

Oldřich Odvárko, Jarmila Robová

MATEMATIKA A BUDOVNÍ FINANČNÍ GRAMOTNOSTI



Vzdělávací modul MATEMATIKA

Výukový a metodický text

Přírodní vědy a matematika na středních školách v Praze:
aktivně, aktuálně a s aplikacemi – projekt OPPA



Praha 2012

Publikace byla vydána v rámci Operačního programu Praha – Adaptabilita (OPPA) a jeho projektu Přírodní vědy a matematika na středních školách v Praze: aktivně, aktuálně a s aplikacemi. Řešiteli projektu jsou pracovníci Přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy v Praze a Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Autoři textu:

doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc., Katedra didaktiky matematiky, MFF UK Praha
oldrich.odvarko@mff.cuni.cz

RNDr. Jarmila Robová, CSc., Katedra didaktiky matematiky, MFF UK Praha
jarmila.robova@mff.cuni.cz

Recenzenti:

Mgr. Věra Dědečková

RNDr. Jakub Staněk, Ph.D.

Vydalo Nakladatelství P3K s. r. o. v Praze v roce 2012 v nákladu 120 ks. Vydání první.

Ze sazby dodané autory vytiskl xPrint s. r. o.

Publikace neprošla jazykovou korekturou.

© Oldřich Odvárko, Jarmila Robová, 2012

© Nakladatelství P3K, 2012

ISBN 978-80-87186-72-5

OBSAH

Několik informací úvodem	5
1. Role finanční gramotnosti ve školské matematice	6
2. Prohlubování poznatků z nižších ročníků víceletých gymnázií a základních škol	8
2.1 Text pro učitele	8
2.2 Pracovní listy s řešením a metodickými poznámkami	9
2.2.1 Variace na téma TELEVIZOR	9
2.2.2 Variace na téma KORUNY A EURA	12
2.2.3 Variace na téma PRONÁJEM AUTA	15
3. Vklady a investice	19
3.1 Text pro učitele	19
3.2 Pracovní listy s řešením a metodickými poznámkami	21
3.2.1 Variace na téma TERMÍNOVANÉ VKLADY	21
3.2.2 Variace na téma INVESTICE	24
4. Spoření a úvěry	16
4.1 Text pro učitele	26
4.2 Pracovní listy s řešením a metodickými poznámkami	28
4.2.1 Variace na téma SPOŘENÍ	28
4.2.2 Variace na téma ÚVĚRY	29
Pracovní listy	33
Variace na téma TELEVIZOR	34
Variace na téma KORUNY A EURA	37
Variace na téma PRONÁJEM AUTA	39
Variace na téma TERMÍNOVANÉ VKLADY	42
Variace na téma INVESTICE	44
Variace na téma SPOŘENÍ	46
Variace na téma ÚVĚRY	48
Literatura	51
Rejstřík	52

Několik informací úvodem

Tento materiál je určen především pro učitele matematiky středních škol, kteří chtějí u svých žáků budovat a rozvíjet finanční gramotnost. Pro tento účel jsme připravili sady pracovních listů s úlohami, které tvoří těžiště tohoto materiálu. Příručka je rozdělena do čtyř kapitol, po nichž následují přílohy se zadáními pracovních listů pro žáky, přehled doporučené literatury a rejstřík základních pojmů.

První kapitola je věnována úloze finančního vzdělávání ve školské matematice a obsahuje charakteristiku finanční gramotnosti včetně standardů pro středoškolskou úroveň.

Druhá, třetí a čtvrtá kapitola se zabývají různými okruhy problémů z oblasti financí. Všechny tyto kapitoly mají stejnou strukturu:

- V úvodu kapitoly je vždy uveden seznam pracovních listů k danému okruhu.
- Následuje text pro učitele, ve kterém jsou obsaženy potřebné pojmy a vzorce z finanční matematiky. Jsou zde k dispozici také odkazy na doplňující a aktuální zdroje informací ze světa financí. Pro každý pracovní list jsou předem uvedeny požadavky na žákovy znalosti a návrh tematického začlenění pracovního listu do výuky.
- Nejobsáhlejší část kapitoly tvoří vzorová řešení pracovních listů doplněná metodickými poznámkami.

Do příloh jsou zařazeny pracovní listy pro žáky, jejichž zadání lze pro výuku přímo zkopírovat.

V seznamu literatury jsou uvedeny učebnice a sbírky úloh z finanční matematiky vhodné pro žáky středních škol, metodické články pro učitele a webové stránky s přehledovými informacemi.

Pomocí rejstříku lze snadno nalézt potřebný pojem či vzorec.

Součástí příručky je CD. Na tomto CD je k dispozici celý text příručky a v samostatných souborech jsou pracovní listy pro žáky, které lze snadno vytisknout.

A ještě několik důležitých doporučení na závěr tohoto úvodu:

- Před použitím pracovního listu ve výuce je třeba zvážit, zda žáci ovládají potřebné finanční pojmy, které jsou vysvětleny v textu pro učitele.
- Při numerických řešeních jednotlivých úloh z pracovních listů je účelné používat kalkulačku, aby se žáci mohli soustředit na obsahovou podstatu problému.
- Ve většině úloh v pracovních listech se zaokrouhluje podle matematických pravidel. V případě, že způsob zaokrouhlení není zřejmý, je v textu příslušné úlohy uvedeno, jak mají žáci zaokrouhlit.

1. Role finanční gramotnosti ve školské matematice

V roce 2005 byl vytvořen společný dokument Ministerstva financí ČR, Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR a Ministerstva průmyslu a obchodu ČR. Tento dokument s názvem *Systém budování finanční gramotnosti na základních a středních školách* byl v roce 2007 inovován. Je v něm uvedena charakteristika finanční gramotnosti a její tři základní složky.

Finanční gramotnost je soubor znalostí, dovedností a hodnotových postojů občana nezbytných k tomu, aby finančně zabezpečil sebe a svou rodinu v současné společnosti a aktivně vystupoval na trhu finančních produktů a služeb. Finančně gramotný občan se orientuje v problematice peněz a cen a je schopen odpovědně spravovat osobní/rodinný rozpočet, včetně správy finančních aktiv a finančních závazků s ohledem na měnící se životní situace.

Finanční gramotnost zahrnuje tři složky – a to **gramotnost peněžní, cenovou a rozpočtovou**. Východiskem pro budování finanční gramotnosti je gramotnost peněžní. Ta zahrnuje kompetence nezbytné pro správu hotovostních a bezhotovostních peněz a transakcí s nimi. Jádrem rozvíjení finanční gramotnosti žáků je gramotnost rozpočtová. Ta staví na kompetencích nezbytných pro správu osobního a rodinného rozpočtu, finančních aktiv (např. vkladů, investic a pojištění) a finančních závazků (např. úvěrů nebo leasingu). To předpokládá orientaci na trhu finančních produktů a služeb, schopnost mezi sebou jednotlivé produkty či služby porovnávat a volit ty nejvhodnější s ohledem na konkrétní životní situaci. Cenová gramotnost vymezuje kompetence nezbytné pro porozumění cenovým mechanismům a inflaci.

