalární a vektorové části, výsledkem násobení skalárních kvaternionů (tj. kvaternionů s nulovou vektorovou částí) je opět skalární kvaternion, při násobení vektorového kvaternionu skalárním je výsledkem skalární násobek vektorového kvaternionu. Násobíme-li dva vektorové kvaterniony (tj. kvaterniony s nulovou skalární částí),tzn.

$$q = xi + yj + zk \qquad \text{a} \qquad q' = x'i + y'j + z'k,$$

je jejich součinem kvaternion

$$qq' = -(xx' + yy' + zz') + (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - yx')k.$$

Skalární část kvaternionu qq' je tedy (v současném pojetí) rovna záporně vzatému skalárnímu součinu vektorů q a q' (jakožto uspořádaných trojic (x, y, z) a (x', y', z')) a vektorová část je rovna vektorovému součinu q a q'.

2.3 Inspirace geometrickými objekty

Komplexní čísla nebyla jediným zdrojem inspirace zrodu vektorového počtu.V polovině 19. stol. se několik matematiků zabývalo operacemi s (většinou geometrickými) objekty, které by v dnešním pojetí vektorových prostorů jakožto systémů prvků obecného charakteru mohly být považovány za vektory. Už německý matematik Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) se zabýval myšlenkou vytvořit oblast matematiky, která by pracovala s objekty jako algebra s čísly. Tato myšlenka došla naplnění až v 19. století.

V r. 1827 vydal německý matematik August Ferdinand Möbius (1790–1868) práci *Der barycentrische Calcul*, v níž se poprvé objevila rovnice $u = B - A$, která svazuje body a vektory.

V r. 1835 uvedl Giusto Bellavitis (1803–1880) ve své geometrické práci představu systému objektů – úseček AB, přičemž úsečky AB a BA považoval za dva různé objekty. Definoval dva objekty jako „ekvipolentní“, jestliže jsou si rovny nebo jsou rovnoběžné a stejně orientované – tzn. (v moderní interpretaci) určují stejný vektor. Bellavitis pak zavedl „ekvipolentní součet úseček“ a v podstatě dostal vektorový prostor. Ačkoliv mají úsečky podobné vlastnosti jako komplexní čísla, vnímal je Bellavitis výhradně jako geometrické veličiny, ne jako geometrickou reprezentaci algebraických veličin; komplexním číslům nepřikládal žádnou důležitost.

Významným přispěvatelem ke zrodu vektorových prostorů byl německý teolog, filozof a matematik Hermann Günther Grassmann (1809–1877). V práci *Theorie der Ebbe und Flut* z r. 1840 uvedl první systém prostorové analýzy založený na vektorech a rozpracoval myšlenku sčítání a odčítání přímek. V r. 1844 publikoval práci *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, kterou lze s odstupem času považovat za velmi významnou pro zrod vektorových prostorů. Ve své době však nevzbudila téměř žádný zájem, možná i pro obtížnou srozumitelnost (Grassmann knihu několikrát přepracoval, ani nová vydání se však nesetkala se zájmem čtenářů). V práci *Die lineale Ausdehnungslehre* ... studoval Grassmann systém abstraktních veličin (tzv. „extenzivních veličin“); na tomto systému zavedl formální operace sčítání, násobení skalárem a násobení (z dnešního pohledu se jedná o „vektorový prostor s násobením“, tedy o algebru). V práci se objevuje i idea lineární závislosti a nezávislosti prvků, dimenze a skalárního součinu (aniž by byla použita tato terminologie).

Myšlenky podobné Grassmannovým publikoval i francouzský matematik Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797–1886) a později i Augustin Louis Cauchy (1789–1857); asi ne vždy se jednalo o podobnost náhodnou. Saint-Venant ve svém článku *Mémoire sur les sommes et les différences géometriques, et sur leur usage pour simplifier la mécanique* z r. 1845 násobí úsečky způsobem podobným jako Grassmann, patrně však nezávisle na Grassmannovi (pravděpodobně na tuto ideu přišel dokonce už r. 1832). Grassmann po přečtení tohoto článku usoudil, že Saint-Venant nečetl jeho práci z r. 1844, a v r. 1846 poslal dvě kopie své práce Cauchymu s prosbou, aby jednu z nich předal Saint-Venantovi. V r. 1853 vydal Cauchy práci *Sur les clefs algébrique*, kde uvedl metody shodné s Grasmannovými, bez odkazu na Grassmannovu práci. Grasmann se proto obrátil na francouzskou Akademii věd s žádostí o posouzení prvenství. V r. 1854 byla ustanovena komise, jejímž členem byl však i Cauchy! Rozhodnutí nikdy nepadlo, Cauchy v r. 1857 zemřel.

