28. MEZINÁRODNÍ KONFERENCE

HISTORIE MATEMATIKY

Jevíčko, 24. 8. – 28. 8. 2007

Praha 2007

ISBN 978-80-7378-016-6

Vážené kolegyně, vážení kolegové,

předkládáme Vám svazek obsahující sylaby přednášek a sdělení, které jsou přihlášeny na 28. mezinárodní konferenci Historie matematiky. Sylaby nebyly obsahově ani jazykově upravovány, jsou zde otištěny tak, jak je jednotliví účastníci zaslali. Zařazen je také seznam řádně přihlášených účastníků (do 20. 7. 2007) a denní program konference. Svazek vznikl díky finanční podpoře ústavu aplikované matematiky FD ČVUT a katedry didaktiky matematiky MFF UK.

Konference není monotématicky zaměřena, snaží se poskytnout dostatečný prostor k aktivním vystoupením, diskusím a neformálním setkáním všech přihlášených, tj. matematiků, historiků matematiky, učitelů vysokých a středních škol, doktorandů i studentů.

Program konference je v letošním roce zajímavý, bohatý a pestrý. Věříme, že každý najde něco zajímavého, objeví nové kolegy a přátele, získá inspiraci, motivaci a povzbuzení k další odborné práci nebo studiu.

Všechna jednání konference probíhají v aule gymnázia:

Gymnázium Jevíčko
A. K. Vítáka 452
569 43 Jevíčko
tel., fax: 461 327 831
hruby@gymjev.cz

Účastníci konference jsou ubytováni v domově mládeže:

Domov mládeže
Nerudova 557
569 43 Jevíčko
tel.: 461 327 806

Podrobnější informace o letošní konferenci, předchozích konferencích a letních školách lze najít na adrese:

http://www.fd.cvut.cz/personal/nemcova/konference/hlavnindex.html

Martina Bečvářová
(editorka)

V Praze v červenci 2007

SEZNAM ÚČASTNÍKŮ

- Balková L’ubomíra
- Baštinec Jaromír
- Bečvář Jindřich
- Bečvářová Martina
- Černeková Kristína
- Čižmár Ján
- Di Paola Benedetto
- Durnová Helena
- Eliášová Lada
- Fuchs Eduard
- Fulier Jozef
- Glozar Jiří
- Halas Zdeněk
- Havířová Barbora
- Houska Jan
- Hudeček Jiří
- Hykšová Magdalena
- Chmelíková Vlasta
- Chocholová Michaela
- Ilucová Lucia
- Jára Václav
- Jarošová Martina
- Jindřich Štěpán
- Kafková Marika
- Kalousová Anna
- Koudela Libor
- Kotůlek Jan
- Kozánek Jan
- Kvasz Ladislav
- Lengyelfalusy Tomáš
- Lepka Karel
- Melcer Martin
- Moravec Luboš
- Olejníčková Jana
- Otavová Miroslava
- Pavlíková Pavla
- Pecinová Eliška
- Pecl Jiří
- Pelantová Edita
- Pémová Marta
- Pospíšilová Lenka
- Pražák Pavel
- Provazníková Marie
- Saxl Ivan
- Sklenáriková Zita
- Slavík Antonín
- Smýkalová Radka
- Stříteská Hana
- Sýkorová Irena
- Šolcová Alena
- Špinková Milena
- Tihlaříková Miroslava
- Trkovská Dana
- Ulrychová Eva
- Voglová Zuzana
- Vojkůvková Iva
- Więsław Witold
- Zagorová Pavla
- Zolotarev Igor
- Žáčková Petra
- Žitný Karel František

SEZNAM PŘEDNÁŠEK

Bečvář Jindřich: ***Hermann Günther Grassmann a lineární algebra***
Bečvářová Martina: ***Proč učit matematiku aneb jeden příklad z politické historie***
Černeková Kristína: ***James Gregory (1638–1675)***
Di Paola Benedetto: ***On the formalization of a number theory problem by pupils***
Durnová Helena: ***Matematické stroje***
Halas Zdeněk: ***Tuhé úlohy aneb o diferenciálních rovnicích, které odolávaly numerikům***
Havířová Barbora: ***Historický vývoj rovinné sinové a kosinové věty***
Houska Jan: ***O Eulerově konstantě γ***
Hudeček Jiří: ***Výuka matematiky ve staré Číně***
Hykšová Magdalena: ***Geometrické pravděpodobnosti na přelomu 19. a 20. století***
Chocholová Michaela: ***Wilhelm Matzka (1798–1891) a jeho práce z teorie determinantů***
Ilucová Lucia: ***Od ihly k náhodným množinám***
Jára Václav: ***Přínos českých matematiků v kinematické geometrii***
Jarošová Martina: ***Fibonacciho polynomy popsané E. Ch. Catalanem a E. Jacobsthalem***
Jindřich Štěpán: ***Historie sčítání řad – počítačová sumace***
Kalousová Anna: ***M. W. Crofton a geometrická pravděpodobnost v 19. století***
Kotůlek Jan: ***Feynmanův důkaz Maxwellových rovnic***
Koudela Libor, Žitný Karel: ***Problém jednoznačnosti trigonometrických řad v historickém kontextu (od G. Cantora k Y. Meyerovi)***
Kozánek Jan, Žitný Karel: ***Carpe diem – O životě a díle Raymonda E. A. C. Paleye (1907–1933)***
Melcer Martin: ***Finanční matematika na měšťanských školách v meziválečném období***
Olejníčková Jana: ***Internetová podpora výuky deskriptivní geometrie na MFF UK***
Otavová Miroslava: ***Jan Caramuel z Lobkovic***
Pavlíková Pavla: ***Josephus Flavius a jeden matematický problém***
Pecl Jiří: ***Konstrukce trojúhelníků analytickými výpočty***
Pémová Marta, Sklenáriková Zita: ***Pohlkeho veta a jej význam vo vyučování matematiky***
Pražák Pavel: ***K historii věty o lokální existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy***
Provazníková Marie: ***Projektivní rovina nad oktávami***
Saxl Ivan: ***Matematika na přelomu XVII. a XVIII. století v korespondenci Johanna Bernoulli a Pierra Varignona***
Slavík Antonín: ***Věta o implicitní funkci (historie a souvislosti)***
Smýkalová Radka: ***Eulerovy zásluhy o reformu goniometrie***
Stříteská Hana: ***Metoda nejmenších čtverců***
Sýkorová Irena: ***Čísla ve staré Indii***
Šolcová Alena: ***Jan Šindel a matematika ukrytá v pražském orloji***
Špinková Milena: ***Přítomná historie výuky pravděpodobnosti a statistiky***
Tihlaříková Miroslava: ***Hyperbolická geometrie a gyrovektorové prostory***
Trkovská Dana: ***Geometrické výsledky a reformní aktivity Felixe Kleina***
Ulrychová Eva: ***Historický vývoj a současnost výuky matematiky na VŠE Praha***
Więsław Witold: ***Prace Eulera z algebry i teorii liczb***
Zolotarev Igor, Žitný Karel: ***Nedokončená symfonie (o tragicky přerušené spolupráci N. Wienera a R. E. A. C. Paleye v roce 1933)***
Žáčková Petra: ***Gauss a diferenciální geometrie***

ODBORNÝ PROGRAM KONFERENCE

Pátek 24. 8. 2007

Dopolední program 10:00–12:00

10:00 – 10:20 Zahájení
10:20 – 11:05 Sýkorová I.: *Čísla ve staré Indii*
11:15 – 12:00 Bečvářová M.: *Proč učit matematiku aneb jeden příklad z politické historie*

Odpolední program 14:00–15:30

14:00 – 15:30 Koudela L., Žitný K.: *Problém jednoznačnosti trigonometrických řad v historickém kontextu (od G. Cantora k Y. Meyerovi)*

Odpolední program 16:00–18:00

16:00 – 16:45 Houska J.: *O Eulerově konstantě γ*
17:00 – 17:20 Smýkalová R.: *Eulerovy zásluhy o reformu goniometrie*
17:25 – 17:45 Provazníková M.: *Projektivní rovina nad oktávami*
17:50 – 18:00 Jára V.: *Přínos českých matematiků v kinematické geometrii*

Sobota 25. 8. 2007

Dopolední program 8:30–10:15

8:30 – 9:00 Havířová B.: *Historický vývoj rovinné sinové a kosinové věty*
9:00 – 9:25 Stříteská H.: *Metoda nejmenších čtverců*
9:30 – 10:15 Hykšová M.: *Geometrické pravděpodobnosti na přelomu 19. a 20. století*

Dopolední program 10:30–12:00

10:30 – 11:00 Kalousová A.: *M. W. Crofton a geometrická pravděpodobnost v 19. století*
11:00 – 12:00 Bečvář J.: *Hermann Günther Grassmann a lineární algebra*

I. Sekce

Odpolední program 14:00–15:30

14:00 – 15:30 Kozánek J., Žitný K.: *Carpe diem – O životě a díle Raymonda E. A. C. Paleye*

Odpolední program 15:50–18:00

15:50 – 16:20 Durnová H.: *Matematické stroje*
16:25 – 17:25 Hudeček J.: *Výuka matematiky ve staré Číně*
17:30 – 18:00 Pavlíková P.: *Josephus Flavius a jeden matematický problém*

II. Sekce

Odpolední program 14:00–15:30
14:00 – 15:00 Šolcová A.: *Jan Šindel a matematika ukrytá v pražském orloji*
15:00 – 15:30 Pražák P.: *K historii věty o lokální existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy*

Odpolední program 15:50–18:00
15:50 – 16:30 Pecl J.: *Konstrukce trojúhelníků analytickými výpočty*
16:40 – 17:25 Ulrychová E.: *Historický vývoj a současnost výuky matematiky na VŠE*
17:30 – 17:50 Jarošová M.: *Fibonacciho polynomy popsané E. Ch. Catalanem a E. Jacobsthalem*

Neděle 26. 8. 2007

Dopolední program 8:30–10:00
8:30 – 9:30 Slavík A.: *Věta o implicitní funkci (historie a souvislosti)*
9:35 – 10:05 Tihlaříková M.: *Hyperbolická geometrie a gyrovektorové prostory*

Dopolední program 10:30–12:00
10:30 – 11:15 Zolotarev I., Žitný K.: *Nedokončená symfonie (o tragicky přerušené spolupráci N. Wienera a R. E. A. C. Paleye v roce 1933)*
11:25 – 11:45 Kotůlek J.: *Feynmanův důkaz Maxwellových rovnic*
11:45 – 12:00 Žáčková P.: *Gauss a diferenciální geometrie*

Pondělí 27. 8. 2007

Dopolední program 8:30–10:20
8:30 – 9:00 Di Paola B.: *On the formalization of a number theory problem by pupils*
9:10 – 9:40 Pémová M., Sklenáriková Z.: *Pohlkeho veta a jej význam vo vyučování matematiky*
9:50 – 10:20 Halas Z.: *Tuhé úlohy aneb o diferenciálních rovnicích, které odolávaly numerikům*

Dopolední program 10:40–12:00
10:40 – 11:10 Melcer M.: *Finanční matematika na měšťanských školách v meziválečném období*
11:20 – 12:00 Otavová M.: *Jan Caramuel z Lobkovic*

Pondělí 27. 8. 2007

Odpolední program 14:00–15:30

14:00 – 15:00 Saxl I.: *Matematika na přelomu XVII. a XVIII. století v korespondenci Johanna Bernoulli a Pierra Varignona*

15:00 – 15:30 Špinková M.: *Přítomná historie výuky pravděpodobnosti a statistiky*

Odpolední program 16:00–18:00

16:00 – 17:00 Ilucová L.: *Od ihly k náhodným množinám*

17:00 – 18:00 Więsław W.: *Prace Eulera z algebry i teorii liczb*

Úterý 28. 8. 2007

Dopolední program 8:30–10:30

8:30 – 9:15 Chocholová M.: *Wilhelm Matzka (1798–1891) a jeho práce z teorie determinantů*

9:15 – 10:00 Trkovská D.: *Geometrické výsledky a reformní aktivity Felixe Kleina*

10:00 – 10:30 Olejníčková J.: *Internetová podpora výuky deskriptivní geometrie na MFF UK*

Dopolední program 11:00–12:10

11:00 – 11:30 Černeková K.: *James Gregory (1638–1675)*

11:30 – 12:00 Jindřich Š.: *Historie sčítání řad – počítačová sumace*

12:00 – 12:10 Zakončení

HERMANN GÜNTHER GRASSMANN A LINEÁRNÍ ALGEBRA

JINDŘICH BEČVÁŘ

1 Hermann Günther Grassmann (1809–1877)

* **15. 4. 1809 Štětín** (Prusko, dnes Polsko), třetí z 12 dětí

Otec: Justus Günther Grassmann (1779–1852), gymnaziální profesor, učenec
Matka: Johanna Friederike Luise Medenwaldt (1785–1841), dcera duchovního
Rodina: vztah ke vzdělanosti, vědám, umění, teologii
Bratr Robert (1815–1901), matematik, majitel tiskárny, vydavatel

Vzdělání:

- matka – vzdělaná žena
- soukromá škola ve Štětíně
- gymnázium ve Štětíně – nejprve špatný prospěch, nakonec výborně maturoval
- univerzita v Berlíně – 1827 až 1830
  – teologie, klasické jazyky, filozofie, literatura, žádná matematika ani fyzika
  – ovlivnil ho teolog a filozof F. D. E. Schleiermacher (1768–1834)

Běh života:

- 1830 – návrat do Štětína
  – začal se zajímat se o matematiku, fyziku, mineralogii a botaniku
  – usiloval pod vlivem otce o učitelskou dráhu
  – studoval matematiku, připravoval se na zkoušku učitelské způsobilosti

- 1831 – zkouška učitelské způsobilosti v Berlíně
  – jeho domácí práce neměly dobrou úroveň
  – získal oprávnění k výuce pouze na nižší střední škole
  – doporučení: podrobit se další zkoušce a prokázat lepší znalosti

- 1832 – asistentem učitele na gymnáziu ve Štětíně
  – začal podrobně promýšlet ideje vektorové algebry, které později rozvinul ve své knize *Die lineale Ausdehnungslehre* (1844); v předmluvě popisuje jejich zrod

- 1833 – zkouška z teologie (1. úroveň)
  – měl se stát členem luteránského sboru ve Štětíně a pastorem

- 1834 až 1835 – učitelem matematiky v Gewerbeschule v Berlíně
  – převzal místo po matematiku Jakobu Steinerovi (1796–1863), který se stal roku 1834 profesorem berlínské univerzity
  – docházel na univerzitní přednášky z matematiky

- 1836 – učitelem matematiky na nově založené škole ve Štětíně (Otto-Schule)
  – učil na nižším stupni školy matematiku, fyziku, němčinu, latinu a náboženství

● 1839 – zkouška z teologie (2. úroveň)
– členem luteránského sboru ve Štětíně

● 1840 – druhá zkouška učitelské způsobilosti v Berlíně
– získal oprávnění učit matematiku, fyziku, chemii, mineralogii na vyšší střední škole
– pro zkoušku předložil práci o teorii přílivu a odlivu – *Theorie der Ebbe und Flut*; vyšel z klasických děl:
  J. L. Lagrange (1736–1813): *Mécanique analytique* (1788, 2. vyd.: 1811–1815)
  P. S. de Laplace (1749–1827): *Traité de Mécanique céleste* (5 dílů: 1799–1825)
– poznal, že je schopen aplikovat vektorové metody, které rozvinul již v roce 1832
– studoval s bratrem Robertem Schleiermannovu *Dialektiku* (1839)

● 1842 až 1843 – učebnice pro středoškolské studenty (některé měly více vydání)
– *Grundriss der deutschen Sprachlehre*, 1842
– *Leitfaden für den ersten Unterricht in der Lateinischen Sprache*, 1843
– *Leitfaden für den ersten Unterricht in der Deutschen Sprache*, 1843 (s Robertem)

● 1844 – *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik.* Angl. překl. *A new branch of mathematics. The Ausdehnungslehre of 1844, and other works.* Transl. Lloyd C. Kannenberg (*1924), Open Court Publishing, 1995, xvi+555 stran
– práce nevzbudila pozornost, příliš abstraktní a filozofické pojetí

● 1845 – *Neue Theorie der Elektrodynamik*

● 1846 – *Deutsches Lesebuch für Schüler von acht bis zwölf Jahren* (s W. Langbeinem), L. Oehmigke, Berlin, 394 stran, 7. vydání: R. Grassmann, Stettin, 1877, xii+420 stran

● 1847 – *Die Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene Geometrische Charakteristik*
– řešení geometrického problému, který předložil G. W. Leibniz (1646–1716), a to bez použití geometrických postupů
– A. F. Möbius (1790–1868): návrh na cenu Fürstliche Jablonowki'schen Gesellschaft (cenu dostal 1. července 1846)
– Möbius však kritizoval způsob, jakým Grassmann vyložil své abstraktní ideje, požadoval intuitivní „háčky“, na nichž by se dalo „zachytit, pochopit, pokračovat dál”

● 1847 – učitelem reformované školy Friedricha Wilhelma, Štětín – titul Oberlehrer
– cítil se nedoceněn; produkuje přece vysoce novátorskou matematiku a přitom učí na nižší střední škole
– požádal ministra školství pruské vlády, aby byl zahrnut do seznamu kandidátů na uvolněná univerzitní místa
– ministr se dotázal Kummera na Grassmannovu produkci a odbornost: ... *mimořádně dobrý materiál vyjádřený v nedostatečné formě* ... – konec nadějí na univerzitní kariéru (matematik E. E. Kummer (1810–1893) byl jedním z recenzentů výše uvedené oceněné práce)

● 1847 – sňatek: Marie Therese Knappe (1824–1889), dcera statkáře
– 11 dětí, 7 dosáhlo dospělého věku
– syn Hermann Ernst (1857–1922): získal doktorát na univerzitě v Halle-Wittenbergu za práci *Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie* (1893), roku 1904 se stal mimořádným profesorem matematiky v Giessenu
– synové: Justus (1851–1909) – ředitel gymnázia ve Štětíně, Ludolf (1861– ?) – lékař ve Štětíně, Richard (1864– ?) – profesor techniky v Karlsruhe

● 1848 až 1849 – revoluční léta
- pád francouzského krále Ludvíka Filipa (1773–1850), snahy o sjednocení Německa
- Hermann a Robert vydávali politické časopisy *Deutsche Wochenschrift für Staat, Kirche und Volksleben*, *Norddeutsche Zeitung*; podporovali sjednocení Německa, vytvoření konstituční monarchie, publikovali články o konstitučním zákonu
- později opustili své myšlenky, časopis zanikl

● 1852 – zemřel otec Justus Günter Grassmann
- získal jeho místo na gymnáziu a titul řádného středoškolského profesora

● padesátá léta – příklon ke starým jazykům
- měl pocit, že ztratil možnost získat slávu v matematice
- obrátil se ke svým dalším zájmům
- zahájil detailní studium starých jazyků, stal se uznávaným odborníkem na sanskrt

● 1853 – *Zur Theorie der Farbenmischung*
- barvy reprezentoval hmotnými body umístěnými na kulové ploše (jejich poloha odpovídá barevnému odstínu a váha intenzitě), smíšená barva odpovídá těžišti
- spor s teorií H. L. F. von Helmholtze (1821–1894) – ten Grassmanna pochopil

● 1854 – *Übersicht der Akustik und der nieder Optik*
- využil svého perfektního sluchu a experimentů s generátorem nahrazujícím lidský hlas, poznal, že každý samohláskový zvuk vzniká z přesně definovaných tónů specificky charakterizovaných, studoval problémy kvality generátoru

● 1854 – návrat k matematice
- rozhodl se lépe propracovat svoji „teorii extenzí“
- domníval se, že nepochopení je dáno tím, že píše moderním jazykem a stylem

● 1856 – pokladníkem štětínské lóže svobodných zednářů (zednářem byl již od studií)

● 1857 – členem vedení *Pomersche Hauptverein für die Evangelisierung Chinas*
- spolek publikoval časopis a příležitostně vysílal misionáře do Číny
- pod Grassmannovým vedením se spolek roku 1873 spojil s *Rheinische Missions-Gesellschaft in Barmen*

● 1862 – *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form bearbeitet*
Extension Theory. Transl. Lloyd C. Kannenberg, AMS, LMS, 2000, xviii+411 stran
přepracovaná verze, lepší a srozumitelnější výklad, matematické pojetí, formule
- práce opět nevzbudila zájem

● 60. léta – odklon od odborné matematiky, příklon k jazykům, učebnice
- studoval sanskrt, staroindické hymny *Rig-Veda*
- tvrdil: komparativní lingvistika musí vyjít ze studia staroindických jazyků
- studium: gothic, stará pruština, stará perština, litevština, ruština, církevní slovanština
- sepisoval práce o fonetice založené na historickém studiu jazyků
- *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten*, Berlin, 1861, viii+221 stran
- *Lehrbuch der Trigonometrie für höhere Lehranstalten*, Berlin, 1865, vii+115 stran

● 1870 – *Deutsche Pflanzennamen* (s bratrem Robertem a švagrem Ch. Hessem)
- rozhodl se představit německá jména pro všechny rostliny rostoucí v německy mluvících zemích, ukázat souvislosti s řečinou a latinou, popsat vznik termínů
- věřil v užitečnost této práce pro botaniky i lingvisty

- 1872 až 1875 – *Wörterbuch zum Rig-Veda*, Brockhaus, Leipzig, celkem 1776 stran
  - kompletní glosář, základní a dodnes ceněné dílo
  - plánoval na tuto práci navázat obsáhlou gramatikou
- 1876 až 1877 – *Rig-Veda. Übersetzt und mit kritischen und erläuternden Anmerkungen versehen*, Brockhaus, Leipzig, viii+589, ii+524 stran
  - skvělý překlad hymnů, jejich výklad, komentáře, zachování metriky
  - tuto práci považoval za důležitější než podrobnou gramatiku
  - úspěch (neúspěch překladu Alfreda Ludwiga (1832–1912) z let 1876 až 1888)
- 1876 ocenění Grassmannových filologických prací
  - zvolen členem *American Oriental Society*
  - obdržel čestný doktorát *Univerzity v Tübingen*
- 1876 až 1877 – návrat k matematice
  - příprava 2. vydání *Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig ...* z roku 1844
  - 2. vydání vyšlo posmrtně: Otto Wigand, Leipzig, 1878, xxxiv+301 stran

† 26. 9. 1877 Štětín

- Ocenění Grassmannova matematického přínosu přichází až koncem 19. století

* * * * * * *

2 Počátky lineární algebry

- lineární závislost veličin $a = \beta\, b + \gamma\, c + \ ...$

  (*veličina a se číselně odvodí z veličin b, c s pomocí čísel* $\beta, \gamma, ...$)
  řada tvrzení o lineárních kombinacích a lineární závislosti a nezávislosti
- báze (*jednotky*) $e_1,\ e_2,\ e_3,\ ...$
- vektory (*extenzivní veličiny*) $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... = \sum \alpha_r e_r = \sum \alpha e$
- sčítání a odčítání vektorů $\sum \alpha e \pm \sum \beta e = \sum (\alpha \pm \beta)\, e$
- násobek vektoru číslem $\sum \alpha e \cdot \beta = \sum (\alpha \beta)\, e$
- vlastnosti operací, lineární obal, Steinitzova věta o výměně, dimenze, souřadnice
- shrnutí: podán náčrt definice a základních vlastností vektorového prostoru dimenze *n*
- součin vektorů – distributivní $[\sum \alpha_r e_r \bullet \sum \beta_s e_s] = \sum \alpha_r \beta_s [e_r e_r]$

  $$[\sum \alpha_r e_r \bullet \sum \beta_s e_s \bullet\ ...] = \sum \alpha_r \beta_s ... [e_r e_r ...]$$
- kokrétní požadavky vedou k různým typům součinů (vnitřní – skalární, vnější, ...)
  studium jejich vlastností
- aplikace v geometrii: afinní a eukleidovská geometrie *n*-rozměrného prostoru
- nadstavba: teorie funkcí, diferenciální a integrální počet

3 Počátky teorie hyperkomplexních čísel (teorie algeber)

W. R. Hamilton (1843) – kvaterniony, J. T. Graves (1843) a A. Cayley (1845) – oktávy

Grassmannova algebra (vnější algebra) – H. G. Grassmann: *Ausdehnungslehre* 1844, 1862.

- základní jednotky: $e_1, ..., e_n$
- báze: $1, e_1, ..., e_n, ..., e_ie_j, ..., e_ie_je_k, ..., e_1e_2...e_n$
- lineární kombinace: $a + \sum a_i\, e_i + \sum a_{ij}\, e_ie_j + \sum a_{ijk}\, e_ie_je_k + ... + a_{12...n}\, e_1e_2...e_n$
- sčítání extenzivních čísel – „po složkách"
- násobení extenzivních čísel – distributivní, navíc $e_p{\cdot}e_p = 0$, $e_p{\cdot}e_q = -\, e_q{\cdot}e_p$ pro $p \neq q$

Asociativní algebra dimenze 2^n, která má pro $n > 0$ netriv. dělitele nuly ($n = 1$ – duální čísla)

Cliffordova algebra – W. K. Clifford (1845–1879): *Applications of Grassmann's extensive algebra*, American Journal of Mathematics 1(1878), 350–358.

- modifikace pravidel pro násobení: $e_p{\cdot}e_p = -1$, $e_p{\cdot}e_q = -\, e_q{\cdot}e_p$ pro $p \neq q$

Asociativní algebra dimenze 2^n, která má pro $n > 2$ netriviální dělitele nuly
($n = 1$ – komplexní čísla, $n = 2$ – Hamiltonovy kvaterniony, $n > 2$ – zobecnění kvaternionů)

Další modifikace Grassmannovy, resp. Cliffordovy algebry: $e_p{\cdot}e_p = 1$ pro $p = 1, ..., k$
($n = k = 1$ – dvojná čísla) $e_p{\cdot}e_p = -1$ pro $p = k+1, ..., n$

4 Počátky vícerozměrné geometrie v 19. století

- Arthur Cayley (1821–1895):

Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions, Philosophical Magazin London, 1843.

- Hermann Günther Grassmann:

Ausdehnungslehre, 1844, 1862, 1878.

- William Rowan Hamilton (1805–1865):

On quaternions, or On a new system of imaginaries in algebra, Phil. Mag. Lond. 1844–1850.
Lectures on quaternions, Hodges and Smith, Dublin, 1853.
Elements of quaternions, London, 1866, 2. vyd. 1899, 1901, repr. Chelsea, 1969; něm. 1882.

- Julius Plücker (1801–1868):

System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise, Bonn, 1846.
Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement I, II, Teubner, Leipzig, 1868, 1869.

- Ludwig Schläfli (1814–1895):

rukopis pro vídeňskou akademii (1851) – *Theorie der vielfachen Kontinuität*, Basel, 1901.
Reduction d'un intégrale multiple qui comprend l'arc du circle et l'aire du triangle sphérique comme cas particuliers, Journal de mathématiques pures et appliquées, 1855.
On the multiple intégral ..., Quarterly Journal of pure and applied mathematics 1858–1860.

- Bernhard Riemann (1826–1866):

Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Habilitationsvortrag, 1854; Abhandlungen d. kgl. Gesellschaft d. Wiss. Göttingen 13(1867), 133–152; Werke, 272–287.

5 První ohlasy Grassmannových matematických prací

- William Rowan Hamilton – 1850
- Hermann Hankel (1839–1873): *Theorie der complexen Zahlensysteme insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamiltonschen Quaternionen*. Leipz.,1867.
- Alfred Clebsch (1833–1872), 1869 – inspirováni: A. Brill, P. Gordan, O. Henrici, F. Klein, F. Lindemann, J. Lüroth, M. Noether, V. Schlegel, E. Study, A. Voβ.
- Victor Schlegel (1843–1905): Sys*tem der Raumlehre nach den Principien der Grassmannschen Ausdehnungslehre und als Einleitung in dieselbe.* 1. Theil: *Geometrie. Die Gebiete des Punktes, der Geraden und der Ebene*. 2. Theil: *Die elemente der modernen Geometrie und Algebra*. Teubner, Leipzig, 1872, 1875.
- Felix Klein (1849–1925): *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (tzv. *Erlangenský program*). A. Deichert, Erlangen, 1872.
- Victor Schlegel: *Hermann Grassmann: Sein Leben und seine Werke*. Leipzig, 1878.
- *Hermann Grassmann. Sein Leben und seine mathematisch-physikalischen Arbeiten*. Mathematische Annalen 14(1879), 1–45.
- Giuseppe Peano (1858–1939): *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*. Bocca, Torino, x+170 str. *Geometric Calculus. According to the Ausdehnungslehre of H. Grassmann*. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2000. Transl. Lloyd C. Kannenberg, xv+150 stran.

Literatura

[1] Grassmann H.: *Gesammelte mathematische und physikalische Werke.* I.1, I.2, II.1, II.2, III.1, III.2. Leipzig, 1894 až 1911; Johnson Reprint Corpor., New York, London, 1972.

[2] Zaddach A.: *Grassmanns Algebra in der Geometrie. Mit Seitenblicken auf verwandte Strukturen*. B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich, 1994, xxiii+ 376 stran.

[3] Schreiber P. (ed.): *Hermann Graßmann. Werk und Wirkung*. Internationale Fachtagung anläßlich des 150. Jahrestages des ersten Erscheinens der "linealen Ausdehnungslehre" (Lieschow/Rügen, 23.–28. 5. 1994), Greifswald, 1995, 112 stran.

[4] Schubring G.: *Hermann Günther Graßmann (1809–1877): Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar.* Papers from a Sesquicentennial Conference, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Boston, London, 1996, 359 stran [Z. Nádeník: *Reception of Grassmann's ideas in Bohemia*, 147–153].

[5] Petsche H.-J.: *Graßmann*. Vita Mathematica 13, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2006, xxii+326 stran.

Adresa

Doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *becvar@karlin.mff.cuni.cz*

PROČ UČIT MATEMATIKU
ANEB
JEDEN PŘÍKLAD Z POLITICKÉ HISTORIE

MARTINA BEČVÁŘOVÁ

1 Situace v Bulharsku

Ve druhé polovině 19. století na Balkánu doznívaly války s Tureckem. Teprve roku 1878 na základě výsledků Berlínského kongresu získalo Rumunsko, Černá Hora a Srbsko nezávislost, v severozápadní části dnešního Bulharska vzniklo nezávislé Bulharské knížectví, ale jihovýchodní část Bulharska, tzv. Východní Rumélie, zůstala pod tureckou správou a obdržela pouze statut zvláštní autonomní oblasti. Roku 1885 se obě bulharské země spojily, ale nezávislost a mezinárodní uznání získalo Bulharsko až roku 1908.

Do konce sedmdesátých let 19. století neexistovala žádná vyšší střední ani vysoká škola, na které by výuka probíhala v bulharštině. Bulhaři mohli studovat na tureckých školách, v řeckých ortodoxních seminářích a klášterech. Movitější a nacionálně zaměření studenti odcházeli do zahraničí (Rumunsko, Rusko, Rakousko, Čechy). Teprve v osmdesátých letech, když se Bulharsko zbavilo turecké nadvlády, začalo budovat vlastní střední i vysoké školství.

Od počátku sedmdesátých let 19. století přicházela řada bulharských studentů za vyšším vzděláním (odborným i všeobecným) do Čech, které již poskytovaly kvalitní a poměrně levnou výuku v českém jazyce, jež byl Bulharům podstatně bližší než rumunština či němčina. V Čechách byla navíc silně rozšířena myšlenka „panslavismu“ a s ní související snaha pomoci utlačovaným „bratrům“ Slovanům na Balkáně. Zásluhou několika českých vzdělanců vznikly v několika městech (např. Tábor, Písek, Hradec Králové) větší komunity bulharských studentů, které kromě studia udržovaly těsné kontakty s rodícím se bulharským národně osvobozeneckým hnutím v Rumunsku. Na studium bulharských přátel vzpomínali ve svých pamětech spisovatel Josef Holeček (1853–1929) a matematik Antonín Václav Šourek (1857–1926). Jedním ze studentů, který prošel touto složitou cestou, byl Ivan Petrov Salabašev, bulharský matematik, finančník, politik a diplomat.

2 Ivan Petrov Salabašev

2.1 Studium v Čechách

Ivan Petrov Salabašev se narodil v Thrákii ve Staré Zagoře dne 7. ledna 1853 v rodině bohatého kupce. Nejprve studoval ve svém rodišti na bulharské nižší škole, od roku 1870 do roku 1872 na gymnáziu v Táboře, od roku 1872 do roku 1873 na gymnáziu v Praze. Již během středoškolského studia projevoval hlubší zájem o matematiku a deskriptivní geometrii. Traduje se, že jako student v Táboře objevil chybu v konstrukčním postupu v české středoškolské učebnici deskriptivní geometrie. Po maturitě pokračoval v letech 1873 až

1876 ve studiu na české technice, docházel také na české přednášky na pražské univerzitě. Mezi jeho učiteli byli Gabriel Blažek, Emil Weyr, Augustin Pánek, František Tilšer a František Josef Studnička. Na technice se I. P. Salabašev soustředil především na matematiku. Své první výsledky předložil prostřednictvím Emila Weyra dne 5. května 1875 na zasedání *Královské české Společnosti nauk*. Jeho práce z kinematické geometrie byla otištěna pod názvem *O křivkách opsaných vrcholem pohybujícího se trojúhelníka* (Zprávy se zasedání KČSN, 1875, str. 66–70). Jednalo se o první původní práci bulharského matematika. V roce 1876 složil I. P. Salabašev státní zkoušku a opustil Čechy.

2.2 Politická a pedagogická kariéra mimo Bulharsko

I. P. Salabašev již během studia pracoval pro osvobození Bulharska od turecké nadvlády, udržoval kontakty s revolucionářem Ljubenem Karavelovem (1834–1879). S pomocí českých přátel publikoval články o bulharských politických a hospodářských problémech, kultuře, jazyce, zvycích atd. Když roku 1876 vypukla srbsko-turecká válka, odešel do Bělehradu a jako dobrovolník vstoupil do srbské armády. Vydržel zde však jen jeden měsíc, neboť byl rozčarován ze srbského nepořádku, špatného chování k dobrovolníkům, nelogického velení atd. Odešel na krátký čas do Rumunska, tehdejšího centra bulharských revolucionářů. Ve školním roce 1876/77 pobýval v Klosterneuburgu u Vídně; věnoval se studiu matematiky a zdokonaloval si němčinu. Následující dva školní roky vyučoval matematice na bulharské vyšší střední škole v Bolgradu v Besarábii (dnes Bolhrad na Ukrajině). Proslul jako vášnivý učitel a šachista, revolucionář a talentovaný matematik.

2.3 Politická kariéra v Bulharsku

V létě roku 1879 se I. P. Salabašev vrátil do Bulharska a stal se hlavním sekretářem ministerstva školství *Východní Rumélie*. Pod jeho vedením byla započata transformace bulharských škol podle českého vzoru. Na jeho pozvání přišli do Bulharska od školního roku 1879/80 první středoškolští učitelé z Čech, které osobně poznal jako spolužáky a přátele svých během studií v Praze. Zahájil úzkou spolupráci s Konstantinem Jirečkem (1854–1918), který se stal sekretářem a později prvním ministrem školství *Bulharského knížectví*.

Na podzim roku 1879 byl I. P. Salabašev zvolen poslancem *Oblastního sněmu Východní Rumélie* za stranu *Либералната партия*. V šestadvaceti letech zahájil téměř třicetiletou politickou kariéru, byl nejmladším poslancem prvního sněmu. Velkého úspěchu dosáhl, když s pomocí matematiky vyřešil problém zvolení první čistě „bulharské" vlády.

Jak vybrat z 56 poslanců desetičlennou vládu složenou jen z Bulharů, je-li 30 poslanců bulharských, 17 tureckých a 9 řeckých. Každý poslanec má právo vybrat právě 6 kandidátů. Zvoleno bude deset kandidátů s největším počtem hlasů. Všechny koalice jsou možné.

Díky tomuto úspěchu byla oceněna role matematiky v běžném i politickém životě, posílena a rozšířena její výuka na bulharských elementárních i středních školách.

Roku 1880 I. P. Salabašev kolem sebe soustředil poslance a mladé vzdělance a založil čistě bulharskou politickou stranu *Народнолибералната* партия, které se podařilo prosadit mírové oddělení Východní Rumélie od Turecka a vytvoření jednotného Bulharska.

Politická kariéra I. P. Salabaševa se vyvíjela velmi slibně. V letech 1882 až 1884 byl ministrem vlády Východní Rumélie. Na konci léta 1884 však na svůj post rezignoval, neboť byl znechucen bulharskou politikou, pletichařením, úplatností a prodejností politiků, politických stran i úředníků. Odešel do nevelkého města Kazanlak a věnoval se obchodu s proslaveným růžovým olejem. Když se politická situace změnila a bulharským premiérem se stal Stefan Stambolov (1854–1895), I. P. Salabašev se vrátil do aktivního politického života. V letech 1888 až 1890 byl ministrem financí, v letech 1891 až 1893 ministrem spravedlnosti a v letech 1892 až 1894 opět ministrem financí. Současně byl v letech 1890–1893, 1893–1894, 1901 a 1903–1908 poslancem bulharského národního shromáždění. Během této doby se pod jeho vedením podařilo prosadit a dokončit stavbu železnice Jambor – Burgas a železnice Sofie – Perník, zahájit stavbu železnice Šumen – Kaspičan a železnice Sofie – Roman, začít projekční práce na trati Belovo (dnes Blagoevgrad) – Plovdiv – Stara Zagora – Nova Zagora – Jambor. Tak byl položen základ k rozvoji dopravy v Bulharsku. K dalším úspěchům jeho vlády patřila ražba prvních novodobých zlatých bulharských mincí. Jako ministr spravedlnosti se zasloužil o zavedení nového bulharského právní systému a zákoníku, které byly sepsány v evropském duchu. Prosazoval logiku zákonů a paragrafů. Usiloval o matematickou přesnost, stručnost a jasnost jejich jednotlivých pasáží. Po pádu vlády a zavraždění premiéra S. Stambolova I. P. Salabašev politiku na čas opět opustil. Teprve roku 1903 vstoupil do nově založené strany *Демократическата партия*. Když se premiérem vlády stal Alexandr Malinov (1867–1938), I. P. Salabašev nastoupil opět do funkce ministra financí a vykonával ji v letech 1908 až 1910. Roku 1910 byl jmenován bulharským velvyslancem ve Vídni. V diplomatických službách působil až do roku 1914, podílel se především na řešení důsledků balkánských válek o turecké dědictví.

2.4 Nepolitická kariéra v Bulharsku

V roce 1880 se I. P. Salabašev ve své zemi proslavil překladem románu J. Vernea *Cesta kolem světa za osmdesát dní* (francouzsky vyšel roku 1873 pod názvem Le tour du monde on quatre-vingts jours). V následujícím roce byl jedním ze zakladatelů *Naučno-knižovno družestvo* (část pozdější Bulharská akademie věd), při jeho vzniku se stal dopisujícím členem (1881) a o tři roku později členem řádným.

Roku 1881 spolu s přáteli, básníky a revolucionáři, I. Vazovem (1850–1921), K. Veličkovem (1855–1907) a S. Bobčevem (1853–1940) založil časopis *Nauka*. Redigoval jej v letech 1881 až 1885, od dubna 1881 v něm publikoval články o významu matematiky, o její výuce, o počítání se zlomky, procenty apod. Na konci roku 1881 otevřel zábavně vzdělávací rubriku příkladů *Zadavky*, která uveřejňovala obtížné soutěžní úlohy.

Roku 1894 byl I. P. Salabašev opět znechucen politickými třenicemi a vrátil k matematice. Začal psát soutěžní úlohy pro nový vzdělávací časopis *Svetlina*. Současně se snažil svými finančními prostředky a politickým vlivem podporovat vzdělávání a vědeckou práci. Snad právě proto, když bylo dne 2. února 1898 založeno *Fizikálně-matematické družestvo* v Sofii, byl jmenován jeho prvním předsedou a čestným členem. Tomuto prvnímu odbornému bulharskému spolku věnoval obrovský finanční dar na podporu všech aktivit a především na vydávání odborného časopisu *Spisanie*. Jeho jméno dnes nese bulharská matematická soutěž.

Roku 1922 vznikl *Sofijský šachový klub*. Jeho prvním předsedou byl jmenován I. P. Salabašev, který po celý život, i jako ministr, chodil pravidelně hrát šachy do *Union klubu* v Sofii a všemožně v Bulharsku šachy propagoval.

Zemřel v Sofii dne 14. června 1924.

3 Závěrečná poznámka

Bulharští studenti, kteří získali vzdělání v Čechách, částečně přenesli náš vzdělávací systém a další aktivity do rodícího se bulharského státu. Čeští matematici se tak přímo i nepřímo podíleli na rozvoji bulharské národní vzdělanosti a vědy ve druhé polovině 19. století ve Východní Rumélii, Bulharském knížectví a později i ve sjednoceném Bulharsku.

Literatura

[1] Čobanov I., Rusev P.: *B'lgarski matematici*. Državno izdatelstvo „Narodna prosveta", Sofija, 1987.

[2] Grov K.: *Ivan Salabašev*. Obučenieto po matematika, 1981, 16–20.

[3] Juchnovski I.: *B'lgarska akademija na naukite. Členove i rkovodstvo 1869–2004. Spravočnik*. B'lgarska akademija na naukite, Centralna biblioteka, Sofija, 2005.

[4] Lafčiev S. N.: *Jubileeň sbornik na fiziko-matematičeskoto družestvo v Sofija po slučaj 40-godišnijamu jubilej*. Fiziko-matematičeskoto družestvo, Sofija, 1939.

[5] Milušev Ja.: *Česki profili v obščestvenoto razvitie na sledosvoboždenska B'lgarija*. Akademično izdatelstvo „Marin Arinov", Sofija, 2005.

[6] Rychlík J.: *Dějiny Bulharska*. Lidové noviny, Praha, 2000.