Občan s nízkou úrovní finanční gramotnosti není schopen orientovat se v záplavě nabídek obchodů, cestovních kanceláří, pojišťoven, bank apod. Neumí kriticky posoudit míru výhodnosti různých nabídek, nechává se zlákat různými reklamami, neumí si vybrat optimální variantu z nabízených finančních produktů. To často vede k finančním ztrátám a k zadluženosti. I proto bychom měli žáky připravit na nejrůznější situace ze světa financí, se kterými se budou v životě setkávat.

Rozvoj a zvyšování finanční gramotnosti žáků se musí stát důležitou součástí vzdělávání na základních i středních školách. Základním vodítkem pro obsah finančního vzdělávání žáků jsou *Standardy finanční gramotnosti*. Předpokládá se, že tyto *Standardy* budou realizovány na středních školách zejména ve vzdělávacím oboru *Matematika a její aplikace* a dále v oblastech společenskovedního a ekonomického vzdělávání (na gymnáziích se jedná o vzdělávací obor *Člověk a svět práce*).

Standardy finanční gramotnosti vymezují okruhy učiva včetně očekávaných výsledků. Obsah těchto standardů pro střední vzdělávání je rozdělen do čtyř základních okruhů:

- Peníze
- Hospodaření domácnosti
- Finanční produkty
- Práva spotřebitele

Standard finanční gramotnosti pro střední vzdělávání

Peníze	
Obsah	Výsledky
Placení (v tuzemské i zahraniční měně).	Používá nejběžnější platební nástroje, smění peníze za použití kurzovního lístku.
Tvorba ceny.	Stanoví cenu jako součet nákladů, zisku a DPH.
	Vysvětlí, jak se cena liší podle zákazníků, místa, období, ...
Inflace.	Rozpozná běžné cenové triky (cena bez DPH, ...) a klamavé nabídky.
	Vysvětlí podstatu inflace a její důsledky na příjmy obyvatelstva, vklady a úvěry, dlouhodobé finanční plánování a uvede příklady, jak se důsledkům inflace bránit.
Hospodaření domácnosti	
Obsah	Výsledky
Rozpočet domácnosti.	Rozliší pravidelné a nepravidelné příjmy a výdaje a na základě toho sestaví rozpočet domácnosti.
	Navrhne, jak řešit schodkový rozpočet a jak naložit s přebytkovým rozpočtem domácnosti.
Finanční produkty	
Obsah	Výsledky
Přebytek finančních prostředků.	Navrhne způsoby, jak využít volné finanční prostředky (spoření, produkty se státním příspěvkem, cenné papíry, nemovitosti, ...).
	Vybere nejvýhodnější produkt pro investování volných finančních prostředků a vysvětlí proč.
Nedostatek finančních prostředků.	Vybere nejvýhodnější úvěrový produkt s ohledem na své potřeby a zdůvodní svou volbu.
	Posoudí způsoby zajištění úvěru a vysvětlí, jak se vyvarovat předlužení.
	Vysvětlí způsoby stanovení úrokových sazeb a rozdíl mezi úrokovou sazbou a RPSN.
Pojištění.	Vybere nevhodnější pojistný produkt s ohledem na své potřeby.
Práva spotřebitele	
Obsah	Výsledky
Předpisy na ochranu spotřebitele.	Na příkladu vysvětlí, jak uplatňovat práva spotřebitele (při nákupu zboží a služeb včetně produktů finančního trhu).
Obsah smluv.	Na příkladu ukáže možné důsledky neznalosti smlouvy včetně jejich všeobecných podmínek.

2. Prohlubování poznatků z nižších ročníků víceletých gymnázií a základních škol

Do této kapitoly jsou zařazeny tři pracovní listy:

- Variace na téma **TELEVIZOR**
- Variace na téma **KORUNY A EURA**
- Variace na téma **PRONÁJEM AUTA**

2.1 Text pro učitele

Pojmy a vzorce z finanční matematiky

Daň z přidané hodnoty (DPH) je daň, které podléhají zboží a služby. Základním principem je to, že ji platí každý konečný spotřebitel.

Směnný (měnový) **kurz** je cena jedné měny vyjádřená v jednotkách měny jiné. Obvykle se udává jako podíl domácí měny ku měně zahraniční.

Valuty jsou hotovostní formou peněz. (Devizy jsou bezhotovostní formou peněz.)

Zdroje informací včetně jejich aktualizací

- DPH – <http://finexpert.e15.cz/financni-zaklady---co-je-to-dph>
- Směnný kurz, poplatky – <http://www.finance.cz/bankovnictvi/kurzovni-listky/banky-a-smenarny/>, <http://www.nejlepsi-kurzy.cz/>, <http://www.kurzy.cz/kurzy-men/>
- Pronájmy auta – <http://www.maxiauto.cz/cenik-autopark>, <http://www.foxcars.cz/cenik.php>,
- denní tisk (např. Hospodářské noviny)

Požadavky na žáka, začlenění do výuky

Při řešení pracovního listu **Variace na téma TELEVIZOR** je třeba, aby žák

- ovládal operace s čísly, práci s procenty (počet procent, procentová část, základ), práci s algebraickými výrazy, řešení lineárních rovnic;
- vše je opakování ze základní školy, pracovní list lze zařadit v úvodním prohlubování učiva ZŠ.

Při práci s pracovním listem **Variace na téma KORUNY a EURA** by měl žák

- ovládat operace s čísly, práci s procenty, řešení lineárních rovnic, práci s lineárními funkcemi a funkcemi po částech lineárními;
- pracovní list lze využít v úvodním opakování, či jej zařadit do tématu Funkce.

Pro řešení pracovního listu **Variace na téma PRONÁJEM AUTA** by měl žák

- ovládat operace s čísly, vyjadřovat lineární závislosti, řešení lineárních rovnic a nerovnic;
- pracovní list doporučujeme zařadit v průběhu tématu Lineární rovnice a nerovnice, eventuelně až do tématu Funkce; pracovní list lze také začlenit do úvodního opakování

(v tomto případě je třeba řešit úlohy pomocí lineárních rovnic a dodatečných logických úvah, neboť nerovnice nejsou obsaženy v učivu ZŠ).

2.2 Pracovní listy s řešením a metodickými poznámkami

2.2.1 Variace na téma TELEVIZOR

Počáteční cena televizoru **T** je v prodejně *Na rohu* **14 490 Kč**. Kromě úloh 3 a 4 zůstáváme stále jen v této prodejně.

1. Reklama na T

AKCE: Televizor T je zlevněn o 20 % na 12 599 Kč.

a) Odhadněte, zda zlevnění činí skutečně 20 %.