Ačkoliv ani přepracovaná verze Grassmannovy práce *Die lineale Ausdehnungslehre* ... nevzbudila bezprostředně po svém vydání v r. 1862 příliš pozornosti, zájem o Grassmannovy myšlenky postupně narůstal.

3 Rozvoj myšlenek vektorového počtu

Myšlenky vektorového počtu byly dále rozvíjeny. Jak Hamiltonův, tak Grassmannův systém našel své pokračovatele. V letech 1840 až 1870 měl větší vliv systém Hamiltonův, po r. 1870 značně vzrost i vliv Grassmannův; Hamiltonovy myšlenky se více prosadily v Británii, Irsku a USA, Grassmannovy v Německu. Oba systémy byly známy i za hranicemi zemí svého původu, pravděpodobně však bylo v 19. století jen málo matematiků obeznámených s oběma systémy.

Hamiltonovým pokračovatelem byl především Skot Peter Guthrie Tait (1831–1901), který uveřejnil mnoho prací o kvaternionech; věnoval velkou pozornost i jejich aplikacím ve fyzice. Tait si o kvaternionech dopisoval i s fyziky Williamem Thomsonem (známým od r. 1892 jako Lord Kelvin) (1824–1907) a Jamesem Clerkem Maxwellem (1831–1879). V r. 1870 americký matematik Benjamin Peirce, propagátor kvaternionů v USA, ve své význačné práci *Linear Associative Algebra* popsal 162 různých algeber; pracoval na hyperkomplexních číslech.

Jedním z mála matematiků, kteří znali jak Hamiltonův systém kvaternionů, tak systém Grassmannův, byl Angličan William Kingdon Clifford (1845–1879). V práci *Elements of Dynamic* z r. 1877 uvádí dva součiny – součin, který nazývá „vektorový součin“, shodný i s vektorovým součinem v dnešním pojetí, a „skalární součin“ jako záporně vzatý součet součinů složek vektorů, tj. jako u kvaternionů.

Významnými modernizátory vektorového počtu byli americký fyzik Josiah Willard Gibbs (1839–1903) a anglický samouk Olivier Heaviside (1850–1925). Vycházeli z Maxwellovy práce z oblasti elektromagnetické teorie a vybudovali moderní systém vektorového počtu (jsou považováni za jeho zakladatele). Zatímco Gibbs byl obeznámen jak s myšlenkami Hamiltonovými, tak některými myšlenkami Grassmannovými, Heaviside pravděpodobně žádnou z Grassmannových prací nečetl.

Základy moderního vektorového počtu byly položeny, stále však chyběla axiomatická definice vektorového prostoru.

4 Axiomatická definice vektorového prostoru

Jako první dospěl k axiomatické definici vektorového prostoru italský matematik Giuseppe Peano (1858–1932). Během své kariéry uvažoval pojem vektor (v dnešním slova smyslu) ve třech různých podobách:

1) jako uspořádané n-tice s operacemi sčítání a násobení skalárem, které byly definovány pomocí složek vektorů.
2) jako rozdíl $B - A$ dvou bodů A a B (tj. jako orientovanou úsečku). Přitom používal Grassmannův „geometrický počet“.
3) jako prvky tzv. „lineárních systémů“ s axiomaticky definovanými operacemi sčítání a násobení skalárem.

Peano však používal název „vektor“ pouze v kontextu geometrie. V článku z r. 1887 uvažoval objekty, které dnes považujeme za vektory, ale pojem „vektor“ neužíval; užíval pojem „číselné komplexy řádu n“ – uspořádané n-tice reálných čísel. Definoval jejich součet a násobek reálným číslem: pro $\mathbf{a} = [a_1, ..., a_n]$, $\mathbf{b} = [b_1, ..., b_n]$ a reálné číslo k definoval $\mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_1 + b_1, ..., a_n + b_n]$ a $k\mathbf{a} = [ka_1, ..., ka_n]$. Navíc poznamenal, že sčítání je komutativní a asociativní a platí i oba distributivní zákony. Zavedl standardní bázi (v dnešní terminologii); zabýval se i lineárními transformacemi. V r. 1897 zavedl Peano skalární součin (ozn. $\mathbf{a}|\mathbf{b}$) jako součet součinů složek vektorů a uvedl vlastnosti $\mathbf{a}|\mathbf{b} = \mathbf{b}|\mathbf{a}$, $\mathbf{a}|(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}|\mathbf{b} + \mathbf{a}|\mathbf{c}$ a $k(\mathbf{a}|\mathbf{b}) = (k\mathbf{a})|\mathbf{b}$. Ani zde nepoužíval pojem „vektor“, ani neodkazoval k axiomatické definici z r. 1888.