[7] http://www.minfin.government.bg/bg/page/107

[8] http://www.geocities.com/capitolhill/rotunda/2209/Bulgaria.html?20071

[9] http://bulharsko.proweb.cz/deji13.htm

Adresa

Doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
Ústav aplikované matematiky, Fakulta dopravní ČVUT
Na Florenci 25
110 00 Praha 1
e-mail: *nemcova@fd.cvut.cz*

JAMES GREGORY (1638–1675)

KRISTA ČERNEKOVÁ

1 James Gregory

James Gregory bol vynikajúci, originálne mysliaci škótsky matematik a prírodný vedec 17. storočia. Vyštudoval univerzitu v Aberdeen, kde v roku 1657 získal titul M.A. Po škole sa venoval astrológii a optike – v roku 1663 prichádza do Londýna, aby vydal svoju knihu *Optica promota*. Jeho ďalšie kroky smerovali na kontinent. Cestu začal v Paríži, kde chcel osobne prediskutovať svoj spis o optike s predným vedcom svojej doby Christiaanom Huygensom, ktorého však nezastihol na mieste. Ďalších päť rokov pravdepodobne strávil v severnom Taliansku na univerzite v Padui v spolupráci so Stephanom degli Angelom. Pracoval na spise *Exercitationes geometricae* a vydal ďalšie dve knihy – *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (1667) a *Geometriae Pars Universalis* (1668). V roku 1668 sa Gregory objavuje v Londýne, kde sa zastavil na svojej ceste späť do Škótska. Predstupuje pred Kráľovskú spoločnosť ako uznávaný matematik. Gregory predkladá Spoločnosti niekoľko vyriešených problémov a spolupracuje s niektorými jej členmi. Jeho dobré vzťahy so Spoločnosťou však narušuje spor, ktorý prebieha medzi ním a Huygensom. Nakoniec James Gregory odchádza z Londýna do Škótska, aby prijal miesto profesora matematiky na univerzite St. Andrews.

Po čase obnovuje styky s Londýnom prostredníctvom listov s Johnom Collinsom. Nezávisle na Newtonovi rozvýja teóriu nekonečných radov. Vzhľadom k tomu, že Kráľovská spoločnosť mala záujem obhajovať Newtonovo prvenstvo aj v tomto smere, Gregorymu sa nepodarilo vydať jeho spis, pretože Newton ešte nepublikoval svoju verziu teórie.

Po nejasných nezhodách na univerzite v St. Andrews odchádza James Gregory v roku 1674 prednášať na univerzitu v Edinburgu. Na jeseň 1675 však po náhlom oslepnutí, spôsobenom pravdepodobne nádchou, zomiera.

2 Spor Ch. Huygensa s J. Gregorym

V druhej časti príspevku by som sa rada bližšie venovala spomenutému sporu Jamesa Gregoryho s Christiaanom Huygensom. Spor primárne vznikol Huygensovou zdrvujúcou recenziou na Gregoryho spis *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, ktorý obsahoval úvahovú chybu. Tento spor negatívne pôsobil aj na ďalšie Gregoryho vzťahy vrámci anglickej matematickej komunity a jeho dobrovoľný vedecký „exil“ v Škótsku.

3 Gregoryho matematické výsledky

V poslednej časti rozoberiem niektoré z matematických výsledkov Jamesa Gregoryho týkajúce sa vzťahov medzi dotyčnicami ku krivkám a plochami pod krivkami. Porovnáme ich so súčasnými výsledkami Isaaca Newtona a pokúsime sa odhadnúť nakoľko mohli prispieť k modernemu formovaniu teórie matematickej analýzy.

Literatúra

[1] Edwards C. H.: *The Historical Development of the Calculus*. Springer, 1979.

[2] Malet A.: *Studies on James Gregorie (1638–1675)*. Princeton University, 1989.

[3] Turnbull H. W., Bushnell G. H. (eds.): *University of St Andrews James Gregory Tercentenary*. St Andrews, 1939.

Adresa

Krista Černeková
KDM MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *cernek@karlin.mff.cuni.cz*

ON THE FORMALIZATION OF A NUMBER THEORY PROBLEM BY PUPILS

BENEDETTO DI PAOLA[1]

1 Introduction

This paper concerns with a didactic research about the skilfulness of formalization by pupils facing a given mathematical problem having a historical background, namely the determination of all the prime numbers which are sums of two squares.

The first formulation of the theorem was expressed by Pierre de Fermat (1601–1665) in a letter to Merin Mersenne (1588–1648) on 25 December 1640 in which we read: “Tout nombre premier, qui sourpasse de l’unité un multiple du quaternaire, est une seul fois la somme de deux quarrés, et une seule fois l’hypoténuse d’un triangle rectangle.”

Fermat wrote again on the same subject to Frénicle de Bessy (1605–1675) on 15 June 1641: “La proposition fondamentale des triangles rectangles est que tout nombre premier, qui sourpassede l’unité un multiple de 4, est composé de deux quarrés.”

In his *Observations sur Diophante* (edited by his son Samuel in 1670) Fermat supplied a method to determine how many times a given number is the sum of two squares and, hence, the hypotenuse of a Pythagorean triangle. In the same observation we read of a procedure for finding a number that is obtained by adding two squares in an arbitrary number of ways. Therefore, the inspiration to study the sum of two squares is related to the Pythagorean triangles.

After Fermat’s formulation, the first demonstration of the theorem was given by Leonhard Euler (1707–1783) who spent several years of work to gain a satisfactory proof of that assertion. Another demonstration of the theorem was given by Carl Friedrich Gauss (1777–1855) in his *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) by the theory of binary quadratic forms[2].

The theme of the present research arose in an informal manner during a lesson about the Pythagorean theorem and its converse. First, the consideration of the Pythagorean relation gave the teacher an opportunity to ask pupils to try to determine the triples of natural numbers a, b and c such that $a^2 + b^2 = c^2$, i.e. so called pythagorean triples. On the other hand, the simple observation of some examples of triples such as $5^2 = 3^2 + 4^2$ or $13^2 = 5^2 + 12^2$ has led the teacher to a question whether the same relation can hold for prime numbers too, namely, whether a prime number can be written as a sum of two squares? For example, 5 and 13 are sums of two squares, since

$$5 = 1^2 + 2^2, \quad 13 = 2^2 + 3^2,$$

while 3 and 19 cannot be written as a sum of two squares, since, for example, one can check, for 19, that none of the differences

$$19 - 1^2 = 18,\ 19 - 2^2 = 15,\ \ 19 - 3^2 = 10, \text{ or } 19 - 4^2 = 3$$

is a square.

This question, apparently simple, greatly interested the pupils, therefore the teacher posed a general question: to find the algebraic form of *all* prime numbers which can be written as a sum of two squares. He wanted to falsify or to validate a basic hypothesis regarding the fact that *pupils are not generally able to formalize a number theory problem*.

---

[1] Collaborators: G. Manno, A. Scimone, C. Sortino, F. Spagnolo. G.R.I.M. (Research group for the learning of Mathematics), Department of Mathematics of the University of Palermo (Sicily), 34 Archirafi Street 90123.

[2] For an extensive history of the demonstrative methods of the theorem see Bussotti [2000].

In order to quantify pupils's answers to the question, the research was carried out by using two a-priori analyses about the possible behaviours of pupils. The first a-priori analysis labelled pupils's behaviours on the basis of the binary logic, while the second one labelled pupils's behaviours on the basis of fuzzy logic.

The data were processed by the software CHIC in both cases and the results were really different, because, while the first a-priori analysis validated the original hypothesis, the second one falsified it, showing that it requires a great wariness from the teacher before formulating any judgement about the skilfulness of a pupil.

The paper is an attempt to apply the new epistemological perspective of Regis Gras[3] in a didactic context, because the fuzzy implication is suitable to interpret the results of the investigation.

2 The experiment

The experiment was carried out at three different public High Schools in Palermo: "Galileo Galilei"(Scientific High School), "Finocchiaro Aprile" (Psycho-social Pedagogic High School) and "ITC Medi" (Technical Commercial High School).

The choice of these three schools is owed to the fact that different typologies of students give a greater significance to the results regarding the passage from the arithmetic thought to the algebraic one.

The classes involved were a first, a second and a third class of the mentioned three High School (14-16 years old). The range of the age of the students was chosen for to investigate, in a largest possible way, the different behaviour and verbalization of the pupils. Everyone was able to understand the language by which the text of the problem was expressed.

As shows the followed methodology, the questionnaire was distributed at the same time to three different classes, with a table of the first 500 prime numbers and a table of the first 500 squares. The time available to the students was 120 minutes.

3 The a-priori analyses of pupils's behaviours

Classic analysis	Fuzzy analysis
S0:He/she does not understand the problem	- errors in understanding the text; - calculations with prime number 2;
S1:He/she goes on by trial and error	- he/she goes on by random attempts; - he/she calculates only the first "10" cases; - he/she goes on in a methodical manner;
S2:He/she goes on by arithmetic calculations	- he/she does calculate by using both with compound and prime numbers; - he/she does calculate the differences between squares at random; - he/she does calculate differences between subsequent squares;
S3:He/she generalizes without using algebra formally (he/she does characterize only some relations among calculations approaching to the use of variables, without distinguishing the different role between a parameter and a variable)	Approaching to the use of variable, she/she does consider some large prime numbers as generalization even if he/she doesn't arrive to a general formalization; Approaching to the use of variable, he/she doesn't consider some large prime numbers, he/she only use the "first" case. He/she doesn't arrive to a general formalization;

[3] Gras R., Spagnolo F. (2004).

S4:He/she generalizes by using algebra (he/she does point out the role of the parameter)	- he/she writes some algebraic forms with a parameter; - he/she puts the parameter erroneously in the form; - he/she does not attribute right values to the parameter; - he/she performs right calculations with the parameter;
S5:He /she answer "yes"	he/she answer "Yes" after few attempts;
	he/she answer "Yes" after a lot of attempts;
S6:He /she answer "no"	he/she answer "No" after few attempts;
	he/she answer "No" after a lot of attempts;

4 Analysis of data: the different evaluation from the point of view of the binary logic and the fuzzy one

5 Appendix: the text for the experiment

Look at these examples:

$$5 = 1^2 + 2^2$$

$$13 = 2^2 + 3^2$$

$$17 = 1^2 + 4^2$$

As you know 5, 13 and 17 are prime numbers. According to you, is it possible to write all other prime numbers (except 2) in such a way too? Are you able to find a rule? Let motivate your answer.

Bibliography

Chiarugi I., Fracassina G., Furinghetti F., Paola D., 1995, *Parametri, variabili e altro: un ripensamento su come questi concetti sono presentati in classe*, L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, 18B, 1, pp. 34–50.

Di Paola B., 2004, *Some experimental observations about the passage from the arithmetical thought to the algebraic thought*, Yerme 2004, Podebrady, Czech Republic, http://www.pedf.cuni.cz/kmdm/yerme/index.html

Gras R. et alii, 1996, *L'implication statistique* (*Nouvelle méthode exploratoire de données*), Grenoble: La Pensée Sauvage.

Gras R., 1997, *Metodologia di analisi di indagine*, Quaderni di Ricerca Didattica, 7, pp. 99–109.

Gras R., 2000, *I fondamenti dell'analisi statistica implicativi*, Quaderni di Ricerca Didattica, 9, pp. 189–209.

Gras R., Spagnolo F., 2004, *Fuzzy implication through statistic implication: a new appro*ach in Zadeh's Classification, Fuzzy Information, 2004. Processing NAFIPS '04., pag. 425– 429 Vol.1.

Marino T., Di Paola B., 2007, *Se e quando si arriva al pensiero algebrico*, Quaderni di Ricerca in Didattica, N.17, 2007, http://math.unipa.it/~grim/quaderno17.htm

Address:

Benedetto Di Paola
Department of Mathematics of the University of Palermo
34 Archirafi Street 90123
email: *dipaola@math.unipa.it*

MATEMATICKÉ STROJE

HELENA DURNOVÁ

1 Úvod

Matematický stroj definuje Jiří Klír ve své knize [4] jako „stroj, který mechanizuje duševní práci“. Není překvapivé, že pod tímto vznešeným názvem se neskrývá nic jiného než dnes téměř všudypřítomný počítač. Do dnešní doby přežily spíše „stroje na zpracování informací“, což bylo v Československu na počátku 60. let 20. století považováno téměř za synonymum pojmu „matematické stroje“. Do historie československých počítačů neodmyslitelně patří dva pojmy: Antonín Svoboda a VÚMS (Výzkumný ústav matematických strojů).

2 Antonín Svoboda (1907–1980)

byl českým průkopníkem v oboru samočinných počítačů. Jeho životní osudy by vydaly na dobrodružný román, jeho vliv na další generace vědců v oboru je nezanedbatelný.

Svoboda v roce 1931 úspěšně ukončil studium strojního inženýrství a elektro-inženýrství na ČVUT, avšak ještě před dokončením tohoto studia začal studovat fyziku na Universitě Karlově. Během základní vojenské služby pracoval na vývoji zaměřovače pro nepřátelská letadla, a proto musel v roce 1939 opustit Československo.

Během 2. světové války sbíral Svoboda zkušenosti v zahraničí, kde získal uznání mezi takovými velikány oboru samočinných počítačů jako byli např. Vannevar Bush či Claude Elwood Shannon. Je také autorem jedné z prvních knih o počítačích, *Computing Mechanisms and Linkages* (1948).

Po 2. světové válce se Svoboda chtěl vrátit do Prahy, ale byly mu kladeny všemožné překážky. Přesto Svoboda začal přednášet o matematických strojích na ČVUT. V roce 1950 byla při Československé akademii věd založena Laboratoř matematických strojů, která byla díky své velikosti v roce 1955 přejmenována na Ústav matematických strojů.

V roce 1957 byl uveden do provozu první československý SAmočinný POčítač – SAPO. Pod Svobodovým vedením byly dále vyvíjeny např. počítače EPOS 1 a 2 – Elektronkový počítač střední, avšak vzhledem k tlakům vyvíjeným na jeho osobu se Svoboda rozhodl v roce 1964 emigrovat. Do konce života pak působil v USA.

3 VÚMS

Výzkumný ústav matematických strojů vznikl převedením Ústavu matematických strojů z půdy akademické na půdu průmyslovou: v roce 1958 se VÚMS stal součástí ministerstva strojního inženýrství. Svoboda de facto nikdy neřídil VÚMS, neboť krátce po převedení byl své funkce ředitele zbaven.

Přechodem VÚMS z půdy akademické na půdu průmyslovou se cesta od návrhu počítače k sériové výrobě výrazně zkrátila. Po emigraci Antonína Svobody v roce 1964 se však postupně také vytrácely originální návrhy počítačů.

V 70. letech 20. století se VÚMS zabýval vývojem počítačů JSEP (Jednotného systému elektronických počítačů), které byly kopiemi počítačů IBM řady 360 a 370. VÚMS si přesto zachoval svou jedinečnost, kterou do práce ústavu pravděpodobně vnesl právě Antonín Svoboda.

Literatura

[1] Černý V., Klír J.: *Antonín Svoboda (1907–1980): Jak vznikala jedna vědecká škola*. Vesmír 70 (1991), 341–345.

[2] Folta J. (ed.): *Computing Technology Past and Future*. Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum – Prague studies in the History of Science and Technology, New series, Vol. 5., Národní technické muzeum v Praze, Praha, 2001.

[3] Folta J. (ed.): *Studie o technice v českých zemích 1945–1992*. 3 svazky, Encyklopedický dům, Praha, 2003.

[4] Klír J.: *Matematické stroje*. Práce, Praha, 1961.

[5] Kolman A.: *Co je to kybernetika?* (rusky), Voprosy filosofii 1955, č. 4., 148–159.

[6] Vlček J.: *Výpočetní technika v zemích RVHP: ČSSR.* SNTL, Praha, 1975.

[7] Vopěnka P.: *Klady a zápory izolované vědy.* In: Markéta Devátá (ed.), *Věda v Československu v období normalizace (1970–1975).* Výzkumné centrum pro dějiny vědy, Praha, 2002, 25–33.

[8] Vysoký P.: *Padesát let kybernetiky*. Vesmír 77 (1998), 626–632.

[9] Vysoký P.: *Počítače z Loretánského náměstí*. Vesmír 78 (1999), 632–635.

[10] *Information Processing Machines*. 1953–1982 (bulletin VUMS).

[11] *Aktuality výpočetní techniky*. 1972–1991.

Adresa

Helena Durnová, Ph.D.
Ústav matematiky FEKT VUT
Technická 8
616 00 Brno
e-mail: *durnova@feec.vutbr.cz*

TUHÉ ÚLOHY ANEB O DIFERENCIÁLNÍCH ROVNICÍCH, KTERÉ ODOLÁVALY NUMERIKŮM

ZDENĚK HALAS

1 Historický úvod

První, kdo hledal přibližná řešení diferenciálních rovnic numericky, byl Newton ve svých Principiích. Konvergenci Eulerovy metody dokazuje Cauchy r. 1824. První zmínku o mnohokrokových metodách nacházíme v dopise J. C. Adamse psaném F. Bashforthovi z roku 1855. Adams-Bashfortovy a Adams-Moultonovy formule odvodil Adams v článku [3]. Počátky Runge-Kutta metod lze nalézt v [4] až [6].

2 Stiff úlohy

2.1 Počátky stiff úloh

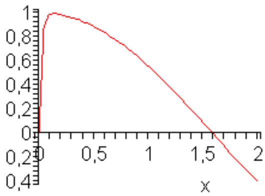
Termín „stiff equations" začali razit Charles F. Curtiss a Joseph Oakland Hirschfelder ve svém článku [1] z roku 1952. Zde své praktické zkušenosti komentují slovy: *Při studiu chemické kinetiky, teorie elektrických obvodů a problémů navádění raket se objevují typy diferenciálních rovnic, které je mimořádně obtížné řešit běžnými numerickými metodami.*

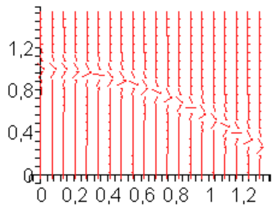
Stiff úlohy jsou charakteristické tím, že na ně nelze použít explicitní metody. Výskyt takovýchto problémů komentoval G. Dahlquist slovy: *„…Kolem roku 1960 se věci úplně změnily a každý si začal být vědom toho, že svět je plný stiff úloh."*

2.2 Co to jsou stiff úlohy

Tuhost je komplexní záležitost. Podstatou je, že krok, který by vedl k požadované přesnosti je třeba velice zmenšovat, aby bylo možno rovnici numericky vyřešit. Základní příčinou takového zmenšování je potřeba stabilizovat proces numerického řešení a zajistit odpovídající rychlost konvergence při vyhodnocování implicitní formule prostou iterací. V klasickém případě takové důvody nejsou příčinou dramatického zmenšování kroku a člověk na ně zkrátka zapomene, což má za následek, že se diví, když úlohu s málo se měnícím řešením nelze numericky řešit s velkým krokem… Klasickým příkladem stiff úlohy je Van der Polova rovnice $y'' + \mu (y^2 - 1) y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

Pojem stiff úloha lze snadno vyložit na počátečním problému $y' = -50 (y - \cos x)$, $y(0)=0$. Jeho řešení a směrové pole jsou:





Jedná se o význačný typ stiff úloh, jímž jsou rovnice, jejichž řešení se skládá ze dvou částí. První část velmi rychle „vyhoří" (transient solution) a druhá část je stálá (permanent solution). Transient solution vyvíjí soustavný tlak na krok – pokud by se krok patřičně nehlídal, tak by se tato již „vyhořelá“ část řešení mohla opět „aktivovat“. Obecněji lze tento typ vyjádřit rovnicí $y' = \mathrm{A}y + \Phi(x)$. Ta má řešení ve tvaru $y(x) = \sum k_i \, e^{\lambda_i x} \, c_i + \Psi(x)$, na kterém můžeme dobře pozorovat strukturu transient solution + permanent solution.

Curtiss a Hirschfelder hledali hladká řešení rovnic, jejichž jakobiány mají velmi velká vlastní čísla. (Což není přesně to, co dnes označujeme jako stiff úlohy.) Používali BDF (backward differentiation formula), která je založena na numerickém derivování, přičemž se vyjde z interpolačního polynomu.

Literatura

[1] Curtiss C. F., Hirschfelder J. O.: *Integration of stiff equations*. Proc. U. S. Nat. Acad. Sci. 38(1952), 235–243.

[2] Engel F., Schlesinger L.: *Leonhardi Euleri Opera Omnia*. Ser. 1, Vol. XI, Leipzig, B. G. Teubner, 1913.

[3] Bashforth F., Adams J. C.: *An Attempt to Test the Theories of Capillary Action*. Cambridge University Press, 1883.

[4] Runge C. D. T.: *Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen*. Math. Annalen 46(1895), 167–178.

[5] Heun K.: *Neue Methode zur approximativen Integration der Differentialgleichungen einer unabhängigen Veränderlichen*. Zeit. Math. Phys. 45(1900), 23–38.

[6] Kutta M. W.: *Beitrag zur näherungsweisen Integration oder Differentialgleichungen*. Zeit. Math. Phys. 46(1901), 435–453.

[7] Widlund O.: *A Note on Unconditionally Stable Linear Multistep Methods*. BIT 7(1967), 65–70.

[8] Hairer E., Wanner G.: *Solving ordinary differential equations II, Stiff and differential-algebraic problems*. Second edition, Springer Verlag, Berlin, 1996.

[9] Butcher J. C.: *Thirty years of G-stability*. BIT 46(2006), 479–489.

[10] Dahlquist G.: *33 years of numerical instability*. BIT 25(1985), 188–204.

Adresa

Mgr. Zdeněk Halas, DiS.
Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Tomkova 40
779 00 Olomouc–Hejčín
e-mail: *zdenekhalas@seznam.cz*

HISTORICKÝ VÝVOJ ROVINNÉ SINOVÉ A KOSINOVÉ VĚTY

BARBORA HAVÍŘOVÁ

1 Úvod

Vývoj sinové a kosinové věty byl v historii nejvíce ovlivněn způsobem zápisu a chápáním goniometrických funkcí. Nejprve byly goniometrické funkce chápány pouze jako délky úseček, teprve Euler (1707–1783) s nimi pracoval jako s funkcemi.

Trigonometrie byla od počátku pomůckou pro řešení praktických úkolů v astronomii, mořeplavectví apod. Teprve v arabských dílech se trigonometrie objevuje jako samostatná oblast matematiky.

Na počátku, v době Ptolemaia, byla místo sinu používána délka tětivy. V našem pojetí se vlastně jedná o dvojnásobek sinu polovičního úhlu. Indové již používali polovinu tětivy, v dnešní terminologii tedy sinus, a také začali používat dnešní kosinus, Arabové přidali další goniometrické funkce. Dnešní termín sinus se objevil při překladu z arabštiny do latiny ve 12. století a kosinus ještě o několik století později.

2 Sinová věta

2.1 Řekové

Řekové při řešení obecného trojúhelníka často používali rozdělení na dva pravoúhlé pomocí výšky. Tento postup byl používán i později v dílech, která již sinovou větu obsahují.

2.2 Nasír ad-Dín Túsí (1201–1274)

Nasír ad-Dín Túsí sestavil sinovou větu pomocí délek tětiv i pomocí sinů v podobě, ve které se používá dnes. Tím byla poprvé explicitně formulována sinová věta.

2.3 Levi ben Gerson (Gersonides, 1288–1344)

Gersonides řešil úkol určit ze znalosti délek dvou stran a velikosti úhlu proti jedné z nich velikosti ostatních vnitřních úhlů a délku zbývající strany. Zkonstruoval kružnici opsanou trojúhelníku a používal délky tětiv. Velmi dobře znal souvislost mezi délkou tětivy a sinem, mohl proto formulovat sinovou větu. Ve svém díle uvedl, že ze znalosti velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku a délky jedné strany mohou být ihned určeny strany zbývající. Jedná se o nejstarší známé přesné vyslovení a dokázání sinové věty v západoevropské literatuře.

2.4 Johannes Müller von Königsberg (Regiomontanus, 1436–1476)

Regiomontanus znal dílo Gersonida, mohl tedy na něj navázat. Ve své knize precizně vyslovuje a dokazuje sinovou větu. Využívá ji k řešení různých i netriviálních úloh.

2.5 François Viète (1540–1603)

Viète začíná své pojednání o nepravoúhlém trojúhelníku vyslovením sinové věty ve formě $\sin A : a = \sin B : b = \sin C : c$

3 Kosinová věta

3.1 Klaudios Ptolemaios (asi 85–165)

Ptolemaios řeší úlohu určit vnitřní úhel v trojúhelníku ze znalosti délek tří stran postupem, z něhož se později vyvinula kosinová věta.

Označíme-li D patu výšky na stranu a trojúhelníka ABC, určuje Ptolemaios nejprve rozdíl úseků

$$|CD| - |DB| = \frac{b^2 - c^2}{a}$$

a ze znalosti $|CD| + |DB| = a$ přímo délky uvedených úseků. Nyní pomocí Pythagorovy věty v pravoúhlých trojúhelnících CDA a DBA určí velikost $|AD|$ a z tabulek délek tětiv velikosti vnitřních úhlů u vrcholů B a C.

Obdobný postup dělení trojúhelníka na dva pravoúhlé byl používán často i v pozdějších dobách.

3.2 François Viète (1540–1603)

Viète ve svém díle představil kosinovou větu ve formě (přepsané dnešním způsobem)

$$2bc : (b^2 + c^2 - a^2) = 1 : \cos A$$

Literatura

[1] Braunmühl A.: *Vorlesungen über geschichte der trigonometrie*. Leipzig, 1900.

[2] Bečvář J. a kol: *Matematika ve středověké Evropě*. Dějiny matematiky, svazek 19., Prometheus, Praha, 2001

[3] Bečvář J. a kol: *Matematika v 16. a 17. století*. Dějiny matematiky, svazek 12., Prometheus, Praha, 1999.

Adresa

Mgr. Barbora Havířová
Vranovská 76
614 00 Brno
e-mail: *stastna@mail.muni.cz*

O EULEROVĚ KONSTANTĚ γ

JAN HOUSKA

Spolu s lépe známými blízkými příbuznými π a e náleží číslo γ mezi nejdůležitější konstanty v matematice, Euler považoval tuto konstantu za „hodnou vážné úvahy“. Sám jí věnoval až příliš velkou pozornost, zčásti doufaje, že ji určí pomocí jiné známé konstanty nebo funkce. (Julian Havil [1, 51–52])

1 Basilejský problém a objev konstanty γ

Basilejský problém jako „pohroma analýzy“ 17. století. „Jestliže někdo nalezne a sdělí nám, co dosud unikalo našemu úsilí, velká bude naše vděčnost“, *Jacob Bernoulli* 1689. Elegantní řešení L. Eulera pro sudá *n* (30. léta 18. století), součet řady $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ „obsahuje kvadraturu kruhu“. Pravděpodobnostní interpretace tohoto součtu. Otázka řešitelnosti basilejského problému pro lichá *n*. Souvislost objevu Eulerovy konstanty (1735) a basilejského problému. Basilejský problém jako zárodek ς-funkce (Riemannovy) $\varsigma(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$. Euler označoval svou konstantu písmenem *C* (*V. Jarník*), *O* nebo *A*, později bylo užito písmeno γ (*Mascheroni*). Podobně jako π nebo *e* vyskytuje se Eulerova konstanta v nečekaných souvislostech.

2 Další výpočty Eulerovy konstanty

Euler počítal číslo γ více způsoby, např. užitím *Eulerovy-Maclaurinovy* sumační formule vypočítal číslo γ na 16 desetinných míst

$$\gamma = 0{,}577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 8...$$

Výpočtem Eulerovy konstanty se zabýval *Lorenzo Mascheroni* (1790), vypočítal ji na pozoruhodných 32 míst (odtud též název *Eulerova-Mascheroniho konstanta*). O několik let později počítal tuto konstantu *Johann Georg von Soldner* 1809, užil *logaritmický integrál*, jeho výsledek se lišil na 20. místě. Z iniciativy C. F. Gausse vypočetl γ *F. G. B. Nicolai* (1812), který určil γ na 40 desetinných míst a zjistil souhlas s výsledkem Soldnerovým. Pomocí počítačové techniky bylo číslo γ určeno ještě přesněji – *Donald Knuth* 1962 na 250 desetinných míst, *Thomas Papanikolaou* 1997 na milion desetinných míst a *P. Demichel* a *X. Gourdon* 1999 na 108 milionů desetinných míst. *James Glaisher* (1848-1928): *„Nepochybně přání získat hodnoty těchto veličin na velký počet cifer je částečně dlužno faktu, že tato čísla jsou zajímavá sama o sobě; čísla e, π, γ, ln 2 a mnohé jiné numerické hodnoty zaujímají zvláštní až tajemné postavení v matematice, takže existuje přirozená tendence udělat vše pro jejich co nejpřesnější určení.“*

3 Eulerova konstanta a neelementární funkce

Význam konstanty γ v asymptotických rozvojích, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\approx\gamma+\ln n$. Výskyt čísla γ v rozvojích často užívaných neelementárních funkcí. *Logaritmický integrál* (*hyperlogaritmus*) *li*(*x*) a Soldnerovo dílo *Teorie nové transcendentní funkce* (1809).

Mocninný rozvoj pro kosinový integrál Ci (*integrálkosinus*). Funkce *integrálsinus Si* a exponenciální integrál Ei a jejich význam. *Hyperbolické integrální funkce*. *Besselovy funkce 2. druhu*. Konstanta γ souvisí se známou neelementární funkcí Γ – *Eulerovým integrálem 2. druhu*. Derivace funkce Γ v bodě 1, $\Gamma'(1) = -\gamma$. Eulerova konstanta a další důležité rozvoje funkce Γ. Existuje mnoho jiných zajímavých vztahů pro číslo γ zejména v určitých integrálech, např. [1,109]

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \ln x\, dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\gamma + 2\ln 2\right), \qquad \int_0^\infty e^{-x} \ln^2 x\, dx = \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2 .$$

4 Eulerova konstanta a teorie čísel

C. F. Gauss 1792 (ve 14 letech) a asymptotický odhad počtu prvočísel $\pi(x)$ menších než dané číslo x pomocí funkce $li(x)$. *P. L. Čebyšev* (1849) významně přispěl k odhadu funkce $\pi(x)$, přibližně platí

$$\sum_{p \le x}^{\infty} \frac{1}{p} \approx \gamma + \ln \ln x .$$

Gaussovu hypotézu dokázal současně *J. Hadamard* a *J. P. de la Vallée-Poussin* (1896). *Mertensovy součiny* (1874). Pokusy o důkaz *Goldbachovy hypotézy*. Další příklady výskytu konstanty γ v teorii čísel. Výsledky *P. L. Dirichleta* (1838) a *Ch. J. de la Vallée Poussina* (1898). Číslo γ a míra efektivity Euklidova algoritmu, *Glaisher-Kinkelinova a Porterova konstanta.*

Euler dokázal, že přirozené číslo může být vyjádřeno jako součet dvou druhých mocnin celých čísel právě tehdy, když každý prvočíselný činitel daného čísla tvaru $4k + 3$ se vyskytuje v tomto rozkladu v sudé mocnině, *Sierpińského konstanta.* Pro *Eulerovu funkci* $\varphi(x)$, která určuje počet přirozených čísel nesoudělných s číslem x, dokázal *Edmund Landau* (1877 - 1938), že

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\varphi(n) \ln \ln n}{n} = e^{-\gamma} .$$

Hypotéza, že pro počet Mersennových prvočísel $M(x)$ menších nebo rovných číslu x platí $M(x) \approx k.\ln x,\ k = e^{\gamma} / \sqrt{2}.$ Závěrem ještě jedna zajímavá rovnost

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Lambda(k) - 1}{k} = -2\gamma ,$$

kde $\Lambda(k)$ je von *Mangoldtova funkce*

$$\Lambda(k) = \ln p, k = p^m, p\ \textit{prvočrvoçm} \in N,\ \textit{jinak}\ \Lambda(k) = 0.$$

Číslo γ lze nalézt v četných pravděpodobnostních úvahách.

5 Jaké je číslo γ

Dodnes víme velmi málo o podstatě čísla γ. Nevíme, zda toto číslo je racionální nebo iracionální (nebo dokonce transcendentní), i když hypotéza hraničí s přesvědčením. Počátkem 20.století významný britský matematik *G. H. Hardy* nabízel své pracovní místo vedoucího (Saviliánské) katedry na univerzitě v Oxfordu každému, kdo dokáže, že

Gamma je iracionální. Existuje mnoho pokusů vyjádřit číslo γ řadou (s jistou zákonitostí členů), z jednoho takového pokusu plyne, že $\gamma = \ln 2\sqrt{\frac{23}{29}}$, „to by byl výsledek překonávající Eulera", jedná se však o přibližnou hodnotu odpovídající konstantě γ pouze na čtyři desetinná místa. Snahy o důkaz iracionality tohoto čísla však pokračují. Většinou jde o důkazy tvrzení, že daný výrok je ekvivalentní s racionalitou čísla γ. Důkazy vycházejí z modifikace Apéryho „zázračné" věty (*R. Apéry* 1978) – „překvapivého důkazu, který Euler vynechal", že $\varsigma(3)$ je iracionální. Prvotní pochyby k tomuto důkazu byly rozptýleny jeho zjednodušením (F. Beukers). Jako ocenění tohoto výsledku bylo číslo $\varsigma(3)$ nazváno *Apéryho konstantou.* Ve stati [3] přichází zajímavé vyjádření Eulerovy konstanty γ pomocí dvojného integrálu a další asymptotické rozvoje pro toto číslo. Metody vyšetřování konstanty *Gamma* úzce souvisejí s důkazy iracionality (pomocí integrálního počtu) čísla π nebo s důkazy iracionality hodnot funkce ς. Tento problém pro lichá čísla větší než 3 (stejně jako Basilejský problém pro lichá čísla) zůstává otevřený, i když v poslední době „vzrušil matematickou komunitu" jistý pokrok v tomto směru sdělený univerzitou v Gentu. [4]

Letos vzpomínáme 300. výročí narození *Leonharda Eulera* – osobnosti, jejíž dílo v matematice a exaktní přírodovědě (a v historii vědy) lze ztěží docenit. Narozen ve švýcarské Basileji strávil značnou část svého plodného života v ruském Petrohradu, kde je rovněž pochován. Na mramorové desce jeho hrobu čteme lakonický latinský nápis:

LEONHARDO EULERO ACADEMIA PETROPOLITANA.

Literatura

[1] HAVIL J.: *Gamma – Exploring Euler´s Constant*. Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2003.

[2] DUNHAM W.: *Euler -The Master of Us All*. The Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions No.22, Washington, DC, 1999.

[3] SONOW J.: *Criteria for Irrationality of Euler´s Constant*. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol.131, Number 11, March 2003, 3335–3344.

[4] HUYLEBROUCK D.: *Similarities in irrationality proofs for π, ln2, ς(2) a ς(3)*. American Mathematical Monthly 118 (2001), 222–231.

[5] KRATZER A., FRANZ W.: *Transzendente Funktionen*. Akademische Verlagsgesellschaft, Geest et Portig K.- G., Leipzig, 1960.

[6] KOLMOGOROV A. N., JUŠKEVIČ A. P. (ed.): *Matematika XIX veka*. Izdatel'stvo Nauka, Moskva, 1978.

[7] INGHAM A. E.: *The Distribution of Prime Numbers*. The University Press, Cambridge, 1932.

Adresa

RNDr. Jan Houska, CSc.
Výzkumný ústav pedagogický v Praze
Novodvorská 1010/14, 140 01 Praha 4
e-mail: *houska@vuppraha.cz*

VÝUKA MATEMATIKY VE STARÉ ČÍNĚ

JIŘÍ HUDEČEK

1 Před dynastií Sui (Suej, 589–618)

Z této doby neznáme žádné instituce výuky matematiky. Malí chlapci (5, podle jiných pramenů 7 let) se učili čísla a „Devět počtů“ – asi násobilku („Devět-devět“), možná i některé další početní techniky. Více se o počítání zajímali úředníci a astronomové, byli ale buď samouci, nebo se učili od mistrů – soukromníků. Takový způsob výuky zachycuje dialog mezi Chenzi'em (Čchen C') a Rong Fangem (Žung Fang) v první kapitole „Matematické klasiky zhouského gnómonu“:

Kdysi se Rong Fang otázal Chenzia: „Chtěl bych se nyní dozvědět o Vaší Cestě (dao). Jak poznat o Slunci jeho výšku a velikost, kam dosvítí a kolik ujde za den, a o tom, kam člověk dohlédne, nejzazší kraje světa, příbytky všech hvězd a šířku a hloubku nebe? Vaše Cesta je prý taková, že se toto všechno dá poznat. Opravdu to tak je?“

Chenzi řekl: „Ovšem.“

Rong Fang řekl: „Přestože nejsem přemýšlivý, toužím, abyste mne obšťastnil tím, že mi to vyložíte. Může být někdo takový jako já poučen o této Cestě?“

Chenzi řekl: „Ovšem. Toho všeho lze dosáhnout početními metodami (suan shu). Ty už se vyznáš v počítání dostatečně, abys toto poznal, pokud o tom budeš opravdu usilovně přemýšlet.“

Od 2. století př. n. l. jsou doložené i matematické texty a ti matematici, které známe z této doby (Liu Hui, Zhao Shuang ad.), se vzdělávali především samostudiem. Proto také začali psát komentáře, jako např. Liu Huiův komentář k „Matematice v devíti kapitolách“.

2 Vysoké matematické školství za dynastií Sui, Tang a Song

2.1 Historický rámec

Dynastie Sui sjednotila po dlouhé době rozpadu Čínu opět do jednoho státu. Pro jeho efektivní správu potřebovala velké množství lidí, pro jejichž výběr byl vytvořen systém státních zkoušek a státních a oblastních škol pro nadané studenty. Státní zkoušky bylo možno skládat z různých oborů: konfuciánských klasických knih (největší zájem, nejvíce hodností), práva, kaligrafie, matematiky a medicíny.

Dynastie Sui zanikla po vzpouře poddaných a zradě šlechty, ale její nástupnická dynastie Tang (613–906) využila vytvořeného systému pro vlastní potřebu. Talentovaná mládež byla jednak doporučována do státních vysokých škol vlivnými přímluvci, jednak se do nich dostávala systémem výběrových zkoušek na provinční a nižších úrovních. Po několika letech tvrdého studia se absolventi mohli (stejně jako samostudující) zúčastnit státních zkoušek, jejichž nejlepší kandidáti měli otevřené dveře k vysoké kariéře.

Zákon stanovoval postavení absolventů různých oborů. Stát měl největší zájem o muže, kteří znali zpaměti konfuciánské klasiky a byli na témata z nich schopni psát stylově dokonalé a myšlenkově hluboké eseje. To mělo zaručovat mravní kvality uchazeče a jeho schopnost státnické úvahy jako základní předpoklad pro státní službu. Ostatní obory byly chápány jako podpůrné a jejich absolventi i učitelé měli mnohem nižší úřední hodnosti. Zájem o studium byl také mnohem nižší než u hlavního oboru. Všechny podpůrné obory byly často rušeny a po několika letech znovu obnovovány podle momentální finanční situace a síly konfuciánských dogmatiků, kteří na „malou cestu“ neklasických nauk hleděli s despektem.

Během dynastie Tang byl matematický obor vyučován na vysoké škole v hlavním městě poměrně stabilně. Po pádu dynastie (906) následovalo další období rozpadu Číny, které skončilo neúplným sjednocením pod vládou dynastie Song (Sung, 960–1279). Tato dynastie, během jejíž vlády se Čína velmi rychle vyvíjela a bohatla, je nicméně známa svou vojenskou slabostí tváří v tvář okolním národům (Kitanům, Tangutům, Džurčenům a Mongolům). Vojenské neúspěchy vedly v 11. století k pokusu o reformu řízení země směrem k větší pragmatičnosti pod vedením prvního ministra Wang Anshi (Wang An-š‘). Zreformoval také systém státních zkoušek a úředních titulů a velký důraz kladl na praktické znalosti úředníků z oblasti práva a matematiky. Proto byla v roce 1084 obnovena výuka matematiky na císařské univerzitě a zároveň vydány tiskem matematické učebnice.

Po smrti císaře, jehož byl Wang Anshi chráněncem, ale nastoupila ostrá změna kurzu a s ní i zrušení matematické fakulty jako samostatné instituce. V letech 1105 až 1120 bylo sice ještě několik pokusů o její obnovu, ale císař nakonec ustoupil odpůrcům matematiky a od té doby již se nikdy předmětem státních zkoušek a vyučování na univerzitě nestala.

2.2 Náplň studia, učebnice a zkoušky

O studiu matematiky za dynastie Sui nemáme žádné podrobnější údaje.

Studium a státní zkoušky za dynastie Tang byly naproti tomu zakotveny v zákoníku, který se dochoval. Matematický obor měl stanovenu kvótu 2 profesorů s nejnižší úřední hodností, 2 asistentů a 30 studentů, kteří mohli pocházet jen z rodin prostých lidí a nejnižších úředníků. Studenti se dělili do 2 oborů, 15 jich mělo studovat 8 základních matematických klasických spisů, z nichž nejvýznamnější byla „Matematika v devíti kapitolách“, 15 se věnovalo dvěma nejnáročnějším klasikám, ztracenému *Zhui Shu* (asi „Technika navazování“) a dílu matematika ze 7. století Wang Xiaotonga „Matematická klasika navazující na starověk“, kde se počítají kubické rovnice. Celkem trvalo studium 7 let a postupně se během něj učili studenti nazpaměť jednotlivé úlohy a techniky z předepsaných knih.

Po každém roce studia skládali studenti průběžné zkoušky. Při nich se zohledňovaly průběžné výsledky a následovala ústní zkouška, ve které museli prezentovat hlavní myšlenky technik, které se naučili. Získali známku 0 až 10, podle níž se členili na nejlepší (≥8), střední a nejhorší (≤5). Studenti, kteří nerespektovali své učitele nebo 3 roky po sobě spadli do nejhorší kategorie, byli vyloučeni, stejně jako ti, kdo nestihli ukončit studium do 9 let.

Závěrečné státní zkoušky se skládaly z určeného počtu úloh (1–6) z jednotlivých předepsaných textů. Zkoušky byly písemné, správná odpověď se skládala ze správného výpočtu a popisu významu jeho jednotlivých kroků. U úloh, ke kterým nebyl ve studovaném textu komentář, se výklad smyslu výpočtu provádět nemusel, stačilo dodržet správný postup a dospět ke správnému výsledku. Nevíme, jestli byly v zadáních alespoň měněny číselné hodnoty. Zkoušku složil ten, kdo z celkem 10 úloh odpověděl aspoň na 6 správně, přičemž nesměl propadnout z některých klíčových textů. Úspěšný absolvent se mohl těšit na nejnižší úřední hodnost nižší 9. třídy. Pravděpodobně dále pracoval jako pomocník některého humanitně vzdělaného hodnostáře, v lepším případě mohl získat místo v císařské observatoři.

Velmi podobným způsobem jako v Číně bylo ve stejné době organizováno matematické studium i v Japonsku, kam byly dovezeny čínské matematické knihy.