Odpověď: Zlevnění nečiní 20 %.

b) Jaká by byla cena televizoru při zlevnění o 20 %?

$$14\,490 \text{ Kč} \cdot 0,8 = 11\,592 \text{ Kč}$$

Odpověď: Cena televizoru po zlevnění o 20 % je 11 592 Kč.

Metodické poznámky

- Úlohu lze rozšířit o doplňující úkol: O kolik procent byl televizor **T** zlevněn? (Přibližně o 13 %.)
- Před řešením úkolu b) mohou žáci přibližnou cenu televizoru stanovit odhadem.

2. Další reklama na T

Televizor **T** má být zlevněn o 12 %. Ve výloze se objevilo:

CENOVÁ BOMBA: Televizor T je zlevněn na 12 %.

a) Je to totéž?

Odpověď: Televizor není zlevněn na 12 %.

b) Vypočítejte cenu televizoru **T** po zlevnění o 12 % a po zlevnění na 12 %.

$$\text{Zlevnění o 12 \%: } 14\,490 \text{ Kč} \cdot 0,88 = 12\,751,2 \text{ Kč}$$

Odpověď: Cena televizoru po zlevnění o 12 % je 12 751 Kč.

$$\text{Zlevnění na 12 \%: } 14\,490 \text{ Kč} \cdot 0,12 = 1\,738,8 \text{ Kč}$$

Odpověď: Cena televizoru po zlevnění na 12 % je 1 739 Kč.

c) Při kolika procentech je zlevnění **o** stejné jako zlevnění **na**?

Odpověď: Zlevnění je stejné při 50 %.

Metodické poznámky

- Zaokrouhlování v této i dalších úlohách tohoto pracovního listu provádíme podle matematických pravidel, jak je v obchodech běžné.
- Před řešením úkolu b) mohou žáci přibližné ceny televizoru po zlevněních stanovit odhadem (hrubý odhad získají užitím slev o 10 % a na 10 %).
- Při řešení úkolu c) by si žáci měli uvědomit, že při zlevnění **o** 50 % i **na** 50 % jde o numericky stejný výpočet $14\,490 \text{ Kč} \cdot 0,5$.

3. Zlevnění T ve dvou prodejnách

V prodejně *Na rohu* byl televizor **T** zlevněn z původní ceny 14 490 Kč o 12 %. V konkurenční prodejně byl zlevněn o 15 %, přitom původní cena byla 15 799 Kč. Ve které prodejně je televizor **T** po zlevnění lacinější?

Na rohu – zlevnění o 12 %: $14\,490 \text{ Kč} \cdot 0,88 = 12\,751,2 \text{ Kč}$, cena po zlevnění 12 751 Kč.
Konkurenční prodejna – zlevnění o 15 %: $15\,799 \text{ Kč} \cdot 0,85 = 13\,429,15 \text{ Kč}$, cena po zlevnění je 13 429 Kč.

Odpověď: Televizor je po zlevnění lacinější v prodejně *Na rohu*.

Metodická poznámka

- Výsledná cena po zlevnění nezávisí pouze na počtu procent, o který se cena snižuje, podstatný je rovněž základ, ze kterého se vychází.

4. Cena s DPH a bez DPH

V prodejně *Na rohu* je cena 14 490 Kč televizoru **T** uvedena včetně DPH (*Daně z Přidané Hodnoty*), která činí 20 % z ceny bez DPH. V konkurenční prodejně stojí stejný televizor 12 500 Kč bez DPH. Ve které prodejně je televizor **T** pro plátce DPH levnější?

Prodejna *Na rohu* – s DPH: 14 490 Kč

Konkurenční prodejna – s DPH: $12\,500 \text{ Kč} + 12\,500 \text{ Kč} \cdot 0,2 = 12\,500 \text{ Kč} \cdot 1,2 = 15\,000 \text{ Kč}$

Odpověď: Pro plátce DPH je televizor levnější v prodejně *Na rohu*.

Metodické poznámky

- Při koupi některých produktů je třeba bedlivě sledovat, zda jde o cenu s DPH či bez DPH.
- Při změně výše DPH je vhodné údaje v úloze aktualizovat.

5. Téměř vše se zlevňuje

CENY PADAJÍ: Téměř všechno zboží zlevněno o 30 % až 70 %.

Kolik bude stát televizor **T**?

Zlevnění o 30 %: $14\,490 \text{ Kč} \cdot 0,7 = 10\,143 \text{ Kč}$, cena po zlevnění je 10 143 Kč

Zlevnění o 70 %: $14\,490 \text{ Kč} \cdot 0,3 = 4\,347 \text{ Kč}$, cena po zlevnění je 4 347 Kč

Odpověď: Pokud televizor patří do uvedené skupiny zlevněného zboží, jeho cena se bude pohybovat v rozmezí 4 347 Kč až 10 143 Kč. Pokud do této skupiny nepatří, nelze o jeho ceně nic říci.

Metodická poznámka

- Z uvedeného sloganu vyplývá, že pokud televizor nepatří do uvedené skupiny zlevněného zboží, může být jeho cena stejná či zlevněna méně než o 30 %, nebo (což je nepravděpodobné) zlevněna o více než o 70 %. Nelze vyloučit ani možnost, že televizor je zdražen. Doporučujeme tyto úvahy provést s žáky detailně.

6. Dvojitě zlevnění

Televizor **T** byl dvakrát po sobě zlevněn. Nejprve o 15 % a později ještě o 10 %. Zjistěte cenu po dvojitě zlevnění.

Zlevnění o 15 %: $14\,490 \text{ Kč} \cdot 0,85 = 12\,316,5 \text{ Kč}$, cena po prvním zlevnění je 12 317 Kč

Další zlevnění o 10 %: $12\,317 \text{ Kč} \cdot 0,9 = 11\,085,3 \text{ Kč}$, cena po druhém zlevnění je 11 085 Kč

Odpověď: Cena po dvojitě zlevnění činí 11 085 Kč.

Metodické poznámky

- Je dobré si uvědomit, že po prvním zlevnění prodejce zaokrouhlí výsledek výpočtu na celé koruny a při dalším zlevnění vychází ze zaokrouhlené ceny.

Tuto úlohu lze dále různě modifikovat:

- a) Televizor **T** byl dvakrát po sobě zlevněn. Nejprve o 10 % a později ještě o 15 %. Zjistěte cenu po dvojnásobném zlevnění.

$$\text{(Zlevnění o 10 \% - } 14\,490 \text{ Kč} \cdot 0,9 = 13\,041 \text{ Kč, zlevnění o 15 \% je } 13\,041 \text{ Kč} \cdot 0,85 = 11\,084,85 \text{ Kč.)}$$

Výsledná cena je stejná jako v původní úloze. Vzhledem ke komutativnosti násobení platí $0,85 \cdot (0,9 \cdot 14\,490) = 0,9 \cdot (0,85 \cdot 14\,490)$. Při zaokrouhlování dílčích výsledků se mohou výsledné částky před zaokrouhlením lišit.