Z dnešního hlediska je nejdůležitější Peanův třetí přístup k vektorům. V r. 1888 vydal Peano knihu *Calcolo geometrico secondo l´Ausdehnungslehre di H. Grasssmann, proceduto dalle Operazioni della logica deduttiva*. Zde Peano odkazoval na myšlenky pocházející od Leibnize a rozvíjené později zejména Möbiem, Bellavitisem, Hamiltonem a Grassmannem. Peano své *Calcolo* … zamýšlel jako úvod do studia Grassmannových myšlenek; pouze závěrečné dvě kapitoly obsahují Peanovy vlastní myšlenky. V knize je vybudován tzv. „geometrický počet“ – jsou zavedeny operace s geometrickými objekty, analogické algebraickým operacím s čísly; na rozdíl od analytické geometrie, která pracuje s čísly reprezentujícími geometrické objekty, pracuje geometrický počet přímo s těmito objekty.

Peano pracoval s tzv. „geometrickými formacemi“ – pojmem zavedeným Grassmannem. Definoval orientovanou úsečku a její délku, orientovaný trojúhelník a jeho obsah, orientovaný čtyřstěn a jeho objem a skládání těchto objektů. Pomocí skládání lze každý z uvažovaných objektů převést na čtyřstěn – složením bodu s trojúhelníkem či složením dvou úseček. Dále definoval rovnost čtyřstěnů, jejich součet a reálný násobek. Zavedl „formace prvního, resp. druhého, resp. třetího, resp. čtvrtého druhu“ jako formální konečné lineární kombinace $mA + nB + \dots$ bodů, resp. úseček, resp. trojúhelníků, resp. čtyřstěnů. Vektory definoval jako formace prvního druhu zapsatelné ve tvaru $B - A$. Pomocí operací se čtyřstěny pak definoval rovnost formací stejného druhu, jejich součet a násobek reálným číslem. Sčítání je komutativní, asociativní a platí oba distributivní zákony.

Nejvýznamnější je poslední kapitola, kde Peano představil myšlenku vektorového prostoru (v dnešní terminologii) jakožto určitého zobecnění geometrického počtu. Poprvé se zde objevila axiomatická definice tzv. „lineárního systému“ – v dnešní terminologii vektorového prostoru.

Lineární systém je systém prvků takový, že:

1) Je definovaná „ekvivalence“ (ozn. $(\mathbf{a} = \mathbf{b})$) mezi dvěma prvky:
   $(\mathbf{a} = \mathbf{b})$ právě když $(\mathbf{b} = \mathbf{a})$; je-li $(\mathbf{a} = \mathbf{b})$ a $(\mathbf{b} = \mathbf{c})$, pak $(\mathbf{a} = \mathbf{c})$.
2) Je definován „součet“ dvou prvků $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, tedy prvek $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, který patří do daného systému a vyhovuje podmínkám:
3) je-li $(\mathbf{a} = \mathbf{b})$, pak $(\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{c})$; $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$; $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$.
   Je-li $\mathbf{a}$ prvek daného systému a m přirozené číslo, je definován „násobek prvku $\mathbf{a}$ číslem m“ (ozn. $m\mathbf{a}$) jako součet m prvků rovných $\mathbf{a}$. Pro libovolné prvky $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a přirozená čísla m, n pak platí:
   je-li $(\mathbf{a} = \mathbf{b})$, pak $(m\mathbf{a} = m\mathbf{b})$; $m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b}$; $(m + n)\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a}$;
   $$m(n\mathbf{a}) = (mn)\mathbf{a}; \quad 1\mathbf{a} = \mathbf{a}.$$
   Součin se rozšíří na reálná čísla – tak, aby byly splněny předchozí vlastnosti.
4) Existuje prvek systému (ozn. $\mathbf{0}$) takový, že $0\cdot\mathbf{a} = \mathbf{0}$.
   Při označení $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ pro $\mathbf{a} + (-1)\mathbf{b}$ platí: $\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0}$; $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$.