V krátkém období obnovení matematického vzdělání za dynastie Song byly čistě matematické spisy v kurikulu doplněny o kalendářní, věštebné a astrologické učebnice. Absolventi museli umět vypočítat východy a západy hvězd a jejich polohu na obloze, případně i detaily zatmění Slunce a Měsíce, během uplynulého čtvrtletí, předpovídat počasí na tři dny dopředu pomocí korelativních analogií (*yin-yang*) a sestavit horoskop na následující měsíc. Počet studentů se zvýšil na 260 ve třech kolejích podle prospěchu, fakulta měla disponovat 4 profesory a hlavním vychovatelem s postavením funkcionářů a dále vychovateli, hospodářem, knihovníkem, matrikářem a pomocným učitelem. Zkoušky se konaly každý měsíc a byly ještě prokládány zkouškami do nejvyšší koleje.

3 Ukázky studovaných textů

3.1 Matematická klasika Zhouského gnómonu (*Zhou Bi Suan Jing*, Čou-bi suan-ťing)

Výpočty stran pravoúhlého trojúhelníku kvůli měření vzdálenosti hvězd jsou doplněny komentářem ze 3. století:

(Klas. text:) *Kratší a delší odvěsna se každá vynásobí sama sebou, sečteme je a vytvoří obsah přepony. Když ho dělíme odmocněním čtverce, je to přepona.*

(Zhao Shuangův / Čao Šuangův komentář): *Poznámka k obrázku přepony – Můžeme ze součinu odvěsny a přepony vytvořit 2 rumělkové obsahy, zdvojením vzniknou 4 rumělkové obsahy. Rozdíl delší a kratší odvěsny násobený sám sebou je hnědý obsah uprostřed. Přičtením obsahu rozdílu vznikne obsah přepony.*

Když obsah rozdílu odečteme od obsahu přepony a půlíme zbytek, rozdíl vezmeme jako přidružený dělitel a dělíme odmocněním čtverce, získáme zpět kratší odvěsnu. Přičtením rozdílu ke kratší odvěsně vznikne delší odvěsna.

3.2 Matematika v Devíti kapitolách (*Jiu Zhang Suan Shu*, Ťiou-čang suan-šu)

Ukázka z 6. kapitoly „Vyrovnaná doprava“, která se zabývá aplikací trojčlenky (metoda „Mějme“) na problémy pohybu:

(Klas. text:) *Mějme dobrého chodce, který ujde 100 kroků, a běžného chodce, který ujde 60 kroků. Nyní běžný chodec nejprve ujde 100 kroků, dobrý chodec ho pronásleduje. Ptáme se, po kolika krocích ho dostihne?*

Odpověď zní: Po 250 krocích.

Metoda zní: Položíme 100 kroků dobrého chodce, odečteme 60 kroků běžného chodce, zbytek 40 kroků je dělitel. 100 kroky dobrého chodce násobíme 100 kroků, které předem ušel běžný chodec, to je dělenec. Za každou část dělence, která je jako dělitel, získáme 1 krok.

(Liu Huiův / Liou Chuejův komentář:) *Poznámka: V této metodě se odečítá 60 kroků od 100 kroků, zbytek 40 kroků je poměr chůze předem běžného chodce. 100 kroků, které ušel dobrý chodec, je poměr dostihnutí. Zkrátíme je a získáme poměr dostihnutí 5, poměr chůze předem 2. Metodou „Mějme“ je 100 kroků, které předem ušel běžný chodec, množství daného, 5 je poměr hledaného, 2 je poměr daného, provedeme metodu „Mějme“ a získáme, po kolika krocích ho dostihne.*

3.3 Matematická klasika Mistra Suna (*Sunzi Suan Jing*, Sun-c‘ suan-ťing)

V první kapitole jsou návody k elementárním výpočtům, například násobení:

Metoda veškerého násobení je taková, že se [násobená čísla] znovu rozloží do pozice, kdy se horní a dolní spolu pozorují, když má horní pozice desítky, posunuje se [dolní pozice] na desítky, když má stovky, posunuje se na stovky, když má tisíce, posunuje se na tisíce. Horním se zmnoží dolní, výsledné množství se rozloží na střední pozici. Když se *říká deset, přecházíme, když není plných [deset], je jak samo je. Z horní pozice po pronásobení odstraň přední řád, dolní pozici po pronásobení celou posuň zpět [doprava]. Šest se nehromadí, pět není samotná tyčinka*[1]*. Horní a dolní se spolu násobí, když dojde k vyčerpání, je konec.*

Ve třetí kapitole je známá úloha s kongruencí (tzv. Chinese remainder problem):

Mějme věci neznámého počtu. Když je počítáme po třech, zbudou 2, když po 5, zbudou 3, když po 7, zbudou 2, ptáme se, kolik je věcí. Odpověď zní 23.

Metoda zní: Když počítáme po 3 a zbudou 2, položíme 140, když počítáme po 5 a zbudou 3, položíme 63, když počítáme po 7 a zbudou 2, položíme 30, jejich součet je 233, odečteme od toho 210 a získáme výsledek. Za každou věc, která zbude při počítání po 3, položíme 70, za každou, která zbude při počítání po 5, položíme 21, za každou, která zbude při počítání po 7, položíme 15. Od 106 a víc odečítáme 105, tím získáme výsledek.

4 Vliv institucionální výuky na čínskou matematiku

Nevíme o ničem, co by výuka na císařské univerzitě čínské matematice přinesla. Za dynastie Tang nevznikla žádná významná matematická díla. Málo prestižní obor asi nepřitahoval skutečně nadané studenty a jeho absolventi byli plně vytíženi svými povinnostmi administrativních pracovníků. Jejich vzdělání, založené na memorování textů a asi také tréninku v rychlosti manipulace s početními tyčinkami, jim nedávalo žádné základy pro samostatné matematické zkoumání, ke kterému asi většina postrádala i materiální podmínky a motivaci.

V době jižní Song (1127–1279) už původní dvorská matematika byla skoro neznámá a probouzející se zájem o praktickou matematiku, související s rozvojem obchodu, uspokojovaly populární knihy, psané často velmi pronikavými matematickými mysliteli. Početní desku začalo vytlačovat kuličkové počitadlo a tradiční formulace metod začaly být nahrazovány veršovanými říkankami (příklad je z „Všemocné sbírky početních metod“ editora Jia Henga / Ťia Chenga z poloviny 14. století):

Devatero násobení, to je jasné velice,
pamatuj si vždycky v hlavě součtu všechny číslice.
Překročí-li spodní sebe, k přednímu se přidává,
jinak všechno jenom u něj samotného zůstává.

Literatura

[1] Berezkina E. I.: *Matematika drevnego Kitaja*. Izdatěl'stvo Nauka, Moskva, 1980.

[2] Li Yan, Du Shiran: *Chinese Mathematics. A Concise History*. Clarendon, Oxford, 1987.

[3] Li Yan: *Gesammelte Abhandlungen über die Geschichte der Chinesischen Mathematik*. Band IV-1. Zhonghua Xueyi Chubanshe, Shanghai, 1947 (v čínštině).

Adresa

Mgr. Ing. Jiří Hudeček, Darwin College
University of Cambridge, Cambridge CB3 9EU, United Kingdom
e-mail: *hujirui@gmail.com*

[1] Připomenutí principu záznamu čísel početními tyčinkami – při přechodu z 5 ||||| na 6 ⊤ (u sudých řádů) je třeba místo přidání další tyčinky tři odebrat a jednu položit kolmo, při opačném postupu naopak nestačí odebrat kolmou tyčinku, ale je třeba doplnit čtyři svislé (nebo vodorovné, podle řádu).

GEOMETRICKÉ PRAVDĚPODOBNOSTI NA PŘELOMU 19. A 20. STOLETÍ

MAGDALENA HYKŠOVÁ

1 Úvod

Pojem geometrické pravděpodobnosti vznikl rozšířením klasické definice pravděpodobnosti na případ, kdy prostor elementárních jevů je nespočetný. Kořeny této teorie sahají do roku 1777, kdy Louis Leclerc, Comte de Buffon (1707–1788) publikoval řešení dnes slavné úlohy o jehle a několika úloh o hodu mincí na dlaždice různých tvarů [Buf12]. V roce 1812 se k Buffonově úloze o jehle vrátil Pierre Simon de Laplace (1749–1827), který na základě Bernoulliova slabého zákona velkých čísel navrhl použít Buffonem nalezenou pravděpodobnost $2l/\pi d$, že jehla délky l, vržená na síť rovnoběžek vedených ve vzdálenostech $d > l$, protne některou rovnoběžku, k odhadu hodnoty čísla π. O dalších 45 let později se Buffonovou úlohou zabýval Isaac Todhunter (1820–1884), který místo jehly uvažoval eliptický disk s hlavní osou délky $l < d$.

V roce 1965 začaly v britském časopise *Mathematical Questions with Their Solutions from the 'Educational Times'* vycházet různé úlohy a problémy týkající se geometrické pravděpodobnosti. Mezi nejvýznamnější autory těchto úloh patřili James Joseph Sylvester (1814–1897), Morgan William Crofton (1821–1895), Thomas Archer Hirst (1830–1892) and Arthur Cayley (1821–1895). V následujících letech pak tito a řada dalších britských matematiků pokračovala ve zkoumání různých konkrétních problémů souvisejících s geometrickou pravděpodobností v rovině. Přibližně ve stejné době, avšak do značné míry nezávisle, se geometrickou pravděpodobností zabývali francouzští matematikové Gabriel Lamé (1795–870), Joseph Bertrand (1822–1900) a Joseph-Émile Barbier (1839–1889). Zmíněným britským a francouzským matematikům, vývoji jejich myšlenek i jejich vzájemné komunikaci je věnován například článek [SPJ01].

Počátky teorie geometrické pravděpodobnosti jsou náplní příspěvků Lucie Ilucové a Anny Kalousové na této konferenci. My se společně podíváme do českých zemí, a to na práce Emanuela Czubera a Bohuslava Hostinského, matematiků, jejichž význam i v tomto oboru daleko přesáhl rakousko-uherské hranice.

2 Emanuel Czuber (1851–1925)

Emanuel Czuber se geometrickou pravděpodobností začal zabývat ještě v době svého působení na místě profesora německé reálky v Praze a vracel se k ní v rámci svých prací z teorie pravděpodobnosti i v pozdějších letech, kdy se stal profesorem na německé technice v Brně (1886–1891) a na technice ve Vídni (1891–1923).

V roce 1884 Czuber publikoval pojednání *Zur Theorie der Geometrischen Wahrscheinlichkeiten* [Czu84], v němž rozšířil Croftonovy výsledky týkající se přímek v rovině na přímky a roviny v prostoru a ukázal možné aplikace dokázaných obecných vět. Ve stejném roce vydal též první monografii shrnující tehdejší stav teorie geometrické pravděpodobnosti a přinášející zároveň nové výsledky a zobecnění: *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte* [Czu84a]. V úvodu této knihy Czuber stručně připomíná historii teorie geometrické pravděpodobnosti od Buffona přes Laplace až k intenzivnějšímu vývoji v druhé polovině devatenáctého století. Z britských matematiků publikujících v *Educational Times* jsou zde zmíněni A. R. Clarke, H. Mc'Coll, E. B. Seitz, J. J. Sylvester, S. Watson, J. Wolstenholm a W. S. B. Woolhouse, z francouzských matematiků J. É. Barbier, C. Jordan, E. Lemoine a L. Lalanne. Zvláštního ocenění se pak dostává pracím M. W. Croftona. Seneta, Parshall a Jongmans vyslovili v článku [SPJ01] domněnku, že teprve Czuberova monografie [Czu84a] upozornila Croftona na práce francouzských matematiků a vytvořila tak spojení mezi Francií a Anglií.

První a rozsáhlejší část knihy je věnována vlastní geometrické pravděpodobnosti. Czuber začíná úvodem, v němž objasňuje přechod od klasické pravděpodobnosti k pravděpodobnosti geometrické, která řeší problémy, v nichž jsou prostory elementárních jevů nespočetné, udané pomocí n reálných proměnných. Místo kombinatorických úvah se tak ke slovu dostávají úvahy geometrické, místo počtu příznivých a možných případů jsou uvažovány míry příslušných množin (zpravidla souvislé oblasti v $\mathbb{R}^n$), vyjádřené vhodnými n-násobnými integrály. Například jako míra úsečky či oblouku, oblasti v rovině, resp. v prostoru je uvažována délka, plošný obsah, resp. objem příslušné oblasti. Jednotlivé kapitoly první části knihy jsou věnovány libovolně zvoleným bodům na přímce, v rovině a v prostoru, přímkám v rovině a v prostoru a konečně rovinám v prostoru. Pro přímky v rovině Czuber například odvozuje, že mírou svazku přímek vymezených dvěma danými různoběžkami je úhel, který tyto různoběžky svírají, mírou všech rovnoběžných přímek ležících mezi dvěma danými rovnoběžkami je vzdálenost těchto rovnoběžek, mírou všech přímek protínajících danou uzavřenou konvexní, resp. nekonvexní křivku v rovině je délka této křivky, resp. délka vlákna „napjatého" kolem ní. Dále Czuber pojednává o dvojici rovinných konvexních uzavřených křivek, množinách průsečíků sečen a tečen k dané konvexní křivce aj. Analogicky pak vyšetřuje přímky, resp. roviny v prostoru a odvozuje míru množiny všech přímek, resp. rovin protínajících danou uzavřenou konvexní plochu. Teoretický výklad je vždy bezprostředně následován velkým množstvím řešených problémů řazených podle obtížnosti a metod použitých k řešení a doplněných historickými poznámkami. Druhá část knihy je věnována geometrickým středním hodnotám; i zde jsou teoretické výsledky doprovázeny řešenými úlohami.

V roce 1899 publikoval Czuber na přání Německé jednoty matematiků (Deutsche Mathematiker-Vereinigung) téměř třísetstránkový spis [Czu99] pojednávající o vývoji teorie pravděpodobnosti a jejích aplikací. V rámci první části týkající se základů teorie pravděpodobnosti je velká pozornost věnována rovněž geometrické pravděpodobnosti. Samostatnou kapitolu o geometrické pravděpodobnosti obsahuje také učebnice [Czu03], která poprvé vyšla v roce 1903. Ve třetím vydání z roku 1914 zabírá geometrická pravděpodobnost 39 stran. Teoretický výklad je opět doplněn historickými poznámkami a řešenými problémy, mj. Buffonovou úlohou o jehle a její modifikací, kterou v roce 1912 představil A. A. Markov, Sylvestrovým problémem konvexního čtyřúhelníka aj. Z novějších prací zde Czuber cituje kromě Markova také například knihu Louise Bacheliera [Bac12]. Závěr kapitoly obsahuje zajímavou diskusi Bertrandova paradoxu.

3 Bohuslav Hostinský (1884–1951)

Bohuslav Hostinský, soukromý docent pro vyšší matematiku na Filosofické fakultě Univerzity Karlovy v Praze (od roku 1912), později řádný profesor teoretické fyziky na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně (od roku 1920), se geometrickou pravděpodobností zabýval od roku 1917. Tehdy vydal článek *Nové řešení Buffonovy úlohy o jehle* [Hos17], ve kterém uvažoval realističtější podmínky úlohy, v níž se dosud mlčky předpokládalo, že střed jehly může dopadnout do kteréhokoli bodu roviny se stejnou pravděpodobností a podobně osa jehly může se stejnou pravděpodobností padnout do kteréhokoli směru. Jinými slovy, pravděpodobnost, že střed jehly dopadne na místo, jež se nalézá uvnitř rovinné oblasti o obsahu ε, je úměrná tomuto obsahu a nezávisí na poloze ani tvaru oblasti, a pravděpodobnost, že úhel ω, který po dopadu svírá osa jehly s pevnou přímkou vodorovné roviny, leží v intervalu (ω_1, ω_2), je úměrná rozdílu $\omega_2 - \omega_1$. Hostinský druhý předpoklad ponechal, uvažoval však situaci, kdy jsou rovnoběžky narýsovány na čtvercové desce stolu, přičemž při pokusu nemá jehla dopadnout mimo desku. Pravděpodobnost, že střed jehly dopadne do určitého čtverce poblíž okraje stolu, je proto menší než pravděpodobnost, že dopadne do čtverce o stejném obsahu, avšak ležícího poblíž středu. Úlohu pak vyřešil zobecněním Poincaréovy metody libovolných funkcí. Pravděpodobnost, že střed jehly dopadne do oblasti M uvnitř čtverce C (desky stolu), vyjádřil pomocí integrálu $\iint_M \varphi(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\varphi(x, y)$ je libovolná funkce, která má v C spojité parciální derivace a pro určitou konstantu K platí: $|\varphi'_x(x, y)| < K$, $|\varphi'_y(x, y)| < K$. V limitním případě, kdy počet rovnoběžek ve čtverci C roste do nekonečna, odpovídá Hostinského řešení původnímu výsledku Buffonovu. Nechceme-li měnit podmínky pokusu a uvažujeme jen pevný konečný počet rovnoběžek, udává Buffonova hodnota $2l/\pi d$ pouze přibližnou hodnotu pravděpodobnosti, že jehla protne některou rovnoběžku.

V roce 1920 zaslal Hostinský francouzskou verzi [Hos20] tohoto pojednání k otištění v Bulletin des Sciences Mathématiques a v korespondenci o něm diskutoval s Mauricem Fréchetem. Autoři článku [HMS05] naznačují, že to mohl být impuls, který ve Fréchetovi vzbudil zájem o teorii pravděpodobnosti.

O pět let později Hostinský publikoval francouzský spis *Sur les probabilités géométriques* [Hos25], který doplňoval práce Morgana Williama Croftona [Cro68] a Emanuela Czubera ([Czu84] a [Czu84a]). Hostinský zde podal definice a obecné věty o míře množin bodů, přímek a rovin a o příslušných středních hodnotách a pravděpodobnostech. Rovněž zde popsal využití teoretických výsledků k řešení problémů týkajících se uzavřených konvexních ploch.

V roce 1926 Hostinský vydal knížku *Geometrické pravděpodobnosti* [Hos26], která nadlouho zůstala jedinou českou publikací s touto tématikou. Práce začíná připomenutím klasických základů teorie pravděpodobnosti, zakončeným přehledem úloh o geometrických pravděpodobnostech jako motivací k následujícím částem. V druhé kapitole Hostinský podává základní definice a obecné věty o geometrických pravděpodobnostech. Začíná nejjednodušším případem, kterým je bod na přímce. Podmíněnou pravděpodobnost $P(X \uparrow AB \mid X \uparrow AC)$, že bod X zasáhne úsečku $AB \subseteq AC$, zasáhne-li úsečku AC, definuje jako podíl délek těchto úseček a vysvětluje, proč je jako míra úsečky uvažována právě její délka: plyne to z požadavku translační a rotační invariance a aditivity (dnes přidáváme ještě monotónnost, resp. spojitost). Obdobně pak odvozuje, že mírou plochy, resp. oblasti v prostoru je plošný obsah, resp. objem. Obecně pro bod X a libovolné oblasti M, M' Hostinský ukazuje:

$$P(X \uparrow M' \mid X \uparrow M) = \begin{cases} míra\ M' / míra\ M \\ 0, \ \text{je-li } \dim M' < \dim M \end{cases}$$

Následující kapitola pojednává o konvexních křivkách v rovině a o jejich interakci se soubory přímek. Pak následují konvexní plochy v prostoru a jejich interakce se soubory přímek a rovin. V páté kapitole jsou rozebrány Bertrandovy paradoxy a vzpomenuty některé pokusy potvrzující teoretické odhady, jako např. odhad π z úlohy o jehle apod.

Poslední kapitola řeší případy, kdy teoreticky stejné možnosti jsou modulovány omezeními a zejména „šumem“ vyplývajícím z experimentální realizace úlohy (např. pohyb kuličky rulety musí být alespoň trochu ovlivněn nerovnostmi na její dráze). Hostinský přitom zobecňuje přístup dříve zavedený Poincarém.

Jednotlivé kapitoly obsahují rovněž řadu zajímavých úloh. Dodejme, že v seznamu doporučené literatury lze nalézt Czuberovu učebnici [Czu03], v textu Hostinský cituje také knihu [Czu84a].

Literatura

[Bac12] Bachelier L.: *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, Paris, 1912.

[Buf12] Buffon G. L. L.: *Essai d'arithmétique morale. Supplément a l'Histoire Naturelle*. Tome VII, Chap. XXIII. De l'Imprimerie Royale, Paris, 1777, 139–153.

[Cro68] Crofton M. W.: *On the Theory of Local Probability*. Philosophical Transactions A 158(1868), 181–199.

[Czu84] Czuber E.: *Zur Theorie der Geometrischen Wahrscheinlichkeiten*. Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien 90(1885), 719 – 742.

[Czu84a] Czuber E.: *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte*. Teubner, Leipzig 1884 [francouzský překlad: H. Schuermans, Paříž, 1902].

[Czu99] Czuber E.: *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen*. In: Jahresbericht der DMV, 1899, 1–271.

[Czu03] Czuber E.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Lebensversicherung*. Teubner, Leipzig, 1903 [2. vyd. 1908 (1. díl) a 1910 (2. díl), 3. vyd. 1914].

[HMS05] Havlová V, Mazliak L, Šišma P.: *Le début des relations mathématiques franco-tchécoslovaques vu à travers la correspondance Hostinský-Fréchet*. Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique 1(2005), 1–18.

[Hos17] Hostinský B.: *Nové řešení Buffonovy úlohy o jehle*. Rozpravy ČAVU 26(1917), 8 stran.

[Hos20] Hostinský B.: *Sur une nouvelle solution du problème de l'aiguille*. Bulletin des Sciences Mathématiques 44(1920), 126–136.

[Hos25] Hostinský B.: *Sur les probabilités géométriques*. Spisy, Brno, 1925.

[Hos26] Hostinský B.: *Geometrické pravděpodobnosti*. JČMF, Praha, 1926.

[SPJ01] Seneta E., Parshall K. H., Jongmans F.: *Nineteenth-Century Developments in Geometric Probability: J. J. Sylvester, M. W. Crofton, J.-É. Barbier, and J. Bertrand*. Archive for the History of Exact Sciences 55(2001), 501–524.

Adresa

RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D.
Ústav aplikované matematiky
Fakulta dopravní ČVUT
Na Florenci 25
110 00 Praha 1
e-mail: *hyksova@fd.cvut.cz*

WILHELM MATZKA (1798–1891) A JEHO PRÁCE Z TEORIE DERTERMINANTŮ

MICHAELA CHOCHOLOVÁ

1 W. Matzka – životní osudy, pedagogické působení a další aktivity

Wilhelm Matzka[1] se narodil dne 4. listopadu 1798 v Liperticích[2]. Vychováván byl v Malém Újezdě u Teplic v Čechách. První vzdělání získal v obecné škole ve Weisskirchlitz[3] u Teplic a v Šopce u Mělníka. V letech 1812 až 1817 studoval na gymnáziu v Oseku a Chomutově, v letech 1817 až 1819 na filosofické fakultě v Praze.

Řadu let sloužil jako dělostřelec v rakouské armádě. Vojenskou službu u druhého dělostřeleckého pluku ve Vídni nastoupil v roce 1819, po několika povýšeních byl roku 1831 povýšen až na poručíka a současně byl jmenován učitelem matematiky v bombardérském sboru.[4]

Během svého působení ve Vídni si W. Matzka doplňoval a prohluboval vzdělání na vídeňské univerzitě a technice.[5] Na dělostřelecké sborové škole bombardérského sboru přednášel algebru, analytickou geometrii, diferenciální a integrální počet i vyšší mechaniku. Působil zde do roku 1837. V září tohoto roku byl pak jmenován řádným profesorem elementární matematiky při nově zřízeném filosofickém učilišti v Tarnově[6], na kterém působil až do roku 1849. Roku 1843 se na univerzitě v Olomouci podrobil rigorózním zkouškám a získal tak doktorát z filosofie. V dubnu roku 1849 byl jmenován profesorem matematiky a praktické geometrie na pražské polytechnice, na toto místo nastoupil v květnu téhož roku.[7] Jeho působení na polytechnice bylo velmi krátké, již po skončení letního semestru roku 1850 přestoupil jako řádný profesor matematiky na pražskou univerzitu, kde působil až do svého penzionování roku 1868. Výuku na univerzitě však vedl až do letního semestru roku 1871.[8] Po odchodu Wilhelma Matzky na jeho místo nastoupil František Josef Studnička[9] (1836–1903).

V letech 1853, 1860 a 1861 byl W. Matzka děkanem filosofické fakulty; v letech 1852, 1854 a 1862 jejím proděkanem; v letech 1863, 1870 a 1873 předsedal doktorskému kolegiu filosofické fakulty.[10] Ve školním roce 1865/1866, ..., 1868/1869 byl členem komise univerzitní knihovny.

---

[1]Též je psán jako Vilém Matzka.

[2]Německy Leipertitz; dnešní Litobratřice na jižní Moravě.

[3]Česky Novosedlice.

[4]O bombardérském sboru a příslušné škole více viz Gatti F.: *Geschichte des k. k. Bombardier-Corps u. s. w. Wien*, 1905. Informace o W. Matzkovi jsou na str. 148.

[5]Na vídeňské univerzitě navštěvoval přednášky z vědecké a praktické astronomie, které vedl prof. Joseph Johann Littrow (1781–1840), z vyšší matematiky a fyziky, které vedl prof. Andreas von Ettingshausen (1796–1878), a z mineralogii u prof. Friedricha Mohse (1773–1839). Na vídeňské polytechnice navštěvoval přednášky z technologie, které vedl prof. Georg Altmütter (1787–1858).

[6]Jednalo se o vyšší gymnázium připravující především ke studiu na univerzitu v Krakově.

[7]O Matzkově působení na technice viz Jelínek K.: *Das ständisch-polytechnische Institut zu Prag, Programm zur fünfzigjährigen Erinnerungs-Feier an die Eröffnung des Institutes am 10. November 1856.* Prag, 1856.

[8]O Matzkově výuce na pražské univerzitě více viz *Ordnung der Vorlesungen an der k. k. Universität zu Prag 1849/50, …, 1870/71.*

[9]Profesor matematiky na pražské technice, pražské a české univerzitě. Přednášel česky, podstatným dílem přispěl k rozšíření české vysokoškolské výuky a k tvorbě české matematické literatury. Více o životě, díle a pedagogickém působení viz monografie [Ně].

[10]Viz *Personalstand der k. k. Universität zu Prag 1850/51, …, 1872/73.*

W. Matzka se ve své pedagogické činnosti soustředil zejména na přípravu budoucích středoškolských učitelů matematiky a fyziky; výrazně ovlivnil úroveň výuky matematiky v našich zemích. Od počátku 50. let 19. století byl členem komise gymnaziálního učitelského úřadu pro Čechy pro předmět matematika.

Na W. Matzku a jeho výuku na univerzitě vzpomíná v knize *Dějepis Jednoty českých mathematiků* Gabriel Blažek[11] (1842–1910), jeden z jeho žáků, následovně:

… Vilém Matzka čítal asi 61 rok, byl postavy silné a zavalité, měl oko velmi živé a zakládal si na tom, že jest Gaussovi poněkud podoben. … Matzka velice dbal zevnějších forem: přednášku svou zařídil a uspořádal tak, aby byla celá a přehledně na tabuli obsažena, za kterouž příčinou do č. III. v Klementinu 3 velké tabule poříditi dal; psal-li zlomek, vedl zlomkovou čáru, načež následovaly jmenovatel a pak čitatel. Tyto formality vyžadoval však Matzka i na svých posluchačích, při nichž netrpěl, by se nula přeškrtla. Přednášel jednotvárně, polo obrácen k tabuli, stále porovnávaje výsledky se zápisy, jež měl po ruce; nahodilou chybu početní vymazával prstem, a vyskytl-li se kamínek ve křídě, vrhl ji velkým obloukem přes hlavy posluchačů do levého kouta posluchárny. My žertovně tuto vlastnost připisovali delšímu jeho pobytu na škole bombardérské. … ([Po], str. 2–3).

Matzkova vědecká činnost nalezla uznání též v odborných kruzích. Roku 1845 byl přizván do *Královské české společnosti nauk*[12] a na počátku roku 1850 zvolen jejím řádným členem. Ve stejném roce byl vyznamenán zlatou medailí za zásluhy ve vědě a umění.

Wilhelm Matzka zemřel dne 9. června 1891 v Praze.

2 W. Matzka – univerzitní přednášky, publikace

Na pražské univerzitě přednášel W. Matzka integrální a diferenciální počet, analytickou geometrii v rovině a prostoru, planimetrii, stereometrii, algebraickou analýzu, vyšší rovnice, sférickou trigonometrii, matematickou fyziku a analytickou mechaniku.

W. Matzka psal německy učebnice, odborné články a studie, historické, metodické a populární práce. Seznam jeho prací čítá 37 položek[13]; lze je rozdělit na práce „čistě“ matematické a aplikace ve fyzice a astronomii. Práce uveřejňoval v *Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften*[14], *Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften*[15], *Archiv für Mathematik und Physik*[16], *Journal*

[11]Český matematik a politik, jeden ze zakladatelů *Spolku pro volné přednášky z mathematiky a fysiky*, (založen 1862), ze kterého po změně stanov (1869), vznikla *Jednota českých mathematiků.* O Jednotě českých matematiků více viz [Pa], [Po], [Vs] a Bečvářová M.: *Z historie Jednoty (1862–1869)*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 13, Praha, Prometheus, 1999.

[12]Vznikla jako *Učená společnost* kolem roku 1770 v Praze. Nejprve šlo o úzký kroužek vědců věnujících se zejména přírodovědnému průzkumu Čech. Ve čtyřicátých letech 19. století došlo uvnitř *společnosti* k vytvoření dvou tříd – třídy matematicko-přírodovědné a filozoficko-historické. Více o dějinách *Královské české společnosti nauk* viz Kalousek J.: *Děje král. české společnosti náuk spolu s kritických přehledem publikací jejích z oboru filosofie, historie a jazykovědy ke stoletému jubileu této společnosti*, Praha, 1885.

[13]Kompletní seznam Matzkových publikací zatím neexistuje. K dispozici jsou jen dílčí informace v biografických slovnících [P], [W] a nepatrné zmínky v některých knihách o historii škol, na nichž W. Matzka působil (např. [Vf]).

[14]*Pojednání Učené společnosti*. Německy psaný časopis, který vydávala *Královská česká společnost nauk*. Přínosem časopisu k rozvoji přírodních věd bylo publikování prací, které byly přednášeny na zasedáních společnosti.

[15]*Zprávy ze zasedání Učené společnosti*. Německy psané vědecké periodikum, jehož vydávání zahájila na počátku 19. století *Královská česká společnost nauk*, a které se řadí k našim nejstarším odborným časopisům.

[16]*Archiv matematiky a fyziky*. Nazýván též *Grunert's Archiv*, podle svého zakladatele, kterým byl německý matematik Johann August Grunert (1797–1872). Časopis byl založen roku 1841.

für die reine und angewandte Mathematik[17], *Astronomische Nachrichten*[18], *Annalen der Wiener Sternwarte*[19] a *Annalen der Physik und Chemie*[20].

3 Teorie determinantů

3.1 Stručně z historie teorie determinantů

Za objevitele determinantů je pokládán G. W. Leibniz (1646–1716), který k nim dospěl při řešení úlohy z $n+1$ lineárních rovnic vyloučit n neznámých.[21] Jeho myšlenky však neměly žádný vliv na další vývoj matematiky.

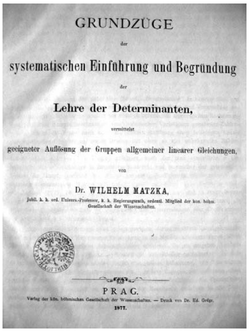
Roku 1750 uvedl švýcarský matematik G. Cramer (1704–1752) pravidlo pro řešení nehomogenní soustavy n lineárních rovnic o n neznámých.[22] Pro vyjádření neznámých nalezl vzorce, ve kterých figurují výrazy, kterým dnes říkáme determinanty (tzv. Cramerovo pravidlo).

Francouzský matematik A. T. Vandermonde (1735–1796) jako první uznal determinanty za samostatné objekty, zabýval se touto problematikou obecně, nezávisle na eliminačních úlohách a dnes je považován za zakladatele teorie determinantů.

První ucelené výklady o determinantech podali nezávisle na sobě roku 1812 dva francouzští matematici J. P. M. Binet (1786–1856) a A. L. Caushy (1789–1857).

Poté co se ve čtyřicátých let 19. století determinanty staly všeobecně uznávaným nástrojem matematiky, začala být teorie determinantů nesmírně oblíbenou disciplínou; determinanty postupně pronikaly do všech oblastí matematiky, objevovaly se první učební texty a literatura o determinantech se rozrostla do obrovských rozměrů.[23]

3.2 Determinanty v díle Wilhelma Matzky


GRUNDZÜGE
der
systematischen Einführung und Begründung
der
Lehre der Determinanten,
vermittelst
geeigneter Auflösung der Gruppen allgemeiner linearer Gleichungen,
von
Dr. WILHELM MATZKA,
Jubil. k. k. ord. Univers.-Professor, k. k. Regierungsrath, ordentl. Mitglied der kön. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften.
PRAG.
Verlag der kön. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. — Druck von Dr. Ed. Grégr.
1877.

Roku 1877 bylo ve spisech *Královské české společnosti nauk* uveřejněno německy psané pojednání Wilhelma Matzky z teorie determinantů s názvem *Grundzüge der systematischen Einführung und Begründung der Lehre der Determinanten, vermittelst geeigneter Auflösung der Gruppen allgemeiner linearen Gleichungen*. Práce má 61 stran textu, který je rozdělen na 4 paragrafy. V úvodním paragrafu se autor zabývá eliminací neznámých ze soustav lineárních rovnic, postupně je tak odvozen determinant druhého, …, pátého stupně. Dále pojednává o nejdůležitějších základních vlastnostech determinantů a řešení lineárních rovnic.

---

[17]*Časopis pro čistou a aplikovanou matematiku.* Nazýván též *Crelle's Journal*, podle svého zakladatele, kterým byl německý matematik August Leopold Crelle (1780–1855). Časopis byl založen roku 1826.

[18]*Astronomické zprávy.* Nazýván též *Schmumacher's Astronomische Nachrichten*, podle svého zakladatele, kterým byl astronom Heinrich Christian Schumacher (1780–1850). Časopis byl založen roku 1821.

[19]*Letopisy Vídeňské hvězdárny.*

[20]*Letopisy fyziky a chemie.* Nazýván též *Poggendorff's Annalen*, podle svého zakladatele, kterým byl německý fyzik Johann Christian Poggendorf (1796–1877). Časopis byl založen roku 1824.

[21]O těchto výsledcích napsal v roce 1693 svému příteli G. F. A. de l'Hospitalovi; jeho korespondence byla uveřejněna až roku 1850.

[22]V monografii *Introduction á l'Analyse des Lignes Courbes algébriques*, Genéve, 1750.

[23]O historii determinantů více viz Bečvář J.: *Soustavy lineárních rovnic a determinanty*, Světonázorová výchova v matematice. Sborník vybraných referátů z letních škol MPS JČSMF, (ed. J. Šedivý), JČSMF, Praha, 1978, 187–217.

3.3 Determinanty v pracích dalších matematiků

V první a druhé polovině 19. století se determinantům a jejich aplikacím věnovala řada světových i našich matematiků; byly sepsány odborné i popularizační články a studie, středoškolské a vysokoškolské učebnice.

První českou středoškolskou učebnici věnovanou základům teorie determinantů, vydal v Praze roku 1865 středoškolský profesor Martin Pokorný (1836–1900) pod názvem *Determinanty a vyšší rovnice*.

Karel Zahradník (1848–1916) uveřejnil roku 1879 v Praze elementární středoškolskou učebnici *Prvé počátky nauky o determinantech*[24]. V roce 1905 publikoval v Brně spis nazvaný *O determinantech*, který byl sestaven pro posluchače vysokých škol technických, a ve kterém doporučoval k hlubšímu studiu učebnice F. J. Studničky.[25]

František Josef Studnička (1836–1903) sepsal řadu učebnic, matematických článků a popularizačních prací věnovaných determinantům a jejich aplikacím. Tři základní učebnice *O Determinantech* (1870)[26], *O determinantech mocninných a sestavných* (1897) a *Úvod do nauky o determinantech* (1899) byly určeny zejména univerzitním studentům.

Eduard Bartl, profesor na německé reálce v Praze, je autorem učebnice *Einleitung in die Theorie der Determinanten zum Gebrauche an Mittelschulen sowie zum Selbstunterrichte*. Tato německy psaná učebnice vyšla v Praze roku 1878 a byla používána na německých středních školách v Čechách.

Klasickou německou učebnicí byla *Theorie und Anwendung der Determinanten mit Beziehung auf die Originalquellen* vydaná v Lipsku roku 1857 Richardem Baltzerem.

* * * * *

Literatura

[By] Bydžovský B.: *Základy teorie determinantů a matic a jich užití*. Praha, 1930.

[JL] Jílek J., Lomič V., Horská P.: *Dějiny Českého vysokého učení technického v Praze*. Praha, 1973.

[Ko] Kowalewski G.: *Einführung in die Determinantentheorie*. Berlin, 1954.

[KP] Kafka F., Petráň J. (ed): *Dějiny Univerzity Karlovy I.–IV.* UK, Karolinum, Praha, 1995–1998.

[Ně] Němcová M.: *František Josef Studnička (1836–1903)*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 10, Praha, Prometheus, 1998.

[No] Nový L. a kol.: *Dějiny exaktních věd v českých zemích*. Academia, Praha, 1961.

[Pa] Pátý L.: *Jubilejní almanach Jednoty čs. matematiků a fyziků*. Jednota čs. matematiků a fyziků, Praha, 1987.

[Po] Posejpal V.: *Dějepis Jednoty českých mathematiků*. JČM, Praha, 1912.

[Vf] Velflík A. V.: *Dějiny technického učení v Praze*. Díl I., Unie, Praha, 1906 a 1909.

[Vs] Veselý F.: *100 let Jednoty československých matematiků a fyziků*. SPN, Praha, 1962.

[P] Poggendorff J. C.: *Biographisch-Literarisches Handwörterbuch*. Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1904.

[W] Würzbach C.: *Biographisches Lexikon*. Druck und Verlag der k. k. Hof- und Staate-druckerrei, Wien, 1867.

Adresa

Mgr. Michaela Chocholová
Sokolovská 83, Praha 8, 18675
e-mail: *chochol@karlin.mff.cuni.cz*

---

[24]O rok dříve vyšla chorvatsky v Záhřebu.

[25]Karel Zahradník vydal o teorii determinantů též chorvatská a česká litografovaná skripta *O determinantima. Predavanja u nimskom semestru godine 1897/8*. Zagreb, 112 stran, a *O determinantech. Přednášky z vyšší mathematiky I. běh, část úvodní*. Brno, 1903–1904, 62 stran.

[26]V tomto roce vyšla česky a rusky, o rok později i německy.

OD IHLY K NÁHODNÝM MNOŽINÁM

LUCIA ILUCOVÁ

1 Geometrická versus „klasická“ pravdepodobnosť[1]

Pod pojmom pravdepodobnosť sa väčšine ľudí vybavia šance na výhru pri hode kockou, mincou (resp. pád chleba na podlahu natretou stranou) alebo pri iných hazardných hrách. Čo sa však skrýva pod pojmom geometrická pravdepodobnosť, to je jasné málokomu. Táto časť matematiky nie je v učebných osnovách, pretože sa javí ako „zložitá“ a z tohto dôvodu aj ako menej dôležitá; dokonca aj väčšina matematicky vzdelaných ľudí o tejto oblasti len niečo málo tuší (v tom lepšom prípade). Je to paradoxné, pretože organický a anorganický svet okolo nás je plný javov, ktorých realizácie je možné poznávať a študovať geometrickými prostriedkami. Skúmaný jav pritom môže byť unikátny (napr. zisťovanie patologických zmien telesného orgánu), alebo kolektívny (napr. skúmanie štruktúry a funkcií obličiek diabetikov). A práve štúdium takýchto javov je predmetom geometrickej pravdepodobnosti [2, 4, 5].

Typické úlohy geometrickej pravdepodobnosti sa týkajú interakcií geometrických objektov, kedy zisťujeme pravdepodobnosť situácií, či *sonda* (množina známych vlastností) zasahuje alebo míňa skúmanú množinu. Pritom geometrická pravdepodobnosť je podmienená pravdepodobnosť typu $\mathrm{P}(A\uparrow B \mid A\uparrow C)$ (symbol $\uparrow$ čítame „zasahuje“) alebo $\mathrm{P}(A\uparrow B \mid A\subset C)$ obmedzujúca polohy sondy A prostredníctvom zvolenej kompaktnej množiny C. Základným rysom týchto situácií je, že priaznivých i nepriaznivých situácií je nespočítateľne veľa a preto ich musíme charakterizovať vhodne zvolenými mierami uvažovaných situácií. Napr. pravdepodobnosť, že náhodne zvolený bod B danej úsečky AC bude ležať na jej vybranej časti DE (t.j. „zasiahne“ DE), je rovná pomeru dĺžok L úsečiek DE a AC. Zapíšeme to $\mathrm{P}(\mathrm{B}\uparrow\mathrm{DE} \mid \mathrm{B}\uparrow\mathrm{AC}) = L(\mathrm{DE})/L(\mathrm{AC})$.

2 Od ihly k 19. a 20. storočiu

Napriek tomu, že príspevok je zameraný najmä na prehľad základných problémov, metód riešenia a vývoj geometrickej pravdepodobnosti v 19. a 20. storočí, je užitočné sa pozrieť na historicky prvé úlohy opísané v príspevku A. Kalousové (tento zborník) z pohľadu spomenutých všeobecných informácií.

Úlohu o štvorci by sme tiež mohli chápať ako štúdium dlaždice C so stranou c sledovaním prienikov mince-sondy B s polomerom r a hranice štvorca ∂C za podmienky, že $B\subset C$; t.j. počítame podmienenú pravdepodobnosť, že minca zasahujúca dlaždicu leží celá vo vnútri nej, t.j. $\mathrm{P}(B\cap\partial C=\varnothing \mid B\uparrow C) = (c-2r)^2/c^2$. Pravdepodobnosť je tu daná pomerom obsahu plôch štvorcov so stranami $(c-2r)$ a c, a môžeme ju odhadnúť podielom počtu „vyhovujúcich“ pádov a všetkých možných. Potom z daného vzťahu vieme vypočítať napr. neznámu dĺžku strany štvorca.

Podobne by sme mohli obrátiť úlohu o ihle s cieľom odhadnúť dĺžku ihly l pomocou systému rovnobežiek vzdialených o $d<l$ a zapísať, že $l = \pi d\mathrm{P}/2$ (zovšeobecnená Buffonova relácia), kde P je pravdepodobnosť pretnutia ihly priamkou. Hodnota π, ktorej prítomnosť vo vzorci pre pravdepodobnosť bola kedysi tak prekvapivá, je mierou orientácií ihly.