- b) Televizor **T** byl zlevněn najednou o 25 %. Bude jeho cena po této slevě stejná jako při dvou postupných zlevněních o 15 % a o 10 %?

$$\text{(Nebude, } 14\,490 \text{ Kč} \cdot 0,75 = 10\,867,5 \text{ Kč.)}$$

Výhodnější je jednorázová sleva o 25 %, neboť se jedná o slevu z vyššího základu než v případě druhé slevy o 10 %.

7. Zdražení a zlevnění

Televizor **T** byl před vánočními svátky zdražen o 15 % a na začátku ledna byl následně zlevněn o 15 %.

- a) Odhadněte, zda konečná cena **T** je vyšší či nižší než počáteční cena, nebo zda je stejná.

Odpověď: Je nižší.

- b) Vypočítejte konečnou cenu.

$$\text{Zdražení o 15 \%: } 14\,490 \text{ Kč} \cdot 1,15 = 16\,663,5 \text{ Kč, cena po zdražení je } 16\,664 \text{ Kč}$$

$$\text{Zlevnění o 15 \%: } 16\,664 \text{ Kč} \cdot 0,85 = 14\,164,4 \text{ Kč}$$

Odpověď: Konečná cena činí 14 164 Kč.

- c) Řešte tento problém obecně pro případ, že zdražení i následné zlevnění je a %.

$$\text{Zdražení o } a \text{ \%: } 14\,490 \text{ Kč} \cdot \left(1 + \frac{a}{100}\right)$$

$$\text{Zlevnění o } a \text{ \%: } 14\,490 \text{ Kč} \cdot \left(1 + \frac{a}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{a}{100}\right) = 14\,490 \text{ Kč} \cdot \left(1 - \frac{a^2}{10\,000}\right)$$

Metodické poznámky

- Konečná cena je nižší, protože zlevnění se váže k vyššímu základu (ze zdražené ceny), než byl původní základ. Nezáleží přitom na původní výši základu.
- Po vyřešení úkolu c) je možné se vrátit k úkolu b) a vyřešit jej znovu pomocí vztahu nalezeného v c), kde dosadíme $a = 15$.
- V případě, že žáci dosud neprobírali operace s výrazy, lze úkol c) vynechat.

8. Zdražení a zlevnění podruhé

Televizor **T** byl před vánočními svátky zdražen o 15 %. Na začátku ledna má být zlevněn o tolik procent, aby cena byla stejná jako před zdražením.

- a) Kolik procent to bude?

Neznámou slevu v počtu procent označíme symbolem x . Sestavíme následující rovnici:

$$14\,490 \cdot (1 + 0,15) \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 14\,490.$$

Řešením této rovnice je

$$x = 13,043.$$

Odpověď: Cena bude stejná při zlevnění o 13 %.

b) Řešte tento problém pro zdražení o a %.

Po zdražení o a % následuje neznámá sleva o b %. Hledáme vztah mezi a a b :

$$14\,490 \cdot \left(1 + \frac{a}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{b}{100}\right) = 14\,490$$

Odtud plyne:

$$b = \frac{100a}{100 + a}$$

Metodické poznámky

- Doporučujeme úkoly a) i b) řešit pro případ, kdy je televizor nejprve zlevněn (o 15 %, o a %) a následně zdražen.
- Žáci by si měli uvědomit, že původní cena televizoru nemá vliv na výsledek.

2.2.1 Variace na téma KORUNY a EURA

1. Nákup 500 eur

Banka A prodává dnes 1 euro za 26,40 Kč. Poplatek za směnu peněz činí 1 % z částky, která se směňuje. Kolik korun zaplatím za nákup 500 eur?

Nákup i s poplatkem: $500 \cdot 26,40 \text{ Kč} + 0,01 \cdot (500 \cdot 26,40 \text{ Kč}) = 1,01 \cdot (500 \cdot 26,40 \text{ Kč}) = 13\,332 \text{ Kč}$

Odpověď: Celkem za 500 eur zaplatíme 13 332 Kč.

Metodické poznámky

- Úlohu lze modifikovat pro různé výše poplatků (např. 0 %, 1,5 %, ...).
- Doporučujeme úlohu (a stejně tak i ty následující) modifikovat s použitím aktuálního směnného kurzu.

2. Změny kurzu euro-koruna

Dne 1. 11. bylo v bance B při nákupu 1 euro za 26,31 Kč, dne 14. 11. za 26,07 Kč. V této bance je poplatek za směnu peněz nulový.

a) Kolik korun bych v bance B zaplatil za 500 eur dne 1. 11. a kolik korun zaplatím 14. 11.?

Nákup 1. 11.: $500 \cdot 26,31 \text{ Kč} = 13\,155 \text{ Kč}$

Nákup 14. 11.: $500 \text{ Kč} \cdot 26,07 = 13\,035 \text{ Kč}$

Odpověď: Dne 1. 11. bych zaplatil 13 155 Kč, dne 14. 11. zaplatím 13 035 Kč.

b) Kolik korun činí rozdíl?

Rozdíl: $13\,155 \text{ Kč} - 13\,035 \text{ Kč} = 120 \text{ Kč}$

Odpověď: Rozdíl činí 120 Kč.

Metodická poznámka

- Žáci by si měli uvědomit, že směnné kurzy se denně vyhledávají a mění.

3. Nákup eur za 12 000 Kč

Chci si dnes v *bance C* koupit eura za 12 000 Kč, ze kterých se uhradí i poplatek ve výši 1,5 % za směnu peněz. Banka prodává 1 euro za 26,27 Kč.

a) Kolik dostanu eur?

Neznámý je počet eur, který získáme za 12 000 Kč. Tento počet eur označíme x .

Cena v korunách za 1 euro s poplatkem: $1,015 \cdot 26,27$ Kč

Cena v korunách za x eur: $x \cdot 1,015 \cdot 26,27$ Kč

Získáme rovnici:

$$x \cdot 1,015 \cdot 26,27 = 12\,000$$

Její řešení je

$$x \doteq 450,04.$$

Odpověď: Dostanu 450 eur.

b) Kolik korun činí poplatek za směnu peněz?

Poplatek 1,5 % za 450 eur v korunách: $0,015 \cdot 450 \cdot 26,27$ Kč $\doteq 177,32$ Kč

Odpověď: Poplatek za směnu peněz činí 177 Kč.

Metodické poznámky

- V úkolu a) by nám banka měla správně dát 450 eur a 4 centy. Banky však takové drobné nemívají. Je otázkou, zda banka po vydání 450 eur vrátí 1 Kč.