Peano definoval i lineární závislost: prvky $\mathbf{a}_1$, ..., $\mathbf{a}_n$ se nazývají lineárně závislé, existují-li čísla m_1, ..., m_n, ne všechna nulová, pro která je $m_1\mathbf{a}_1 + \dots + m_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$. Dimenzi systému definoval Peano jako maximální počet lineárně nezávislých prvků, které lze v systému nalézt. Dále definoval homomorfismus dvou systémů, zavedl rovnost a součet dvou homomorfismů, jejich násobek reálným číslem a skládání. Podal řadu důležitých tvrzení. Jako příklady lineárních systémů uvedl reálná a komplexní čísla, formace prvního, druhého, třetího a čtvrtého druhu (jako příklady systémů dimenze 1, 2, 3 a 4), vektory v rovině či v prostoru a polynomy stupně nejvýše n. Zmínil se dokonce, že množina všech polynomů je lineární systém nekonečné dimenze, ale tuto myšlenku dál nerozvíjel. Uvedl však další na svou dobu progresivní příklad lineárního systému – množinu všech homomorfismů dvou systémů.

Ačkoli bylo Peanovo *Calcolo* … příznivě hodnoceno, myšlence lineárních systémů nebyl přisuzován význam, jaký si zasloužila. Dokonce ani sám Peano se ve svých pozdějších pracích o lineárních systémech téměř nezmiňuje. Peanova axiomatická definice měla abstraktní formu, zcela nezvyklou v r. 1888, předběhla svou dobu. První, kdo přijal Peanovu axiomatickou definici lineárního systému, byl v r. 1896 Peanův italský kolega Cesare Burali-Forti (1861–1931) a později další Ital Salvatore Pincherle (1853–1936). Abstraktní definici znovuobjevil v r. 1918 německý matematik Hermann Weyl (1885–1955). Od dvacátých let byl pojem vektorového prostoru dále rozvíjen ve dvou různých oblastech: v oblasti funkcionální analýzy v pracích matematiků Stefana Banacha (1892–1945), Hanse Hahna (1879–1934) a Norberta Wienera (1894–1964), kteří vypracovali teorii normovaných prostorů nekonečné dimenze, a v oblasti algebry v pracích Emy Noether (1882–1935) zabývajících se prostory konečných dimenzí a jejich dalším zobecněním.

Literatura

[1] Bečvář J.: *Sto let od vydání Peanova Calcolo geometrico*. In V. seminář o filozofických otázkách matematiky a fyziky, JČSMF, Brno, 1988, 19–30.

[2] Bečvář J.: *150 let kvaternionů*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 38(1993), 305–317.

[3] Moore G. H.: *The Axiomatization of Linear Algebra: 1875–1940*. Historia Mathematica 22(1995), 262–303.

[4] Crowe M. J.: *A History of Vector Analysis.* University of Louisville, 2002.

http://www.math.ucdavis.edu/~temple/MAT21D/SUPPLEMENTARY-ARTICLES/Crowe_History-of-Vectors.doc

[5] Abstract linear spaces.

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Abstract_linear_spaces.html

Adresa

RNDr. Eva Ulrychová
Katedra matematiky
Vysoká škola ekonomická
Ekonomická 957
148 00 Praha 4
e-mail: *uleva@vse.cz*

ZYGMUNT REWKOWSKI (1807–1893) – MATEMATYK ZAPOMNIANY

WITOLD WIĘSŁAW

Zygmunt Rewkowski (1807–1893) jest zapomnianym polskim matematykiem. Ukończył gimnazjum w Wilnie. Tam też studiował matematykę. Po uzyskaniu magisterium na Uniwersytecie Wileńskim w roku 1828, rozpoczął po raz pierwszy na ziemiach polskich wykładać rachunek prawdopodobieństwa. Zachowane jego rękopisy z okresu studiów (*Wymiar geodezyczny*, *O obserwacyach astronomicznych*, *O Figurze Ziemi*) świadczą o jego wszechstronnych uzdolnieniach. Niestety, jego wykłady nie trwały długo, gdyż w roku akademickim 1830/31 zajęcia zawieszono z powodu powstania listopadowego w Polsce, a także z powodu epidemii cholery w Wilnie. W roku 1832 władze carskie zlikwidowały Uniwersytet Wileński. W roku 1833, za przetrzymywanie nielegalnie emisariusza z Francji, Marcellina Szymańskiego, władze carskie skazały Rewkowskiego na 25 lat służby wojskowej na Kaukazie. Służył tam jako szeregowy żołnierz, a następnie jako oficer w jednostkach inżynieryjnych, budując drogi i mosty. W 1866 roku napisał pierwszą pracę z ekonomii, dając podstawy ekonomii analitycznej. Tematyką tą zajmował się do końca życia, pisząc kilka prac na ten temat, po rosyjsku i po polsku. Jedna z jego opublikowanych prac nosi tytuł: *Badania analityczne o cenach robót w ogólności* (Wilno 1882).