Geometrická pravdepodobnosť v 19. storočí riešila tiež šance na výhru v hrách geometrickej povahy alebo jednotlivé matematické úlohy typu Sylvestrovho štvorbodového

---

[1] Práca bola vypracovaná v rámci výskumného zámeru AV0Z10190503.

problému. Až jeho druhá polovica predstavuje zlom v geometrickej pravdepodobnosti, najmä zásluhou M. W. Croftona. Hlavným cieľom už nebolo určiť pravdepodobnosť výhry, ale výsledok pozorovania náhodného geometrického javu využiť na určenie nejakej charakteristiky objektu. Francúzsky geológ A. J. Delesse navrhol v roku 1847 určovať objemový podiel fáz nerastov z plošných podielov nameraných v rovinných rezoch skúmanej horniny. Neskôr (1898), viedensky geológ A. Rosiwal konštatoval, že plošné podiely fáz môžu byť nahradené aj ich lineárnymi podielmi. Až v 20. storočí geológovia E. Thompson (1930) a A. A. Glagolev (1933) zistili, že objemový podiel fázy je možné odhadnúť ako relatívny počet náhodných či pravidelne usporiadaných bodov zasahujúcich fázu.

Systematicky sa geometrickou pravdepodobnosťou v 20. storočí začal zaoberať až W. J. E. Blaschke[2] so svojim žiakom L. A. Santalóm[3] najprv s použitím diferenciálnej geometrie. Všeobecnejší spôsob prístupu na báze teórie množín zaviedol H. Hadwiger[4] a odstránil tým množstvo obtiaží spôsobených hranicami objektov (napr. neexistencia derivácií vo vrcholoch štvorca či na hranách kocky).

Pri praktickej aplikácii geometrického výberu je prvou možnosťou tzv. *deterministický prístup*, pri ktorom skúmame interakcie celého objektu s rôznymi sondami, resp. s jednou sondou v mnohých polohách, pričom objekt nesmie byť príliš veľký[5]. U rozmernejších objektov používame tzv. *rozšírený deterministický prístup*: geometrický výber prevádzame len na vybraných miestach a jeho výsledky vzťahujeme k celému objektu (napr. pri pôdnom prieskume či pri hodnotení materiálu z jednej tavby). Pri *náhodnom prístupe* skúmame niekoľko objektov rovnakého typu, u ktorých predpokladáme istú štatistickú variabilitu (napr. skúmanie kvality sériových výrobkov náhodne odobratých z výrobnej linky alebo určovanie vlastností zdravých telesných orgánov).

Vyššie uvedená problematika viedla k vzniku teórie náhodných množín, ktorá sa snaží modelovať prirodzenú variabilitu reálnych objektov. V druhej polovici 20. storočia ju vo svojich prácach rozvinuli najmä G. Matheron[6] [3] a D. G. Kendall[7] [1] s použitím niektorých

---

[2] **Wilhelm Johann Eugen Blaschke** (1885–1962), nemecký matematik rakúskeho pôvodu. V období 1913–15 pôsobil ako profesor matematiky aj na Nemeckej technickej vysokej škole v Prahe; od roku 1919 až do dôchodku pôsobil na univerzite v Hamburgu. Jeho výskum sa týkal viacerých oblastí geometrie. V práci *Kreis und Kugel* (1916) prezentoval izoperimetrické vlastnosti konvexných útvarov, významná je trojdielna kniha *Vorlesungen über Differentialgeometrie* (1921–1929). Je zakladateľom integrálnej geometrie, i keď jej myšlienky sa objavujú už u M. W. Croftona. Jeho postava je dosť kontroverzná; od roku 1936 začína sympatizovať s politikou fašizmu. Napriek všetkému sa stal vedúcou osobnosťou matematiky v Nemecku.

[3] **Luis Antoni Santaló Sors** (1911–2001), argentínsky matematik španielskeho pôvodu. V roku 1936 získal doktorát na univerzite v Hamburgu, kde sa pod vedením W. J. E. Blaschkeho začal venovať geometrickej pravdepodobnosti. Od roku 1939 žil z politických dôvodov v Argentíne. Publikoval viac než 200 výskumných prác z oblasti integrálnej geometrie, metriky, afinnej a projektívnej diferenciálnej geometrie, geometrie konvexných telies, teórie čísel. Je považovaný za jedného z najväčších geometrov minulého storočia.

[4] **Hugo Hadwiger** (1908–1981), švajčiarsky matematik nemeckého pôvodu. Od roku 1937 pôsobil na univerzite v Berne až do konca svojho života. Takisto pracoval v rámci projektu vývoja šifrovacieho stroja NEMA (NEue MAchine), ktorý vznikol v rokoch 1941–1943 v švajčiarskom armádnom šifrovacom centre ako vylepšená verzia známej Enigmy. Jeho práca v oblasti geometrie začala po roku 1935 po stretnutí s W. J. E. Blaschkem v Hamburgu. V roku 1957 publikoval knihu *Vorlesungen über Inhalt, Oberflache und Isoperimetrie*, ktorá sa stala základom pre Minkowského funkcionály používané v matematickej morfológii.

[5] Práve túto možnosť skúmania využila nefropatológia ako prvá lekárska disciplína pri rozbore vzoriek odobratých biopsiou.

[6] **Georges Matheron** (1930–2000), francúzsky matematik, zakladateľ geoštatistiky. Vo svojej ranej práci *Traité de géostatistique appliquée* (1962–63) definuje základné prostriedky lineárnej geoštatistiky. Spolu s J. Serra vytvára novú diciplínu – matematická morfológia. V roku 1975 publikuje knihu *Random sets and integral geometry*, najdôležitejší príspevok do teórie náhodných množín.

[7] **David George Kendall** (1918), anglický matematik. V roku 1962 bol menovaný profesorom matematickej štatistiky v Cambridge, kde zotrval až do svojho dôchodku (1985). Bolo mu udelených mnoho cien, v rokoch

myšlienok G. Choqueta: náhodná uzavretá množina M je úplne definovaná Choquetovým funkcionálom $T = P(M \cap B \neq \emptyset)$, definovaným nad súborom kompaktných (t.j. obmedzených uzavretých) množín. Všetky reálne objekty sú trojrozmerné a v teórii náhodných množín sa snažíme opísať ich vlastnosti aj rozmiestnenie. V modeloch môžeme dimenziu objektov formálne znížiť a model tak zjednodušiť (to závisí na pomere veľkosti objektov a zvyčajných vzdialeností medzi nimi). Ak je možné rozmery objektov celkom zanedbať, dostaneme najjednoduchší príklad náhodnej množiny – *bodový proces*, t.j. body rozmiestnené v priestore podľa akéhosi pravidla (modelujú polohy sídlisk a ich obyvateľov v krajine, stromov a živočíchov a tiež kozmických telies vo vesmíre)[8]. Ďalšiu skupinu tvoria *čiarové procesy*, modelujúce prípady, kedy dva rozmery objektov sú zanedbateľné vzhľadom k tretiemu (napr. dopravné siete a rieky, ale tiež neuróny, krvné riečište alebo spevňujúce vlákna kompozitov). Náhodným procesom je aj systém neprekrývajúcich sa objektov (množín) vyplňujúcich bez medzier daný priestor, ktorý modelujeme najrôznejšími teseláciami. Teória náhodných množín sa intenzívne rozvíjala počas celej druhej polovice 20. storočia v prácach D. Stoyana, J. Mecke, B. Ripleyho a iných. Jej svojbytnou aplikáciou je matematická morfológia J. Serry [6], uplatňujúca jej postupy na obrazy a špeciálne na ich digitálne verzie.

Pokiaľ sa jedná o terminológiu, najvšeobecnejším oborom je *stochastická geometria* [7], zahrňujúca celú teóriu geometrickej pravdepodobnosti i štatistiky s dôrazom na náhodné množiny. Štatistika zaoberajúca sa predovšetkým geometrickými výbermi so špeciálnym ohľadom na stratu informácií spôsobenú redukciou dimenzie pri výbere sa nazýva *stereológia*.

3 Základné pojmy a vzťahy

Vyšetrovanie geometrických objektov a vzťahov medzi nimi prebieha geometrickým výberom, pri ktorom dochádza k analýze projekcií objektov do lineárnych podpriestorov, alebo ich prienikov s vhodne vybratými množinami známych vlastností (sondy). Pritom je potrebné skúmané objekty, ich projekcie, sondy a ich prieniky s objektmi opísať vhodnými geometrickými charakteristikami. Týmito sú spojité (alebo monotónne) *aditívne funkcionály* (alebo *valuácie*) invariantné voči grupe euklidovských transformácií. d-rozmerný objekt v d-rozmernom priestore $\boldsymbol{R}^d$ ich má podľa *Hadwigerovej charakterizačnej teorémy* (d+1) lineárne nezávislých, objekt nižšej dimenzie $k<d$ ich nenulových má odpovedajúcim spôsobom menej. Pre trojrozmerný objekt v $\boldsymbol{R}^3$ to môže byť napríklad objem, obsah povrchu, stredná šírka (stredná dĺžka projekcií do trsu priamok) a Eulerova charakteristika.

Polohy a orientácie sond, ktorými vyšetrujeme skúmané množiny, popisujeme tzv. *kinematickou mierou*. Polohu sondy určujeme jej zvoleným pevným bodom, orientáciu zvolenou kartézskou sústavou s ňou pevne spojenou. Súbor možných orientácií všeobecnej sondy udáva *Stiefelova varieta*. Ak sa snažíme určiť napr. v $\boldsymbol{R}^2$ orientáciu variety dvojrozmerného obrazca, využijeme dve na seba kolmé priamky predstavujúce kartézske súradnicové osi, pričom možností orientácií prvej osi je 2π, možnosti pre druhú sú dve (ľavotočivá alebo pravotočivá). Dimenzia ich variety je potom 1 (tá je ale v priestore $\boldsymbol{R}^4$) a jej mierou je 4π. Všeobecne platí, že pre r-rozmernú sondu v d-rozmernom priestore má jej varieta dimenziu $s = (rd - r(r+1)/2)$ v priestore $\boldsymbol{R}^{dr}$ a mieru danú súčinom obsahov povrchov

---

1972–74 bol prezidentom London Mathematical Society. Je považovaný za svetovú vedúcu osobnosť v oblasti aplikovanej pravdepodobnosti a analýzy dát. Venoval sa stochastickej geometrii a jej aplikáciám a štatistickej teórii tvaru. Je editorom mnohých dôležitých diel (napr. *Mathematics in the Archaeological and Historical Sciences*, 1971, *Stochastic Analysis*, 1973, *Stochastic Geometry*, 1974). Spolu s austrálskym štatistikom P. A. P. Moranom (1917–1988) napísali knihu *Geometrical Probability* (1963).

[8] Prvými prípadmi štúdia takýchto procesov bolo hľadanie zdrojov epidémií v New Yorku (V. Seaman, žltá horúčka, 1795) a v Londýně (J. Snow, cholera, 1854) podľa bydlísk chorých.

jednotkových gúľ $O_{d-1}O_{d-2}...O_{d-r}$ (O_{d-1} je obsah povrchu jednotkovej d-rozmernej gule). Samozrejme najjednoduchšími sondami sú body, priamky, roviny, ..., t.j. vo všeobecnosti rôzne posunuté a orientované lineárne podpriestory dimenzie $r<d$ (tzv. *r-roviny* [r-flats] – 1-roviny sú priamky, 2-roviny sú roviny, ...). Súbor možných orientácií r-roviny popisuje *Grassmannova varieta,* jej dimenzia $g = r(d - r)$ je nižšia a miera je $O_{d-1}O_{d-2}...O_{d-r}/O_{r-1}O_{r-2}...O_0$, lebo rotácia súradnicovej sústavy v nej prebiehajúca polohu r-roviny nemení.

Základné valuácie objektu K sú jeho obsah a Eulerova charakteristika, ostatných (d–1) môžeme definovať napr. ako stredné obsahy jeho projekcií do lineárnych podpriestorov dimenzií 1, 2. ..., d–1 (často sa používajú tiež *Minkowského*[9] *funkcionály*). Najdôležitejšie vzťahy medzi rôznymi valuáciami sú *Cauchyho vzťahy* (valuácie objektu K sú priamo úmerné valuáciám jeho projekcií) a *Croftonove vzťahy* (valuácie objektu K sú priamo úmerné valuáciám jeho prienikov s r-rovinami). Koeficienty úmerností nezávisia na K, takže tie, ktoré platia pre guľu či kruh, platia pre každé konvexné teleso či konvexný obrazec (napr. stredný obsah rovinnej projekcie kocky je rovný štvrtine jej povrchu rovnako ako pre guľu).

Literatúra

[1] Harding E. F., Kendall M. G.: *Stochastic Geometry: A Tribute to the Memory of Rollo Davidson*[10]. J. Wiley & Sons, London, 1974.

[2] Mathai A. M.: *An Introduction to Geometrical Probability*. Statistical Distributions and Models with Applications, Taylor&Francis, London, 2000.

[3] Matheron G.: *Random sets and integral geometry*. J. Wiley & Sons, New York, 1975.

[4] Santaló L. A.: *Integral Geometry and Geometric Probability*. Adison-Wesley, Massachusetts, 1976.

[5] Saxl I.: *Geometrická pravděpodobnost*. In: Antoch, J., Hlubinka, D., Saxl, I. (ed.): *Pravděpodobnost a statistika na střední škole*. MATFYZPRESS, Praha, 2005, 47–71.

[6] Serra J.: *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Acad. Press, London, 1982.

[7] Stoyan D., Kendall W. S., Mecke J.: *Stochastic Geometry and its Applications*. J. Wiley & Sons, Chichester, 1987.

Adresa

RNDr. Lucia Ilucová
Matematický ústav AV ČR
Žitná 25
115 67 Praha 1
e-mail: *ilucova@gmail.com*

---

[9] **Hermann Minkowski** (1864–1909), nemecký matematik. Ešte počas štúdia na univerzite v Königsbergu bol v roku 1883 ocenený francúzskou Akadémiou vied za svoju prácu o teórii kvadratických foriem. Učil na viacerých univerzitách (v Zurichu na Polytechnike bol jedným z jeho študentov A. Einstein). Po odchode do Göttingenu blízko spolupracuje s D. Hilbertom. Vyvinul geometriu čísel, venoval sa matematickej fyzike a teórii relativity, prispel tiež do teórie množín (Minkowského sčítanie a odčítanie známe ako dilatácia a erózia).

[10] **Rollo Davidson** (1944–1970), anglický matematik. V roku 1968 získava doktorát pod vedením D. G. Kendalla, jeho práca sa týka teórie pravdepodobnosti a stochastických procesov. Okrem matematiky boli jeho najväčšou vášňou hory. Tie sa mu stali aj osudnými, keď v lete 1970 prichádza o život v Alpách. Od roku 1975 sa každý rok udeľuje na jeho počesť cena mladým matematikom pracujúcim v oblasti pravdepodobnosti.

PŘÍNOS ČESKÝCH MATEMATIKŮ V KINEMATICKÉ GEOMETRII

VÁCLAV JÁRA

1 Příchod kinematické geometrie do Čech

Kinematická geometrie se poprvé objevuje na počátku 19. století v pracích francouzských matematiků Mongeho a Carnota. Termín „géométrie cinématique“ pochází z roku 1859 od Olryho Terquema. Přednášky z kinematické geometrie vedl od roku 1867 na pařížské polytechnice profesor Mannheim.

Do českých zemí přinesli kinematickou geometrii bratři Vaněčkové, Josef Sylvestr a Matěj Norbert, ze svého studijního pobytu v Paříži v letech 1878–1879. Právě přednášky profesora Mannheima přispěly ke zvýšenému zájmu bratří Vaněčků o tento obor. První články českých matematiků se objevily již o několik let dříve v Časopise pro pěstování matematiky a ve Zprávách císařské akademie věd a Královské české společnosti nauk. Mnoho článků pochází z pera Emila Weyra a jsou věnovány se úpatnicím.

2 Další práce

2.1 Konec 19. století

Roku 1880 vydává Josef Sylvestr Vaněček v Jičíně vlastním nákladem české zpracování Mannheimových přednášek pod názvem *Pošinování geometrických útvarů.* Kniha je obsahově rozsáhlejší než pozdější učebnice *Lehrbuch der Kinematik* (1888) od Ludwiga Burmestera.

Na konci 19. století se kinematické geometrii věnovali další čeští matematikové jako Eduard Weyr a Bedřich Procházka. Jejich články uveřejněné mimo jiné v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky se zaobírají zejména kinetickými způsoby sestrojování středů křivosti nejrůznějších trajektorií. K rozvoji oboru přispěli také zakladatelé brněnské techniky Jan Sobotka a Karel Zahradník.

2.2 20. století

Na počátku 20. století se objevují převáženě články a publikace Miloslava Pelíška, který svých největších úspěchů dosáhl právě v kinematické geometrii – výsledky jeho prací o středech křivosti trajektorií lze dodnes najít v učebnicích jako „Pelíškovy konstrukce“. Věnoval se také prostorové kinematice.

Po druhé světové válce se nejvíce o rozvoj kinematické geometrie zasloužil profesor pražské techniky Zdeněk Pírko, který v roce 1957 založil a více než dvacet let vedl na Katedře matematiky a deskriptivní geometrie elektrotechnické fakulty ČVUT seminář z kinematické geometrie. Jeho předmětem byly obecné problémy kinematické geometrie v n-rozměrném afinním prostoru, ale také speciální problémy rovinné kinematiky.

Literatura

[1] Folta J.: *Česká geometrická škola*. Academia, Praha, 1982.

[2] Bečvář J. a kol.: *Eduard Weyr 1852–1903*. Prometheus, Praha, 1995.

[3] Janovský Z.: *Zemřel profesor Zdeněk Pírko*. Časopis pro pěstování matematiky 109(1984), 109–111.

[4] Folta J., Šišma P.: *Biografie českých matematiků.* Přírodovědecká fakulta MU, Brno `http://www.math.muni.cz/math/biografie/index.html` (převzato 6/2007).

Adresa

Mgr. Václav Jára
Na Louce 260
549 34 Velký Dřevíč
e-mail: *vaclav.jara@click.cz*

FIBONACCIHO POLYNOMY POPSANÉ E. CH. CATALANEM A E. JACOBSTHALEM

MARTINA JAROŠOVÁ

1 Fibonacciho a Lucasova posloupnost

Nejprve si velmi stručně připomeneme několik základních faktů o Fibonacciho a Lucasově posloupnosti.

2 Fibonacciho polynomy

Rozsáhlou skupinu polynomů lze definovat pomocí formule podobné Fibonacciho rekurentní formuli ($F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, pro $n \in \mathbf{N}$, přičemž $F_1 = F_2 = 1$). Z těchto polynomů můžeme vhodným dosazením získat Fibonacciho čísla.

Studiem Fibonacciho polynomů se v roce 1883 zabýval belgický matematik Eugène Charles Catalan (1814 – 1894) a poté také německý matematik E. Jacobsthal.

Polynomy popsané E. Ch. Catalanem jsou definovány:

Definice 1. Polynomy $f_n(x)$ splňující rekurentní formuli

$$f_n(x) = x f_{n-1}(x) + f_{n-2}(x), \tag{1}$$

kde $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ a $n \geq 3$, $n \in \mathbf{N}$ nazýváme *Fibonacciho polynomy*.

Později tyto „Catalanovy“ Fibonacciho polynomy zkoumal kolem roku 1966 kanadský matematik M. N. S. Swamy.

Polynomy popsané E. Jacobsthalem jsou definovány:

Definice 2. Polynomy $J_n(x)$ splňující rekurentní formuli

$$J_n(x) = J_{n-1}(x) + x J_{n-2}(x), \tag{2}$$

kde $J_1(x) = 1 = J_2(x)$ a $n \geq 3$, $n \in \mathbf{N}$ nazýváme *„Jacobsthalovy“ Fibonacciho polynomy.*

2.1 Fibonacciho polynomy popsané E. Ch. Catalanem

Představme si alespoň prvních deset členů Fibonacciho polynomů, které popsal E. Ch. Catalan:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= 1\\
f_2(x) &= x\\
f_3(x) &= x^2 + 1\\
f_4(x) &= x^3 + 2x\\
f_5(x) &= x^4 + 3x^2 + 1\\
f_6(x) &= x^5 + 4x^3 + 3x\\
f_7(x) &= x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1\\
f_8(x) &= x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x\\
f_9(x) &= x^8 + 7x^6 + 15x^4 + 10x^2 + 1\\
f_{10}(x) &= x^9 + 8x^7 + 21x^5 + 20x^3 + 5x
\end{aligned}$$

Poznámka 1. Z rekurentního vztahu (1) přímo plyne, že platí

$$f_n(1) = F_n, \text{ pro všechna } n \in \mathbf{N},$$

kde F_n je n-té Fibonacciho číslo.

Dále si ukážeme mnoho zajímavých vztahů a skutečností týkajících se Fibonacciho polynomů, jež popsal E. Ch. Catalan.

2.2 Fibonacciho polynomy popsané E. Jacobsthalem

Poté si představíme Fibonacciho polynomy, které popsal E. Jacobsthal. Pro lepší přehlednost je nazývejme zkráceně – *Jacobsthalovy polynomy*. Prvních deset Jacobsthalových polynomů:

$$\begin{aligned}
J_1(x) &= 1\\
J_2(x) &= 1\\
J_3(x) &= x + 1\\
J_4(x) &= 2x + 1\\
J_5(x) &= x^2 + 3x + 1\\
J_6(x) &= 3x^2 + 4x + 1\\
J_7(x) &= x^3 + 6x^2 + 5x + 1\\
J_8(x) &= 4x^3 + 10x^2 + 6x + 1\\
J_9(x) &= x^4 + 10x^3 + 15x^2 + 7x + 1\\
J_{10}(x) &= 5x^4 + 20x^3 + 21x^2 + 8x + 1
\end{aligned}$$

Poznámka 2. Z rekurentního vztahu (2) přímo plyne platnost rovnosti

$$J_n(1) = F_n, \text{ pro všechna } n \in \mathbf{N},$$

kde F_n je n-té Fibonacciho číslo.

Opět si ukážeme mnoho zajímavých skutečností o těchto Jacobsthalových polynomech.

3 Lucasovy polynomy

Definice 6. Polynomy $l_n(x)$ splňující rekurentní formuli

$$l_n(x) = x\, l_{n-1}(x) + l_{n-2}(x), \tag{3}$$

kde $l_0(x) = 2$, $l_1(x) = x$ a $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$ nazýváme *Lucasovy polynomy*.

Původně je studoval americký matematik Marjorie Bicknell (kolem roku 1970). Představme si alespoň prvních deset členů Lucasových polynomů:

$$\begin{aligned}
l_1(x) &= x\\
l_2(x) &= x^2 + 2\\
l_3(x) &= x^3 + 3x\\
l_4(x) &= x^4 + 4x^2 + 2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
l_5(x) &= x^5 + 5x^3 + 5x \\
l_6(x) &= x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2 \\
l_7(x) &= x^7 + 7x^5 + 14x^3 + 7x \\
l_8(x) &= x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2 \\
l_9(x) &= x^9 + 9x^7 + 27x^5 + 30x^3 + 9x \\
l_{10}(x) &= x^{10} + 10x^8 + 35x^6 + 50x^4 + 25x^2 + 2
\end{aligned}
$$

Poznámka 3. Z rekurentní definice (3) přímo plyne, že platí

$$l_n(1) = L_n, \text{ pro všechna } n \in \mathbf{N},$$

kde L_n je n-té Lucasovo číslo.

O Lucasových polynomech si též povíme některá zajímavá fakta.

Literatura

[1] Bečvář J.: *Leonardo Pisanský – Fibonacci*. Dějiny matematiky, svazek 19, Prometheus, Praha, 2001, 264–339.

[2] Hoggatt V. E. Jr.: *Fibonacci and Lucas Numbers*. Houghton Mifflin Company, Boston, 1969.

[3] Knott R.: *Who was Fibonacci?* [online]. c1996 – 2006, poslední revize 25. července 2005 [cit. 12. 6. 2007].

http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibBio.html.

[4] Koshy T.: *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.

[5] SpringerLink: *Fibonacci polynomials* [online]. c2001, [cit. 18. 6. 2007].

http://eom.springer.de/F/f130090.htm.

[6] SpringerLink: *Lucas polynomials* [online]. c2001, [cit. 10. 6. 2007].

http://eom.springer.de/L/l130120.htm.

[7] Weisstein E. W.: *Fibonacci Polynomial* (From MathWorld – A Wolfram Web Resource) [online]. c1999 – 2007, poslední revize prosinec 2005 [cit. 17. 6. 2007].

http://mathworld.wolfram.com/FibonacciPolynomial.html.

[8] Weisstein E. W.: *Jacobsthal Polynomial* (From MathWorld – A Wolfram Web Resource) [online]. c1999 – 2007, poslední revize listopad 2002 [cit. 12. 6. 2007].

http://mathworld.wolfram.com/JacobsthalPolynomial.html.

[9] Weisstein E. W.: *Lucas Polynomial* (From MathWorld – A Wolfram Web Resource) [online]. c1999 – 2007, poslední revize prosinec 2005 [cit. 17. 6. 2007].

http://mathworld.wolfram.com/LucasPolynomial.html.

[10] Wikipedia (The free encyclopedia): *Edouard Lucas* [online]. Poslední revize 16. března 2007 [cit. 12. 6. 2007].

http://en.wikipedia.org/wiki/Edouard_Lucas.

[11] Wikipedia (The free encyclopedia): *Fibonacci polynomials* [online]. Poslední revize květen 2006 [cit. 18. 6. 2007]. http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_polynomials.

Adresa

Mgr. Martina Jarošová
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita
Janáčkovo náměstí 2a
602 00 Brno
e-mail: *mjarosov@math.muni.cz*

HISTORIE SČÍTÁNÍ ŘAD – POČÍTAČOVÁ SUMACE

ŠTĚPÁN JINDŘICH

1 Úvod

V minulém století se s rozvojem výpočetní techniky rozvinul i zájem o její využití v mnoha oborech lidské činnosti. V matematice byly výpočetní systémy využívány prakticky od začátku, mimo jiné i na sčítání řad.

Historie vývoje počítačových algoritmů na sčítání řad je poměrně mladá, přesto lze nalézt zajímavé výsledky.

2 Badatelé, kteří přispěli k rozvoji metod pro sčítání řad na počítačích

2.1 Sestra Mary Celine Fasenmyer

Výzkum počítačového dokazování identit začal v disertační práci sestry Mary Celine Fasenmyer na University of Michigan v roce 1945. Vyvinula metodu pro nalezení rekurentních vztahů pro hypergeometrické polynomy.

Sestra Celine se narodila v Crownu ve střední Pensylvánii v roce 1906 v římskokatolické rodině. Její matka zemřela, když jí byl jeden rok. O tři roky později se její otec znovu oženil s o 25 let mladší ženou.

Mary studovala v Titusville, asi 30 mil od Crownu. Zde navštěvovala St Joseph's Academy, což byla římskokatolická škola. Během studia se projevil její matematický talent. Po promoci v roce 1923 dalších 10 let učila. Současně studovala na Catholic Mercyhurst College po jeho založení v roce 1926. V roce 1933 se z ní na této škole stala sestra Celine.

V rámci studia byla poslána do Pittsburghu učit na St Justin's High School. Později začala studovat postgraduální studium na University of Pittsburgh. Na její práci dohlížel Earl Rainville, který ji navrhl, aby zkoumala kombinatorické problémy související s hypergeometrickými řadami. Ve své práci ukázala algoritmy pro nalezení rekurentních vztahů mezi sčítanci hypergeometrických řad. Doktorát ukončila v roce 1946.

Publikovala jen dvě matematické práce. První „*Some generalized hypergeometric polynomials*" v roce 1947 v *Bulletin of the American Mathematical Society*. Druhá byla „*On Recurrence Relations*" v *American Mathematical Monthly* v roce 1949.

Sestra Celine se vrátila na Catholic Mercyhurst College, kde učila mnoho let.

2.2 Doron Zeilberger

Zeilberger je izraelsko-americký matematik, který se narodil v Izraeli v roce 1950. Přispěl důležitými výsledky na poli součtů hypergeometrických řad. Tzv. Wilf-Zeilbergerův pár či Zeilbergerův algoritmus jsou nezbytné nástroje pro sčítání hypergeometrických řad a tyto techniky jsou značně využívány v moderních počítačových algebraických programech.

V roce 1998 společně s Herbertem Wilfem obdržel cenu Americké matematické společnosti pro jeho výzkum hypergeometrických sumací. V roce 2004 obdržel Eulerovu medaili. Říká se o něm: „Mistr v používání počítačů a algoritmů k tomu, aby byla matematika rychlá a efektivní".

2.3 Herbert Wilf

Herbert Wilf narozen v roce 1931 je matematik specializující se na kombinatoriku. Působí na University of Pennsylvania.

Je autorem mnoha článků a knih, byl školitelem a rádcem mnoha studentů a kolegů. Mezi jeho spolupracovníky patří Doron Zeilberger a Donald Knuth. Jeden z jeho bývalých studentů je Richard Garfield, tvůrce známé karetní hry *Magic: The Gathering*. Koncem šedesátých let byl také školitelem E. R. Weintrauba. V roce 2002 byl oceněn Eulerovou medailí Institutem kombinatoriky a jejích aplikací.

2.4 Marko Petkovšek

Marko Petkovšek je slovinský matematik narozen v roce 1955. Pracuje převážně na symbolických výpočtech. Je profesorem diskrétní a počítačové matematiky na univerzitě v Ljubljani. Dokončil svou disertaci na Carnegie Mellon University pod vedením Dana Scotta. Společně s Wilfem a Zeilbergerem napsal knihu A=B.

2.5 Bill Gosper

Ralph Wiliam Gosper, známý jako Bill Gosper, je americký matematik a programátor z Pennsauken v New Jersey. Je známý svou prací na řetězových zlomcích reprezentujících reálná čísla. Dále navrhl algoritmus pro sčítání hypergeometrických řad, známý jako Gosperův algoritmus.

Literatura

[1] Petkovšek M., Wilf H., Zeilberger D.: *A=B*. [online], 1997, dostupný z <http://www.cis.upenn.edu/~wilf/Downld.html>.

[2] Kalman D.: *Six Ways to Sum a Series*. American University 2002, [online], dostupný z <http://www.cis.upenn.edu/~wilf/Downld.html>.

[3] Hora J.: *O některých otázkách souvisejících s využíváním programů počítačové algebry ve škole*. Díl III., Plzeň, 2005.

Adresa

Mgr. Štěpán Jindřich
Krandova 727
Stod
e-mail: *overkill@centrum.cz*

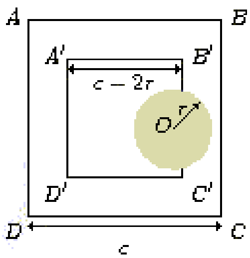
M. W. CROFTON A GEOMETRICKÁ PRAVDĚPODOBNOST V 19. STOLETÍ

ANNA KALOUSOVÁ

1 Počátky geometrické pravděpodobnosti

Georges-Louis Leclerc, hrabě de Buffon (1707–1788) využil jako první geometrii pro výpočet pravděpodobnosti nějakého jevu. V roce 1733 bylo v pařížské Académie des sciences čteno jeho pojednání *Solutions de problèmes sur le jeu du Franc-Carreau*; zprávu o tom podává [5]. Toto pojednání bylo akademiky velmi příznivě přijato a spolu s pojednáním *Fine mécanique* přispělo k tomu, že byl Buffon v roce 1734 králem jmenován *adjoint mécanicien* v Académie des sciences. Text byl o řadu let později (1777) publikován jako součást *Essai d'arithmétique morale.*

Hra *Franc-Carreau* byla velmi oblíbena na francouzském dvoře. Hrát se mohla v místnosti, jejíž podlaha byla rozdělena na pravidelné čtverce (např. dlaždice). Do vzduchu byla vyhozena mince a hráči sázeli na její konečnou polohu. Protne některou ze spár nebo bude celá ležet uvnitř jednoho čtverce (pozice franc-carreau)? Označme c stranu čtverce a r poloměr mince. Zřejmě bude celá mince ležet uvnitř čtverce právě tehdy, když její střed O bude ležet uvnitř menšího čtverce o straně c-$2r$, jak je znázorněno na obrázku. Pravděpodobnost, že bude mince uvnitř čtverce, je potom rovna podílu obsahu menšího čtverce k obsahu čtverce většího, tedy



$$P = \frac{(c-2r)^2}{c^2}.$$

Zanedbali jsme případ, kdy se mince spáry jen dotýká. K tomu by došlo v případě, že by střed mince ležel na hranici malého čtverce; ale to je množina míry nula.

V tomtéž pojednání se Buffon zabýval ještě jednou hrou. V místnosti, jejíž podlaha je tentokrát rozdělena sítí rovnoběžných od sebe stejně vzdálených spár (např. mezi podlahovými prkny), je do vzduchu vyhozena jehla. Hráči sázejí na to, zda jehla protne nějakou spáru nebo ne. Označme d vzdálenost rovnoběžek, l délku jehly (předpokládáme, že $l < d$), dále označme y vzdálenost středu jehly od nejbližší rovnoběžky a α úhel, který svírá jehla s daným systémem rovnoběžek. Zřejmě stačí uvažovat $0 \le y \le d/2$ a $0 \le \alpha \le \pi$. Jehla protne spáru právě tehdy, když $(l/2)\cdot\sin\alpha \ge y$. Pravděpodobnost, že jehla protne spáru, opět spočítáme jako podíl obsahu oblasti *příznivých případů* k obsahu oblasti *všech případů*, tj. střed jehly leží na úsečce délky d/2, která je kolmá ke spárám, a mírou různých orientací je π:

$$P = \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\alpha \,\mathrm{d}\alpha}{\pi\frac{d}{2}} = \frac{l\cdot[-\cos\alpha]_0^\pi}{\pi d} = \frac{2l}{\pi d}.$$

V následujících letech další matematici zobecňovali tuto *Buffonovu úlohu o jehle.* V Británii Isaac Todhunter (1820–1884) počítal pravděpodobnost, že eliptický disk s hlavní poloosou délky $l < d$, kde d je vzdálenost mezi rovnoběžnými čarami, protne některou z rovnoběžek. Později úlohu zobecnil na libovolnou uzavřenou (konvexní) křivku, která nemá singulární body. Ve Francii včlenil Gabriel Lamé (1795–1870) do svých přednášek diskusi o zobecněních Buffonovy úlohy pro kruhy, elipsy a pravidelné mnohoúhelníky. Tyto přednášky navštěvoval i Joseph-Émile Barbier (1839–1884), který v té době studoval na École normale supérieure. Tomu se v roce 1860, kdy dokončil studia na ÉNS, podařilo shrnout všechny speciální případy, o kterých Lamé hovořil, do jedné obecné teorie. Své výsledky publikoval v článku [1]. Uvažoval nejprve konvexní disk, jehož maximální průměr je menší než vzdálenost spár (označíme ji opět *d*) a jehož obvod je *L*. Pravděpodobnost, že disk protne některou spáru, je potom rovna $\frac{L}{\pi d}$. Tento výsledek odpovídá i řešení původní Buffonovy úlohy, protože *jehlu* můžeme považovat (jak Barbier poznamenal) za limitní případ elipsy s obvodem $L=2l$. I když tento výsledek byl už dost obecný, Barbier ho ještě rozšířil. Pokud budou strany mnohoúhelníka hodně *malé*, lze se na něj dívat jako na obrazec ohraničený nějakou konvexní křivkou. Matematická indukce pak dovolí rozšířit výsledek i na tento případ. Další rozšíření se týkalo nekonvexních obrazců, které si můžeme představit jako těsně obepnuté nějakou nití. Vyplníme-li mezery mezi původním obrazcem a touto nití, získáme konvexní obrazec, který protíná nějakou spáru právě tehdy, když ji protíná obrazec původní.

Barbier provedl i další zobecnění. Libovolnou rektifikovatelnou křivku délky *L* lze aproximovat posloupností úseček délky l_i, kde $l_i < d$, $i = 1,2,...,n$, a sledovat průsečíky těchto úseček se soustavou spár. Označme Z_i počet průsečíků *i*-té úsečky (0 nebo 1) a *Z* celkový počet průsečíků; zřejmě $Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i$. Označíme-li P_i pravděpodobnost, že *i*-tá úsečka protne nějakou spáru, je střední počet průsečíků $\mathbf{E}(Z)$ roven

$$\mathbf{E}(Z) = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{2l_i}{\pi d} = \frac{2}{\pi d} \sum_{i=1}^{n} l_i = \frac{2L}{\pi d}.$$

To už ovšem není úloha o *Buffon needle*, ale o *Buffon noodle,* jak se teď začíná říkat.

V Británii se geometrickou pravděpodobností zabývali James Joseph Sylvester (1814–1897) a Morgan William Crofton. Od prvního z nich pochází *Sylvesterův problém*: v oblasti *S* umístíme náhodně čtyři body; jaká je pravděpodobnost, že čtyřúhelník jimi určený bude konvexní? Od druhého pochází celá řada výsledků, nazývaných *Croftonovy relace* či *teorémy*; jeden z nich se úzce vztahuje i k Sylvesterovu problému.

2 Morgan William Crofton (1826–1915)

M. W. Crofton se narodil v Dublinu v rodině protestantského duchovního. Byl vychováván jako protestant, ale později přestoupil na římskokatolickou víru, což negativně ovlivnilo jeho kariéru.

Vystudoval matematiku na Trinity College v Dublinu, studia ukončil roku 1847. V roce 1849 byl jmenován profesorem naturální filosofie v Queen College v Galway, avšak po třech letech se místa vzdal. Zdá se, že hlavní příčinou byl jeho přestup ke katolictví. Potom odjel do Francie, kde učil v různých vzdělávacích institucích provozovaných jezuity. Po návratu do Anglie začal spolupracovat s Jamesem Josephem Sylvesterem, který v té době působil v Royal Military Academy ve Woolwich. V roce 1864 nastoupil do této školy i Crofton a po Sylvesterově odchodu do důchodu (1869) převzal jeho místo. Učil mechaniku a matematické inženýrství a napsal také několik učebnic. V roce 1884 byl penzionován. V té době se čtyři irské katolické koleje spojily do Royal University of Ireland a Crofton se připojil k matematickému učitelskému sboru. Protože bydlel v Londýně, nemohl učit v nově vzniklém zařízení. Jezdil ale na pravidelné návštěvy do Dublinu a také byl zkoušejícím. Po odchodu do důchodu (1895) mu byl v roce 1898 udělen čestný doktorát na Trinity College Dublin. Zemřel v Brightonu.

Ač učil aplikovanou matematiku, většinu svých článků napsal Crofton o čisté matematice, geometrii a operátorovém počtu. Jeho patrně nejznámějším dílem je příspěvek *Probability* v 9. vydání *Encyclopaedia Britannica*. Tento dlouhý příspěvek je jedním z mnoha vynikajících hesel, kvůli nimž si mnozí myslí, že to je ta nejlepší encyklopedie, která kdy byla vydána (v současných vydáních je kapitola *Probability Theory* už zcela jiná a Croftonovo jméno z *Encyclopaedia Britannica* zcela zmizelo!).

3 Morgan William Crofton a Buffonova úloha o jehle

Ze Sylvesterových poznámek (podle [6]) plyne, že s Croftonem hovořili o Buffonově úloze v roce 1860 ve Woolwich. V roce 1868 vyšel Croftonův článek *On the Theory of Local Probability* [2], ve kterém dokázal několik vět z budoucí „integrální geometrie" pomocí technik geometrické pravděpodobnosti. Nejdůležitější z nich je věta následujícící:

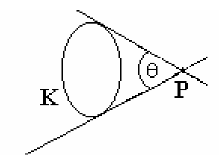
Míra počtu náhodných přímek, které protínají hranici dané uzavřené konvexní oblasti, je rovna délce této hranice, neboli

$$\iint \mathrm{d}p\,\mathrm{d}\theta = L, \tag{1}$$

kde p je vzdálenost přímky od počátku a θ je odchylka od pevně zvolené osy.

Rovnice (1) připouští velmi dalekosáhlá zobecnění, spočívající v tom, že mírami neprázdných průniků přímek a rovin s objekty jsou určité míry těchto objektů, a v této obecné formě je nazývána *Croftonova* (též *Cauchy-Croftonova*) *formule*. Crofton předpovídá možnost využití tohoto poznatku k výpočtu komplikovaných či obecně v uzavřené formě neřešitelných integrálů a to tehdy, kdy míra neprázdných průniků je složitý integrál a vlastnost protínaného objektu (objem, povrch apod.) je známá. Odtud se později tato část teorie geometrických pravděpodobností začala nazývat *integrální geometrií*, tj. geometrickou metodou výpočtu integrálů.

Aby si zajistil větší okruh čtenářů, oznámil svůj výsledek už v roce 1867 na stránkách *Comptes rendus* pařížské Académie des sciences [3]. Crofton oznámil následující novou větu, kterou můžeme chápat jako určení míry všech dvojic tečných přímek objektu *K*:



Mějme hranici libovolné konvexní oblasti, která má délku L a vymezuje plochu Ω. Jestliže označíme θ úhel dvou tečen k této hranici z nějakého vnějšího bodu (x,y), máme integrál

$$\iint (\theta - \sin\theta)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{L^2}{2} - \pi\Omega$$

pro celou plochu vně hranice.

Nedlouho poté Joseph Serret (1819–1885) provedl alternativní odvození tohoto výsledku, v němž využil pouze metod analytické geometrie, tedy nezávisle na geometrické pravděpodobnosti. Svůj důkaz publikoval v *Comptes rendus* v roce 1869 [7]. Crofton reagoval dopisem, který vyšel v *Comptes rendus* o něco později v tomtéž roce [4]. V něm také oznámil další výsledek, který byl dosažen metodami geometrické pravděpodobnosti, totiž větu:

Mějme hranici libovolné konvexní oblasti, která vymezuje plochu Ω; jestliže nazveme C tětivu, která spojuje dva body na hranici, p vzdálenost tětivy od pevně zvoleného bodu O a θ úhel, který svírá přímka p s pevně zvolenou osou, máme

$$\iint C^3\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}\theta = 3\Omega^2, \tag{2}$$

Integrace platí pro všechny hodnoty p a θ, které skutečně dávají tětivu C.

J. Serret odvodil také tuto formuli pouze metodami analytické geometrie. Oba výsledky potom publikoval v [8].

Použijeme-li rovnici (1), můžeme (2) zapsat jako

$$\iint C^3 \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}\theta = \frac{L}{L} \iint C^3 \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}\theta = L\mathbf{E}(C^3) = 3\Omega^2$$

a tedy

$$\Omega^2 = \frac{1}{3} L\mathbf{E}(C^3) \, ,$$

kde $\mathbf{E}(C^3)$ je střední hodnota třetí mocniny délky tětiv. Jejím odhadem, získaným na vhodně vybraném souboru přímek zasahujících plochu Ω, dostaneme při znalosti obvodu L odhad Ω^2.