- Úlohu lze modifikovat takto:

Chci si dnes v *bance C* koupit eura za 12 000 Kč. Banka prodává 1 euro za 26,27 Kč. Poplatek ve výši 1,5 % za směnu peněz zaplatím navíc.

a) Kolik dostanu eur? (456 €, přibližně 21 Kč zbyde)

b) Kolik korun činí poplatek za směnu peněz? (180 Kč)

4. Nákup a prodej eur

V *bance D* jsem nakoupil na dovolenou 500 eur po 25,76 Kč. Na dovolenou jsem nakonec neodjel, a šel jsem proto do *banky D* eura prodat. Banka odkupovala ten den 1 euro za 24,97 Kč. Při nákupu jsem platil za směnu peněz poplatek 1 %, při prodeji mi byla sražena 2 % z částky vyplacené v korunách.

Kolik korun jsem na této „dvojsměně“ prodělal? Výsledky zaokrouhlujte na koruny podle matematických pravidel.

Nákup 500 eur: $(500 \cdot 25,76 \text{ Kč}) \cdot 1,01 = 13\,008,8 \text{ Kč} \doteq 13\,009 \text{ Kč}$

Prodej 500 eur: $(500 \cdot 24,97 \text{ Kč}) \cdot 0,98 = 12\,235,3 \text{ Kč} \doteq 12\,235 \text{ Kč}$

Ztráta: $13\,009 \text{ Kč} - 12\,235 \text{ Kč} = 774 \text{ Kč}$

Odpověď: Na „dvojsměně“ jsem prodělal 774 Kč.

Metodická poznámka

- Zpětný odkup valut bývá obvykle ztrátový (záleží ovšem na časových změnách kurzu).

5. S poplatkem i bez poplatku

Banka E prodává dnes 1 euro za 25,28 Kč s poplatkem 1%, *banka F* prodává 1 euro za 25,82 Kč bez poplatku.

Ve které bance je pro mě nákup eur finančně výhodnější?

Banka E, za 1 euro: $1,01 \cdot 25,28 \text{ Kč} \doteq 25,53 \text{ Kč}$

Banka F, za 1 euro: 25,82 Kč

Odpověď: Finančně výhodnější je nákup v bance E.

Metodické poznámky

- Úlohu lze řešit odhadem z paměti, není nutný přesný výpočet.
- Při nákupu eur je nutno sledovat nejen směnný kurz, ale též výši poplatku.

6. Minimální a maximální poplatek

Banka G prodává 1 euro za 25,64 Kč. Poplatek činí 1 % ze směňované částky, minimální poplatek je ale 50 Kč bez ohledu na výši této částky, maximální poplatek činí 2 500 Kč. Banka H má ten den stejný směnný kurz koruna – euro, poplatek za směnu peněz je 1 %, a to bez ohledu na výši směňované částky.

a) Pro které částky eur je finančně výhodnější zajít do banky G?

Označíme neznámou nakupovanou částku v korunách písmenem x a výši poplatku y .

Pro závislost y na x platí:

Banka G

$$\begin{aligned}y &= 50 && \text{pro } x \in (0, 5\,000) \\y &= 0,01x && \text{pro } x \in (5\,000, 250\,000) \\y &= 2\,500 && \text{pro } x > 250\,000\end{aligned}$$

Banka H

$$y = 0,01x \quad \text{pro } x > 0$$

V bance G je výhodnější nakupovat eura za částky vyšší než 250 000 Kč.

Odpovídající počet eur: $250\,000 \text{ Kč} : 25,64 \text{ Kč} \doteq 9\,750,39$

Odpověď: Do banky G je výhodnější zajít pro částky vyšší než 9 750 eur.

b) Ve které bance je finančně výhodnější nakoupit 500 eur?

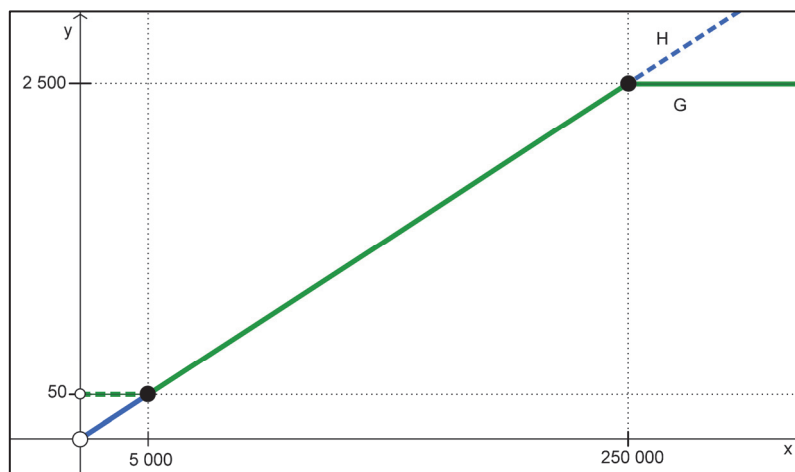
Částka v korunách za 500 eur bez poplatku: $500 \cdot 25,64 \text{ Kč} = 12\,820 \text{ Kč}$

Částka 12 820 Kč je vyšší než 5 000 Kč a nižší než 250 000 Kč.

Odpověď: Nákup 500 eur je finančně stejně výhodný v obou bankách.

Metodická poznámka

- Podstatu řešení této úlohy lze žákům názorně přiblížit pomocí grafů obou funkcí v jedné soustavě souřadnic (obr. 1).



Obr. 1 – Závislost poplatku za směnu peněz na výši směňované částky v Kč

2.2.3 Variace na téma PRONÁJEM AUTA

1. Pronájem osobního automobilu

Panu Zlámalovi se před cestou k zákazníkovi rozbilo auto, a proto se rozhodl pronajmout si v půjčovně aut na jeden den automobil Škoda Roomster. Může si vybrat ze dvou tarifů:

- Zaplatit denní paušál ve výši 920 Kč.
- Zaplatit denní pronájem 450 Kč a navíc za každý ujetý kilometr 7 Kč.

V obou případech benzin hradí sám.

a) Jaký tarif je výhodnější, jestliže zákazník bydlí ve vzdálenosti 50 km?

Denní paušál bez kilometrovného: 920 Kč

Pronájem s kilometrovným: 450 Kč + (7 · 100) Kč = 1 150 Kč

Odpověď: Výhodnější je denní paušál bez kilometrovného.

b) Pro jaký počet ujetých kilometrů je finančně výhodnější denní paušál? Výsledek uveďte v celých kilometrech.

Neznámý je počet kilometrů, který označíme x .