Pod koniec życia, po przejściu na emeryturę, pozwolono mu powrócić do Wilna. Przez niektórych badaczy uważany jest za prekursora metod analitycznych w ekonomii.

Literatura

[1] Bieliński J.: *Stan nauk matematyczno-fizycznych za czasów Wszechnicy Wileńskiej, Szkic Bibliograficzny*, Prace Matematyczno-Fizyczne 2(1890), 265–432.

[2] Bieliński J.: *Uniwersytet Wileński (1759–1831)*, tomy I–III, Kraków, 1899–1900.

[3] Rewkowski Z.: *Rękopisy w Bibliotece Uniwersytetu Wileńskiego*.

[4] Więsław W.: *Matematyka polska epoki Oświecenia*, Fraszka Edukacyjna, Warszawa, 2007, stran 360. ISBN 987-83-88839-29-0.

Adresa

Witold Więsław
Uniwersytet Wrocławski
Instytut Matematyczny
Plac Grunwaldzki 2/4
50-384 Wrocław
e-mail: *witold.wieslaw@poczta.onet.pl*

STATISTIKA
královského hlavního města
PRAHY.

Vydávaná

od obecní statistické kommisse král. hlavního města Prahy

redakcí

ředitele obecní statistické kanceláře

prof. **Jos. Erbena.**

Svazek první.

Topografické a klimatické poměry. — Obyvatelstvo. — Přílohy.

S plánem Prahy a 1 listem diagrammův.

V PRAZE.

Nákladem vlastním. — Tiskem Hynka Fuchse.

1871.

JOSEF ERBEN, PRAŽSKÝ STATISTIK 19. STOLETÍ

JITKA ZICHOVÁ

1 Mládí Josefa Erbena

Josef Erben je jednou z méně známých osobností pražské statistiky 19. století. Narodil se 28. 4. 1830 v Kostelci nad Orlicí v rodině městského úředníka. Středoškolské vzdělání získal na gymnáziích v Rychnově nad Kněžnou a v Broumově (1840 až 1846). Poté se zapsal na Filosofickou fakultu v Praze, kde byl v letech 1847 až 1850 řádným a ve školním roce 1852/53 mimořádným studentem. Fakulta poskytovala posluchačům všeobecný základ vhodný například pro kariéru středoškolských učitelů. J. Erben zde navštěvoval přednášky z filosofie, estetiky, pedagogiky, náboženství, latinské filologie, českého jazyka a literatury, srovnávací gramatiky slovanských jazyků, světových dějin a dějin rakouské monarchie, české archeologie, přírodopisu, zeměpisu, matematiky a fyziky. Vzdělání si doplnil ve vybraných kurzech na Právnické fakultě.

Ve školním roce 1849/50 byl auskultantem na akademickém gymnáziu v Praze, od roku 1850/51 suplentem českého jazyka na piaristickém gymnáziu v Mladé Boleslavi. V září 1852 složil zkoušky učitelské způsobilosti pro vyšší gymnázia. Počínaje školním rokem 1852/53 supluje na c.k. České vyšší reálné škole v Praze, jež byla zřízena roku 1849 jako přípravný institut ke studiu na Polytechnickém ústavu. Dne 17. prosince 1853 je ustanoven řádným profesorem reálky, do roku 1862 tam učí češtinu, zeměpis a dějepis. Od roku 1856/57 vyučuje češtinu také na obchodní akademii. Podstatná část jeho dalšího profesního života je však spjata se statistikou, nejprve na akademické půdě pražské polytechniky a později v městské administrativě ve Statistické kanceláři královského hlavního města Prahy.

2 Působení na polytechnice

V listopadu 1861 se Josef Erben přihlásil na pražském Polytechnickém ústavu k habilitaci pro statistiku průmyslu v obou zemských řečech, němčině a češtině. Profesorský sbor připustil kandidáta k habilitačnímu řízení. Jako jediný hlasoval proti profesor technického strojnictví a nauky o strojích Karel Wersin, který, jak uvádí Velflík v [1], *statistice průmyslu nepřikládal žádné větší důležitosti pro technika, aniž zvláštního užitku*. Odborným znalcem v komisi byl profesor národního hospodářství, policejní vědy a statistiky Právnické fakulty pražské univerzity, doktor práv Eberhard Jonák, který přednášel od školního roku 1865/66 národní hospodářství a statistiku také na polytechnice. J. Erben byl vyzván, aby se ve své výuce věnoval zejména rakouskému průmyslu. Oficiální výměr pro docenturu mu byl udělen zemským výborem 2. dubna 1862 a schválen státním ministerstvem 9. září 1862, s platností od 1. října 1862. Od tohoto data začíná Josef Erben jako soukromý docent přednášet na Polytechnickém ústavu království Českého.