Užití geometrické pravděpodobnosti v důkazu přitáhlo pozornost francouzského matematika Josepha Bertranda (1822–1900). V roce 1870 publikoval dvoudílný *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, který obsahuje celou kapitolu nazvanou *Théorème de Crofton* a vysvětluje Croftonův výsledek v širším kontextu geometrické pravděpodobnosti. Bertrandův zájem o geometrickou pravděpodobnost, konkrétně jeho paradoxy z roku 1889, obrátily pozornost k základnímu požadavku na úlohy geometrické pravděpodobnosti, tj. k nezbytnosti pohybově invariantního zadání.

Literatura

[1] Barbier J-É.: *Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert*. Journal de mathématiques pures et appliquées 5(1860), 273–286.

[2] Crofton M. W.: *On the Theory of Local Probability Applied to Straight Lines Drawn at Random in a Plane, the Methods Used Being Also Extended to the Proof of Certains New Theorems in the Integral Calculus*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London 158(1868), 181–199.

[3] Crofton M. W.: *Théorème sur une intégrale double définie*. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris 65(1867), 994–995.

[4] Crofton M. W.: *Sur quelques théorèmes de calcul intégral: Lettre de M. Crofton à M. J.-A. Serret*. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris 68(1869), 1469–1470.

[5] Fontenelle B. le B. de: *Histoire de l'Académie royale des sciences en 1733*, (1735), 43–45.

[6] Seneta E., Parshall K. H., Jongmans F.: *Nineteenth-Century Developments in Geometric Probability: J. J. Sylvester, M. W. Crofton, J.-É. Barbier and J. Bernard*. Arch. Hist. Exact Sci. 55(6), (2001), 501–524.

[7] Serret J.-A.: *Sur un problème de calcul intégral*. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris 68(1869), 1132–1134.

[8] Serret J.-A.: *Sur un problème de calcul intégral*. Annales scientifiques de l'ÉNS 6(1869), 177–183.

Adresa

RNDr. Anna Kalousová
Katedra matematiky FEL ČVUT
Technická 2
166 27 Praha 6
e-mail: *kalous@math.feld.cvut.cz*

FEYNMANŮV DŮKAZ MAXWELLOVÝCH ROVNIC

JAN KOTŮLEK

V říjnu 1948 ukázal Richard P. Feynman (1918–1988) Freemanu Dysonovi důkaz (homogenních) Maxwellových rovnic pro jednu nerelativistickou částici pouze z Newtonova zákona

(1) $$\mathrm{m}\,\ddot{x}_j = F_j(x, \dot{x}, t)$$

a komutačních relací

(2) $$[x_j, x_k] = 0,$$

(3) $$\mathrm{m}\,[x_j, \dot{x}_k] = i\hbar\delta_{jk}.$$

Feynman tento důkaz nikdy nepublikoval.

Podle Dysona se Feynman pokoušel nalézt novou teorii dynamiky elementárních částic. Snažil se objevit minimální předpoklady, ze kterých by se daly objevit nové fyzikální modely, které nelze popsat Lagrangiánem a Hamiltoniánem.

Jeho důkaz ale ukazuje, že jediná přípustná pole, která mohou konzistentně působit na elementární částici jsou skalární nebo elektromagnetická. Tím Dyson vysvětluje, *proč* jej Feynman nechtěl publikovat, byl to pro něj totiž jen výsledek neúspěšného programu hledání nové fyziky.

1 Feynmanův nebo Dysonův důkaz?

Až po Feynmanově smrti se Dyson, v přednášce na Feynman Memorial Session, poprvé o důkazu zmínil (text přednášky vyšel ve Physics Today v únoru 1989, viz [1]). V dubnu 1989 pak poslal článek s úplným důkazem do American Journal of Physics, kde také v březnu 1990 vyšel, [2].

Z Dysonových komentářů se dozvídáme, že si neuchoval originální Feynmanův rukopis důkazu a skartoval také své originální poznámky. Předložená verze důkazu je tedy pouze pozdější rekonstrukcí důkazu, navíc není známa ani dobu jejího vzniku. Již C.R. Lee ve svém článku [4] poprvé vyzdvihl Dysonovy zásluhy: důkaz máme zachován jen díky Dysonovi, a to navíc ve verzi kterou sepsal sám Dyson. Proto jej pojmenoval Feynmanův-Dysonův důkaz.

2 Feynmanův důkaz podle Dysona

Tvrzení. Uvažujme částici o souřadnicích x_j (j = 1, 2, 3) a rychlosti $\dot{x}_j$ splňující Newtonův zákon (1) a komutační relace (2) a (3).

Pak existují pole $E(x,t)$ a $H(x,t)$ splňující rovnici Lorentzovy síly

(4) $$F_j = E_j + \varepsilon_{jk\ell}\dot{x}_k H_\ell$$

a homogenní Maxwellovy rovnice

(5) $$\nabla \cdot H = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \times E = 0.$$

Nehomogenní Maxwellovy rovnice pouze definují hustotu náboje ρ a proudu j,

(6) $$\nabla \cdot E = 4\pi\,\rho\,, \qquad \frac{\partial E}{\partial t} - \nabla \times H = 4\pi\, j$$

3 Matematika ve Feynmanově důkazu

Celý důkaz závisí na vlastnostech komutátoru

(7) $$[A, B] := AB - BA\,,$$

zejména na Jacobiho identitě

(8) $$[A,[B,C]] + [C,[A,B]] + [B,[C,A]] = 0$$

a Leibnitzově pravidlu (pro souřadnicovou a časovou derivaci)

(9) $$[A, BC] = [A,B]C + B[A,C], \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A,B] = \left[\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}, B\right] + \left[A, \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right].$$

Aparát algeber funkcí na varietách a jejich reprezentací na Hilbertově prostoru je ve Feynmanově původním důkazu skryt, v moderní geometrické formulaci kvantové teorie založené na Feynmanových myšlenkách však hraje klíčovou roli, srov. Paschke [6].

4 Nový život Feynmanova důkazu

Podle Dysona bylo důležité důkaz publikovat, protože to není jen pozůstatek neúspěšného projektu, ale inspirativní práce vzbuzující nové otázky týkající se zejména symetrií: předpoklady důkazu jsou nerelativistické (jsou invariantní vůči Galileovským transformacím), kdežto výsledné rovnice jsou relativisticky invariantní (tedy invariantní vůči Lorentzovým transformacím). Těchto otázek se také týkala řada bezprostředních komentářů na Dysonův článek, srov. [3].

Po delším zvážení ale inspiruje Feynmanův důkaz k úplně jiným úvahám. Snaha o formulaci dynamiky částic z minimálních předpokladů se ukázala být podnětná i v jiných kontextech. A tak byl Feynmanův důkaz zobecněn na nekomutativní elektrodynamiku (Yang-Millsova teorie, [4]), o relativistickou formulaci se pokusil S. Tanimura, [7], do moderní geometrické terminologie klasické (nerelativistické a nekvantové) mechaniky důkaz převedli Cariñena et al. [5], na libovolné konfigurační prostory jej zobecnil Paschke, [6]. Tento přehled samozřejmě není úplný ani konečný, navíc relativistická nebo nekomutativní zobecnění ještě zdaleka nejsou uspokojivě dokončena.

Literatura

[1] Dyson F. J.: *Feynman at Cornell*. Phys. Today 42 (1989) 32–38. Český překlad L. Motl, *Feynman na Cornellu*, [online, 1997-10-25]. Dostupný na WWW <http://www.kolej.mff.cuni.cz/~lmotm275/RUZE/11/node3.html> [cit. 2007-06-28]

[2] Dyson F. J.: *Feynman's proof of the Maxwell equations*. Am. J. Phys. 58(1990), 209–211.

[3] Celkem čtyři komentáře vyšly v lednovém čísle Am. J. Phys. 59(1991), 85–87, v sekci „Notes and discussions“. Jejich autory jsou N. Dombey, R. W. Brehme, J. L. Anderson a I. E. Farquhar. Další komentáře zabývající se invariancí jsou: Lee, C. R.: *Feynman–Dyson proof of the gauge field-equations*, Phys. Lett. A 148(1990) 146–148; Vaidya A., Farina C.: *Can Galilean mechanics and full Maxwell equations coexist peacefully?* Phys. Lett. A 153(1991) 265–267. Diskusi shrnul Noyes, H.P.: Preprint SLAC-PUB-5588 (1991), viz. http://www.slac.stanford.edu/cgi-wrap/getdoc/slac-pub-5588.pdf

[4] Lee C. R.: *Feynman–Dyson proof of the gauge field-equations*, Phys. Lett. A 148(1990) 146–148.

[5] Cariñena J. F., Ibort L. A., Marmo G., Stern A.: *The Feynman problem and the inverse problem for Poisson dynamics*. Phys. Rep. 263(1995) 153–212.

[6] Paschke M.: Time evolutions in quantum mechanics and (Lorentzian) geometry, Preprint, `arXiv: math-ph/0301040`.

[7] Tanimura S.: *Relativistic generalization and the extension to the non-Abelian gauge theory of Feynman's proof of the Maxwell equations*. Annals of Physics 220(1992) 229–247.

Adresa

RNDr. Jan Kotůlek
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
VŠB – TU v Ostravě
17. listopadu 15
708 33 Ostrava-Poruba
e-mail: *Jan.Kotulek@vsb.cz*

PROBLÉM JEDNOZNAČNOSTI
TRIGONOMETRICKÝCH ŘAD V HISTORICKÉM KONTEXTU
(OD G. CANTORA K Y. MEYEROVI)

LIBOR KOUDELA, KAREL F. ŽITNÝ

Georg Cantor v roce 1870 dokázal následující tvrzení:

1) jestliže $\lim_{n\to\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$ pro všechna $x \in [-\pi, \pi]$, potom také $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$;

2) jestliže trigonometrická řada $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ konverguje k nule pro všechna $x \in [-\pi, \pi]$, potom všechny koeficienty $a_n = b_n = 0$.

Prvé tvrzení je dnes známo jako Cantorovo-Lebesgueovo lemma. Druhé tvrzení je nyní označováno jako Heineho-Cantorova věta o jednoznačnosti, neboť z něho vyplývá, že 2π-periodická funkce reálné proměnné je bodovou limitou částečných součtů nejvýše jedné trigonometrické řady. Tuto větu je relativně snadné dokázat, jestliže využijeme, jak to učinil Cantor, tzv. Riemannovu metodu sumace trigonometrických řad.

Obě tvrzení, jejichž význam byl rozpoznám již Cantorovými současníky, např. Kroneckerem, Harnachem a Hölderem, připouštějí řadu velmi podstatných a dalekosáhlých zobecnění. Ve stručném historicky orientovaném přehledu je možné analyzovat pouze nejvýznamnější výsledky.

Nahradíme-li předpoklad, že $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$ pro všechna $x \in [-\pi, \pi]$, hypotézou, že $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$ pro x, která nepatří do „dostatečně štíhlé“ podmnožiny $E \subset [-\pi, \pi]$, je stále možné dokázat, že $a_n = b_n = 0$ pro všechna n. Takové „dostatečně štíhlé“ množiny E jsou nazývány množiny unicity. W. H. Young v roce 1909 ukázal, že každá spočetná podmnožina intervalu $[-\pi, \pi]$ je unicitní. (Cantorův výsledek z roku 1872 ukazující, že uzavřené spočetné množiny jsou unicitní, se stal východiskem k vytváření teorie množin.)

V roce 1912 ukázal Ch. J. de la Vallée Poussin, že trigonometrická řada, která pro každé x konverguje ke konečné lebesgueovsky integrovatelné funkci f, je Fourierovou řadou funkce f.

Existence množiny míry nula, která není množinou unicity, byla dokázána 1916 D. E. Menšovem. Tím vyvstala přirozená otázka, existují-li nespočetné množiny unicity s nulovou mírou. Tuto otázku zodpověděl v roce 1922 A. Rajchman, který např. dokázal, že Cantorova triadická množina je množinou unicity.

Při dodnes neukončeném hledání nutných a postačujících podmínek pro to, aby nespočetné množiny míry nula byly unicitní, započatém A. Rajchmanem a N. K. Bari, došlo k pozoruhodnému sblížení teorie funkcí s teorií čísel. Pravděpodobně nejkrásnějším výsledkem je slavná Salemova-Zygmundova věta z roku 1955, která umožňuje zkonstruovat s použitím tzv. Pisotových čísel dvě třídy nespočetných množin Cantorova typu, které jsou resp. nejsou unicitní.

Spolehlivou orientaci ve výsledcích dosažených před rokem 1926 umožňuje Hobsonova monografie [2]. Obě stěžejní klasická kompendia [1], [5] shrnují v obsáhlých kapitolách problematiku spojenou s unicitou trigonometrických řad. Kniha [4] a zejména monografie [2] poskytují detailní představu o výrazné reformulaci problematiky v 60. letech minulého století.

Přednáškou budou také připomenuty životní osudy některých zmíněných matematiků a matematiček.

Literatura

[1] Bari N. K.: *Trigonometričeskie rjady*. Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematičeskoj literatury, Moskva, 1961.

[2] Hobson E. W.: *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*. 2nd ed., vol. II., Cambridge University Press, 1926.

[3] Meyer Y.: *Algebraic Numbers and Harmonic Analysis*. North-Holland, Amsterdam, 1972.

[4] Salem R.: *Algebraic Numbers and Fourier Analysis*. D. C. Heath and Company, Boston, 1963.

[5] Zygmund A.: *Trigonometric Series*. 2nd ed., vol. 1., Cambridge University Press, 1959.

Adresy

Mgr. Libor Koudela
Žižkova 248
530 06 Pardubice
e-mail: *libor.koudela@upce.cz*

RNDr. Karel F. Žitný, CSc.
Kamenická 5
170 00 Praha 7

CARPE DIEM – O ŽIVOTĚ A DÍLE RAYMONDA E. A. C. PALEYE (1907–1933)

JAN KOZÁNEK, KAREL F. ŽITNÝ

Raymond Edward Alan Christopher Paley se narodil 7. 1. 1907 v Bournemouthu v Anglii. Studoval v Etonu a na Trinity College v Cambridgi (UK). Tam byli jeho učiteli G. H. Hardy a J. E. Littlewood, který ho inspiroval ke studiu Fourierových řad. V roce 1930 obdržel Smithovu cenu. Získání Rockefellerova stipendia na Massachusetts Institute of Technology (1932–1933) mu umožnilo soustavnější spolupráci s N. Wienerem. Avšak při lyžařském výletu do Kanady (Canadian Rockies) tragicky zahynul ve věku 26 let, dne 7. 4. 1933 v lavině, když lyžoval sám v nadmořské výšce 2926 m v blízkosti Deception Pass, Fossil Mountain (Kanadské Skalnaté hory). Pochován je na hřbitově městečka Banff (Alberta). I za krátkou dobu vědeckého působení se tento mimořádně talentovaný matematik svými pracemi z harmonické analýzy zapsal nesmazatelně do historie matematiky 20. století. Mezi matematiky své generace vynikal dynamickým přístupem k řešení problémů, který sám charakterizoval jako „ragbyovou taktiku" a pozoruhodným technickým nadáním. Ve svém okolí si snadno vytvářel přátelství a měl mimořádnou ochotu k navazování vědeckých spoluprací a věřil, že společně lze vykonat mnohem více, než by byl schopen každý sám; jeho spoluautory se stali J. E. Littlewood, A. Zygmund, N. Wiener a G. Pólya.

G. H. Hardy v "A Mathematician's Apology" – [3] napsal: „ Matematik by nikdy neměl zapomínat na to, že matematika více než kterékoliv umění nebo věda je záležitostí mladých lidí". Svoje tvrzení doložil příklady: „Galois zemřel v jedenadvaceti, Abel ve dvacetisedmi, Ramanujan ve třiatřiceti, Rieman ve čtyřiceti". Lze se jen dohadovat, proč v tomto výčtu chybí Paley. Snad je to tím, že Paley patřil mezi jeho žáky a že, když psal citovanou pasáž, dělilo jej od Paleyova skonu méně než deset roků. Dnes, s odstupem více než sedmdesáti let, lze konstatovat, že Paleyovo, počtem stránek nepříliš rozsáhlé, dílo se stalo stále inspirující součástí moderní harmonické analýzy. V historicky zaměřené přednášce lze pouze ve stručných obrysech naznačit nejelementárnější ideje; zde jenom připomeneme, že Paleyovy–Wienerovy nebo Littlewoodova-Paleyova teorie patří mezi fundamentální poznatky. Littlewoodově-Paleyově teorii byly věnovány samostatné monografie, např. [4], [5], [18] a lze v ní právem spatřovat jeden z významných podnětů, který vedl, mimo jiné, k teorii wavelets. Byli to zejména Littlewood a Zygmund, kteří dlouhodobě rozvíjeli teorie, které iniciovali spolu Paleyem. Rychlost, s níž Paley vytvořil svoje dílo, je obdivuhodná. Jakoby si byl instinktivně vědom obou částí Horatiova ponaučení: „Carpe diem, quam minimum credula postero". (Užij dne, a co nejméně věř budoucnosti.)

Výběr z literatury

[1] N. Wiener: *R. E. A. C. Paley – in memoriam*. Bull. Amer. Math. Soc. 39 (7) (1933), 476.

[2] J. J. O'Connor, E.F. Robertson: *Raymond Paley*. MacTutor History of Mathematics archive, Wikipedia.

[3] G. H. Hardy: *A Mathematician's Apology*. University of Alberta Math. Sc. Soc., 1940.

[4] E. M. Stein: *Topics in Harmonic Analysis Related to the Littlewood-Paley Theory*. Princeton, 1970.

[5] M. Frazier, B. Jawerth, G. L. Weiss: *Littlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces*. American Math. Soc., Providence, 1991.

[6] R. E. A. C. Paley, A. Zygmund: *On some series of functions, (1)*. Proc. Cambr. Phil. Soc. 26(1930), 337–357.

[7] R. E. A. C. Paley, A. Zygmund: *On some series of functions, (2)*. Proc. Cambr. Phil. Soc. 26(1930), 458–474.

[8] R. E. A. C. Paley, A. Zygmund: *On some series of functions, (3)*. Proc. Cambr. Phil. Soc. 28(1932), 190–205.

[9] R. E. A. C. Paley: *Some theorems on orthogonal functions (1)*. Studia Math. 3(1931), 226–238.

[10] J. E. Littlewood, R. E. A. C. Paley: *Theorems on Fourier series and power series*, Part I. J. London Math. Soc. 6(1931), 230–233.

[11] J. E. Littlewood, R. E. A. C. Paley: *Theorems on Fourier series and power series (II)*. Proc. London Math. Soc. 42(1937), 52–89.

[12] J. E. Littlewood, R. E. A. C. Paley: *Theorems on Fourier series and power series (III)*. Proc. London Math. Soc. 43(1937), 105–126.

[13] R. E. A. C. Paley, N. Wiener: *Notes on the theory and application of Fourier transforms, I-II*. Trans. Amer. Math. Soc. 35(1933), 348–355.

[14] R. E. A. C. Paley, N. Wiener: *Notes on the theory and application of Fourier transforms, III-VII*. Trans. Amer. Math. Soc. 35(1933), 761–791.

[15] R. E. A. C. Paley: *On orthogonal matrices*. J. Math. Phys. 12(1933), 311–320.

[16] J. E. Littlewood: *On a theorem of Paley*. J. London Math. Soc. 29(1954), 387–395.

[17] E. M. Stein: *On the functions of Littlewood-Paley, Lusin, and Marcinkiewicz*. Trans. Amer. Math. Soc. 88(1958), 430–466.

[18] R. E. Edwards, G. I. Gaudry, *Littlewood-Paley and multiplier theory*. Springer, Berlin, 1977.

Adresa

Ing. Jan Kozánek, CSc., RNDr. Karel F. Žitný, CSc.,
Ústav termomechaniky AV ČR
Dolejškova 5
182 00 Praha 8
e-mail: *kozanek@it.cas.cz*

Poděkování

Studie byla částečně podporována v rámci řešení projektu č. 101/06/1787 GA ČR.

FINANČNÍ MATEMATIKA NA MĚŠŤANSKÝCH ŠKOLÁCH V MEZIVÁLEČNÉM OBDOBÍ

MARTIN MELCER

1 Vyučování matematice v období 1915 až 1939

1.1 Obecné školy

Obsahem matematiky v 1. až 5. ročníku byla aritmetika přirozených čísel (důraz byl kladen na zběhlost v provádění početních výkonů), řešení slovních úloh a základy geometrie. V 6. až 8. ročníku pokračovala výuka aritmetiky (desetinná čísla, zlomky, procenta, typové slovní úlohy a aplikace v řemeslech a v obchodě) a geometrie (rýsování), algebra se nevyučovala.

1.2 Měšťanské školy

Úkolem učitelů matematiky (museli být aprobováni) bylo vypěstovat u žáků logické a počtářské myšlení. Učitelé vedli žáky k samostatnému, pohotovému a jistému řešení praktických početních úkolů, tj. zaměřovali se jen na poznatky a dovednosti bezprostředně použitelné v každodenním životě a výrobní praxi.

1.3 Střední školy (gymnázia, reálná gymnázia, reálky)

Střední školy byly výběrové a nepovinné, obvykle byly dobře vybavené pomůckami a knihovnami. Požadavky učitelů byly podstatně vyšší než na výše uvedených školách. Základním cílem výuky matematiky bylo osvojit si matematické myšlení. Výklad začínal konkrétními příklady, poznatky se zobecňovaly, obecná tvrzení se dokazovala a uváděly se aplikace – snaha byla budovat ucelené matematické teorie.

2 Počtářovo dílo

V roce 1928 vyšel ve Státním nakladatelství v Praze první díl čtyřdílné učebnice matematiky *Počtářovo dílo* autora Jana Zlámala (nar. 1886), která byla určena pro vyučování počtů na trojtřídních měšťanských školách. Výklad v učebnici byl veden praktickým směrem, neboť přetrvával zájem na dokonalém osvojení počítání zpaměti a kupeckých počtů.

Obsah učebnice:

1. díl: přirozená čísla, míry, váhy, peníze, početní operace, zlomky, procenta, trojčlenka ...

2. díl: poměry, mapy, mocniny, odmocniny, složené zlomky, hospodářské hlavolamy, rodinný rozpočet, kalkulace, úspory, dluhy, chov dobytka, smíšeniny, obchodní počty ...

3. a 4. díl: aritmetika a algebra (mnohočleny, mocniny, rovnice), rodina a domov (rodinné finance), sociální politika (pojišťovnictví), národní hospodář (žně, senoseč), podnikání a úvěr (dluhopisy, spolčování), výměna statků (peníze, valuty), práce a kapitál (úrokový počet), počet z vladařství (účetnictví), základy občanské samosprávy (obecní hospodářství a rozpočet), technika a civilizace (technologie, industrializace).

3 Finanční matematika v Počtářově díle

Finanční matematika je obsažena zejména ve třetím dílu této učebnice, i když žák si některé základní pojmy (např. úrok, úspora, dluh) osvojil již ve druhém dílu.

S problematikou financí se žák podrobněji seznamuje až v kapitolách třetího dílu (zajímavé příklady nalezneme například v kapitolách *Rodina a domov*, *Sociální politika*, *Národní hospodář*).

Klasická finanční matematika je vyložena zejména ve dvou kapitolách nazvaných *Podnikání a úvěr* a *Práce a kapitál*, jejichž cílem bylo naučit budoucí živnostníky poznat a vyhodnotit rizika při práci s financemi.

4 Ukázky úloh

Úloha 1

Obchodník diskontoval 15. května u diskontního družstva při České průmyslové bance v Praze směnku na 2.280 Kč, splatnou 5. června. Kolik za ni dostal při $4^2/_3$% diskontu? ([2], str. 114)

Úloha 2

Rodiče tříletého chlapce chtějí, aby si jako dospělý 33letý občan mohl postavit rodinný domek asi za 74.800 Kč. Kolik musí uložit pro synka do spořitelny, která úrokuje vklady celoročně 4,5%? ([2], str. 144)

Literatura

[1] Šedivý J. a kol.: *Antologie z učebnic matematiky – Období 1860 až 1960*. SPN, Praha, 1988, 320 stran.

[2] Zlámal J.: *Počtářovo dílo III*. Státní nakladatelství, Praha, 1931, 195 stran.

Adresa

Mgr. Martin Melcer
Zdravotní 114
285 04 Uhlířské Janovice
e-mail: *martin.melcer@ujop.cuni.cz*

INTERNETOVÁ PODPORA VÝUKY DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE NA MFF UK

JANA OLEJNÍČKOVÁ

1 Náplň přednášky

Obsahem mé přednášky je stručné představení projektu vznikajícího v rámci grantu FRVŠ, jehož cílem je vytvořit nové pomocné studijní materiály pro výuku deskriptivní geometrie na MFF UK.

2 Představení řešeného projektu

2.1 Cíle projektu

Projekt řeší inovaci studijních předmětů Deskriptivní geometrie Ia, Ib a Deskriptivní geometrie IIa, IIb, které se vyučují na MFF UK v prvních dvou letech studia bakalářského studijního programu Matematika.

V současné době se na MFF učí deskriptivní geometrie pouze pomocí učebnic, které jsou mnohdy starší více než 50 let. Jsou sice většinou kvalitnější a mnohem rozsáhlejší, než novější učebnice, ale často jsou nedostupné.

Vytvářené studijní materiály budou zpřístupněny na internetových stránkách Katedry didaktiky matematiky. Tyto materiály budou prezentovat srozumitelnou a názornou formou vzorové geometrické úlohy a budou důležitým doplňkem látky probírané na přednáškách a cvičeních. Významným aspektem projektu je důraz na rozvoj tvůrčího přístupu studentů k řešení předložených problémů.

2.2 Přínos projektu

Projekt přispěje k výraznému zkvalitnění a doplnění výuky, což umožní studentům hlouběji pochopit problematiku a získat znalosti a dovednosti, které budou moci využít nejen při zkoušce z deskriptivní geometrie. Interaktivní a veřejně přístupná forma presentace projektu na internetové síti povede k podstatnému zlepšení podmínek dostupnosti potřebných informací a informovanosti studentů.

Literatura

[1] Veselý F., Filip J.: *Sbírka úloh z deskriptivní geometrie*. Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952.

[2] http://www.karlin.mff.cuni.cz/~jole/.

Adresa

RNDr. Jana Olejníčková, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *jole@karlin.mff.cuni.cz*

JAN CARAMUEL Z LOBKOVIC

MIROSLAVA OTAVOVÁ

1 Úvod

Jedna z nejsilnějších tendencí baroka hledajícího zvládnutí chaosu ve světě a v lidských záležitostech je touha po řádu. Konec středověku totiž znamenal zpochybnění universality kulturních a společenských institucí, ve vědě pak speciálně krizi přesvědčení o možnosti jednoho všeobecně platného uchopení skutečnosti. Reakcí na tento stav je revize výchozích principů a snaha postavit vědecké zkoumání ve všech oborech na nové neotřesitelné základy, které měly poskytnout formální disciplíny, zvláště logika a matematika. Především pro 17. století je charakteristická sázka na racionalitu a víra v neomezené možnosti lidského rozumu.

V českém prostředí v té době došlo k pozoruhodnému jevu. Mezi lety 1630 a 1680 se zde vytvořilo svérázné filosofické prostředí, které umožnilo zrod originálních myšlenek, značně nezávislých na podnětech přicházejících sem ze západní Evropy. Tato myslitelská vitalita, v našich poměrech spíše ojedinělá, navíc spadá do období (třicetiletá válka a těžká desetiletí poválečná), kdy podmínky pro kulturní snahy nebyly příliš příznivé. Jednou z postav pražského filosofického života byl emauzský opat Jan Caramuel z Lobkovic, všestranná osobnost, jehož dílem výrazně prostupuje zaujetí možnostmi logické analýzy jazyka, které anticipuje snahy logického pozitivismu 19. a 20. století.

2 Caramuel – jeden z posledních evropských polyhistorů

Jan Caramuel se narodil roku 1606 v Madridu, ale jeho rodinná tradice a značná část jeho vrcholné tvůrčí aktivity je svázána s Čechami. Jeho otec Vavřinec Caramuel byl léta matematikem a astronomem na pražském dvoře Rudolfa II., kde se oženil s Janovou matkou, spřízněnou s rodinou Lobkoviců. Malý Jan byl zázračným dítětem, v deseti letech začal studovat na vysoké škole v Alcale, ve dvanácti vydal svou první knihu, ve čtrnácti vstoupil do řádu cisterciáků. Ti ho vyslali ke studiu theologie na universitu do Salamanky. Po skončení studií Caramuel působil na klášterních školách, sledoval vývoj ve všech vědních oborech, byl zasvěceným komentátorem a často originálním způsobem reagoval na aktuální problémy doby.

V roce 1635 přišel Caramuel na tehdy nejvýznamnější evropskou theologickou fakultu v Lovani v Nizozemí, které v té době bylo pod vládou španělské koruny. Zde se stal uznávanou vědeckou osobností. Své okolí fascinoval výjimečným nadáním a především elegantní a výstižnou logickou argumentací, zároveň však působil poněkud exaltovaně. V roce 1641 vyvolala velký rozruch universitní disputace mezi příznivci jansenismu, kteří extrémním způsobem vykládali problém milosti a svobody, a theology jezuitské koleje v Lovani. Situace se nevyvíjela pro jezuity, akcentující význam svobody, příznivě. V kritické chvíli vystoupil Caramuel a hlubokou znalostí problematiky a přesvědčivostí logické argumentace zvrátil výsledek. Téma bylo i politicky choulostivé – šlo o jeden ze sporných bodů katolické a protestantské nauky a Caramuelovo vystoupení ocenil papežský nuncius v Kolíně nad Rýnem Fabio Chigi. Díky jeho přímluvě byl roku 1644 Caramuel jmenován opatem kláštera v porýnském Disibodenbergu. Korespondence s nunciem Caramuela vedla k rozpracování probabilismu, theologické teorie dávající člověku svobodu rozhodovat o morální dovolenosti určitého jednání na základě pravděpodobnosti. Caramuel udržoval písemný styk i s dalšími evropskými mysliteli a politiky, např. Descartesem a Gassendim. Z českých zemí to byli Ignác Bernard Martinic (jemu dedikoval 1643 svůj fyzikální spis o pohybu kyvadel) a Marek Marci z Kronlandu. Po Martinicově intervenci u císaře Ferdinanda III. byl Caramuel roku 1644 povolán do Prahy a ustanoven opatem benediktinského kláštera v Emauzích.

V té době byla ve Vestfálsku vedena mírová jednání. Na katolické straně se profilovaly dva proudy. Umírnění v čele s císařem se snažili uzavřít mír i za cenu značných ústupků protestantům, radikálové vedení zástupcem Svaté stolice Caramuelovým přítelem Chigim bránili uzavření kompromisního míru poukazem na mravní nepřípustnost takového kroku. Na výzvu císařské strany vydal Caramuel theologické pojednání v duchu probabilismu, kde logicky přesvědčivě dokazuje, že uzavřít v říši mír je mravně dovoleno. Spis měl mezi účastníky kongresu velký ohlas a přispěl k tomu, že přes nunciův odpor byl roku 1648 uzavřen pro církev nepříznivý vestfálský mír. V Čechách se ovšem Caramuel po válce setkal s uznáním. Pražský arcibiskup kardinál Harrach ho jmenoval svým generálním vikářem a císař ho designoval jako prvního biskupa zakládané diecéze královéhradecké. Caramuelovo působení bylo velkým obohacením pražské intelektuální obce, vytvořil zde svá zásadní vědecká díla, ale při řízení arcidiecéze nedokázal vhodně užívat své moci a některým jeho odpůrcům vadil jeho španělský původ.

V roce 1655 byl zvolen papežem bývalý Caramuelův přítel Chigi (Alexandr VII.). Kosmopolita Caramuel se na něj obrátil. Papež přes nedobrou zkušenost z roku 1648 si nadále vážil jeho kvalit a rozlišoval politickou neobratnost a výjimečné nadání. Roku 1657 mu udělil malé biskupství v Neapolsku. Posledním místem Caramuelova působení pak bylo Vigevano v severní Itálii, kde byl biskupem od roku 1673 až do své smrti roku 1682. Ani zde, stranou kulturních center, nerezignoval, stále publikoval a udržoval i kontakty se svými přáteli v Čechách.

3 Steganografie a konstrukce universálního jazyka

Ještě za svého pobytu v Lovani vydal roku1635 Caramuel tiskem spis *Steganographiae nec non claviculae Salomonis Germani, Ioannis Trithemii Abbatis Spanheimensis Ordinis S. Benedicti genuina, facilis dilucidatio, declaratio…*. Byl to krok velmi odvážný, protože šlo o komentovanou edici posmrtně (1606) vydaného díla benediktinského opata Jana Trithemia, které se pro podezření z čarodějnictví dostalo roku 1609 na seznam zakázaných knih. Caramuel díky svému matematickému založení bystře rozpoznal, že jde o dílo theologicky nezávadné, které přináší myšlenku šifrovacího klíče. Nejprve s využitím probabilistické metody zdůvodňuje, proč nedbá zákazu církevního magisteria a poté přináší svůj pohled na steganografii (*steganos* – řecky neproniknutelný). Na základě kombinatoriky podává výklad o tvorbě šifrovacích klíčů, upozorňuje na symetrický přístup k problematice, anoigografii (*anoigó* – řecky odhaluji), tj. možnost pomocí matematických metod interpretovat neznámý text, resp. jazyk, jehož šifrovací klíč, resp. slovník není k dispozici. V tomto ohledu některé Caramuelovy myšlenky anticipují metody matematické lingvistiky 20. století, např. programové prostředky strojového překladu. Ve své době spis zrušil tabu a vyšel vstříc aktuálnímu zájmu o praktické aplikace steganografie v diplomacii a vojenství.

Zájem o logickou strukturu jazyka provázel Caramuela po celý život a projevil se i v nejcennějším jeho díle *Theologia rationalis sive in auream angelici doctoris summam meditationes, notae et observationes etc.* vydaném v době jeho pražského pobytu frankfurtským vydavatelem roku 1654. V první části více než pětisetstránkového foliantu, zvané *Grammatica audax* (Odvážná mluvnice), podává Caramuel výklad spekulativní gramatiky. Na rozdíl od steganografie, která pracuje mechanickou cestou kódování, je jejím programem nalezení struktury ideálního jazyka, schopného rozlišit všechny logické nuance a odstranit nejednoznačnosti a konfuse, jimiž jsou poznamenány přirozené hovorové jazyky a které mohou vést k nedorozuměním a chybným úsudkům. (Zajímavý je v tomto směru Caramuelův příspěvek k negování kvantifikovaných formulí.)

Snaha vytvořit universální jazyk byla pro Caramuelovu dobu charakteristická. Mnozí jeho současníci, jmenujme za všechny Komenského a o generaci mladšího Leibnize, si od takového jazyka slibovali nalezení ztracené jednoty lidstva. Očekávali, že automaticky přinese vyřešení palčivých problémů nábožensky a politicky rozdělené Evropy. Analogicky jako lze v matematice na základě znalosti řádu pomocí několika číslic popsat všechna čísla, úkolem nové filosofie je vymezit základní jednoduché ideje a z nich při respektování logických pravidel, případně aplikací matematických metod vybudovat veškeré poznání (srv. Descartesův požadavek *clare et distincte*). Předpoklad platnosti principu kompozicionality pak vládl ve filosofii vědy až do začátku 20. století. Na rozdíl od svých souběžců Caramuel přes silnou tendenci k matematizaci myšlení nepodléhá dobové iluzi a je tak paradoxně daleko blíže dnešnímu pohledu. Jeho umělý jazyk, *dialectus metaphysicus*, nemá ambice být prostředkem obecné komunikace, ale je formálně dokonalým nástrojem. Caramuel v něm precizoval význam slovesa *esse* (latinsky být), u kterého rozlišuje různé mody jako existenci, bezespornost, identitu a zavádí pro ně vhodné symboly. Jazyk nepodsouvá uživateli žádné apriorní metafyzické stanovisko, ale umožňuje přesnou formulaci problémů a přehlednost a kontrolovatelnost jejich řešení.

Literatura

[1] Caramuel z Lobkovic J.: *Steganographiae nec non claviculae Salomonis Germani, Ioannis Trithemii Abbatis Spanheimensis Ordinis S. Benedicti genuina, facilis dilucidatio, declaratio etc*. Coloniae Aggripinae, 1635.

[2] Caramuel z Lobkovic J.: *Theologia rationalis sive in auream angelici doctoris summam meditationes, notae et observationes etc*. Francofurti, 1654.

[3] Dvořák P.: *Jan Caramuel z Lobkovic*. Oikoymenh, Praha, 2006.

[4] Sousedík S.: *Filosofie v českých zemích mezi středověkem a osvícenstvím*. Vyšehrad, Praha, 1997.

[5] Sousedík S.: *Univerzální jazyk v české filosofii 17. století*. Studia Comeniana et historica 20(1990), vol. 40, 42–73.

[6] Sousedík S.: *Jan Caramuel, opat emauzský*. Acta Universitatis Carolinae – Historia Universitatis Carolinae Pragensis 9(1968), 115–138.

[7] Catalano A.: *La Boemia e la Riconquista delle coscienze*. Edizioni di Storia e Letteratura, Roma, 2005.

[8] Eco U.: *Hledání dokonalého jazyka*. NLN, Praha, 2001.

[9] Wittgenstein L.: *Tractatus logico – philosophicus*. Oikoymenh, Praha, 1993.

Adresa

Miroslava Otavová, prom. mat.
Katedra matematiky VŠE
Ekonomická 957
148 00 Praha 4
e-mail: o*tavova@vse.cz*

JOSEPHUS FLAVIUS A JEDEN MATEMATICKÝ PROBLÉM

PAVLA PAVLÍKOVÁ

1 Rozcvička – Hra na kočku a myš

Úvodní motivační úloha: Kočka stojí uprostřed kruhu a kolem ní 12 černých a 1 bílá myš. Kočka se točí ve směru hodinových ručiček a každou třináctou myš sní. Od které myši musí začít počítat, aby bílá myš zůstala poslední živá?

2 Josephus Flavius (37/8 – cca 100 n.l.)

- vlastním jménem Jóséf ben Mattatjáh
- pocházel z Jeruzaléma, narozen ve významné kněžské rodině (matka z rodu Hasmoneovců)
- velmi vážený mladý muž, v roce 64 byl členem poselstva do Říma
- po návratu z Říma během povstání Židů v Galileji jmenován jedním z velitelů
- po porážce se přidal na stranu císaře Vespasiána, jméno Flavius přijal podle dynastie římských císařů Flaviovců (Vespasianus, Titus, Domitianus)
- věnoval se cíli sepsat historii židovského národa
- z díla: *Válka židovská*
  Židovské starožitnosti
  O starobylosti Židů

"Josephus Problem": V roce 67 n.l. byl Josephus spolu se 40 bojovníky v jedné jeskyni obklíčen římskou armádou; rozhodli se vyhnout zajetí tím, že si vezmou život: postavili se do kruhu a každého třetího zabili. Na kterých místech stáli Josephus a jeho přítel, kteří zůstali poslední naživu a nakonec se vzdali Římanům?

3 Variace na dané téma

- *Abraham ibn Ezra* (1092–1167)
- středověká verze: 15 Turků a 15 křesťanů na lodi v bouři, polovina musí přes palubu; řešení při eliminaci každého devátého:
  KKKKTTTTTKKTKKKTKTTKKTTTKTTKKT
  (mnemotechnická pomůcka: *From numbers´aid and art, never will fame depart.*)
  (při eliminaci každého desátého: *Rex paphi cum gente bona dat signa serena.*)
- japonská verze: *Yoshida Shichibei Koyu* (1598–1672)
  dělení majetku mezi 30 dětí ze dvou manželství, eliminace každého desátého

4 Matematická zobecnění

– hledání rekurentních formulí pro J(***n,k***) **…** n lidí stojí v kruhu a my vybíráme každého k-tého tak, aby člověk na místě J(***n,k***) zůstal jako poslední

Příklady: tabulka pro J(***n,2***)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
J(***n,2***)	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3	5	7	9

tabulka pro J(***n,3***)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
J(***n,3***)	1	2	2	1	4	1	4	7	1	4	7	10	13	2	5	8	11	14	17	20

Literatura (výběr)

[1] Halbeisen L., Hungerbühler N.: *The Josephus Problem*. Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 9(1997), 303–318.

[2] Casburn L., Phan T.-L.: *The Orthogonal Josephus Problem* [online]. Dostupné z WWW adresy: http://www.users.muohio.edu/porterbm/sumj/2001/Orthog.pdf .

[3] Schumer P. D.: *Mathematical Journeys*. John Wiley & Sons, Inc., 2004.

[4] Flavius J.: *O starobylosti Židů / Můj život*. Edice *Antická knihovna*, Arista, 2006.

[5] Feuchtwanger L.: *Židovská válka*. 1. díl trilogie *Josephus Flavius*. Nakladatelství Svoboda, 1992.

Adresa

RNDr. Pavla Pavlíková, Ph.D.
Ústav matematiky
VŠCHT Praha
Technická 5
166 28 Praha 6
&
Katedra didaktiky matematiky
MFF UK Praha
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *Pavla.Pavlikova@vscht.cz*

KONSTRUKCE TROJÚHELNÍKŮ ANALYTICKÝMI VÝPOČTY

JIŘÍ PECL

1 Historie analytické geometrie

Apollonios z Pergy je zřejmě první člověk, který při výpočtech geometrického místa bodu využívá pomocných souřadnic. Základy analytické geometrie však nezávisle na sobě vyložili až Pierre de Fermat a René Descartes. Ačkoliv Fermatův spis *Ad locos planos et solidos isagoge*, v němž popisuje principy analytické geometrie, pochází z roku 1636, vydán byl až v roce 1679, 14 let po Fermatově smrti. I to je důvod, proč je za zakladatele analytické geometrie považován právě René Descartes. V díle *Discours de la Méthode*, resp. v jeho třetím dodatku *Géometrie* vysvětluje analytickou metodu. Poprvé spis vyšel (francouzsky) v roce 1637.

O rozvoj analytické geometrie se zasloužilo mnoho matematiků, mezi nimi např. F. de Baune, F. van Schooten, J. de Witt, I. Barrow, I. Newton, G. de Roberval a další.