Sestavíme nerovnici:

$$920 < 450 + 7x$$

$$\frac{470}{7} < x$$

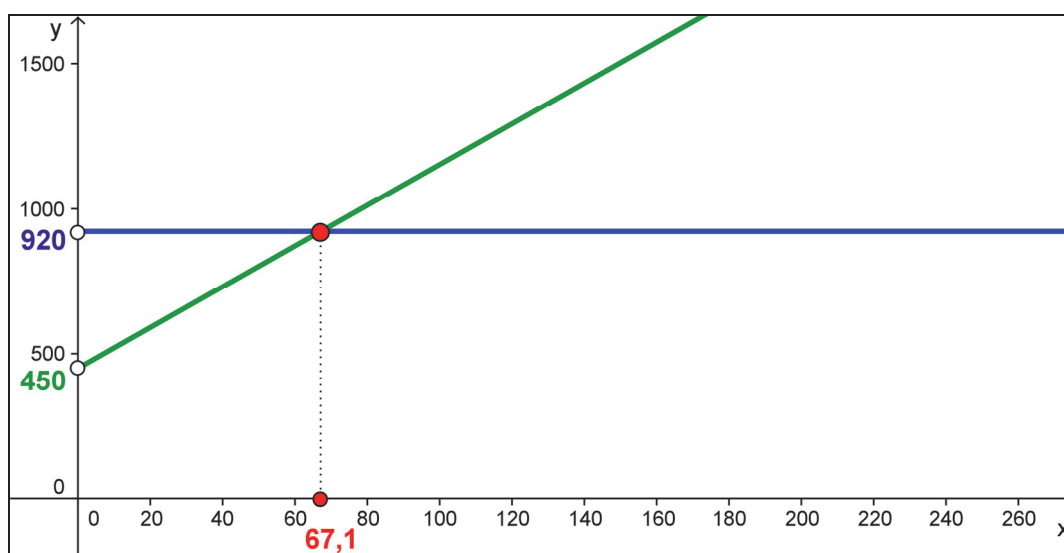
Zjistíme, že $\frac{470}{7} \doteq 67,14$.

Odpověď: Denní paušál je výhodnější při ujetí alespoň 68 kilometrů.

Metodické poznámky

- V úkolu a) si žáci musí uvědomit, že při návštěvě zákazníka bydlícího ve vzdálenosti 50 km ujede pan Zlámál 100 km.
- Při řešení úkolu b) je třeba žáky upozornit na to, že ujetých 67 km nestačí na to, aby byl denní paušál finančně výhodnější.


Řešení úlohy b) lze ilustrovat graficky (obr. 2):



Obr. 2 – Grafické řešení úkolu 1b

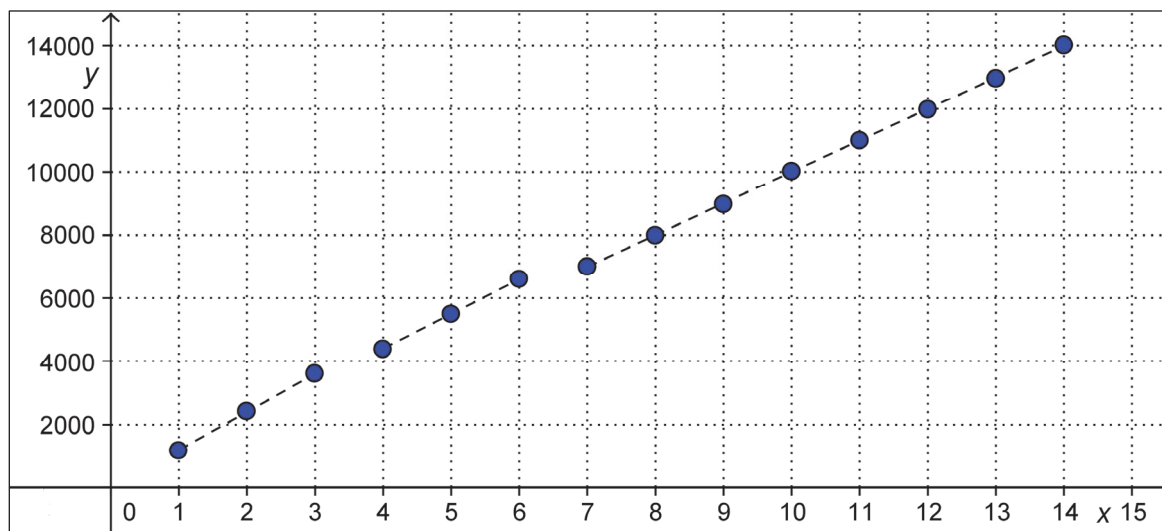
2. Pronájem užitkového vozu

Oprava auta pana Zlámala trvala déle, než předpokládal. Jako instalatér má domluvené zakázky v celém regionu, proto si potřebuje pronajmout užitkový vůz. V půjčovně blízko bydliště si vybral Ford Tranzit (uvedené ceny jsou s DPH):

	Dny	Tarif A/den	Tarif B/den
	1-3	1 200 Kč	2 300 Kč
	4-6	1 100 Kč	1 900 Kč
	7-14	1 000 Kč	1 500 Kč
	15-21	900 Kč	1 400 Kč
	22-29	800 Kč	1 200 Kč
	30 a více	700 Kč	900 Kč
Tarif A - do 200 km denně, 1 km nad limit 3 Kč		Tarif B - bez limitu km	

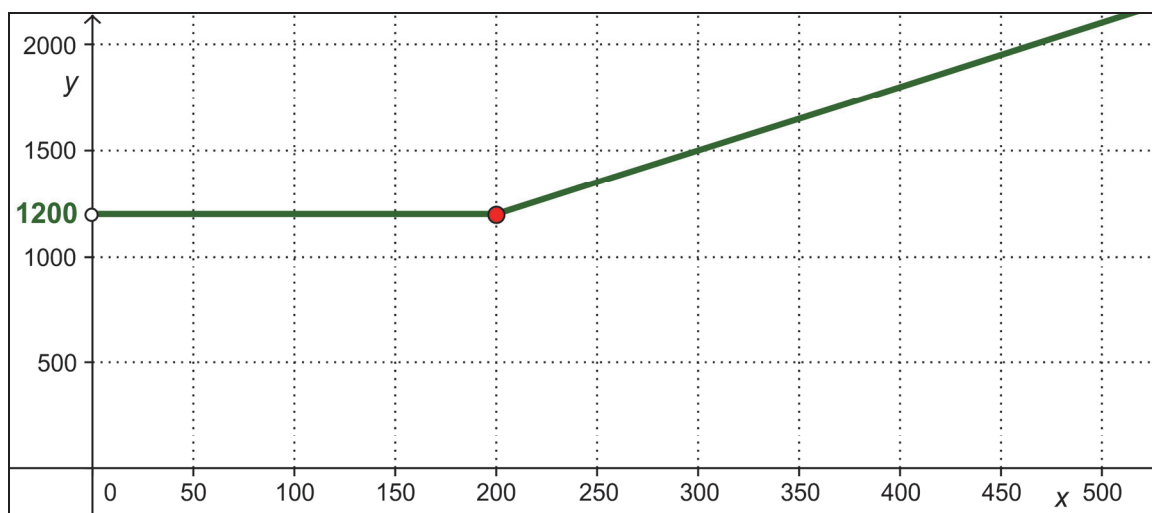
a) Doplňte následující tabulku a sestrojte graf závislosti ceny pronájmu v *tarifu A* na počtu dní při dodržení denního limitu 200 km.