Jeho přednášky se konaly jako nepovinné v rozsahu dvou hodin týdně. V zimním semestru probíral stav průmyslu v Čechách, na Moravě a ve Slezsku v porovnání s ostatními zeměmi monarchie. Letní semestr byl věnován zahraničí, to jest průmyslu vyspělých zemí tehdejšího světa v čele s Velkou Británií. Zahajovací přednáška vyšla tiskem pod názvem *K theorii statistiky průmyslu* (1863). Citujme:

Statistika průmyslová má podati podstatný obraz stavu průmyslného života buď si již kterékoliv mravní nebo i fysické osoby, anebo kteréhokoli odboru výroby průmyslové a v jakémkoli obmezení toho: budeť tedy především musiť vylíčiti všecky důležitější zjevy této výroby, pojavši jich v jistém čase, jakož i v skutečné stálosti jejich. Má-li však postavení svého co věda při tom zachovati, třeba jí i příčin tohoto stavu, zvláště pak vzájemné podmiňování jedněch zjevův druhými či zkrátka řečeno, příčinné vzájemnosti oněch stálých zjevův doložiti … Methoda průmyslové statistiky rozpadává se podstatně do dvou výkonův, na vzájem sebe docelujících, jichž první jest dobývání statistických vědomostí, druhý spořádané a podstatné vykládání či líčení jejich … Zde přistupuje počtářství vůbec, jakož i tak zvaná politická aritmetika zvlášť co pomocná věda k boku statistiky průmyslové, a pouhými součty a jinými prostými výkony elementární mathematiky, zvláště pak průřezy, rozličnými čísly poměrnými (najmě tak zvanými procenty), upotřebením jistých formulí atd. dopracuje se průmyslová statistika takto z nestálých a jakoby tekutých zjevův průmyslného žití skutečného jich stavu co jasné výslednice a pravého statistického fakta, kteréž pak rovněž pod číselným znakem jeho na příslušném místě vytkne. Řada takovýchto výsledných čísel podá pak nejjasnější a nepopíratelný obraz žádané sféry průmyslného života … Bez statistických vědění a dokladů, pánové, nelze v žádném státu moderním prospěšně vládnouti …

Naposledy přednášel docent Erben na technice ve školním roce 1870/71. Jeho rezignace souvisela s přidělením funkce v pražské statistické kanceláři. Přispělo k ní i zamítnutí návrhu profesorského sboru na rozdělení mimořádné profesury národního hospodářství a statistiky, obsazené dr. Eberhardem Jonákem, na dvě honorované docentury v roce 1870. První měla být vypsána pro národní hospodářství, druhá pro statistiku průmyslu a obchodu s vědeckým výkladem zeměpisným a obsazena Josefem Erbenem. V dalších letech pořádal Erben popularizační přednášky, například *O statistice vůbec, o její užitečnosti v životě veřejném a soukromém* pro Americký klub dam v Praze v roce 1879.

V 60. letech 19. století došlo na pražské polytechnice k důležitým změnám. Rostoucí národní uvědomění české akademické obce přispělo k zahájení vyučování v českém jazyce. Ve školním roce 1861/62 studovalo na technice 539 Čechů a 186 Němců. Tehdy začíná jako první přednášet česky deskriptivní geometrii profesor Rudolf Skuherský. V roce 1862/63 jej následují docent Zenger s přednáškou o fyzice a průmyslová statistika docenta Erbena. Všichni tři vykládali své předměty také v němčině, která byla do té doby jediným vyučovacím jazykem. Další organizační změny přiblížily uspořádání Polytechnického ústavu univerzitě. V čele vysoké školy měl stanout rektor, k jehož volbě se 14. prosince 1864 sešel dvaadvacetičlenný profesorský sbor. O významném postavení Josefa Erbena svědčí skutečnost, že byl zvolen jedním ze dvou zástupců docentů v tomto sboru. Prvním rektorem se stal profesor Karel Kořistka (1825–1906), odborným zaměřením blízký Erbenovi. Na technice sice přednášel geodézii, ale v letech 1867 až 1897 byl přednostou Statistické kanceláře Ústředního výboru pro statistiku polního a lesního hospodářství v království Českém, v letech 1897 až1905 pak přednostou nově zřízeného Zemského statistického úřadu království Českého. V roce 1866 vyvrcholily stížnosti německých profesorů na diskriminaci peticí k zemskému sněmu s žádostí o rozdělení profesorského sboru a tím i celého vysokého učení na německou a českou část. K tomu skutečně došlo a 14. května 1869 byly ustanoveny Český polytechnický ústav království Českého a Deutsches polytechnisches Institut des Königreiches Böhmen. Na prvním se zapsalo 556 českých studentů, na druhém 230 Němců a 81 Čechů. Docent Erben vyučoval na české technice, profesor Kořistka na německé, poté co jeho žádost o přidělení k českému institutu byla zamítnuta.