2 Analytická geometrie na středních školách

2.1 Historie vyučování analytické geometrie na středních školách v Čechách

Po zavedení výuky v češtině na několika gymnáziích v 60. letech 19. století bylo vydáno také několik učebnic analytické geometrie v českém jazyce (V. Jandečka, F. Šanda a další). Po změnách osnov na středních školách na počátku 20. století pověřila *Jednota českých matematiků* J. Vojtěcha sepsáním nových učebnic geometrie pro vyšší gymnázia a reálky. Jeho učebnice se používaly až do poloviny 20. století. Po reformách v roce 1953 se analytická geometrie až do roku 1958 nevyučovala. Až dosud byla na středních školách vyučována analytická geometrie pouze v rovině. Teprve koncem 60. let minulého století se do středoškolské analytické geometrie dostává trojrozměrný prostor.

2.2 Současný stav

V současné době se analytická geometrie na gymnáziích obvykle vyučuje ve 3. ročníku, v případě víceletých gymnázií v septimách. Při dotaci 3 až 4 hodiny týdně je analytická geometrie zpravidla vyučována jedno pololetí a to v rozsahu učebnice autorů M. Kočandrleho a L. Bočka.

2.3 Dotazník

Z dotazníku rozeslaného učitelům matematiky na sto sedmdesáti středních školách (většinou gymnáziích) po celé republice vyplývá, že studentům činí největší potíže kapitoly o kuželosečkách. Na stupnici od jedné (velmi snadná látka) do deseti (velmi náročná látka) hodnotili učitelé celkovou náročnost učiva analytické geometrie pro studenty nejčastěji stupněm 5 resp. 6 (vážený průměr 5,39).

3 Zaměření disertace

Pro větší názornost a lepší pochopení analytické geometrie studentům slouží počítání příkladů s těsnější vazbou na pojmy a poznatky, které si odnášejí z hodin syntetické geometrie např. o trojúhelnících. Bylo by proto přínosné vypracovat kolekci takových úloh, které se v tradičních sbírkách (viz [8] až [13]) téměř nevyskytují.

Chystaná disertace nebude pouhou sbírkou řešených příkladů, ale systematickou prací, která ve vymezené míře úplným způsobem popisuje a řeší úlohy na výpočet souřadnic vrcholů trojúhelníku, jsou-li analyticky zadány některé jeho význačné body, vektory či přímky. Půjde tedy o jistou analogii prací, které systematicky probírají euklidovské konstrukce trojúhelníku ze tří jeho prvků (délek úseček či velikosti úhlů). V současné době mám dokončen úplný rozbor tzv. „tříbodových úloh", v jejichž formulacích jsou vždy zadány obě souřadnice tří z význačných bodů: vrcholů, středů stran, pat výšek, ortocentra, těžiště, středu kružnice opsané. S těmito úlohami, jejich členěním a s řešením některých z nich se blíže seznámíme při přednášce.

Literatura

[1] Bečvář J.: *René Descartes, milovník rozumu*. Prometheus, Praha, 1998.

[2] Bečvář J., Fuchs E (ed.): *Matematika v 16. a 17. století*. Dějiny matematiky, sv. 12., Prometheus, Praha, 1999.

[3] Colerus E.: *Von Pythagoras bis Gilbert*. Český překlad Jan Rey, Družstevní práce, Praha, 1941.

[4] Lávička M.: *Analytická geometrie na českých středních školách po roce 1849*. Pedagogické centrum Plzeň, Plzeň, 1999.

[5] Novák M.: *Historie výuky analytické geometrie na vysokých školách v českých zemích (1848–1960)*. PřF MU, Brno, 2002 (disertační práce).

[6] Šedivý J a kol.: *Světonázorové problémy matematiky II. Kapitoly z historie matematiky a logiky*. SPN, Praha, 1984.

[7] Úlehla J.: *Dějiny matematiky*. Díl II. Praha, 1913.

[8] Bušek I.: *Sbírka úloh pro gymnázia – Analytická geometrie*. Prometheus, Praha, 1996.

[9] Bušek I., Mannová B., Šedivý J., Riečan B.: *Sbírka úloh z matematiky III*. SPN, Praha, 1989.

[10] Janeček F., Charvát J.: *Analytická geometrie pro střední školy: lineární útvary v rovině*. JČMF, Praha, 1995.

[11] Kubát J.: *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Prometheus, Praha, 2004.

[12] Petáková J.: *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Prometheus, Praha, 1998.

[13] Vejsada F., Talafous F.: *Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia*. SPN, Praha, 1969.

Adresa

Mgr. Jiří Pecl
Ústav matematiky a statistiky
PřF MU Brno
Janáčkovo nám. 2a
602 00 Brno
e-mail: *pecl@mail.muni.cz*

POHLKEHO VETA A JEJ VÝZNAM VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

MARTA PÉMOVÁ, ZITA SKLENÁRIKOVÁ

Abstrakt

Predložený článok okrem historických poznámok k dôkazu Pohlkeho základnej vety šikmej axonometrie chce poukázať na tesný súvis tejto zobrazovacej metódy s metódou voľného rovnobežného premietania používaného v školskej praxi vo výučbe stereometrie a na problém úplnosti obrazu geometrického útvaru vzhľadom na riešenie polohových, či metrických úloh.

Kľúčové slová: veta Pohlkeho-Schwarzova, historické poznámky, voľné rovnobežné premietanie, úplnosť obrazu útvaru vzhľadom na riešenie polohových a metrických úloh, vyučovanie matematiky.

Literatura

[1] Dörrie H.: 100 *Great Problems of Elementary Mathematics*. Dover, New York, 1965.

[2] Glazunov E. A., Četveruchin N. F.: *Axonometrija*. Gos. Iz. T.-Teoret. Lit., Moskva, 1953.

[3] Hartshorne R.: *Geometry: Euclid and beyond*. Springer, Berlin, 2000.

[4] Klein F.: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte, Geometrie II*. Berlin, 1925; preklad: Nauka, Moskva, 1987.

[5] Loria G.: *Storia della Gemetria Descrittiva*. Ulrico Hoepli, Milano, 1921.

[6] Pelz K.: *Über einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes von Pohlke*. Stzgsb. Math. Nat., Akad. der W. LXXVI, Wien 1877, 123–138.

[7] Pémová M.: *Kosouhlá axonometria – Pohlkeho veta*. Dipl. p., FMFI UK, Bratislava, 2004.

[8] Perepjolkin D. I.: *Kurs elementarnoj geometrii II*. Gos. Iz. Tech. Teor. Lit., Moskva, 1949.

[9] Piják V. a kol.: *Konštrukčná geometria*. SPN, Bratislava, 1985.

[10] Sklenáriková Z.: *Zobrazovacie metódy II*. Skriptum, UK, Bratislava, 1980.

[11] Sklenáriková Z., Čižmár J.: *Elementárna geometria euklidovskej roviny*. Skriptum, UK, Bratislava, 2002.

Adresa

PaedDr. Marta Pémová
KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava, Slovensko
e-mail: *marta.pemova@gmail.com*

RNDr. Zita Sklenáriková, Ph.D.
KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava, Slovensko
e-mail: *sklenarikova@fmph.uniba.sk*

K HISTORII VĚTY O LOKÁLNÍ EXISTENCI A JEDNOZNAČNOSTI ŘEŠENÍ CAUCHYOVY ÚLOHY

PAVEL PRAŽÁK

1 Problémy s řešením diferenciálních rovnic

Diferenciální rovnice vznikly ve stejné době jako diferenciální počet. Newton se diferenciálními rovnicemi zabýval již ve svém *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* v roce 1671. Později se Leibnizovi a Johannovi a Jacobovi Bernoulliovým podařilo analyticky nalézt řešení některých difereniálních rovnic, nicméně jak rostly zkušenosti, bylo brzy zřejmé, že není snadné pomocí analytických metod stanovit řešení libovolné diferenciální rovnice. Johann Bernoulli napsal v listopadu roku 1694 v Acta Eruditorium, že se zabýval rovnicí

$$y' = x^2 + y^2$$

a že ani po značném úsilí nedokázal nalézt řešení, srv. [5]. Nicméně téhož roku si ve svém *Modus generalis construendi aequationes differentiales primi gradus* také všiml, že pro diferenciální rovnici lze v každém bodě (x, y) určit hodnotu $y'(x)$, kterou lze chápat jako směrnici tečny sestrojenou ke grafu řešení $y(x)$ dané rovnice v bodě (x, y), viz [3]. Takto si lze představit množství malých úseček, pro které dnes používáme pojmy lineární element a směrové pole. Směrové pole pak dává přibližnou představu o tom, jak řešení diferenciální rovnice vypadá.

2 Věta o existenci a jednoznačnosti

2.1 Eulerova metoda

V roce 1768 formuloval Leonhard EULER ve své *Institutionum Calculi Integralis*, Caput VII, srv. [1], PROBLÉM 85: Je-li dána libovolná diferenciální rovnice, je třeba nalézt nejbližší aproximaci jejího integrálu. Ihned za touto úlohou následuje Eulerův popis numerické metody pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Tato metoda stojí v pozadí současných numerických postupů pro řešení dané úlohy.

2.2 Cauchyova úloha

Eulerův postup sice nabídl účinnou metodu pro hledání přibližného řešení diferenciálních rovnic, nicméně v roce 1824 otevřel Augustin-Louis CAUCHY novou a zásadní otázku, která se týkala samotné existence řešení obyčejné diferenciální rovnice, ke kterému by mělo smysl hledat nějakou aproximaci. Bylo také třeba určit, zda řešení existuje jednoznačně, protože jinak by nebylo úplně zřejmé, ke kterému řešení se zkonstruované přibližné řešení blíží. Úlohu nalézt řešení rovnice

$$y' = f(x, y),$$

které vyhovuje počáteční podmínce

$$y(x_0) = y_0$$

tedy právem nazýváme Cauchyovou úlohou.

2.3 Cauchy-Lipschitzova věta

V letech 1824 a 1825 se Cauchy zamýšlel nad podmínkami, kdy Eulerova metoda konverguje ke skutečnému řešení. Zjistil, že je-li funkce $f(x, y)$ spojitě diferecovatelná podle proměnné y na určité množině obsahující bod (x_0, y_0), lze nalézt okolí bodu x_0, na kterém existuje právě jedno řešení počáteční úlohy. Jeho myšlenky v roce 1876 v článku *Sur la possibilité d'intégrer complètement un système donné d'équations differentielles* rozvinul Rudolf LIPSCHITZ, který oslabil podmínku pro existenci jednoznačného řešení – použil podmínku, pomocí které dnes charakterizujeme Lipschitzovsky spojité funkce.

2.4 Peanova věta

Otázkou existence řešení Cauchyovy úlohy se v devadesátých letech 19. století zabývat také Giuseppe PEANO. V roce 1886 a dále v článku *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires* z roku 1890 formuloval své tvrzení, podle kterého pro spojitou omezenou funkci na určité množině, která obsahuje bod (x_0, y_0), existuje řešení Cauchyovy úlohy. Všiml si také, že jeho tvrzení nezaručuje jednoznačnost řešení, což demonstroval na problému

$$y' = 3y^{2/3}, y(0) = 0.$$

Důkaz Peanovy věty byl později, v roce 1918 Perronem a v roce 1921 Hahnem, doplněn pomocí Arzelà-Ascoliho věty.

2.5 Picard-Lindelöfova věta

Doposud zmíněné věty vycházely z aproximace řešení pomocí Eulerovy metody. Poněkud jiný přístup použil Émile PICARD v letech 1890 až 1896, viz [2], a v roce 1894 Ernst LINDELÖF, kteří pomocí jistých stále se zpřesňujících iterací získali jiný důkaz věty o existenci a jednoznačnosti pro Cauchyovu úlohu.

Literatura

[1] Euler L.: *Institutionum calculi integralis volumen primum in quo methodus integrandi a primis principiis usque ad integrationem aequationum differentialium primi gradus pertractatur*. Petropoli impensis academiae imperialis scientiarum 1768. (přístup z internetu: http://www.math.dartmouth.edu/~euler/)

[2] Picard E.: *Traité d'Analyse*. Tome II, Gauthier-Villars, Paris, 1905.

[3] Hairer E., Wanner G.: *Analysis by Its History*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[4] Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G.: *Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[5] Heuser H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1995.

Adresa

RNDr. Pavel Pražák, Ph.D.
Katedra informatiky a kvantitativních metod
Fakulta informatiky a managementu
Univerzita Hradec Králové
Rokitanského 62
500 02 Hradec Králové
e-mail: *pavel.prazak@uhk.cz*

PROJEKTIVNÍ ROVINA NAD OKTÁVAMI

MARIE PROVAZNÍKOVÁ

1 Projektivní prostor a projektivní rovina

Projektivní prostor dimenze n nad polem K obvykle definujeme jako množinu všech jednorozměrných podprostorů (n+1)-rozměrného prostoru nad polem K. Projektivní prostor nad polem K obvykle značíme KP^n.

Projektivní prostor však můžeme chápat i jinak – jako množinu bodů splňující tzv. incidenční axiomy. Tento přístup se neopírá o konstrukci nad vektorovým polem KP^n a je oblíben v oblasti konečných geometrií a v kombinatorice.

Zajímavá je otázka, zda každý projektivní prostor můžeme vyjádřit ve tvaru KP^n pro nějaké pole K. Je známo, že ano, ale pouze pro n>2. U projektivních rovin je situace složitější. Totiž projektivní rovina se dá popsat pomocí vektorového prostoru K^3 pouze tehdy, splňuje-li Desarguesův axiom. Projektivní rovina, která tento axiom splňuje, se nazývá Desarguesovská. Existují však i nedesarguesovské projektivní roviny, jedna z nich je projektivní rovina nad oktávami, značí se obvykle OP^2.

Tuto rovinu objevila roce 1933 německá matematička Ruth Moufang a navázala tak na práci Davida Hilberta v projektivní geometrii.

2 Projektivní rovina nad oktávami

2.1 Projektivní rovina nad tělesem komplexních čísel pomocí projektorů

Prvkem CP^2 je jednorozměrný podprostor L vektorového prostoru C^3. S tímto jednorozměrným podprostorem můžeme svázat projektory P: $C^3 \rightarrow C^3$ takové, že obraz Im P je právě L. Pro každý projektor P platí $P^2=P$. Projektorů s touto vlastností je mnoho, využijeme však hermitovský skalární součin na prostoru C^3. K jednorozměrnému podprostoru L pak vezmeme jeho ortogonální doplněk $L^{\perp}$ a použijeme jediný projektor P, který promítá C^3 na L podél $L^{\perp}$.

Platí, že P je ortogonální projektor právě tehdy, když platí $P^*=P$, kde P^* je příslušný konjugovaný operátor.

Všechny tyto úvahy se dají převést do maticového tvaru. Projektor P pak má maticové vyjádření

$$P=\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

kde x_1, x_2, x_3 jsou komplexní čísla a ξ_1, ξ_2, ξ_3 jsou čísla reálná.

Projektor P pak je ortogonální projektor dimenze 1 právě tehdy, když platí

$$P^*=P,\ \ P^2=P,\ \ \xi_1+\xi_2+\xi_3=1.$$

2.2 Projektivní rovina nad algebrou oktáv

Naprosto stejně lze vytvořit projektivní rovinu nad algebrou oktáv. Rovinu OP^2 tvoří všechny matice tvaru (*), kde x_1, x_2, x_3 jsou oktávy a ξ_1, ξ_2, ξ_3 jsou reálná čísla a takové, že jsou splněny vlastnosti $P^2=P$, $\xi_1+\xi_2+\xi_3=1$. Na množině všech hermitovsky symetrických matic nad O můžeme definovat součin

$$X \circ Y = \tfrac{1}{2}(XY+YX).$$

Pro pevné $X \in OP^2$ je pak přímka v projektivní rovině množina $p=\{Y \in OP^2; X \circ Y = 0\}$.

Literatura

[1] Baez J. C.: *The Octonions*. Bull. of Am. Math. Soc., 2005.

[2] Conway J. H.: *On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic and symmetry*. A. K. Peters, Natick, Massachusetts, (Canada), 2003.

Adresa

Mgr. Marie Provazníková
MZLU Brno
Zemědělská 1
613 00 Brno
e-mail: *provazni@mendelu.cz*

MATEMATIKA NA PŘELOMU XVII. A XVIII. STOLETÍ V KORESPONDENCI JOHANNA BERNOULLI A PIERRA VARIGNONA

IVAN SAXL

1 Rodina Bernoulli[1]

Protestantská rodina Bernoulli (v XV. století Bernouilla) pocházela z Antverp a teprve náboženské pronásledování za vlády španělského Filipa II. ji přinutilo roku 1582 zemi opustit. Nejprve odešli do Frankfurtu nad Mohanem, ale ani tam nebyl navzdory augšpurskému míru klid, a vypuknutí třicetileté války v roce 1618 je přimělo hledat útočiště ve švýcarské Basileji. Jakob Bernoulli (1598–1634) se tam odstěhoval v roce 1622 a sňatkem získal basilejské občanství. Jeho syn Nikolaus (1623–1708) byl již ve městě váženou osobou, členem městské rady a soudu. Měl jedenáct dětí (řada z nich však zemřela v dětském věku), z nichž nejstarší Jakob (1654–1705) a desátý Johann (1662–1748) se věnovali matematice. Prostřední ze synů Nikolaus (1662–1716) byl malířem a teprve nejmladší Hieronymus (1669–1770) převzal rodinný obchod. Bernoulliové totiž byli kupeckou rodinou, věnující se prodeji lékárnických surovin a koření (prodejny lékárnických komponent tak obcházely omezení počtu lékáren basilejskou městskou radou). Jejich rodina měla v dalších stoletích silnou intelektuální větev: Bernoulliové byli profesory na basilejské universitě nepřetržitě až do roku 1863, střídajíce různé obory; od matematiky přes práva, mechaniku, technologii až ke krasořečnictví [2, 3, 4].

1.1 Jakob Bernoulli a Johann Bernoulli

Životní osudy obou bratrů jsou častým námětem prací z historie matematiky (přispěli k nim i August Comte a Ernst Mach). Ve vědeckém přínosu jsou přes těžké vzájemné spory prezentováni jako neoddělitelné části jednoho celku, neodmyslitelného od obecného kontinentálního přijetí leibnizovské formulace infinitesimálního počtu.

Jakob (1654–1705) vystudoval teologii, Johann (1667–1748) medicínu, což odpovídalo rodinné snaze dát svým dětem dobré vzdělání předurčující je k výnosným povoláním, avšak touha po akademické dráze byla u obou silnější. Po dostudování v roce 1676 a letech strávených v Evropě „na zkušenou“ (v Ženevě jako vychovatel slepé šlechtičny Elisabeth von Waldkirch, pak ve Francii, Nizozemí a Anglii) se Jakob v roce 1682 vrací do Basileje s cílem učit matematiku. Tu začal jako samouk studovat již v roce 1677, o čemž svědčí jeho léta psaný deník *Mediationes, annotationes, animadversiones theologicae et philosophicae*. Zpočátku vychází z Descarta a Jeana Presteta (1648–1690), z Arnauldovy (1612–1684) *Logiky* a děl Malebranche (1638–1715). V letech 1684 a 1685 se marně uchází o katedry logiky a rétoriky v Basileji. Katedru matematiky po svém zemřelém předchůdci získá až v roce 1686. Toto místo zastává do smrti v roce 1705.

Johann ukončil základní studium na basilejské universitě v roce 1690, ale již od poloviny osmdesátých let se pod bratrovým vedením začíná učit matematice, kterou si také on vybral jako své životní povolání. Rozhodující okamžik v jejich studiu nastává v roce 1687, kdy se jim dostává do rukou Leibnizova práce *Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus*, *quae nec Fractas nec Irrationales* ... publikovaná v roce

[1] Práce byla vypracována v rámci výzkumných záměrů MSM 0021620839 a AV0Z10190503.

1684 v *Acta Eruditorum* 3, 467–473[2]. Práce je velmi zkratkovitá, obsahuje pouze algoritmy bez odvození a důkazů. Bratři Bernoulliové ji však pochopili a novou metodu začali používat k řešení úloh z mechaniky (pohyby hmotného bodu v poli centrální síly, tvar lodní plachty ve větru aj.). Tím přispěli k rozvinutí metodiky a též objevili řadu dotud neznámých závislostí. Fyzikální interpretace známých i nových křivek je dovedly k sestavení a řešení prvních diferenciálních rovnic i k počátkům variačního počtu. Nejznámější jsou patrně úlohy o brachystochroně (objekt v tíhovém poli po ní projde z bodu A do bodu B v nejkratším čase: křivka je cykloida), isochroně (objekt se mezi body A, B pohybuje konstantní rychlostí) a o řetězovce, a Jakobovy práce o isoperimetrii.

Johann Bernoulli dokončil studia medicíny v roce 1694, ještě předtím však pobýval delší dobu v Ženevě a Paříži; tam se seznámil s markýzem l'Hopitalem a také s Pierrem Varignonem. V roce 1695 získává místo profesora matematiky v Groningen. Po letech plných sporů s částí místní komunity se v době těsně po smrti Jakoba vrací do Basileje a získává místo na universitě. Na něm setrvává až do své smrti v roce 1748. Věnuje se matematice, mechanice i hydrodynamice, v níž jej však výrazně předčí jeho syn Daniel.

Podíl bratrů na rozpracování a popularizaci „Leibnizova počtu“ je značný, možná větší, než jeho tvůrce samotného, který neměl ani rodinu, ani žáky. Bernoulliové s ním písemně spolupracovali od roku 1690 a Johann se stává hlavním representantem tábora Newtonových odpůrců po Leibnizově smrti. Špatný vztah mezi bratry se datuje zhruba od počátku devadesátých let. Johann se chce osamostatnit a Jakob chce zůstat jeho respektovaným učitelem. Oboje se nedaří. Přispívá povahová rozdílnost; výbušný Johann a rozvážný i rezervovaný Jakob. Různý je i jejich přístup k řešení matematických problémů; Jakob se postupně krok za krokem pokouší vypracovat novou a obecně použitelnou metodu a dospívá k obecným závěrům, Johann intuitivně objevuje jednoduchá početní řešení na jedno použití. Z hlediska dějin matematiky s velkou převahou vítězí Jakob, avšak na jiném poli. Jeho dvacet let (podle posledních výzkumů až do smrti) komponovaná a přesto nedokončená kniha *Ars conjectandi* [Umění dohadu] (vydaná posmrtně 1713) se stává stále aktuálním základem teorie pravděpodobnosti.

1.2 Pierre Varignon

Pierre Varignon se narodil v roce 1654 v Caen a patrně tamtéž studoval v jezuitské koleji, kněžské svěcení získal snad v roce 1683 a byla mu svěřena farnost Saint-Quen v Caen. Zřejmě také vystudoval universitu v Caen a začal se zabývat matematikou a mechanikou. Tehdy se spřátelil s Ch.-I. C. de Saint Pierre[3], který mu věnoval (snad doživotně) část své osobní renty (jednu její šestinu, tj. 300 livrů z 1800). To Varignonovi umožnilo opustit jeho farnost a odejít roku 1686 do Paříže; důvodem mohlo být i zhoršení poměrů po roce 1685, kdy byl odvolán nantský edikt z roku 1598, zajišťující ve Francii náboženskou toleranci. Roku 1687 publikoval *Projet d'une nouvelle méchanique* [Návrh nové mechaniky] věnovaný Akademii věd: v následujícím roce byl jmenován jejím členem. Zároveň získal profesorské místo na katedře řecké a latinské filosofie (matematiky podle

[2] Časopis založil v Lipsku v roce 1682 německý filosof Otto Mencke (1644–1707); byl to první vědecký časopis v Německu a oba Bernoulliové v něm publikovali mnoho svých prací i sporů. Za zmínku stojí, že v počátečních 25ti letech bylo jen 7% jeho rozsahu věnováno vědeckým pracím, zatím co posudky knih zabraly 89%. Nejstarším evropským časopisem byl *Journal des Sçavans* založený novinářem Denisem de Sallo v lednu 1655; v květnu téhož roku vycházejí také první *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*.

[3] Charles-Irénée Castel de Saint Pierre (1658–1743), francouzský filosof, zastánce přirozeného náboženství a tolerance. Kombinuje utilitární a filantropické ideje; stát má vybírat tolik daní, kolik je třeba k zajištění bezplatného vzdělání pro muže i ženy. *Projet de paix perpetuelle* [Projekt trvalého míru] (1713) popisuje plán mezinárodního soudního dvora a ligy států. Za propagaci konstituční monarchie s vládou založenou na systému rad a akademii odborníků v *Discours sur la polysynodie* (1718) byl vyloučen z francouzské Akademie.

jiných pramenů) na Collége Mazarin a roku 1704 na Collége Royal. Současníky byl vážen především jako znalec geometrie a statiky, především však ve Francii propagoval a rozvíjel myšlenky infinitesimálního počtu, jemuž francouzští matematici nebyli nakloněni. Intenzívně se věnoval výuce a psaní krátkých příspěvků z různých oborů aplikace matematiky. Šíře jeho zájmů je patrná z témat jeho prací. V letech. 1712 až 1713 to byl odpor těles vzhledem k pohybu, v následujícím dvouletí světlo a barvy, obecné zákony mechaniky (1718 až 1719) následované problematikou meteorů a pohyby živých bytostí (1721 až 1722). V roce 1722 Varignon umírá. Některé jeho práce byly publikovány ještě posmrtně jeho žáky: jsou to především *Eclarcissemens* [Objasnění] z roku 1725 zpracovávající l'Hopitalovy výsledky formou vhodnou pro studenty a dále *Elémens de mathematiques* [Základy matematiky] z roku 1731. V nich se objevuje dosud hojně citované, využívané a zobecňované tvrzení nazvané *Varignonův rovnoběžník*

V průběhu svých pařížských let se Varignon seznámil z řadou předních evropských vědců, jako byli Leibniz, Newton, De Moivre, l'Hopital a Johann Bernoulli. Mezi jeho přátele patřil i sekretář Akademie B. le B. de Fontenelle[4]. Varignon byl rovněž členem Pruské akademie věd (od roku 1713) a britské Royal Society (od roku 1718). Jeho vědecké výsledky nemají mimořádně vysokou úroveň, jeho pedagogická činnost a jeho postavení v evropské vědecké společnosti zmítané prioritními spory je však unikátní.

2 Bernoulliovská edice

Historie vydávání děl rodiny Bernoulli včetně neobyčejně rozsáhlé korespondence Johanna Bernoulli je dosti pohnutá. Bernoulliovský archiv se nějaký čas v rodině dědil, až posléze byl v důsledku rodinné peněžní tísně v roce 1797 z valné části prodán Švédské akademii věd; poté se na čas ztratil, či přesněji byl zatajován. Byl pak objeven až v roce 1877 ve stockholmské observatoři. Celoživotním úsilím basilejského profesora matematiky Otty Spiesse (1878–1966) bylo shromáždění Bernoulliovské korespondence a její uložení v Basileji. Na jeho žádost byl konečně v roce 1935 archiv dán k dispozici bernoulliovským editorům v Basileji a dnes je uložen v tamní universitní knihovně. Poté byla ustavena Bernoulliovská komise, vypracován plán edice archivu a podstatné části vědeckých prací Bernoulliů pod vedením O. Spiesse jako editora.

Originálů dopisů Johanna Bernoulli archiv mnoho neobsahuje (Varignonova písemná pozůstalost se po jeho smrti ztratila), je tam však velký počet jejich autorských opisů a dále opisů pořízených Johannovými syny. Varignonovy dopisy jsou v archivu vesměs dochovány; celá korespondence je vedena ve francouzštině. Její vydávání svěřil O. Spiess v roce 1938 mladému Francouzi Pierre Costabelovi (1912–1989). Válka ovšem plány na dlouhá léta odsunula. P. Costabel hned na jejím začátku upadl do zajetí, celou válku strávil ve vězení a bezprostředně po jejím konci se k vydávání bernoulliovského archivu nevrátil. Práci na něm se ještě ve válce i po ní věnoval J. O. Fleckenstein (1914–1980). První svazek Johannovy korespondence vychází až v roce 1955[5] pod redakcí O. Spiesse a jeho obsahem jsou jednak nepočetné dopisy vyměněné mezi bratry a prezentující jejich spory, a dále korespondence Johanna s markýzem l'Hopitalem. Ta potvrdila, že první učebnice infinitesimálního počtu, roku 1696 vydaná l'Hopitalova *Analyse des infiniment petits, pour intelligence des lignes courbes* [Analýza nekonečně malých veličin, pro porozumění křivkám], je především prací Johannovou a objasňuje, jak k tomu došlo.

J. O. Fleckenstein se po smrti O. Spiesse stává hlavním editorem a vydává 1. svazek vědeckého díla Jakoba Bernoulli *Astronomie, Philosophia naturalis* (1969). Po

[4] Bernard le Buyer de Fontenelle (1657–1757): Eloge proslovená u příležitosti Varignonovy smrti a poté publikovaná je hlavním zdrojem dat.

[5] O něm a o celé edici referuje C. Truesdell: *The New Bernoulli Edition*. ISIS 49(1958), 54–62.

Fleckensteinově smrti se do práce opět zapojuje P. Costabel a získává jako další spolupracovnici mladou Jeanne Peifferovou (*1946). V roce 1982 se edice přejmenovává na *Die gesammelte Werke der Mathematiker und Physiker der Familie Bernoulli.* Podle posledních plánů má edice mít 39 svazků a měla by vedle vybrané korespondence obsahovat kompletní dílo Jakoba (dnes je již vydáno téměř celé), Johanna a jeho syna Daniela a výběry z děl ostatních Bernoulliů.

3 Korespondence Johanna Bernoulli a Pierra Varignona

První díl korespondence mezi Johannem Bernoulli a P. Varignonem vychází v roce 1988. Vedle dopisů z let 1692 až 1702 obsahuje několik úvodních statí a dodatky s chronologickým přehledem všech vzájemných dopisů z let 1692 až 1722, seznamy publikací obou vědců a zvláštní dodatek s nikdy nepublikovanou prací l'Hopitalovou o brachystochroně objevenou J. Peifferovou (opět se bezpochyby jedná o Johannovo dílo). Další dodatek je rozsáhlou zprávou o sporu P. Varignona s Michellem Rollem (1652–1719), který ve svých vystoupeních v Akademii věd popíral správnost infinitesimálního počtu při výpočtu limity typu 0/0. Obsahem jsou aplikace infinitesimálního počtu v geometrii a mechanice (1692 až 1696), úloha o brachystochroně, spor obou bratrů a již zmíněný spor s M. Rollem (1696 až 1702).

O čtyři roky později, roku 1992, se objevil druhý svazek dopisů zahrnující léta 1702 až 1714. Je dílem Pierra Costabela a Jeanne Peifferové. Uvádí jej rozsáhlá Costabelova stať věnovaná zejména pokračování sporu Varignona s Michellem Rollem, do nějž se posléze zapojil i Johann Bernoulli. Dále jsou komentovány otázky použití infinitesimálního počtu v mechanice, kde Varignon má nad Johannem jistou převahu a často jej upozorňuje na nedostatky jeho přístupu. Úvodní partie obsahuje také podrobnou synopsi celého dílu od J. Peifferové (otázky luminiscence rtuti, aplikace infinitesimálního počtu v mechanice, centrální síly a princip virtuálních rychlostí). Costabel se však vydání druhého dílu korespondence nedožil (umírá roku 1989)[6], dokončila jej J. Peifferová s pomocí editora obou dílů Davida Speisera a dalších spolupracovníků. Posledních 15 let pracuje na posledním třetím díle Johannovy korespondence s P. Varignonem. Lze očekávat, že prioritní spor mezi Newtonem a Leibnizem, jehož předním exponentem se na Leibnizově straně po jeho smrti stal právě Johann Bernoulli, je jeho hlavním tématem.

Literatura

[1] Der Briefwechsel von Johann Bernoulli. *Der Briefwechsel mit Pierre Varignon*, Teil I: 1692–1702, Teil II: 1703–1714. Birkhaüser Verlag, Basel, 1988, 1992.

[2] Никифоровский В. А.: *Великие математики Бернулли*. Изд. Наука, Москва, 1981.

[3] Sylla E. D.: *Preface* and *Introduction* to the English translation: Jacob Bernoulli: The Art of Conjencturing. Baltimore, 2006.

[4] Peiffer J.: *Jacob Bernoulli, teacher and rival of his brother Johann*. The Electronic Journal for History of Probability and Statistics 2(2006), No.1b. http://www.jehps.net/

Adresa

RNDr. Ivan Saxl, Dr.Sc.
Matematický ústav AV ČR & MFF UK
Žitná 25, 115 67, Praha 1, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: *saxl@math.cas.cz*

[6] Přehled jeho životních osudů a díla viz W. S. Shea: *Eloge*. ISIS 81(1990), 708–709.

VĚTA O IMPLICITNÍ FUNKCI
(HISTORIE A SOUVISLOSTI)

ANTONÍN SLAVÍK

1 Úvod

S implicitně zadanými funkcemi pracují matematikové přibližně od poloviny 17. století, kdy došlo k objevu analytické geometrie. I dnešní studenti středních škol se seznamují s tím, že některé rovinné křivky (např. kuželosečky) lze popsat jako množinu všech bodů, jejichž souřadnice vyhovují jisté rovnici tvaru $F(x,y)=0$. Ze zkušenosti víme, že pro dané x lze z této rovnice (alespoň teoreticky) dopočítat hodnotu y. Toto pozorování je obsahem nejjednodušší verze věty o implicitní funkci, která zaručuje, že při splnění jistých podmínek lze řešení rovnice $F(x,y)=0$ lokálně vyjádřit jako graf funkce $y=f(x)$, tj. platí $F(x,f(x))=0$. Derivováním této rovnice dostaneme

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}f'=0 \quad \text{a po úpravě} \quad f'=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Tento vzorec lze použít např. k určení tečny k implicitně zadané křivce (oblíbená úloha v základním kurzu matematické analýzy). Věta o implicitní funkci v této situaci navíc zaručuje, že f je diferencovatelná funkce, tj. výše uvedený výpočet je korektní.

2 Prehistorie

Výpočty podobného typu (tj. derivace implicitní funkce) se objevují již u Leibnize. Trochu jinak postupoval Newton, který studoval především algebraické křivky, tj. rovnice tvaru $F(x,y)=0$, kde F je polynom ve dvou proměnných. Předpokládal, že funkci $y=f(x)$ lze vyjádřit jako součet Taylorovy řady, a našel postup pro výpočet jejích koeficientů (objevuje se zde pojem tzv. Newtonova polygonu) .

3 První důkazy věty

Až do 19. století nebyla věta o implicitní funkci explicitně zformulována ani dokázána. Podařilo se to až Cauchymu, který však pracoval v komplexním oboru. Ukázal, že je-li F holomorfní funkce dvou komplexních proměnných x,y a jsou-li splněny podmínky $F(x^0,y^0)=0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(x^0,y^0)\neq 0$, pak ke každému x z jistého okolí x^0 existuje právě jedno y z jistého okolí y^0 tak, že platí $F(x,y)=0$. Definujeme-li $f(x)=y$, je tato funkce holomorfní. Cauchy znal dva důkazy tohoto tvrzení - první je založen na použití Rouchého věty o počtu kořenů, druhý na práci s mocninnými řadami a metodě majorant.

Důkaz reálné verze věty o implicitní funkci podal Ulisse Dini kolem roku 1870. Nejprve dokázal následující tvrzení: Nechť F je spojitě diferencovatelná funkce $n+1$

proměnných $x_1,\dots,x_n,y$ a platí $F(x_1^0,\dots,x_n^0,y^0)=0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_1^0,\dots,x_n^0,y^0)\neq 0$. Pak ke každému $(x_1,\dots,x_n)$ z jistého okolí $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ existuje právě jedno y z jistého okolí y^0 takové, že $F(x_1,\dots,x_n,y)=0$. Definujeme-li $f(x_1,\dots,x_n)=y$, je tato funkce spojitě diferencovatelná. Dini si dále uvědomil, že tvrzení lze zobecnit také pro více rovnic

$$F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0,\ \dots,\ F_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0. \qquad (1)$$

Výše uvedený předpoklad $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_1^0,\dots,x_n^0,y^0)\neq 0$ je potřeba nahradit podmínkou nenulovosti determinantu matice

$$\left\{\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x_1^0,\dots,x_n^0,y_1^0,\dots,y_m^0)\right\}_{i,j=1}^{m}.$$

Potom lze řešení soustavy rovnic (1) v okolí bodu $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ popsat jako graf funkce $(y_1,\dots,y_m)=f(x_1,\dots,x_n)$, která je navíc spojitě diferencovatelná. Důkaz této obecné verze věty o implicitní funkci provedl Dini indukcí vzhledem k počtu rovnic m.

4 Jiné metody důkazu

Dnes jsou známy mnohé další metody důkazu věty o implicitní funkci; poměrně elegantní důkaz využívá Banachovy věty o pevném bodě. Jinou možnost představuje použití věty o inverzní funkci (je známa také pod názvem věta o lokálním difeomorfismu), která je s větou o implicitní funkci v jistém smyslu ekvivalentní (jedno tvrzení lze dokázat pomocí druhého). Tyto věty hrají důležitou roli např. v diferenciální geometrii, v numerické matematice a v teorii diferenciálních rovnic.

V moderní matematice existuje mnoho variant a zobecnění věty o implicitní (resp. inverzní) funkci, např. formulace pro analytické funkce, pro funkce v Banachových prostorech apod.

Literatura

[1] Krantz S. G., Parks H. R.: *The implicit function theorem. History, theory, and applications*. Birkhäuser, Boston, 2002.

Adresa

RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: *slavik@karlin.mff.cuni.cz*

EULEROVY ZÁSLUHY O REFORMU GONIOMETRIE

RADKA SMÝKALOVÁ

1 Úvod

Píše se rok 2007. Před třemi sty léty se v Basileji narodil Leonhard Euler. Člověk, který rozšířil a doplnil všechny oblasti matematického myšlení, mnohé tak dobře, jako by byly nově vytvořeny.

My se v následujícím budeme zabývat pouze jednou vědeckou disciplínou. Tou disciplínou je *goniometrie*, oblast matematiky, která se zabývá goniometrickými funkcemi. Její součástí je také *trigonometrie*, která se věnuje praktickému užití těchto funkcí při řešení různých úloh o trojúhelnících.

2 Leonhard Euler

Leonhard Euler se narodil 15. dubna roku 1707 v Basileji (Švýcarsko). Brzy se odebral na univerzitu v Basileji, kde již v 16 letech nabyl hodnosti magistra. Jeho učitelem matematiky byl Johann Bernoulli, jeho spolužáci Bernoulliho synové – Mikuláš II a Daniel. Když Kateřina I. roku 1724 založila akademii v Petrohradu podle návrhu Petra Velikého, Mikuláš a Daniel tam byli povoláni. A když první brzy zemřel, odcestoval do Petrohradu také Euler ve svých 20 letech původně na místo učitele fyziologie. Avšak když již roku 1730 Švýcar Jakub Herman, potom Bilfinger a Daniel jeden po druhém opustili Petrohrad, stal se Euler profesorem fyziky (později i matematiky) a členem akademie. Vzhledem k neustálé palácové revoluci a výměně trůnu a také pro neradostné vztahy v akademii se mu jeho pobyt tak zprotivil, že byl roku 1741 Bedřichem Velikým povolán do Berlína, kde se stal roku 1744 ředitelem v nově vytvořené matematické třídě akademie Berlíňanů. Když však za vlády Kateřiny II. začala nová doba rozkvětu vědy v Petrohradu, vrátil se roku 1766 zase zpět.

3 Hlavní rysy Eulerovy reformy

V dnešní době je pojem funkce v matematice název pro *zobrazení* z nějaké množiny M do množiny čísel nebo do množiny vektorů. Je to tedy jakýkoliv předpis, který každému prvku z M jednoznačně přiřazuje nějaké číslo nebo vektor (hodnotu funkce).

Pro Eulera, od něhož pochází označení $y = f(x)$ z roku 1748, však pojetí funkce znamenalo existenci analytického výrazu obsahujícího x, podle kterého se dá y vypočítat. Na funkci tedy musela být dána určitá formule, do které mohlo být za proměnnou x dosazeno jakékoliv číslo – reálné či komplexní. Euler pak rozděloval funkce na dvě skupiny, a to na funkce algebraické a transcendentní.

Do doby Eulerovy bylo v trigonometrii mnoho nedořešených problémů. Například nebyla ještě vyjasněna otázka znamének goniometrických funkcí úhlů v různých kvadrantech. Neexistovala jednotná symbolika, každý vzorec se odvozoval geometricky pomocí zvláštního náčrtku atd.

Hodnoty goniometrických funkcí Euler důsledně spojoval s pravoúhlým trojúhelníkem o jednotkové přeponě. Právě Eulerovou zásluhou je myšlenka považovat goniometrické hodnoty za čísla. Euler tedy chápal hodnoty sinu a kosinu jako čísla, nikoli jako délky úseček, jak tomu bylo ve starověku a ve středověku. Tato čísla vyjadřovala poměr příslušných goniometrických délek k poloměru kružnice. Přitom poloměr kružnice jakožto *plný sinus* kladl Euler rovný číslu 1.

Euler nemá ani v díle *Introductio*, ani nikde jinde definované trigonometrické funkce explicitně jako podíly délek stran pravoúhlého trojúhelníka, to znamená jako čísla. Avšak podle autora [1] pro ty, kteří jeho spisy přesně znají, neexistuje žádná pochybnost, že Euler goniometrické funkce jako takové chápal, neboť na různých místech jeho prací se vyskytují přímo napsané poměry. Je důležité ještě jednou poukázat na fakt, že pro Eulera to nebyly pouhé podíly délek stran v trojúhelníku, ale byly to skutečné (analytické) funkce úhlů.

Euler se díval na hodnoty goniometrických funkcí jako na čísla bez geometrického rozměru. To mu umožnilo je začít používat ve vzorcích, aniž by narušil jejich homogenitu.

Označování stran trojúhelníka malými písmeny latinské abecedy a, b, c, protějších úhlů pak velkými písmeny téže abecedy A, B, C umožnilo Eulerovi značně zjednodušit trigonometrické vzorce, které tak nabyly známé symetrie. Témuž účelu sloužilo Eulerem zavedené zkrácené označení goniometrických funkcí úhlu z znaky $\sin.z, \cos.z, \mathrm{tang}.z, \cot.z, \sec.z, \mathrm{cosec}.z$ nebo $\sin.A.z, \cos.A.z$ atd. Písmeno A u posledních zápisů je počátečním písmenem latinského slova „arcus“ – oblouk. Tu a tam se také v jeho spisech vyskytuje $\sin.v.z$ namísto sinvers.

Euler stanovil neobyčejně jednoduchý a nečekaný vztah mezi goniometrickými a exponenciálními funkcemi (v komplexní rovině), který lze vyjádřit vzorcem $\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x$.