Počet dnů	1	2	3	4	5	6	7
Cena A v Kč	1 200	2 400	3 600	4 400	5 500	6 600	7 000
Počet dnů	8	9	10	11	12	13	14
Cena A v Kč	8 000	9 000	10 000	11 000	12 000	13 000	14 000



Obr. 3 – Grafické řešení úkolu 2a

- b) Pro *tarif A* sestrojte graf závislosti ceny y v korunách jednodenního pronájmu na počtu x ujetých kilometrů.



Obr. 4 – Grafické řešení úkolu 2b

- c) Při jakém počtu ujetých kilometrů je pro pana Zlámala výhodnější při pronájmu na jeden den zvolit *tarif A* než *tarif B*? Výsledek uveďte v celých kilometrech.

Z tabulky je vidět, že pro počet kilometrů, který je menší nebo roven 200, je výhodnější *tarif A*. Stačí tedy uvažovat případ, kdy neznámý počet x kilometrů je větší než 200. Vyřešíme následující nerovnici s neznámou x , kde $x > 200$:

$$1200 + 3 \cdot (x - 200) < 2300$$

$$x < \frac{1700}{3}$$

Zjistíme, že $\frac{1700}{3} \doteq 566,7$.

Odpověď: *Tarif A* je výhodnější pro ujetí nejvýše 566 kilometrů.

- d) Vypočítejte pro *tarif A* rozdíl cen pronájmu vozu na 29 dní a na 30 dní při nepřekročení limitu kilometrů.

Pronájem na 29 dní: $29 \cdot 800 \text{ Kč} = 23\,200 \text{ Kč}$

Pronájem na 30 dní: $30 \cdot 700 \text{ Kč} = 21\,000 \text{ Kč}$

Odpověď: Rozdíl činí 2 200 Kč.

- e) Na kolik dní nejvýše si může pan Zlámal v *tarifu A* pronajmout vůz v intervalu 22–29 dní, aby cena za tento pronájem nepřekročila cenu pronájmu na 30 dní? Předpokládejte, že bude dodržen denní limit počtu kilometrů.

Neznámý je počet dní, označíme ho x .

Sestavíme nerovnici:

$$800 \cdot x \leq 30 \cdot 700$$

$$x \leq 26,25$$

Odpověď: Pan Zlámal si může pronajmout vůz nejvýše na 26 dní.

- f) Určete, kolik kilometrů průměrně denně nad limit 200 km může pan Zlámal ujet, aby při pronájmu na 30 dní byl výhodnější *tarif A* než *tarif B*. Výsledek uveďte v celých kilometrech.

Průměrný počet ujetých kilometrů za jeden den označíme x , ze zadání platí $x > 200$.

Sestavíme a vyřešíme nerovnici:

$$700 + 3 \cdot (x - 200) < 900$$
$$x < 800$$

Za jeden den by mohl ujet méně než $\frac{800}{3}$ kilometrů, tj. méně než 266 km.

Odpověď: Pan Zlámal by mohl průměrně ujet za jeden den nad limit nejvýše 66 kilometrů.

Metodické poznámky

- Žáci si musí uvědomit, že ceny uvedené v tabulce se vztahují k jednomu dni.
- Při uvádění výsledků je třeba vzít v úvahu reálnou praxi, nelze mechanicky zaokrouhlovat výsledky podle matematických pravidel.
- V úkolu b) lze ke grafu najít předpis příslušné funkce:

$$y = 1\,200 \quad \text{pro } x \in (0, 200)$$

$$y = 1\,200 + 3 \cdot (x - 200) \quad \text{pro } x > 200$$

- V úkolu f) si musí žáci uvědomit, že v rámci povoleného limitu kilometrů pan Zlámal ujede za 30 dní celkem $30 \cdot 200$ km bez placení kilometrovného.
- Úkol f) lze řešit také tak, že symbolem x označíme celkový počet ujetých kilometrů za 30 dní. To povede k řešení následující nerovnice s neznámou x , kde $x > 200$:

$$30 \cdot 700 + 3 \cdot (x - 30 \cdot 200) < 30 \cdot 900$$

3. Vklady a investice

Do této kapitoly jsou zařazeny dva pracovní listy:

- Variace na téma **TERMÍNOVANÉ VKLADY**
- Variace na téma **INVESTICE**

3.1 Text pro učitele

Pojmy a vzorce z finanční matematiky

Úrok je částka, kterou získává věřitel od dlužníka jako odměnu za půjčení peněz.

Roční **úroková sazba (úroková míra)** odpovídá podílu úroku získaného za rok a zapůjčeného kapitálu. Vyjadřuje se v procentech nebo ve tvaru desetinného čísla.

Daň z úroku je procentuální část úroku, jejíž výši stanovuje pro jednotlivé vkladové produkty stát a která se také státu odvádí.

Úroková doba je časový úsek, po který je kapitál (vklad, resp. úvěr) úročen.

Pro stanovení úrokové doby se používají různé **standardy**. Odlišují se podle toho, kolik dní se započítává do finančního měsíce a kolik dní se započítává do finančního roku.

Standard 30E/360 (německá metoda či obchodní metoda) počítá s tím, že každý (finanční) měsíc má 30 dní a každý (finanční) rok má 360 dní. (Tento standard se používá ve školské matematice, neboť při jeho použití lze pracovat s poměrně jednoduchými vzorci.)

Úrokovací období je časový úsek mezi dvěma bezprostředně po sobě následujícími úročeními.

Jednoduché úročení je způsob úročení, při kterém se úrok na konci každého úrokovacího období počítá z počátečního kapitálu.

Pro úrok u_n před zdaněním, úrok u'_n po zdanění a výsledný kapitál K_n na konci n -tého úrokovacího období při jednoduchém úročení a při standardu 30E/360 platí tyto vzorce:

$$u_n = i \cdot \frac{t}{360} \cdot K_0 \cdot n$$

$$u'_n = k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot K_0 \cdot n$$

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot n \right)$$

Přítom

K_0 je počáteční kapitál,

i je úroková sazba ve tvaru desetinného čísla,

k je zdaňovací koeficient ($k = \frac{100-d}{100}$, kde d je daň z úroku vyjádřená v procentech),

t je počet dní úrokovacího období,

n je počet úrokovacích období.

Složené úročení je způsob úročení, při kterém se úrok na konci každého úrokovacího období přičítá k již dosažené hodnotě kapitálu a spolu s ním se dále úročí.

Pro výsledný kapitál K_n na konci n -tého úrokovacího období při složeném úročení a při standardu 30E/360 platí tento vzorec:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \right)^n$$

Symbole K_0 , i , k , t a n mají stejný význam jako ve vzorci pro K_n při jednoduchém úročení.

Běžný účet je základním produktem každé banky. Jedná se o nástroj k zajištění hotovostního a bezhotovostního platebního styku.

Doba splatnosti vkladu je doba, po jejímž ukončení je věřitel oprávněn získat od dlužníka zapůjčený kapitál zpět.