3 Městská statistika

Obraťme nyní pozornost ke druhé etapě Erbenovy statistické kariéry, k městské statistice. Její počátky se datují do 15. století, z této doby jsou doloženy záznamy ze sčítání lidu v některých německých městech, například v Norimberku. Ze 17. století pocházejí studie Johna Graunta (1620-1674) o populační situaci v Londýně a Edmunda Halleyho (1656–1742) o úmrtnosti obyvatelstva ve Vratislavi. Městské statistické kanceláře začínají vznikat po polovině 19. století (1861 Brémy, 1862 Berlín, Vídeň, Řím atd.). Také v Praze se již v šedesátých letech objevují snahy o zřízení stejného úřadu, válečné události roku 1866 je však odsunuly do pozadí. Připomeňme, že organizovaná statistika v Čechách se datuje již k roku 1856, kdy byl ustanoven Ústřední výbor pro statistiku polního a lesního hospodářství Čech c.k. Vlastenecko-hospodářské společnosti. V roce 1868 byl pražskému starostovi zaslán přípis vídeňské c.k. Ústřední statistické komise, v němž byla zdůrazněna účelnost zvláštního městského statistického orgánu. Městská rada proto obnovuje úsilí o jeho založení a dne 26. března 1870 byl na jednání znalců z oboru statistiky a představitelů města zvolen tříčlenný výbor pověřený vypracováním statutu Statistické komise královského hlavního města Prahy. V čele výboru stál již zmíněný prof. Karel Kořistka, který byl 30. června 1870 na ustavující schůzi komise zvolen jejím přednostou. Citujme ze statutu: *Úkolem této statistické kommisse bude provedení co možná úplné statistiky obce pražské. K tomuto cíli bude jí náležeti, aby nejen sbírala a spracovala statistický materiál, uložený při jednotlivých odborech správy městské, nýbrž i aby vyhledávala všecka data, prostředkem kterýchž by se dokonalý obraz skutečných statistických poměrů a zjevů královského hlavního města Prahy sestaviti dal.*

Komise měla zpočátku 11 členů, kteří byli jmenováni na dobu tří let. Bylo mezi nimi 7 odborníků (pro místopis, vodopis, meteorologii a zemědělství; pro statistiku obyvatelstva; pro obecní správu a jiné politické záležitosti; pro finanční hospodářství a daně; pro statistiku průmyslu a obchodu; pro statistiku vyučování, náboženských vyznání, dobročinných ústavů, spořitelen, záložen a pojišťovacích ústavů; pro statistiku nemocnic a zdravotních záležitostí),dalšími členy byli vedoucí městského archívu, správcové stavitelského úřadu a městské účtárny a představený městské statistické kanceláře. Tato kancelář byla výkonným orgánem statistické komise. Dne 16. července 1870 na druhé schůzi komise byl ředitelem Statistické kanceláře královského hlavního města Prahy jednomyslně zvolen docent Josef Erben.

Činnost kanceláře se plně rozvinula od roku 1871, kdy byla vydána první publikace *Statistika královského hlavního města Prahy*. Obsahovala úvod, který popisoval vznik a činnost statistické komise, a tři oddíly. První byl věnován topografickým a podnebním poměrům, druhý statistice obyvatelstva, třetí stavu dobytka v Praze a okolí. V závěru knihy se nacházely přílohy týkající se specifických oblastí života města, zveřejňovaly soupis škol spravovaných obcí či informace o obecním jmění a hospodaření s ním a přehledy o pohybu obyvatelstva. Číselné tabulky byly doprovázeny textovými analýzami a komentáři. Hlavním podkladem byly údaje ze sčítání lidu v roce 1869. Dochované materiály umožňují zajímavá srovnání s dnešní dobou, například v roce 1869 se v Praze narodilo 47.5% živých dětí mimo manželství, v současnosti je to necelých 30%.