4 Introductio in Analysin infinitorum (1748)

Ve svém díle Úvod do analýzy z roku 1748 Euler vytvořil z trigonometrie vědu o goniometrických funkcích, podal její analytický výklad a odvodil řadu goniometrických vztahů z několika základních vzorců. Tato kniha byla psána poprvé novým způsobem zápisu, který zcela odpovídá tomu našemu dnešnímu.

5 Eulerův přínos pro výpočet čísla π

Literatura

[1] A. von Braunmühl: *Geschichte der Trigonometrie*. 1900.

[2] J. Veselý: *Matematická analýza pro učitele*. 1997.

[3] P. J. Kožeurov: *Trigonometrie*. 1955.

[4] I. Grattan-Guinness: *The rainbow of mathematics*. 1997.

[5] V. J. Katz.: *A history of mathematics*. 1998.

[6] J. Veselý: *články z časopisu Učitel matematiky*. 1995.

[7] http://wikipedia.org/

Adresa

Mgr. Radka Smýkalová
Wolkerova 10
787 01Šumperk
e-mail: *smyky@seznam.cz*

METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

HANA STŘÍTESKÁ

1 Podstata metody nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců je jednou ze základních statistických technik, které se využívají i v současnosti. Můžeme si ji představit na příkladu závislosti dvou reálných veličin x a $y = f(x)$. Budeme mít k dispozici soubor naměřených dat ve tvaru dvojic (x_i, y_i). Analytické vyjádření funkce f však neznáme, popř. známe typ závislosti (lineární, kvadratická, exponenciální apod.). Naším úkolem je určit neznámé koeficienty funkce f. Metoda nejmenších čtverců je aproximační metoda, která spočívá v nalezení takových parametrů funkce f, pro které je součet kvadratických odchylek vypočtených hodnot od těch naměřených minimální.

2 Předchůdci metody nejmenších čtverců

2.1 Vědecké problémy osmnáctého století

Jedním z hlavních vědeckých problémů osmnáctého století byl problém modelu Země. První narážka na to, že Země není perfektní koule se objevuje již v roce 1672 u Jeana Richera. Zjistil, že kyvadlo blízko rovníku je méně ovlivněno gravitační přitažlivostí jak stejné kyvadlo v Paříži. Newton v Principech (1678) ukázal, jak rotace Země může způsobovat zplošťování Země na pólech. Newton navíc odhadl zploštění a eliptičnost, tj. podíl, kterým poloměr na rovníku překračuje poloměr na pólu, jako 1/230.

Oproti Newtonovu závěru se postavil ředitel Royal Observatory v Paříži Domenico Cassini. Cassini si myslel, že Země je zploštělá na rovníku, ne na pólech a má tak tvar protáhlého sféroidu. Vyvrátit Cassiniho hypotézu se podařilo vědcům francouzské akademie. Ti určovali tvar Země pomocí měření délky oblouku stejného úhlu na témže poledníku na různých vzdálených místech. Pokud by délka stupně blízkého rovníku byla kratší než délka stupně u pólu, tvar Země by byl zploštělý. Zbývalo tedy určit eliptičnost nebo velikost zploštění z rozdílu mezi těmito dvěma měřeními.

2.2 Kombinování nekonzistentních rovnic

Určit eliptičnost ovšem nebylo tak jednoduché. Vědci zde naráželi na problém, že různé dvojice oblouků dávaly rozdílné hodnoty eliptičnosti. Vědci tak dostávají systém nekonzistentních rovnic, kdy mají k dispozice více rovnic jak neznámých. Nejúspěšnější z raných metod kombinování nekonzistentních rovnic byla metoda nejmenších čtverců. Nicméně ještě před touto metodou se objevují jiné techniky, jak se s problémem vypořádat. Asi nejznámějším předchůdcem metody nejmenších čtverců byla tzv. „Boscovichova metoda“. Po uvedení metody nejmenších čtverců však upadla v zapomnění.

V roce 1755 Roger Joseph Boscovich spolu s Christopherem Mairem publikoval výsledky měření poledníkového úhlu pod názvem názvem *De Litteraria Expeditione per Pontificiam ditionem ad dimetiendas duas Meridiani gradus*. V následných Boscovichových analýzách těchto dat nacházíme první úspěšné řešení nekonzistence různých obloukových měření. Jeho metoda byla založena na minimalizování váženého součtu absolutních hodnot odchylek měření od hledané hodnoty. Vážení používá kvůli tomu, že jednotlivá měření se lišila svou přesností.

Vůbec první, kdo kombinoval nekonzistentní rovnice, byl Thobias Mayer. Mayer pracoval jako kartograf v Norimberku. V letech 1748–1749 provedl mnoho pozorování Měsíce a popsal jeho pohyby 27 nekonzistentními rovnicemi, které měly pouze tři neznámé. Rozhodl se přesnost výsledku zvýšit vhodnou kombinací jednotlivých pozorování a navrhl tak statistické řešení problému, jak rovnice (pozorování) kombinovat. Nakonec se mu povedlo celý systém reprezentovat třemi rovnicemi o třech neznámých.

3 Spor o prvenství objevu

V otázce objevu metody nejmenších čtverců existují jisté spory. V roce 1805 Adrien Marie Legendre publikoval metodu nejmenších čtverců ve své práci *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des cométes*. O čtyři roky později publikuje stejnou metodu Carl Friedrich Gauss. Ovšem Gauss se hlásí k prvenství objevu s tím, že tuto metodu již znal a používal od roku 1795. Na obhajobu svého tvrzení uvádí několik nepřímých důkazů. Mj. i to, že o své metodě řekl jiným astronomům.

Zůstává otázkou, proč Gauss svoji metodu nepublikoval a jakou důležitost objevené metodě přikládal. Je sice možné, že Gauss se o svojí metodě zmínil astronomům před rokem 1805, ale nejasný Gaussův výklad nebo nedostatek možností aplikace této metody, mohly být příčinou nepochopení nejmenších čtverců. O to větší obdiv si tak zaslouží Legendre, který uveřejněním metody nejmenších čtverců dosáhl okamžitého a všeobecného úspěchu. Gauss byl tak zřejmě tím, kdo metodu objevil, nicméně Legendre byl první, kdo metodu uveřejnil a zpřístupnil ji široké veřejnosti.

Literatura

[1] Finkel B. F.: *Biography: Karl Frederich Gauss*. The American Mathematical Monthly 8(1901), No.2, 25–31.

[2] Hald A.: *A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.

[3] Koenker R., Bassett G.: *On Boscovich's Estimator*. The Annals of Statistics 14(1985), 1625–1628.

[4] Merriman M.: *On the History of the Method of Lest Squares*. The Analyst 4(1877), No. 2, 33–36.

[5] Plackett R. T.: *Studies in the History of Probability and Statistics. XXIX: The Discovery of the Metod of Lest Squares*. Biometrika 59(1972), 239–251.

[6] Stigler S.: *Statistics on the Table: The History of Statistical Concepts and Methods*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1999.

[7] Stigler S.: *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900*. The Belknap Press of the Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1986.

Adresa

RNDr. Ing. Hana Stříteská
Oddělení aplikované matematiky
Ústav matematiky a statistiky
PřF MU
Janáčkovo náměstí 2a
602 00 Brno
e-mail: *hana.striteska@centrum.cz*

ČÍSLA VE STARÉ INDII

IRENA SÝKOROVÁ

1 Stručná historie

První náznaky desítkového základu číselné soustavy můžeme nalézt už v harappské kultuře (2500 až 1500 př.n.l.). Archeologické výzkumy odhalily, že v celé oblasti existoval jednotný systém měr a vah. Nalezená závaží měla podobný tvar; označíme-li jako jednotku závaží o hmotnosti 27,584 gramů, existovaly ještě tyto násobky: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2; 5; 10; 20; 50; 100; 200; 500.

Už v nejstarších védských sbírkách (1500 až 500 př.n.l.) je možné objevit zajímavé informace o číslech. V džinistických a buddhistických dílech (500 až 100 př.n.l.) jsou názvy velkých čísel a poprvé se vyskytuje nula. Ašókovy kamenné nápisy (3. stol. př.n.l.) obsahují staré číselné symboly. Osobitá matematická práce, rukopis Bakšálí (asi 2. stol. n.l.), užívá jako symbol pro nulu tečku nebo malý kroužek. Jedná se o nejstarší matematické dílo, které obsahuje čísla vyjádřená v desítkové poziční soustavě. Indický učenec Árjabhata I. (476–550) zavedl značení čísel pomocí písmen a slabik abecedy. Podobný způsob později používal Bháskara I. (asi 600–680), malou modifikaci popsal i Árjabhata II. (asi 920–1000).

2 Jazyk a písmo

Vývojovým pokračovatelem védského jazyka byl sanskrt. Gramatická pravidla sanskrtu kodifikoval v 5. stol. př.n.l. Panini. Sanskrt byl považován za jazyk posvátný, byl jazykem duchovní literatury, jazykem vyšších společenských vrstev. V běžném životě se ale používaly hovorové jazyky různých oblastí Indie, které se nazývají prákrty.

Některé nápisy na severozápadě Indie byly napsány písmem kharóšthí, většina je v písmu bráhmí. Písmo bráhmí se četlo zleva doprava a je základem písma dévanágarí, které dodnes používá sanskrt. Původ písma bráhmí je neznámý, písmo kharóšthí bylo do Indie přineseno ze západu.

3 Čísla

3.1 Terminologie

Od dávných dob Indové používali velká čísla. Už védská sbírka Jadžurvéda obsahuje názvy čísel až do *parárdha* (10^{12}). V buddhistické práci Lalitavistara (1. stol. př.n.l.) jsou popsána čísla do *tallakšana* (10^{53}). Gramatika Pali vyjadřuje násobky deseti postupně až do *asankhjeja* (10^{140}). Džinistická práce Anujogadvara Sútra (asi 100 př.n.l.) udává celkový počet lidských bytostí na světě jako číslo, které má 29 míst.

Později, když už byla rozvinuta myšlenka pozičního zápisu čísel, se hodnota čísla užívala pro označení pozice, na které stála jednička v desítkovém zápisu čísla. Árjabhata popisuje pozice takto: *eka* (1), *daša* (10), *sata* (100), *sahasra* (1000), *ajuta* (10^4), *nijuta* (10^5), *prajuta* (10^6), *koti* (10^7), *arbuda* (10^8), *vrnda* (10^9). Podobné seznamy se objevují i u dalších autorů.

Indové měli název pro každé číslo od 1 do 9, např. *eka* (1), *dvi* (2), *tri* (3), *čatur* (4), *panča* (5), i pro větší čísla, např. *vimšat* (20), *trimšat* (30), *dvišata* (200), *trišata* (300), atd.

Jestliže číslo obsahovalo pouze jednotky a desítky, uváděl se nejprve nižší řád, tj. jednotky. Pokud bylo číslo větší, další řády už následovaly od nejvyššího sestupně (např. tisíce, stovky, jednotky, desítky).

Někdy se čísla končící devítkou 19, 29, 39, atd. vyjadřovala podle odčítacího principu, např. 29 bylo vyjádřeno jako *ekana-trimšat* (o jednu méně než třicet).

Protože sanskrtská literatura je psaná ve verších, bylo mnohdy třeba čísla vyjádřit tak, aby vyhovovala metrice verše. Z toho důvodu se hledaly různé způsoby, jak zapsat dané číslo. Často se používala aditivní metoda, někdy i multiplikativní.

3.2 Symbolika

Zpočátku se čísla popisovala slovně. Samostatné symboly pro čísla se prokazatelně objevují v Ašókových nápisech, i když pravděpodobně existovaly i dříve. Většina Ašókových nápisů je zapsaná písmem bráhmí, některé písmem kharóští.

Čísla kharóští se zapisovala zprava doleva, samostatné symboly existovaly pro 1, 4, 10, 20, 100. Pro ostatní čísla do sta se užíval aditivní způsob zápisu, pro stovky multiplikativní.

Čísla bráhmí se zapisovala zleva doprava a pravděpodobně byla indického původu. V systému bráhmí se vyskytovaly samostatné znaky pro každé číslo 1, 4 až 9 a 10, 20, 30, …, 100, 200, ... , 1000, 2000, atd. Je možné, že tvary některých čísel byly odvozené od znaků abecedy.

3.3 Nula a desítková poziční soustava

Nejstarší dílo, ve kterém se objevuje nula, je Čanda sútra (asi 200 př.n.l.). Popisuje řešení úlohy, jak nalézt celkový počet možností pro umístění dlouhých a krátkých slabik v n slabičném verši.

Není jasné, jaká byla přesná podoba nuly. V bakšálském rukopise se zavádí pro nulu tečka •, někdy se užíval i malý kroužek ○. Stejný symbol také mohl představovat neznámou (nepřítomné množství), nula nad číslem znamenala záporné číslo (nepřítomnost znaménka plus).

Dobrým předpokladem pro vznik desítkového pozičního zápisu čísel byla existence samostatných symbolů pro číslice 1 až 9 nazývaných *anka* (značka) a znak pro nulu – *šunja* (prázdný). Desítková poziční soustava vznikla přibližně ve 3. stol.n.l., běžně se v Indii používala v 8. stol.n.l.

3.4 Čísla vyjádřená pomocí speciálních slov

Indové používali i další způsoby vyjádření čísel, které byly lépe použitelné ve verších. Každému číslu přiřadili několik slov, která svým významem dané číslo připomínala. Do veršů pak místo čísla, resp. číslice, zařadili vhodná slova. Pořadí slov bylo ale opačné než pořadí číslic:

1 230 – *kha* (0), *guna* (3), *kara* (2), *ádi* (1),
1 230 – *kha* (0), *loka* (3), *karna* (2), *čandra* (1),
1 230 – *akáša* (0), *kála* (3), *netra* (2), *dhará* (1).

Výhodou tohoto způsobu byla pestrost, nevýhodou délka. Mnohdy celý verš musel být věnován vyjádření číselného údaje.

3.5 Čísla vyjádřená pomocí písmen

Indičtí astronomové považovali za hlavní stručnost a výstižnost. Proto místo celých slov používali k vyjádření čísel písmena nebo slabiky abecedy.

Árjabhata I. zavedl abecední systém k popsání numerických hodnot v deskriptivní astronomii. Každá samohláska určovala dva řády (např. *a* – jednotky a desítky, *i* – stovky a tisíce, atd.). Souhlásky byly rozdělené na "sudé" a "liché", každé bylo přiřazené určité číslo. Liché souhlásky mohly být použité jen pro liché řády (jednotky, stovky, atd.), sudé souhlásky pro sudé řády (desítky, tisíce, atd.). Názvy takto zapsaných čísel se ale někdy velmi obtížně vyslovovaly.

Podobný způsob se vyskytuje v díle Bháskary I. Číslicím 0 až 9 jsou přiřazena písmena (každé číslici několik). Čísla jsou vyjádřena v poziční desítkové soustavě a opět zprava se nahrazují písmeny. V zapsané slabice má numerický význam jen poslední souhláska těsně před samohláskou. Samostatné samohlásky znamenají nulu. Tento systém se nazýval *katapajadi.*

Jinou variantu popsal Árjabhata II. V jeho systému mají souhlásky tentýž význam jako v první variantě. Ale samohlásky, samostatné i ve spojení se souhláskou, nemají žádnou numerickou hodnotu. Také, na rozdíl od první varianty, každá souhláska má numerickou hodnotu. Písmena jsou řazena zleva doprava jako čísla.

Další varianta byla užívána v jižní Indii a je známá jako systém *kerala*. Čtvrtá varianta byla objevena na pálijských rukopisech v Barmě.

Na číslování stránek starých rukopisů se někdy používaly zvláštní symboly známé pod názvem *akšarapali.* Číslům jsou opět přiřazena písmena nebo slabiky, ale trochu změněné, aby se odlišily symboly s numerickou hodnotou od písmen. V džinistických rukopisech se tento způsob používal až do 16. století. Byly nalezeny ještě další systémy na rukopisech z jižní Indie, Srí Lanky a Barmy.

Patrně kvůli velkému množství různých variant se abecední způsob vyjadřování čísel nestal běžně užívaným.

Literatura

[1] Datta B., Singh A. N.: *History of Hindu Mathematics (part I).* Molital Banarsidass, Lahore, 1935, 1938.

[2] Joseph G. G.: *The Crest of the Peacock*. Penguin Books, 1990.

[3] Juškevič A. P.: *Dějiny matematiky ve středověku.* Academia, Praha, 1978.

[4] Struik D. J.: *Dějiny matematiky*. Orbis, Praha, 1963.

[5] Zbavitel D.: *Starověká Indie*. Panorama, Praha, 1985.

[6] Zbavitel D.: *Otazníky starověké Indie*. Lidové noviny, Praha, 1997.

[7] O'Connor J., Robertson E.: *Index of Ancient Indian mathematics*.

Dostupné z < http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Indexes/Indians.html>.

Adresa

RNDr. Irena Sýkorová
Vysoká škola ekonomická
Katedra matematiky
Ekonomická 957
148 00 Praha 4
e-mail: *sykorova@vse.cz*

JAN ŠINDEL A MATEMATIKA UKRYTÁ V PRAŽSKÉM ORLOJI

ALENA ŠOLCOVÁ

1 Orloj jako astroláb

Ve druhé polovině 20. století se ukázalo [1], [2], že matematický model pražského orloje navrhl Jan Ondřejův zvaný Šindel, mistr pražské univerzity a její rektor v roce 1410. Sestrojil jej hodinář Mikuláš z Kadaně. Během staletí byl orloj vícekrát opravován. Na konci 15. století jej zdokonalil hodinář Jan z Růže. V 16. století pečoval o orloj Jan Táborský z Klokotské Hory. Ten je také autorem nejstaršího známého popisu orloje z roku 1570. Koncem 18. století zachránil orloj před zničením profesor astronomie a ředitel pražské hvězdárny Antonín Strnad. V 19. století studoval funkci orloje Romuald Božek, a pak byla zřízena komise pro jeho opravu, kterou vedl profesor astronomie Joseph Böhm. Po této rekonstrukci v roce 1866 přispěl ke správnému chodu orloje František Josef Studnička. Na konci II. světové války v roce 1945 byl orloj značně poškozen. Přes všechny tyto obtíže zůstala podstatná část stroje původní.

Horní ciferník orloje je astroláb ovládaný hodinovým strojem. Použité zobrazení je stereografická projekce se středem v severním pólu na tečnou rovinu procházející jižním pólem. Střed ciferníku tedy odpovídá jižnímu pólu nebeské sféry. Kružnice s nejmenším průměrem zobrazuje obratník Kozoroha a vnější kružnice znázorňuje obratník Raka. Soustředná kružnice mezi nimi odpovídá rovníku nebeské sféry. Důležitá vlastnost stereografické projekce (známá již Ptolemaiovi) je: *Libovolná kružnice na kouli, která neprochází severním pólem, se zobrazí opět na kružnici.* Proto se ekliptika z nebeské sféry zobrazuje opět na kružnici.

Hodinový stroj se skládá z několika částí. Jednou z nich je bicí stroj, který pomocí drátěných táhel předává informaci o počtu úderů zvonu na vrchol téměř šedesátimetrové věže staroměstské radnice. Ve čtvrtém odstavci tohoto příspěvku se budeme věnovat matematickým vlastnostem bicího stroje.

2 Jan Ondřejův zvaný Šindel – základní životní data

Ioannes Andreae dictus Schindel se narodil podle [6] kolem r. 1375 v Hradci Králové. Studoval na pražské univerzitě a r. 1395 se zde stal bakalářem. Roku 1397 se stal subdiakonem a roku 1398 knězem pod jménem Joannes Andreae de Praga (Liber ordinationum, Kapitulní knihovna, str. 21, 28). V únoru 1399 je již mistrem pražské univerzity. V témže roce *„četl na vysokém učení co licenciát"* – tj. měl přednášku. Roku 1406 byl správcem (rektorem) farní školy u sv. Mikuláše na Malé Straně, pak vyučoval matematiku a astronomii na „gymnáziu" ve Vídni a studoval na tamější univerzitě medicínu. Po návratu do Prahy se stal profesorem astronomie na pražské univerzitě. Podporoval Jana Husa, i když nepřijímal „pod obojí". Roku 1410 se stal dokonce jeho nástupcem na místě rektora univerzity. Byl také soukromým lékařem krále Václava IV. Obchodoval s vinicemi na Petříně. V městských knihách u zemských desek se nalézá několik zpráv z let 1412–1415, které týkají majetku Jana Šindela. Roku 1418 se stal kanovníkem Svatovítské kapituly. V době husitského hnutí odešel do exilu v Olomouci. Později působil jako lékař města Norimberku (1423–1436). Od roku 1432 byl soukromým lékařem císaře Zikmunda. Roku 1436 se vrátil do Prahy. Od roku 1441 byl děkanem Vyšehradské kapituly. Zemřel mezi léty 1455 a 1458. Svoji soukromou knihovnu (cca 200 svazků!) věnoval Karlově koleji pražské univerzity.

Poznámky k životopisu: Místo narození Jana Šindela v Hradci Králové není ničím doloženo. Častý přívlastek "de Praga" může znamenat, že se narodil v Praze. Josef Smolík (viz [5]) soudí, že mohl pocházet z rodu vladyky Všeslava Šindela z Nudvojenic, který se ve starých dvorských deskách království Českého uvádí v kraji boleslavském. Hvězdárna a planetárium v Hradci Králové pojmenovala v roce 2002 po Šindelovi svůj dalekohled.

Šindelovy práce byly někdy zaměňovány s pracemi Iohanna Nihilia (Jana Nicky) a Iohanna de Gamundia (Jana z Gmündenu).

V historických pramenech je Šindel zapisován nejrůznějšími způsoby: Schindel, Ssindel, Ssyndelis, Schyndel, Schinttel, Syndelius, Seindelius, Scindel, Šindle, Joannes Andreae de Praga, Iohannes Bohemus, Iohannes Andreae dictus Dux sive Sindel.

3 Šindelovo dílo

Znalost Šindelova díla byla donedávna zcela nedostatečná, ani jednotlivé traktáty dosud dostatečně prozkoumány. Josef Smolík v roce 1864 (viz [5]) tvrdil, že žádné z Šindelových astronomických děl se nedochovalo. Jeho mínění převzali někteří další autoři. Přitom již na konci 19. století upozorňuje gymnazijní profesor Karel Teige (viz [7]) na spis *Tractatus de quantitate trium solidorum magistri Schindel, compilatus anno 1420* (uvedený níže). Teige našel před rokem 1893 dva opisy, které se od sebe nepatrně liší. Jeden z nich je součástí latinského kodexu velkého kvartu č. 56 (str. 197–207). Kodex byl psán v Salzburgu kolem roku 1440. Druhý opis je v osmerkovém kvartu č. 14.783 (str. 495–504). Pochází z bývalé Emeranské knihovny v Regensburgu. Text pojednává ve čtyřech kapitolách o vzdálenostech Slunce, Země a Měsíce. Ve výkladu se přidržuje Ptolemaiova Almagestu. Zdeněk Horský píše: *„ …měnila se i představa o Šindelově díle. Dnes se mu autorsky připisuje na dvanáct traktátů. Devět z toho je astronomických a z těch čtyři pojednávají o astronomických přístrojích,”* [1, str. 20]. Bohužel neuvádí jediný pramen ani kde lze Šindelovy práce nalézt.

Přehled o Šindelových pracích

Matematika

Traktáty matematického charakteru se zachovaly nejméně tři.

1. *Lectio Almagesti iuxta expositionem Thebitis.* Jedná se o výklad Ptolemaiova Almagestu podle komentářů Thabita ben Korraha. Spis vznikl v letech 1412–1418. Kopie jsou uloženy v Jagelonské knihovně v Krakově a v knihovně Pražské kapituly.
2. *Lectura super Librium de numeris.* Přednáška byla přednesena mezi 8. a 22. dubnem 1437. její zápis je ve XIII. odd. Národní knihovny. I když je Šindelovi autorství připisováno, pochybuje se o něm.
3. *De notitia triangulorum cum notis Iohannis Schindel.* Spis se nalézá v Jagelonské knihovně v Krakově.

Astronomie

Mezi astronomické práce řadíme především tabulky a popisy používaných přístrojů.

1. *Tabulae (Alphonsianae) de mediis et veris motibus planetarum super meridianum Pragensem reductae.* Tyto Alfonsinské tabulky pohybů planet přizpůsobené pražskému poledníku vznikly před rokem 1428. Jsou dostupné v Praze v Národní knihovně. Jiný exemplář je v Bodleyiově knihovně v Oxfordu. Šindel jako autor není doložen.
2. *Canones pro eclipsibus Solis et Lune per instrumentum adhoc factum inveniendis M. Iohanniss Schindel.* Dva opisy jsou uloženy ve Vídni v Rakouské národní knihovně a jeden v Norimberku ve Státní knihovně.
3. *Compositio chilindri*. Tři kopie jsou uloženy v knihovnách v Yale University, Salzburku a ve Vídni.
4. *De quantitate trium solidorum.* Spis je ve třech knihovnách: Vídeň, Vatikán, Mnichov.
5. *Super tabulas Alphonsianas expositio*. Na těchto tabulkách pracoval ve Vídni.
6. *Ephemerides*. Zmiňuje se o nich Tadeáš Hájek z Hájku ve svém pojednání *Oratione in laudibus geometriae* (O chvále geometrie), J. Melantrich, Praha, 1557. Hájkův spis je uložen v pražské Národní knihovně ve XIV. odd., ale *Ephemeridy* zatím nalezeny nejsou.
7. *Opera astronomica*. Autorem může být též Ioannes de Gamundia. Historik astronomie Zinner jej však připisuje Šindelovi. Dílo je uloženo v pěti různých knihovnách.

Mezi další díla řadíme komentovaný herbář podle Macera Florida. Spis je nalezen ve čtyřech kopiích v pražské Národní knihovně a ve Znojmě. Pražská kopie z odd. X Národní knihovny potvrzuje Šindelovo autorství: *Explicit commentum Mgri Syndel compilatum super solempnem phisicum Mgrum Macrum et cum hoc aliis multis phisicis. Finitum a. D. 1424 IIa feria post Gregorii* (tj. 13. 3. 1424). Dva jiné nalezené spisy též náleží do oblasti přírodních věd, speciálně medicíny (viz [6]).

Poslední pojednání je teologické: *Opus de decem praeceptis flagellum nuncupatum* je uloženo v knihovně v Bambergu. Autorství Šindela dokládá věta: *"Ista materia collecta est et compacta a magistro Schyndel ac doctore"*.

Zprávy o Šindelovi najdeme také mezi univerzitními dokumenty a v korespondenci, např. obrana Johna Wykleffa (5. 4. 1410, Archiv Univerzity Karlovy) nebo dopis rektora pražské univerzity papeži Janu XXIII. z 12. 12. 1410 nalezený ve Vídni nebo výměna korespondence mezi Šindelem a Aenášem Sylviem z roku 1445. Šindelovo dílo tedy zahrnuje práce teologické, matematické, astronomické, botanické a lékařské. Kromě literárních prací jeho umění dokládá i mimořádné technické dílo – staroměstský orloj.

4 Trojúhelníková čísla a šindelovské posloupnosti

Hlavní částí bicího stroje je ozubené závěrkové kolo s 24 zářezy po obvodu s rostoucí vzdáleností mezi nimi. Jejich uspořádání dovoluje každodenní periodické opakování bití zvonu v souladu s počtem hodin staročeského času (1–24 od západu Slunce). K závěrkovému kolu je připojeno menší ozubené kolečko, jehož obvod je rozdělen zářezy na segmenty o délkách oblouků 1, 2, 3, 4, 3, 2. Tato čísla se periodicky opakují při každém otočení kolečka. Jejich součet je $s = 15$. Na počátku každé hodiny se zvedne západka, obě ozubená kola se uvedou do pohybu. Zvon odbíjí příslušný počet hodin. Ozubená kola se zastaví, když se západka zasune do zářezů na obou kolech. Zvon tedy bije $1 + 2 + \ldots + 24 = 300$ krát každý den. Protože je toto číslo dělitelné $s = 15$, malé ozubené kolečko je na počátku každého dne vždy ve stejné poloze. Větší závěrkové kolo má 120 vnitřních zubů. Otočí se jedenkrát denně, a proto se malé kolečko otočí dvacetkrát za den se 4x větší obvodovou rychlostí. Západka na malém kole padne do zářezu, který uzavírá částečný součet periodické řady délek segmentů na malém kolečku 1, 2, 3, 4, 3, 2, rovnající se počtu hodin.

Dále se krátce zmíníme, jak souvisí *trojúhelníková čísla*

$$T_k = 1 + 2 + \ldots + k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

s orlojem. Budeme hledat všechny periodické posloupnosti, které mají podobnou vlastnost jako posloupnost 1, 2, 3, 4, 3, 2, která byla použita pro malé ozubené kolečko.

Na počest tvůrce modelu orloje Jana Šindela nazveme periodickou posloupnost $\{a_i\}$ *šindelovskou posloupností,* jestliže pro libovolné přirozené k existuje přirozené n takové, že

$$T_k = a_1 + \ldots + a_n, \qquad (1)$$

kde trojúhelníkové číslo T_k na levé straně je rovno součtu $1 + \ldots + k$ hodin na velkém ozubeném kole a kde součet na pravé straně vyjadřuje odpovídající rotaci malého kolečka. Podrobněji se vlastnostem šindelovských posloupností a algoritmu pro jejich konstrukce věnují články [3] a [4].

Literatura

[1] Horský Z.: *Pražský orloj*. Panorama, Praha, 1988.

[2] Horský Z., Procházka E.: *Pražský orloj*. Sborník pro dějiny přírodních věd a techniky 9(1964), 83–146.

[3] Křížek M., Šolcová A., Somer L.: *Construction of Šindel sequences*. Comment. Math. Univ. Carolin. 48(2007).

[4] Křížek M., Somer L., Šolcová A.: *Jaká matematika se ukrývá v pražském orloji?* Matematika-fyzika-informatika 16(2006/2007), 129–137.

[5] Smolík J.: *Mathematikové v Čechách od založení university Pražské až do počátku tohoto století*. Praha, 1864.

[6] Spunar P.: *Repertorium auctorum Bohemorum provectum idearum post Universitatem Pragensem conditam illustrans*, **I**, Institutum Ossolinianum, Officina Editoria Academiae Scientiarum Polonae, Wratislaviae-Varsaviae-Cracoviae-Gedani-Lodziae, 1985, 133–141.

[7] Teige K.: *Doplňky a nové zprávy k dějinám věd mathematických v Čechách*. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 22(1893), 244–246.

Adresa

RNDr. Alena Šolcová, Ph.D.
katedra matematiky, Fakulta stavební ČVUT
Thákurova 7
166 29 Praha 6
e-mail: s*olcova@mat.fsv.cvut.cz*

PŘÍTOMNÁ HISTORIE VÝUKY PRAVDĚPODOBNOSTI A STATISTIKY

MILENA ŠPINKOVÁ

1 Úvod

Člověk je statistikou a pravděpodobností obklopen po celý svůj život, a navíc svojí činností pravděpodobnost určitých jevů mění a ovlivňuje. Ještě před sto lety byla pravděpodobnost, že náhodně vybraný člověk zemře následkem dopravní nehody či pádu letadla, velice malá. Naopak pravděpodobnost, že zemře v důsledku zánětu či infekční choroby, byla vyšší než je tomu dnes.

Je třeba rozlišovat mezi tím, zda chceme žáky a studenty naučit zákonitosti matematické pravděpodobnosti – k tomu slouží různé hry s kostkou či s mincí – nebo je chceme připravit na každodenní rozhodování v běžném životě. Při výuce pravděpodobnosti a statistiky bychom měli především vést studenty k tomu, aby si uvědomili, že celou řadu pojmů z tohoto oboru již sami intuitivně používají. Je pouze nutné zpřesnit a rozvinout jejich význam a dát studentům nástroje k hodnocení i zpracovávání dat, jejich interpretaci a vyvozování závěrů, které jim pomohou při každodenním rozhodování. V současné době je této problematice věnována značná pozornost a jsou uskutečňovány podrobné studie na skupinách jedinců různého věku; viz [1, 7, 9]. Ve své práci jsem se zaměřila na výzkumy, které se provádějí v zahraničí a podobné úlohy jsem, pro srovnání, zadávala také svým studentům.

2 Začlenění pojmů z běžného života do pravděpodobnostního a statistického jazyka

V posledních desetiletích se objevuje zajímavý trend ve výzkumu matematického vzdělávání, který je zaměřen na jazyk a znaky z hlediska konstrukce matematických znalostí. Na jedné straně se výzkum zabývá tím, jak se studenti mohou přiblížit k „matematickým skutečnostem“ vyjádřeným specifickým znakovým systémem (zlomky, algebraické výrazy), na druhé straně tím, jak jsou „matematické skutečnosti“ vytvářeny během slovních aktivit ve třídě. Didaktické situace byly navrženy tak, aby rozvíjely pravděpodobnostní uvažování žáků [5].

A: Přístup k pojmu „pravděpodobnost jevu“ jako poměru mezi počtem příznivých a počtem všech možných, stejně pravděpodobných jevů.
V ranných dějinách pravděpodobnosti tato konstrukce představovala ústup od magického nebo fatalistického pohledu na náhodné jevy a pokus o vyjádření pravděpodobnosti prostřednictvím nějaké objektivní (číselné) míry.

<u>Příklad:</u> Žáci vybírají mezi dvěma hrami: s mincí (hlava nebo orel) a s kostkou (1 až 6 bodů).
Text jedné z žákyň: „V případě mince je o hodně větší pravděpodobnost. Představme si bludiště, které má 2 chodby a druhé, které má 6 chodeb. Zřejmě 2 chodby skýtají větší pravděpodobnost dostat se ven, pokud je v každém labyrintu pouze jeden východ.“

B: Rozlišení mezi elementárními stejně pravděpodobnými jevy a složeným jevem, který se z nich skládá (např. výsledek součtu bodů při hodu dvěma kostkami: kdy součet

4 dostaneme několika způsoby – 1+3 nebo 2+2 nebo 3+1 – zatím co součet 2 pouze jedním).
Toto byl rozhodující pokrok v ranné historii pravděpodobnosti: Richard de Fournival (počátek 13. stol.) a poté i Galileo Galilei se s tímto problémem střetli, když řešili otázku, jaké jsou pravděpodobnosti jednotlivých součtů hodu třemi kostkami (v Galileově řešení se konkrétně jednalo o to, zda je součet 9 pravděpodobnější než 10, resp. 12 než 11).

Příklad: Žáci házejí dvěma kostkami, sázejí na lichý nebo sudý výsledek součtu bodů a rozvažují, zda *„Je lepší sázet na sudou nebo lichou?“. S*tudenti uvažují liché výsledky 3, 5, 7, 9, 11 a sudé výsledky 2, 4, 6, 8, 10, 12. Sudé se zdají být pravděpodobnější, protože sudých čísel je víc. Ale je tato úvaha správná?

3 Výuka prostřednictvím her

Výuka pravděpodobnosti je pro studenty nepřitažlivá a obtížná díky špatnému výkladu a chápání základních pojmů. Praktické zkušenosti (jen s malými soubory jevů) jim to nijak neusnadňují. Proto výuka založená na hrách zvyšuje pravděpodobnostní porozumění, rozhodování v kontextu pravidel her, užití sofistikovaných metod k obhájení a vysvětlení názoru [2, 3]. Hlavní myšlenka *zákona velkých čísel – větší velikost výběrového souboru ⇒ experimentální relativní četnost je bližší teoretické pravděpodobnosti* není žáky bez demonstrace zpravidla pochopena a při pokusech o její aplikaci na složitější případy náhodných jevů se dopouštějí zásadních chyb.

Příklad 1 (Hra s mincí): Žáci zkoumají čtyři sady výsledků opakovaného hodu hrací známkou s bílou a červenou stranou: a) 3 ze 4 bílé, b) 6 z 8 bílé, c) 12 ze 16 bílé, d) 24 ze 32 bílé.
1. Která z těchto čtyř sad se bude objevovat nejčastěji? Nebo jsou stejně možné?
2. Která z těchto čtyř sad se bude objevovat nejméně často? Nebo jsou stejně možné?
3. Bylo by tomu jinak při poměrech 2 ze 4 bílé, 4 z 8 bílé, 8 ze 16 bílé, 16 ze 32 bílé?

Příklad 2 (Hra s čtyřbokými kostkami): Žáci posuzují dvě situace:
1. Klobouk obsahuje 3 čtyřboké kostky, jedna je bílá, jedna černá a jedna zelená. Vyhrajete 900$, když hodíte na bílé 1, na černé 2 a na zelené 3.
2. Klobouk obsahuje 3 čtyřboké kostky stejné barvy. Vyhrajete 900$, když hodíte 1, 2 a 3.

Je nějaký rozdíl v šancích na vítězství v těchto dvou situacích? Proč ano nebo proč ne?

Složitost podobných úloh můžeme ilustrovat na korespondenci I. Newtona a S. Pepyse z roku 1693 [8]. Newton v těchto dopisech odpovídá na otázku Pepyse: Která z následujících tří situací je nejpravděpodobnější? a) hod šesti spravedlivými kostkami, padne alespoň jednou 6, b) hod dvanácti kostkami, padne alespoň dvakrát 6, a c) hod osmnácti kostkami, padne alespoň třikrát 6.
Newton správně vypočítal, že a) (p=0,665) je pravděpodobnější než b) (p=0,619) a v případě c) uvedl, že se hodnota pravděpodobnosti bude stále snižovat. Přestože vypočítané hodnoty jsou správné, jeho argumentace správná není. Ve svém třetím dopise personifikoval situaci a) hráčem Petrem a situaci b) hráčem Jakubem. Případ b) si však rozložil na dva následné případy a) a požadoval, aby ***v obou*** *z nich padla šestka. Uvádí, že Petr musí vyhrát tak často, jak často hodí nějakou 6, ale Jakub může hodit 6 (v jednom hodu) a přesto nevyhrát nic. Jinými slovy, Jakub vyhrává pouze ve dvojicích hodů, ve kterých v obou padne 6. Tato úvaha je však nesprávná. Newton ztratil ze zřetele hody ve kterých šestka padne víckrát, např. když Jakub hodí v první šestici 6 dvakrát, vyhrává i když ve druhé šestici už žádná 6 není.*
Není škoda času na podrobné vysvětlení a praktické předvedení rozdílů mezi opakováním jednoduchého děje a složeným jevem tvořeným jejich společným hodnocením.

4 Příprava budoucích učitelů pravděpodobnosti a statistiky

Současné problémy ve vyučování pravděpodobnosti a statistiky jsou do značné míry dědictvím dosti dávné minulosti. Zpočátku bylo úkolem škol vyučujících statistiku připravit své absolventy do státní služby, v níž statistika jako nástroj výběru daní a hodnocení síly státu hrála důležitou roli. Přísně nenumerická *universitní statistika* tvořící součást věd státoprávních a rozvíjející se koncem 17. století v Německu byla proto postupně vytlačována úřední státní *statistikou tabulkovou*. Posléze statistika nachází uplatnění i ve společenských vědách především zásluhou belgického astronoma L. A. J. Queteleta. Ten začal aplikovat numerické postupy i na jednotlivé občany a jeho QI (Queteletův index) pod zkratkou BMI je právě v současné době opět aktuální.

Charakteristické znaky náhodných jevů, především jejich variabilita, byly však zanedbávány a pozornost byla věnována hledání analogií náhodných jevů k fyzikálním zákonům, v nichž by střední hodnoty, odvozené z dat a relativního zastoupení jejich různých složek, hrály roli fyzikálních konstant. To je ostatně dodnes přetrvávající laická představa o statistice a je výstižně popsána v knize *The Taming of the Chance* [Krocení náhody] od Iana Hackinga [6], popisující přísně deterministické snahy vědy 19. století. Teprve na jeho sklonku přicházejí s novými vědními i výukovými koncepcemi F. Galton a K. Pearson v souvislosti s aplikacemi statistiky v biologii. Ke slovu přichází přirozená variabilita jevů, jevy regrese (ke střední hodnotě!) a pozornost je věnována i jiným než normálním pravděpodobnostním rozdělením. Statistika s perspektivou využití v řízení států, ve vědě a v lékařství se pak stala pevnou součástí vysokoškolského vzdělání (přírodovědecké fakulty, sociální, ekonomické a technické školy).

Dnešní situace je však poněkud jiná. Komplikovanost našeho denního života, jeho neoddělitelná závislost na komplexu technických vymožeností a v důsledku tohoto jeho nestabilita a ohrozitelnost nejrůznějšími vnějšími jevy vyžaduje pravděpodobnostní i statistické uvažování – odpovídající *gramotnost*, jak se tento požadavek dnes nazývá – ode všech občanů a ne jen od vědců a státních úředníků. Proto také dosavadní učební metody jsou zcela nevhodné. Představa, že dítě musí umět dřív počítat než vědět, co je může ne vždy, ale přesto někdy, ohrozit a připravit o život, že je důležitější znalost algebry a geometrie než pravděpodobnostní uvažování o záležitostech denního života (včetně ukládání úspor a chování na silnicích!), je naprosto zcestná a nezodpovědná. Odtud vyplývá i nezbytnost věnovat pozornost jak budoucím tak i stávajícím učitelům [4]. Velmi poučný je následující test z přípravného kurzu studentů učitelství, ukazující, že výrazné zlepšení zdaleka není nedosažitelné. Všechny odpovědi jsou sice možné, ale až po absolvování přípravy jsou odhady dosti pravděpodobné (viz dva reálné výsledky).

<u>Příklad</u>: Jaký očekáváte výsledek u šesti sad 50 hodů spravedlivou mincí?
Odpovědi studentů **před** absolvováním kurzu:
{25, 25, 25, 25, 25, 25} – Nevím jak se pravděpodobnost obdržení orla bude měnit, když uděláme více sad 50-ti hodů.
{7, 21, 23, 25, 29, 31} – Vybrala jsem čísla blízko 25, protože uvažuji s 50% pravděpodobností. 7 jsem zvolila pro legraci, protože je zde vždy prvek náhody.
{5, 15, 30, 40, 45, 50} – Je to náhoda.
Odpovědi studentů **po** absolvování kurzu:
{23, 24, 25, 25, 25, 26} – Měla by to být variace okolo střední hodnoty.
{22, 23, 24, 26, 27,28} – Přestože 25 hodů má pravděpodobnost být orel, ve skutečnosti je pravděpodobná určitá variace.
{21, 24, 25, 26, 28, 29} – Všechna čísla jsou 25 nebo blízko 25. Všechna nejsou 25, počítáme-li s variací.
Nakonec dva moje vlastní *reálné* výsledky: {23,23,24,25,27,28}, {21,24,24,28,29,30}.

V rámci kurzu studenti prováděli také různé aktivity, jako je měření rozměrů těla, statistiku kapesného a odpovídali na otázky typu: kolik let žiješ v tomto městě?, kolik lidí žije ve tvé domácnosti? Přesně tento druh aktivit by totiž měl být nedílnou součástí vyučování na základních školách.

5 Závěr

Popsané způsoby výuky pravděpodobnosti jsou zajímavé a pro studenty přínosné. Jejich činnost by měla především být zaměřena na zkoumání souborů jevů, které se studentů přímo dotýkají, jako je výška, váha, srdeční tep, počet členů rodiny, oblíbené aktivity atd.

Ačkoliv život nejsou hody mincí ani kostkami, spoustu životních situací lze modelovat jako alternativní hry (přijde – nepřijde, udělám – neudělám, vyjde – nevyjde). Společné hry a především praktické testování odpovědí na různé úlohy ke hrám se vztahující nutí studenty kolektivně přemýšlet, učí je vzájemně si pomáhat i mezi sebou soutěžit a zároveň je poučuje o praktické hodnotě teoretických výsledků při nižších počtech realizací náhodného jevu. Když už se rozhodneme vyučovat pravděpodobnost prostřednictvím her, měli bychom studentům také důkladně vysvětlit princip hracích automatů a jiných sázkových her, abychom je varovali před jejich nadměrným využíváním a nemožností „vyhrát" nad hracím automatem při velkém počtu her.

Literatura

[1] Akker A.: *Design research in statistics education: on symbolizing and computer tools*. Thesis. Center for Science and Math. Education. Freudenthal Inst., Utrecht Univ., 2004.

[2] Amit M.: *Generating probability concepts through games*. Paper presented at the International Conference of Mathematics Education into 21st century, Singapore, 1999.

[3] Benko P.: *Study of the Development of Students‘ Ideas in Probability*. Unpublished doctoral dissertation, Rutgers University, New Jersey, 2006.

[4] Canada D. L.: *Variability in a probability context: Developing preservice teachers‘ understanding*. In: Novotná J. et al. (eds.): *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. II. Charles University, Prague, 2006, 265–272.

[5] Consogno V.: *The Semantic-Transformational Function of Everyday Language*. In: Bosch, M. (ed.): *Proceedings of CERME-4,* 2005. St. Feliu de Guixols (v tisku).

[6] Hacking I.: *The Taming of the Chance*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[7] Pfannkuch M.: *Characteristics of statistical thinking in empirical enquiry*. Doctoral Thesis. The University of Auckland, Auckland, 1999.

[8] Stigler S. M.: *Isaac Newton as a probabilist*. Statistical Science 21(2006), 400–403.

[9] Špinková, M.: *Interpretace základních statistických pojmů pomaturitní populací*. In: Bečvářová M. (ed.): Sborník sylabů 27. mezinárodní konference Historie matematiky. Velké Meziříčí 25. – 29. 8. 2006, Praha, 2006, 67–68.

Adresa
Mgr. Milena Špinková
Matematický ústav AV ČR
Žitná 25
115 67 Praha 1
e-mail: *milena.sp@centrum.cz*

HYPERBOLICKÁ GEOMETRIE
A
GYROVEKTOROVÉ PROSTORY

MIROSLAVA TIHLAŘÍKOVÁ

1 Historické souvislosti

Roku 1905 byla představena Albertem Einsteinem (1879–1955) speciální teorie relativity, která byla založená na předchozí práci Lorentze a Poincarého. Když začal Herman Minkowski (1864–1909) v roce 1907 uvažovat strukturu Lorentzovy grupy, všiml si, že vztahy mezi vektory rychlostí nejsou Euklidovské, ale hyperbolické. Časoprostorový formalismus relativistické fyziky, který začal rozvíjet, ale budoval způsobem, který roli hyperbolické geometrie spíše zakrývá.

Matematici jako V. Varičak (1865–1942) a E. Borel (1871–1956) se snažili upozornit na roli hyperbolické geometrie v rámci teorie relativity, jejich snažení se ale nesetkalo s příliš velkým úspěchem. Po dlouhou dobu nejrůznější práce na toto téma nepřinesly nic noveho. Výrazným příspěvkem k této snaze jsou až nedávné práce Abrahama A. Ungara.

2 Gyrovektorové prostory

2.1 „Gyro“ pojmy

Einsteinovo sčítání není na množině relativisticky přípustných rychlostí obecně ani komutativní, ani asociativní. Tento problém napravuje takzvaná Thomasova precese. Zobecnění této precese nazývá Ungar Thomasovou gyrací a pomocí ní buduje teorii ve které používá předponu „gyro“ i pro další pojmy, aby zdůraznil analogii s klasickými pojmy. Díky této gyraci se tedy Eisteinovo sčítání stává gyrokomutativním a gyroasociativním. Dále Ungar zavádí například gyrogrupu a gyrovektorový prostor.

2.2 Einsteinův gyrovektorový prostor

Některé gyrokomutativní a gyroasociativní operace dávají společně se skalárním násobením vznik gyrovektorovým prostorům a ty pak různým modelům hyperbolické geometrie. Jedním ze speciálních případů je Einsteinův vektorový prostor, který je ve dvoudimenzionálním případě koincidentní s Beltrami-Kleinovým kruhovým modelem hyperbolické geometrie.

2.3 Hyperbolická trigonometrie

Gyropřímka v Beltrami-Kleinově modelu je úsečka s koncovými body na hranicích disku. I zde nacházíme analogie s Euklidovskou geometrií. Einsteinovo sčítání totiž zachovává kosinovou větu, sinovou větu a Pythagorovu větu v podobném tvaru jako známe z Euklidovské trigonometrie.

Literatura

[1] Ungar Abraham A.: *The Beyond the Einstein Addition Law and its Gyroscopic Thomas Precession: The Theory of Gyrogroups and Gyrovector Spaces*. Kluver Academic Publishers Group, Dordrecht, 2001.

[2] Walter S.: *The Non-Euclidean Style of Minkowskian Relativity*.

http://www.univ-nancy2.fr/DepPhilo/walter/papers/nesh.xml

[3] Ungar Abraham A.: Hyperbolic Trigonometry in the Einstein Relativistic Velocity Model of Hyperbolic Geometry.

http://www.math.ndsu.nodak.edu/faculty/ungar/dir_webpapers/hyptrig01.ps

Adresa

Mgr. Miroslava Tihlaříková
Ústav matematiky LDF
MZLU
Zemědělská 3
61300 Brno
e-mail: *tihlarik@node.mendelu.cz*

GEOMETRICKÉ VÝSLEDKY A REFORMNÍ AKTIVITY FELIXE KLEINA

DANA TRKOVSKÁ

1 Osobní a profesní život Felixe Kleina (1849–1925)

Felix Klein se narodil 25. dubna 1849 v Düsseldorfu (Prusko). Absolvoval zde gymnázium a poté odešel studovat matematiku a fyziku na univerzitu v Bonnu. Již během studií, v roce 1866, zde získal místo laboratorního asistenta u Julia Plückera (1801–1868), který se zabýval teoretickou matematikou a experimentální fyzikou. Pod jeho vedením také sepsal disertační práci, za kterou získal roku 1868 na univerzitě v Bonnu doktorát. Během následujících dvou let postupně navštívil Berlín, Paříž a Göttingen. V roce 1870 začal Felix Klein v Paříži spolupracovat s norským matematikem Sophusem Lie (1842–1899), který ho přivedl k myšlence propojení geometrie a teorie grup. Společně začínali chápat zásadní význam teorie grup a pokusili se přenést pojem grupy také do geometrie.

V červenci 1870 proslovil pruský kancléř Otto von Bismarck (1815–1898) útočnou řeč proti francouzské vládě, Francie vyhlásila Prusku válku a Felix Klein se rozhodl Paříž opustit. Krátce sloužil v armádě jako zdravotník, počátkem roku 1871 se však habilitoval a začal přednášet na univerzitě v Göttingen. V roce 1872, ve věku pouhých 23 let, byl jmenován řádným profesorem filozofické fakulty univerzity v Erlangen (Bavorsko). Přednášel zde však pouze do roku 1875, kdy mu bylo nabídnuto výhodnější místo na Technische Hochschule v Mnichově. V srpnu roku 1875 se Felix Klein oženil s Annou Hegelovou (1851–1927), vnučkou významného německého filozofa Georga Wilhelma Friedricha Hegela (1770–1831). Po pětiletém působení na Technische Hochschule přesídlil Felix Klein do Lipska, kde pracoval až do roku 1886. Na podzim roku 1882 se však psychicky zhroutil a začal propadat těžkým depresím. Jeho kariéra špičkového matematika tím skončila. Roku 1886 se vrátil na univerzitu v Göttingen, kde působil až do roku 1913, kdy ze zdravotních důvodů univerzitu opustil. Během první světové války se věnoval soukromé výuce matematiky. Felix Klein zemřel 22. června 1925 v Göttingen.

Kleinovy zásluhy v matematice, nejen v geometrii, jsou všestranné. Na univerzitě v Göttingen vybudoval matematické středisko světové úrovně, zřídil zde matematickou knihovnu a čítárnu. Kromě geometrie a teorie grup se hlouběji věnoval také algebraickým rovnicím a teorii funkcí; z těchto oblastí publikoval na sedmdesát prací. V roce 1876 převzal vedení časopisu *Mathematische Annalen*, který se specializoval především na problémy komplexní analýzy, otázky algebraické geometrie a teorie invariantů. Právě pod Kleinovým vedením začaly *Mathematische Annalen* konkurovat významnému Crelleovu časopisu *Journal für die reine und angewandte Mathematik* a na více než šedesát let se pak staly jedním z nejvýznamnějších matematických časopisů. V roce 1885 byl Felix Klein přijat do londýnské Královské společnosti, roku 1913 se stal členem Berlínské akademie věd.

2 Geometrické výsledky Felixe Kleina

2.1 Základní myšlenka klasifikace geometrií

Elementární eukleidovská geometrie studuje ty vlastnosti geometrických útvarů, které se nemění při jejich pohybech. Ekvivalentní útvary jsou definovány jako ty útvary, které lze pomocí pohybu převést vzájemně na sebe. Místo pohybů však můžeme uvažovat libovolnou množinu geometrických transformací a prohlásit za ekvivalentní ty útvary, které lze vzájemně jeden z druhého získat pomocí transformací této množiny. Přirozeným požadavkem přitom je, aby uvažovaná relace mezi dvěma útvary byla opravdu ekvivalencí, tj. aby byla reflexivní, symetrická a tranzitivní. Odtud plyne, že uvažovaná množina transformací musí být grupou. Volbou různých grup transformací pak získáváme jednotlivé geometrie.

2.2 Erlangenský program

Tento název získala slavná Kleinova přednáška *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* [Srovnávací úvahy o novějších geometrických bádáních], kterou Felix Klein přednesl v říjnu roku 1872 na univerzitě v Erlangen u příležitosti svého jmenování řádným profesorem. Sestává z deseti kapitol. Základní myšlenky Kleinova přístupu ke klasifikaci geometrií jsou obsaženy v první kapitole, kde lze najít následující definici geometrie:

Je dán geometrický prostor a nějaká grupa transformací. Úkolem geometrie je zkoumat právě ty vlastnosti prostoru, které se nemění při transformacích dané grupy.

Jinými slovy řečeno, každá geometrie je teorií invariantů dané grupy transformací.

Ve druhé kapitole Felix Klein zavádí uspořádání geometrií, a to tak, že relaci inkluze, kterou lze uspořádat jednotlivé grupy transformací, přenáší na odpovídající geometrie. Pokud nějakou grupu nahradíme jinou grupou, která danou grupu obsahuje, zůstane zachována pouze část původních geometrických vlastností. Přechodem k rozšířené grupě nebo k vlastní podgrupě tak lze přejít od jednoho typu geometrie k jinému.

Erlangenský program tedy přinesl jednoduchý, ale důležitý princip uspořádání jednotlivých geometrií. Následující schéma ukazuje takové uspořádání pro klasické geometrie:

eukleidovská geometrie	$\supset$	podobnostní geometrie	$\supset$	afinní geometrie	$\supset$	projektivní geometrie

2.3 Elementární matematika

V letech 1908 až 1911 postupně vyšly tři díly Kleinovy učebnice *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* [Elementární matematika z vyššího hlediska], které byly určeny středoškolským učitelům a studentům. První díl je věnován aritmetice, algebře a analýze, obsahuje přednášky konané Felixem Kleinem na univerzitě v Göttingen v zimním semestru 1907/08. Druhý díl se týká geometrie, obsahuje Kleinovy přednášky z letního semestru 1908. Ve třetím díle jsou mimo jiné studovány funkce reálné proměnné (zejména jejich znázornění v pravoúhlé soustavě souřadnic) a rovinné křivky.

Ve druhém díle (viz [2]) jsou také obsaženy základní myšlenky Erlangenského programu. Felix Klein zde nejprve zkoumá geometrické prostory a jejich základní vlastnosti a dále se podrobně věnuje jednotlivým typům geometrických transformací. Poslední část představuje systematické pojednání o geometrii a jejích základech a zahrnuje základní myšlenky Kleinovy klasifikace geometrií pomocí geometrických transformací.

3 Reformní aktivity Felixe Kleina

Felix Klein se poměrně brzy ve své kariéře začal zajímat také o výuku matematiky na německých školách, usiloval o její modernizaci. V roce 1886 byla za Kleinovy podpory na univerzitě v Göttingen vytvořena první katedra didaktiky matematiky. Zrodila se zde také myšlenka dalšího vzdělávání středoškolských profesorů matematiky formou přednášek a prázdninových kurzů.

Roku 1897 se v Zürichu konal 1. mezinárodní kongres matematiků, na kterém Felix Klein vystoupil s přednáškou *Zur Frage des höheren mathematischen Unterrichts* [K otázce výuky vyšší matematiky]. Na 2. mezinárodním kongresu matematiků v Paříži roku 1900 se již ustanovila mezinárodní sekce pro vyučování matematice. Otázka výuky středoškolské matematiky byla jedním z ústředních témat také 3. mezinárodního kongresu matematiků v Heidelbergu v roce 1904. Téhož roku se ve Vratislavi sešlo shromáždění německých přírodovědců a lékařů, na kterém byla ustanovena německá komise pro vyučování matematice a přírodovědným předmětům. Jejím předsedou byl zvolen německý matematik August Gutzmer (1860–1924). Felix Klein této komisi předložil svůj návrh na reformu matematicko-fyzikálního vzdělávání. Činnost komise vyústila v reformní návrh na úpravu středoškolského matematicko-přírodovědného vzdělání, který byl zveřejněn a přijat na dalším shromáždění německých přírodovědců a lékařů konaném roku 1905 v Meranu. Tento návrh bývá označován jako tzv. *Meranský program*.

3.1 Meranský program

Tento program připisuje matematice ve středoškolském vzdělání jedno z klíčových postavení, její hlavní úkoly vidí zejména v rozvíjení rozumových schopností a logického myšlení. Konkrétně kladl Meranský program na výuku matematiky na středních školách následující požadavky:

- podporovat rozvoj prostorové představivosti
- prostoupit učivo pojmem funkce, rozvíjet funkční myšlení
- zavést diferenciální a integrální počet
- omezit formalismus a abstraktní učivo
- řešit úlohy z praktického života
- rozvíjet mezipředmětové vztahy

Hlavní myšlenky Meranského programu se staly východiskem řady dalších reforem. V Rakousku-Uhersku na Meranský program reagovala *Marchetova reforma* z roku 1909, jejímž hlavním výsledkem bylo zařazení učiva elementárních funkcí a některých prvků infinitesimálního počtu do výuky matematiky na reálkách a částečně i na gymnáziích. Kromě obsahových změn přineslo přijetí Meranského programu také některé změny v metodickém zpracování učiva. Schválená reforma školních osnov si vyžádala tvorbu nových učebnic matematiky, které by zamýšlené obsahové i metodické změny reflektovaly. Vydáním nových učebnic byla pověřena *Jednota českých matematiků a fyziků*.

3.2 Další reformní snahy

V roce 1906 se konalo shromáždění německých přírodovědců a lékařů ve Stuttgartu. Na něm byly navrženy obsahové změny, které souvisely zejména se snahou obohatit středoškolskou matematiku o základy matematické analýzy. Také tento návrh byl vypracován pod Kleinovým vedením. Požadoval zavedení a rozvíjení pojmu funkce na příkladech elementárních funkcí a začlenění některých prvků diferenciálního a integrálního počtu.

Další shromáždění německých přírodovědců a lékařů se uskutečnilo roku 1907 v Drážďanech. Bylo na něm přijato doporučení posilovat v přípravě budoucích učitelů matematiky i ve výuce matematiky na středních školách aplikace na úkor izolovaných speciálních problémů, které nejsou podstatné pro utváření uceleného, vnitřně logicky propojeného systému středoškolského matematického vzdělání. Felix Klein přitom prosadil vyzkoušení tohoto návrhu v Německu v roce 1908.

Roku 1908 se v Římě konal 4. mezinárodní kongres matematiků, na kterém bylo předneseno osm referátů o reformním dění ve vyučování matematice v různých zemích. Na tomto kongresu byla ustanovena Mezinárodní komise pro vyučování matematice, která se zabývala vyučovacími metodami a učebními plány veškeré výuky matematiky od elementární až po vysokoškolskou. Na místo předsedy byl navržen již zmíněný německý matematik August Gutzmer, který se však této funkce zřekl a navrhl Felixe Kleina, jenž byl zvolen a jmenován do funkce i přes svou nepřítomnost. Kromě již přijatých požadavků na obsahové změny ve výuce středoškolské matematiky komise dále doporučila obohatit výuku geometrie na středních školách o některé prvky projektivní geometrie a vedle matematické analýzy zařadit do osnov také základy dalších speciálních disciplín, teorie množin a teorie grup. Pod Kleinovým vedením vydala Mezinárodní komise pro vyučování matematice několik publikací o výuce matematiky na všech stupních a typech škol.

V návaznosti na Mezinárodní komisi pro vyučování matematice byly postupně v jednotlivých zemích ustanoveny také národní komise, které měly za úkol vypracovat podrobnou zprávu o organizaci a metodách výuky matematiky v dané zemi. Výsledky zpráv byly zveřejněny na 5. mezinárodním kongresu matematiků (Cambridge, 1912).

Literatura

[1] Klein F.: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. A. Deichert, Erlangen, 1872 (též Gesammelte mathematische Abhandlungen, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973, 460–497).

[2] Klein F.: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, *Teil II – Geometrie*. B. G. Teubner, Leipzig, 1909.

[3] Tobies R.: *Felix Klein*. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1981.

[4] Hawkins T.: *The Erlanger Programm of Felix Klein*: *Reflections on Its Place in the History of Mathematics*. Historia Mathematica 11(1984), 442–470.

[5] Wussing H.: *Ke vzniku Erlangenského programu*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 13(1968), 367–373.

[6] Mattheis M.: *Felix Kleins Gedanken zur Reform des mathematischen Unterrichtswesens vor 1900*. Der Mathematikunterricht 46(2000), Heft 3, 41–61.

[7] Potůček J.: *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900–1945*. Díl 1 a 2, Pedagogická fakulta Západočeské univerzity, Plzeň, 1992, 1993.

Adresa

Mgr. Dana Trkovská
Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: *trkovska@karlin.mff.cuni.cz*

HISTORICKÝ VÝVOJ A SOUČASNOST VÝUKY MATEMATIKY NA VŠE PRAHA

EVA ULRYCHOVÁ

1 Úvod

Vyučování matematiky na vysokých školách má dlouholetou tradici. Na školách, kde matematika není hlavním předmětem, se však projevuje tendence výuku matematiky zredukovat, a to jak snížením počtu vyučovacích hodin, tak s tím spojeným omezením rozsahu probíraného učiva.

Také na VŠE v Praze byla postupně snižována hodinová dotace výuky matematiky, nejvýrazněji pak v souvislosti s přechodem na kreditní systém ECTS (European Credit Transfer and Accumulation System) v letech 2005 až 2006.

Je proto zajímavé podívat se, jakým vývojem vyučování matematiky na VŠE prošlo.

2 Historie

VŠE Praha byla založena v roce 1953; do současnosti prošla několika reorganizacemi, týkajícími se počtu fakult, organizace a náplně studia atd.

Přesné údaje o hodinové dotaci matematiky ani osnovy učiva z počátečního období se nepodařilo zjistit, neboť v archivu VŠE nebyly nalezeny žádné dokumenty, které by tyto údaje poskytovaly.

Podle informační brožury o VŠE z roku 1968 byla matematika (pro studenty povinná) vyučována na jedné ze tří fakult po dobu tří semestrů (v 1. a 2. ročníku) v rozsahu 4 vyučovacích hodin přednášek a 2 hodin cvičení týdně (dále jen 4+2), na ostatních fakultách po dobu dvou semestrů v rozsahu 4+2. Každý semestr byl zakončen zápočtem a zkouškou.

Na počátku 70. let prošla VŠE reorganizací – ke stávajícím třem fakultám přibyla další fakulta a studium bylo z dosavadního pětiletého zkráceno na čtyřleté. Výuka matematiky ve 3. semestru byla zrušena, ale na fakultě, které se to týkalo, byl zvýšen počet hodin cvičení – na 4+4. Stejný rozsah (4+4) byl i na nově vzniklé fakultě; na ostatních fakultách zůstal rozsah nezměněný (tj. 4+2).

Ve školním roce 1981/1982 byl na dvou fakultách ve 2. semestru rozšířen počet hodin matematiky na 6+4; současně byla na těchto fakultách rozšířena i obsahová náplň – ta se na jednotlivých oborech lišila (na oborech s větším počtem hodin byly např. vykládány některé numerické metody atd.).

Ve školním roce 1984/1985 byl pro jeden z oborů zaveden předmět Matematika 3; byl vyučován ve 4. semestru v rozsahu 2+2, zakončen zápočtem a zkouškou. Obsah rozšiřoval základy matematiky o základy logiky, teorii algoritmů atd.

Součástí výuky matematiky (zajišťované katedrou matematiky) byly v 80. letech i základy teorie pravděpodobnosti, roku 1990 převzala výuku této discipliny katedra statistiky.

Od počátku 90. let byla hodinová dotace na všech fakultách snížena: nejprve snížením počtu hodin přednášek ve 2. semestru na 2+2, od roku 1993/1994 na 2+2 po oba semestry. Každý semestr byl zakončen zápočtem a zkouškou. V roce 1995/1996 došlo ke změně v organizaci zkoušek – každý semestr byl zakončen zápočtem, celý předmět pak bakalářskou zkouškou za oba jednosemestrální předměty (akreditované pod zkratkou MAT101 a MAT102) dohromady.

Katedra matematiky zajišťovala výuku základů matematické analýzy a lineární algebry ve dvou povinných jednosemestrálních kursech (MAT101 a MAT102). V náplni těchto kurzů docházelo k postupné menší redukci učiva a k ústupu od přednášení důkazů matematických vět. Výklad byl ovšem po celou dobu strukturován klasicky – „definice, věta".

Počátkem 90. let byly navíc akreditovány různé výběrové přednášky (zakončené zkouškou), navazující na MAT101 a MAT102; největšímu zájmu se těšila numerická matematika a později akreditovaná historie matematiky.

V roce 2002 byly akreditovány předměty Calculus A a Calculus B (2 hodiny týdně), které měly sloužit jako příprava k bakalářské zkoušce z matematiky; Calculus A náplní učiva odpovídal předmětu MAT101, Calculus B předmětu MAT102; oba předměty byly zakončeny zápočtem. Předměty si studenti zapisovali buď paralelně s povinným předmětem MAT101, resp. MAT102 – jako zintenzivnění výuky, nebo až po absolvování těchto povinných předmětů jako opakování před zkouškou. O oba kursy – Calculus 105 i Calculus 106 – byl ze strany studentů vždy velký zájem.

Výuka předmětů MAT101, MAT102, Calculus A a Calculus B v současnosti už jen dobíhá v omezené míře.

3 Současnost

V souvislosti s přechodem školy na systém ECTS došlo ve školním roce 2005/2006 rozhodnutím vedení školy na dvou fakultách ke snížení hodinové dotace na polovinu: místo dvou semestrů (2+2) byla výuka matematiky zkrácena na jeden semestr (2+2). Od r. 2006/2007 bylo k této úpravě přistoupeno na všech fakultách; semestrální kurs matematiky byl akreditován pod označením 4MM101. Předmět je zakončen zkouškou, zápočty za cvičení se neudělují. Současně byl akreditován předmět Calculus 121, zaměřením odpovídající předmětu Calculus 105, resp. 106 (čili jako příprava ke zkoušce), obsahem odpovídající předmětu 4MM101.

Toto znatelné snížení počtu vyučovacích hodin s sebou nutně neslo i redukci rozsahu vyučované látky. I přes tuto poměrně rozsáhlou redukci byl ponechaný objem učiva oproti původnímu víc než poloviční – v polovičním časovém rozpětí těžko zvládnutelný. Bylo proto nutno přistoupit k celkové změně koncepce výuky – nejen po obsahové stránce, ale i po stránce metodologické. Po zkušenostech s výukou předmětu 4MM101 v roce 2005/2006 došlo k dalším změnám – nejen v náplni učiva, ale i ve formě výkladu. Bylo nutno respektovat požadavky odborných kateder na VŠE – nezatěžovat studenty zbytečnými pojmy, učinit výklad co nejsrozumitelnějším „populárnější formou" – s důrazem především na početní postupy. Za vzor byly dávány zahraniční vysoké školy podobného zaměření a jejich způsob výkladu matematických základů. Bylo proto ustoupeno od formy výkladu „definice, věta", symbolická vyjádření jsou často nahrazena slovními. Matematické pojmy jsou vykládány co nejjednodušším způsobem při maximálním možném zachování přesnosti. V tomto duchu byly vypracovány příslušné učební texty.

Při zkoušce nejsou od studentů vždy požadovány přesné formulace pojmů, ale je kladen důraz na pochopení a schopnost aplikace (např. místo vyslovení definice pojmu limita posloupnosti stačí grafické znázornění posloupnosti s předepsanou limitou apod.).

Podle zkušeností s výukou a zkouškami v r. 2006/2007 a podle výsledků studentské ankety, pořádané každoročně vedením školy, se výsledky takto koncipované výuky jeví vcelku příznivě. To, že se i studenti, kteří ještě mají složit bakalářskou zkoušku z matematiky (tj. z nezredukované látky MAT101 a MAT102), často připravují z učebních textů určených pro předmět 4MM101, svědčí o tom, že studentům zjednodušená forma výkladu vyhovuje. I po redukci obsahu a změně formy však poměrně velký objem učiva probíraného v krátkém časovém intervalu, bez možnosti důkladného procvičení (zde by mohl pomoci Calculus121) a „vstřebání" nových pojmů, činí předmět 4MM101 pro studenty dost náročným. Ve výhodě jsou v tomto směru absolventi gymnázií, kteří některé přednášené pojmy znají už ze střední školy. Na VŠE se ovšem často hlásí i studenti s horšími základy, pro ty je pak tempo výuky těžko akceptovatelné. Nicméně se zdá, že způsob výkladu se přiblížil představám odborných kateder na VŠE a že studenti v dostatečné míře zvládnou aspoň základní matematický aparát potřebný při výuce odborných předmětů.

Literatura

[1] *Prague School of Economics – Prospecus*. VŠE, Praha, 1968.

[2] Zdráhala, R. a kolektiv: *Studijní program Vysoké školy ekonomické v Praze (na školní rok 1972–73)*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1972.

[3] Švagr A. a kol.: *Studijní program*. VŠE, Praha, 1994.

[4] Horský Z.: *Učebnice matematiky pro posluchače VŠE*. SNTL, Praha, 1982.

[5] Klůfa J., Coufal J.: *Matematika I (pro VŠE)*. VŠE, Praha, 1994.

[6] Kaňka M., Henzler J.: *Matematika II (pro VŠE)*. VŠE, Praha, 1995.

[7] Klůfa J., Coufal J.: *Matematika 1*. Ekopress, Praha, 2003.

[8] Kaňka M., Henzler J.: *Matematika 2*. Ekopress, Praha, 2003.

[9] Kolektiv katedry matematiky: *Matematika pro 4MM101*. VŠE, Oeconomica, Praha, 2006.

Adresa

RNDr. Eva Ulrychová
Vysoká škola ekonomická
Katedra matematiky
Ekonomická 957
148 00 Praha 4
e-mail: *uleva@vse.cz*

PRACE EULERA Z ALGEBRY I TEORII LICZB

WITOLD WIĘSŁAW

Wstęp. W tym roku mija trzechsetna rocznica urodzin Lenharda Eulera (1707–1783). W związku z tym chciałbym przedstawić jego najważniejsze wyniki z algebry i teorii liczb.

1. Prace Eulera z algebry. Euler jest autorem 24 prac, które dziś zaliczamy do algebry. Obejmują one: zasadnicze twierdzenie algebry i zagadnienia pokrewne, rozwiązalność równań algebraicznych przez pierwiastniki, w tym przykłady takich równań stopnia 5, opis macierzy ortogonalnych stopnia 3, 4 i 5, teoria eliminacji, rozkład funkcji wymiernych na ułamki proste. W jednej z prac Euler dowiódł, że dwie krzywe algebraiczne stopnia m i n, które nie mają wspólnej części (komponenty), przecinają się w co najwyżej mn punktach. Twierdzenie to zwyczajowo przypisywane jest Étienne Bezoutowi. W korespondencji Eulera pojawiają się różne tożsamości algebraiczne, np. tożsamości dla iloczynów sum kwadratów.

2. Prace Eulera z teorii liczb. Euler napisał około 100 prac z teorii liczb, tzn. ok. 12% wszystkich jego prac. Obejmują one: arytmetykę liczb całkowitych (twierdzenie Eulera, małe twierdzenie Fermata, twierdzenie Wilsona, które on nazywa twierdzeniem Waringa), równania diofantyczne, ułamki łańcuchowe, formy kwadratowe. W pracach Eulera pojawia się po raz pierwszy funkcja rzeczywista, nazwana później funkcją dzeta Riemanna. Euler odkrył prawo wzajemności reszt kwadratowych w różnych szczególnych przypadkach. Nie podał jednak dowodu. W korespondencji Eulera często pojawiają się problemy z teorii liczb. Niekóre z nich są do dziś otwarte. Książka Eulera [3] zawiera wiele zagadnień diofantycznych. Euler był bliski dowodu twierdzenia o sumie czterech kwadratów, którego kompletny dowód podał Joseph-Louis Lagrange.

Literatura

[1] *Leonhardi Euleri Opera Omnia*. Sub Auspiciis Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae, Leipzig und Berlin, Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1911.
[2] P.-H. Fuss, *Correspondance Mathématique et Physique de Quelques Célébres Géométres du XVIIIéme Siécle*. Tome I–II, St.-Pétersbourg, 1843.
[3] L. Euler: *Vollständige Anleitung zur Algebra*. St. Petersburg, 1770.
[4] Историко математические исследования X (1957).
[5] Историко математические исследования XXVII (1983). Памяти Леонарда Эйлера.

Adresa

Dr hab. Witold Więsław
Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego
plac Grunwaldzki 2/4
50-384 Wrocław
Polsko
e-mail: *witold.wieslaw@math.uni.wroc.pl*

NEDOKONČENÁ SYMFONIE
(O TRAGICKY PŘERUŠENÉ SPOLUPRÁCI N. WIENERA A R.E.A.C. PALEYE V ROCE 1933)

IGOR ZOLOTAREV, KAREL F. ŽITNÝ

Mimořádně nadaný, mladý anglický matematik Raymond Paley v roce 1932 získal Rockefellerovo stipendium a měl po Wienerově boku strávit akademický rok na Massachusetts Institute of Technology (MIT). Jejich vysoce produktivní součinnost byla záhy a znenadání přervána. 7. dubna 1933 šestadvacetiletý milovník zimních sportů Paley při krátkém výletu do kanadských Rocky Mountains zahynul v lavině.

V nekrologu [4] jímž Wiener uctil jeho památku je zachováno svědectví o charakteru jejich plodné spolupráce. Naštěstí společně dosažené výsledky byly zavčas publikovány v Transactions of American Mathematical Society [2] a pokrývají širokou škálu témat jejichž jednotící ideou jsou vlastnosti Fourierovy transformace v komplexním oboru. Wienerovi připadl úkol scelit bohatý a různorodý materiál a dotáhnout nedokončený rukopis do publikovatelné podoby. Wiener, jak vyplývá z recensí na jeho vlastní tvorby, nebyl zdatným stylistou. Avšak dílo [3] jehož byl spoluautorem a poté editorem patří ke skvostům matematické literatury 20. století, ač je alespoň z části torsem. Oba autoři hýřili nápady.

Dynamický Paley nebyl jen mimořádně technicky zdatný. K řešení matematických problémů podle vlastního vyjádření přistupoval s ragbyovou taktikou a lze se domnívat, že tyto jeho kvality by se byly projevily i při závěrečné redakci díla. S dostatečným časovým odstupem, lze spolehlivě posoudit význam této monografie pro rozvoj oboru. Stručně řečeno, době vzniku přinesla množství nových výsledků a byla žhavě aktuální; dnes je výjimečná svým dlouhodobým působením. Preprinty v Transactions umožňují odlišit společný vklad obou autorů od individuálních přínosů, resp. od těch jichž dosáhli s dalšími spolupracovníky.

Obdivuhodné obeznámenost se soudobými trendy v oboru, jim umožnila vtělit jejich výsledky do širšího kontextu. Stojí za zmínku, že dílo např. obsahuje první knižní publikaci Hardyova principu neurčitosti [1] dokázaného v roce 1933. Rozsah příspěvku neumožňuje detailní rozbor matematického obsahu díla. Omezíme se proto na prezentaci pouze několika málo principiálních výsledků; a to těch, jenž patří do základního arzenálu matematické analýzy a jimž se dostalo dalekosáhlých zobecnění. Samozřejmě v případě N. Wienera bylo potřebné včlenit studovanou monografii do kontextu jeho předchozích prací a ocenit také jeho významný podíl na zvýšení prestiže MIT, jenž se začátkem 30-tých let minulého století rychle proměnil z tuctové inženýrské školy na čelnou výzkumnou univerzitu.

Literatura

[1] Hardy G. H.: *A Theorem Concerning Fourier Transformations*. J. London Math. Soc. 8(1933), 227–231.

[2] Paley R. E. A. C., Wiener N.: *Notes on the Theory and Application of Fourier Transforms*, *Notes I–VII*. Trans. Amer. Math. Soc. 35(1933), 348–355, 761–791.

[3] Paley R. E. A. C., Wiener N.: *Fourier Transforms in the Complex Domain*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol XIX, New York, 1934.

[4] Wiener N.: *R. E. A. C. Paley – in memoriam*, Bull. Amer. Math. Soc. 39(1933), 464.

Adresa

Ing. Igor Zolotarev, CSc.
Ústav termomechaniky AV ČR
Dolejškova 5
182 00 Praha 8
e-mail: *igor@it.cas.cz*

GAUSS A DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRIE

PETRA ŽÁČKOVÁ

1 Úvod

Johann Carl Friedrich Gauss se zabýval diferenciální geometrií velmi dlouho. Jeho nejdůležitějším dílem v této oblasti je kniha *Disquisitiones generales circa superficies curva*, psaná v latině.

Další oblastí, kterou se zabýval a která patřila do geometrie diferenciální, byla neeuklidovská geometrie. Gauss se této otázce věnoval velmi dlouho, ale nikdy nic nepublikoval. Bál se o svou pověst výborného matematika. Všechny jeho poznatky jsou známy pouze z jeho deníků a dopisů.

2 Disquisitiones generales circa superficies curva

První část obsahuje tři možnosti definování ploch:

1. explicitně: $w(x, y, z) = 0$,
2. parametrickými rovnicemi: $x = x(p,q)$, $y = y(p,q)$, $z = z(p,q)$
3. z jako funkce dvou proměnných x a y: $z = z(x, y)$

Nejdříve Gauss použil druhý způsob vyjádření plochy. O jednom z parametrů (p) prohlásil, že je dán a má proto konstantní hodnotu. Tím dospěl k parametrickému vyjádření q-křivky. Změnou hodnoty p získal celou množinu q-křivek. Podobně získáme množinu p-křivek. Tyto dvě množiny tvoří křivkovou parametrickou síť, která je souřadnicovou sítí plochy. Každá křivka z obou množin prochází každým bodem a dvě křivky z různých množin se protínají právě v jednom bodě. Tento souřadnicový systém je nyní znám jako Gaussovy křivkové souřadnice.

Dále Gauss definuje derivace

$$a = \frac{dx}{dp}, b = \frac{dy}{dp}, c = \frac{dz}{dp}, a' = \frac{dx}{dq}, b' = \frac{dy}{dq}, c' = \frac{dz}{dq},$$

nyní známé jako parciální derivace souřadnic poloměru, a funkce

$$A = bc' - cb', \quad B = ca' - ac', \quad C = ab' - ba',$$

dnes souřadnice průsečíku těchto vektorů a vektoru normály plochy. Nakonec určil druhé derivace:

$$\alpha = \frac{ddx}{dp^2}, \alpha' = \frac{ddx}{dpdq}, \alpha'' = \frac{ddx}{dq^2}, \beta = \frac{ddy}{dp^2}, \beta' = \frac{ddy}{dpdq}, \beta'' = \frac{ddy}{dq^2}, \gamma = \frac{ddz}{dp^2}, \gamma' = \frac{ddz}{dpdq}, \gamma'' = \frac{ddz}{dq^2}.$$

Potom pomocí těchto funkcí sestrojil dvě formy:

$$ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2 \quad \text{a} \quad Ddp^2 + 2D'dpdq + D''dq^2,$$

kde

$$E = aa + bb + cc,\qquad F = aa' + bb' + cc',\qquad G = a'a' + b'b' + c'c',$$

$$D = A\alpha + B\beta + C\gamma,\quad D' = A\alpha' + B\beta' + C\gamma',\quad D'' = A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma''.$$

První z nich je dnes označována jako první fundamentální forma a vyjadřuje čtverec lineárního elementu ds^2 vzdálenosti mezi dvěma velmi blízkými body plochy. Druhá forma je téměř shodná s nyní používanou druhou fundamentální formou.

Další objev, který Gauss použil, je sférické zobrazení. Toto zobrazení umožnilo Gaussovi určit křivost K (Gaussova křivost). Pro vyjádření plochy $z = z(x,y)$ má křivost vzorec

$$K = \frac{z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2}{\left(1 + z_x^2 + z_y^2\right)^2}.$$

Poté vypočítal křivost pro parametrické vyjádření plochy, ve kterém se objevily koeficienty druhé fundamentální formy:

$$K = \frac{DD'' - D'D'}{EG - FF}.$$

Po dalších výpočtech dospěl pro křivost K k formuli, která uvádí Gaussův další velice podstatný objev, větu *Theorema egregium*:

Jestliže zakřivenou plochu rozvineme v plochu jinou, pak křivosti v každém bodě zůstávají invariantní.

Všechny vlastnosti plochy, které jsou zachovány při deformaci, tvoří tzv. *vnitřní geometrii plochy*. Proto pokud máme křivočaré souřadnice plochy, koeficienty první fundamentální formy musí být stejné. Tím zde Gauss přestal tomuto věnovat pozornost.

Dále se zabývá geodetickými křivkami. Nahrazením souřadnic bodu za poloměr, jehož pravoúhlé souřadnice jsou rovny právě danému bodu, a nahrazením směrového kosinu za normálu jednotkového normálového vektoru $\vec{n}$, jehož pravoúhlé souřadnice jsou rovny směrovému kosinu, vyjádříme první a druhé derivace souřadnic jako vektory

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial p}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial p^2}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial p \partial q}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q^2}.$$

Další významná rovnice, odvozená Gaussem pro součet úhlů v geodetickém trojúhelníku, ukazuje, že počet nad 180°, pokud má plocha pozitivní křivost, a pod 180°, jestliže má plocha negativní křivost, je roven ploše sférického obrazu tohoto trojúhelníka. Gaussem je nazýván *curvatura integra* (totální křivost) trojúhelníka:

$$A + B + C - \pi = \int K d\sigma.$$

Také tento vzorec vedl Gausse k úvahám a výpočtům v neeuklidovské geometrii.

3 Neeuklidovská geometrie

V roce 1799 napsal svému spolužákovi z univerzity F. Bólyaiovi o svých výsledcích v teorii rovnoběžných přímek. Měl však pochybnosti, že jsou zcela správné.

Přesto po nějaké době začal připouštět logickou možnost neeuklidovské geometrie. V roce 1816 sepsal systém vět nové geometrie, kterou nazval anti-euklidovská, ale stále si nebyl úplně jistý, zda je logicky možná. V dopise matematiku Taurinusovi roku 1824 použil již výraz neeuklidovská geometrie a napsal, že ačkoliv se snažil najít v ní nějaké spory, neobjevil je. Nakonec v roce 1831 definitivně prohlásil, že neeuklidovská geometrie nemá v sobě nic rozporuplného.

V této oblasti udělal mnoho objevů. Např. uvedl, že pro měření částí existuje absolutní jednotka, která se objeví ve vzorcích jako konstanta k. Tím dospěl k názoru, že obvykle lze získat euklidovskou geometrii jako limitní případ geometrie neeuklidovské, necháme-li konstantu k blížit k nekonečnu.

Literatura

[1] Kolmogorov A. N.: *Mathematics of the 19th century: Geometry, Analytic Function Theory*. Basel, Birkhäuser, 1996.

[2] Carrucio E.: *Mathematics and logic history and in contemporary thought*. New Jersey, Aldine transaction, 2006.

[3] Gauss C. F.: *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Göttingen, 1828.

[4] Price B.: *A treatise on the differential calculus: and its applications to algebra and geometry, founded on the method of infinitesimal*. Oxford, University Press, 1852.

[5] Cartan É.: *Geometry of Riemannian spaces*. Brookline, Math Science Press, 1983.

[6] Gray J. J.: *Carl Friedrich Gauss* [online]. c2007 [cit. 2007-04-27]. Dostupný z WWW: <http://concise.britannica.com/ebc/article-9109423/Carl-Friedrich-Gauss>.

[7] *Carl Friedrich Gauss* [online]. 2007, 1 May 2007 [cit. 2007-05-03]. Dostupný z WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss>.

Adresa

Mgr. Petra Žáčková
Technická univerzita v Liberci
Hálkova 6
461 17 Liberec 1
e-mail: *petra.zackova@tul.cz*

OBSAH

Martina Bečvářová (ed.)

28. mezinárodní konference

HISTORIE MATEMATIKY

Jevíčko, 24. až 28. 8. 2007

Katedra didaktiky matematiky MFF UK

Vydal
MATFYZPRESS
vydavatelství
Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze
Sokolovská 83, 185 75 Praha 8
jako svou 210. publikaci

Z předloh připravených v systému Word
vytisklo Reprostředisko UK MFF
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

První vydání

Praha 2007

ISBN 978-80-7378-016-6