V dalších letech vydává statistická kancelář ročenky nazvané *Statistická příruční knížka královského hlavního města Prahy*. Od roku 1881 byly připojovány údaje o přilehlých obcích (Královské Vinohrady, Žižkov, Karlín a další) a přílohu ročenek tvořila administrační zpráva o hospodaření všech zahrnutých obcí. Nepravidelně byly vydávány monografie ze sčítání obyvatelstva, pravidelně například týdenní přehledy o meteorologických poměrech a nakažlivých chorobách v Praze. Do roku 1907 vycházely tituly v české a německé verzi, poté v důsledku počešťování městské správy pouze v češtině. Josef Erben řídil redakci těchto publikací do roku 1905 a byl autorem dalších prací vydaných statistickou kanceláří (*Úmrtnost v Praze a na předměstích v letech 1881–1890*, *Statistická kommisse královského hlavního města Prahy a spojených obcí a měst. Statistická kancelář pražská v době od roku 1870 až 1895*). Pro statistickou kancelář pracoval až do své smrti a přispěl k tomu, že zaujímala jedno z vůdčích míst v rámci rakouského mocnářství. Měla bohaté mezinárodní styky a přispívala do zahraničních prací, například do *Statistique des grandes villes* (1876), *Annuaire de finances des grandes villes* (1881 až 1891).

4 Další činnost Josefa Erbena

Josef Erben, ačkoli studoval a pracoval pouze v Čechách, měl evropský rozhled a byl ve statistice autoritou mimo jiné jako přední tvůrce české vědecké literatury a názvosloví v tomto oboru. Prahu zastupoval na mnoha světových statistických sjezdech, jmenujme Petrohrad 1872, Budapešť 1876, Paříž 1880, Londýn 1885, Paříž 1889 a Vídeň 1891. V roce 1886 byl zvolen členem Mezinárodního statistického institutu založeného 1885 (jako první Čech, prof. Kořistka byl zvolen za člena v roce 1889). Byl dopisujícím členem statistické společnosti a společnosti pro politickou ekonomii v Paříži, statistických komisí ve Vídni, Manchesteru a Nižním Novgorodě a nositelem různých vyznamenání, například ruského Řádu svatého Vladimíra (1872) a Řádu Františka Josefa (1892). Byl rovněž členem českých institucí, zmiňme Průmyslovou jednotu, Společnost českého musea v Praze a Královskou českou společnost nauk. Věnoval se též zeměpisu, je autorem mnoha map a kartografických prací a od roku 1865 působil jako inspektor mapové sbírky Musea království Českého. Podílel se na utvoření české odborné terminologie pro matematiku, fyziku a zeměpis. Jeho vědecká činnost byla oceněna nabídkou profesury na univerzitě v Kijevě, kterou nepřijal z důvodu upřednostnění kariéry v pražské statistice. Zemřel 11. 4. 1910 v Praze.

Literatura

[1] Velflík A. V.: *Dějiny technického učení v Praze.* Česká matice technická, Praha, 1906 a 1909.

[2] Jílek F., Lomič V.: *Dějiny Českého vysokého učení technického*. ČVUT, Praha, 1973.

[3] Erben J.: *K theorii statistiky průmyslu*. I. L. Kober, Praha, 1863.

[4] *Přehled přednášek a výkaz osob činných na Polytechnickém ústavě království Českého.* 1862/63 –1870/71. Archív ČVUT Praha.

[5] *Katalogy posluchačů Filosofické fakulty*. 1847–1852. Archív UK Praha.

[6] *120 let pražské statistiky*. Městská správa Českého statistického úřadu, Praha, 1991.

[7] *70 let československé státní statistiky*. Federální statistický úřad, Praha, 1989.

[8] Malík J.: *Městská statistika jinde a u nás.* Statistický obzor 15(1934), 466–490.

Adresa

RNDr. Jitka Zichová, Dr.
Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *zichova@karlin.mff.cuni.cz*

OBSAH

Jindřich Bečvář, Martina Bečvářová (ed.)

29. mezinárodní konference

HISTORIE MATEMATIKY

Velké Meziříčí, 22. až 26. 8. 2007

Katedra didaktiky matematiky MFF UK

Vydal

MATFYZPRESS
vydavatelství
Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze
Sokolovská 83, 185 75 Praha 8
jako svou 242. publikaci

Z předloh připravených v systému Word
vytisklo Reprostředisko UK MFF
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

První vydání
Praha 2008

ISBN 978-80-7378-048-7