Termínovaný vklad (termínovaný účet) je typ vkladu, jehož doba splatnosti může být několik dnů až několik let. Založení termínovaného vkladu pro vkladatele obvykle znamená, že vložený kapitál nemůže bez sankcí po sjednanou dobu z banky vybírat. Daň z úroku je pro termínované vklady 15 %.

Termínovaný vklad s revolvingem (s opakováním) je typ termínovaného vkladu, který je automaticky obnovován, pokud není vypovězen.

Sankce (sankční poplatek) u termínovaných vkladů je poplatek, který odvede majitel vkladu bance při nedodržení podmínek vkladu (předčasný výběr).

Inflace je znehodnocování měny způsobené růstem cen.

Reálná úroková míra i_r je úroková míra, která je při malých hodnotách míry inflace i_i a při dani z úroku d % dána vztahem

$$i_r = k \cdot i - i_i,$$

kde i je roční úroková sazba (kterou udávají banky, tzv. nominální úroková sazba) a i_i je míra inflace. Z výše reálné úrokové míry lze usoudit, zda hodnota vloženého kapitálu *reálně* vzroste (a jde tedy skutečně o zisk), nebo zda *reálně* poklesne (a jde tedy o ztrátu).

Cenný papír je listina či listinu nahrazující záznam, s nímž je svázána určitá hodnota, majetek a majetkový prospěch.

Dluhopis (obligace) je *cenný papír*, kterým se dlužník vydávající tento papír zavazuje jeho majiteli, že mu splatí dlužnou částku včetně odpovídajícího úroku, a to ve stanovených termínech. Dluhopisy lze dělit podle dlužníka na státní, komunální, korporátní (podnikové), bankovní.

Podílový list patří mezi *cenné papíry*, které vydávají *investiční společnosti*. Vydáváním podílových listů shromažďují investiční společnosti peněžní prostředky v **podílových fondech**. Majitelé podílových listů mají právo na odpovídající podíl majetku v podílovém fondu a právo podílet se na ziscích získaných zhodnocením tohoto majetku.

Při *investování* do cenných papírů se obvykle namísto o úroku před zdaněním a úroku po zdanění hovoří o **hrubém výnosu** a **čistém výnosu**. Namísto termínu úroková sazba se užívá častěji **míra výnosu** (nebo také míra výnosnosti, výnosnost, výnosové procento, výkonnost, výkon apod.).

Kurz podílového listu je hodnota, za kterou lze podílový list prodat nebo koupit.

Akcie je *cenný papír*, s nímž jsou spojena práva *akcionáře* jako společníka podílet se na řízení *akciové společnosti*, na jejím zisku a na likvidačním zůstatku při zániku společnosti.

Jmenovitá (nominální) hodnota akcie představuje podíl na majetku společnosti. Součet jmenovitých hodnot všech akcií se rovná výši *základního jmění společnosti*.

Cena akcie je její skutečná *tržní hodnota*, se kterou se obchoduje na kapitálovém trhu.

Dividenda je podíl akcionáře na zisku akciové společnosti vyplývající z vlastnictví akcie a odhlasovaný pro dané období *valnou hromadou* všech akcionářů.

Zdroje informací včetně jejich aktualizací

- Termínované vklady – <http://www.mesec.cz/produkty/terminovane-vklady/>
- Dluhopisy – <http://www.patria.cz/kurzy/online/dluhopisy.html>
- Podílové listy – <http://www.penize.cz/podilove-fondy>
- Akcie – <http://akcie-cz.kurzy.cz/>

Požadavky na žáka, začlenění do výuky

Při řešení pracovního listu **Variace na téma VKLADY** je třeba, aby žák

- ovládal práci s procenty, vzorce pro aritmetickou a geometrickou posloupnost, vzorce pro jednoduché a složené úročení, práci s číselnými výrazy;
- pracovní list lze jako celek zařadit do tématu Posloupnosti, úlohy 1, 2 a 5 lze řešit v rámci opakování a prohlubování učiva ze základní školy.

Při práci s pracovním listem **Variace na téma INVESTICE** by měl žák

- ovládat operace s čísly a práci s procenty;
- pracovní list lze zařadit například již do úvodního opakování na střední škole, předpokládá to ale uvést a objasnit některé pojmy z finanční matematiky.

3.2 Pracovní listy s řešením a metodickými poznámkami

3.2.1 Variace na téma TERMÍNOVANÉ VKLADY

Daň z úroku u termínovaných vkladů činí 15 %.

1. Úrok před zdaněním a po zdanění

Pan Spořivý vložil na začátku roku 90 000 Kč na termínovaný vklad na jeden rok s roční úrokovou sazbou 0,8 %. Banka úročí vklad jen jednou, a to v den jeho splatnosti.

a) Určete úrok před zdaněním.

$$u = 0,008 \cdot 90\,000 \text{ Kč} = 720 \text{ Kč}$$

Odpověď: Úrok před zdaněním je 720 Kč.

b) Určete úrok po zdanění.

$$u' = 0,008 \cdot 0,85 \cdot 90\,000 \text{ Kč} = 612 \text{ Kč}$$

Odpověď: Úrok po zdanění je 612 Kč.

Metodické poznámky

- V úkolu b) lze výpočet provést též následujícím způsobem:

$$u' = 0,85 \cdot 720 \text{ Kč} = 612 \text{ Kč}$$

- Uvedená úroková sazba je nízká, a tak je pravděpodobné, že je nižší než míra inflace. Doporučujeme proto zjistit a uvést žákům aktuální míru inflace a odtud potom vypočítat reálnou úrokovou míru.

2. Úrokové sazby různých bank

Paní Váhavá zdělila 120 000 Kč a chystá se je vložit na termínovaný vklad na jeden měsíc. Pro tyto vklady nabízí *A-banka* úrokovou sazbu 0,35 % a *B-banka* 0,40 %. Obě banky úročí jen jednou, na konci měsíce. Vypočítejte, kolik korun by činil rozdíl úroků po zdanění v *A-bance* a *B-bance*.

$$\text{A-banka: } u' = 0,0035 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,85 \cdot 120\,000 \text{ Kč} = 29,75 \text{ Kč}$$

$$\text{B-banka: } u' = 0,0040 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,85 \cdot 120\,000 \text{ Kč} = 34 \text{ Kč}$$

$$\text{Rozdíl: } 34 \text{ Kč} - 29,75 \text{ Kč} = 4,25 \text{ Kč}$$

Odpověď: Rozdíl úroků činí 4,25 Kč.

Metodická poznámka

- Je vhodné žákům sdělit, že malý rozdíl úroků je dán malým rozdílem úrokových sazeb.

3. Termínovaný vklad a převod na běžný účet

Pan Tichý se rozhodl vložit 250 000 Kč na termínovaný vklad na 1 měsíc s opakováním a úrokovou sazbou 0,28 %. Předpokládá, že vklad vybere po roce. Pan Tichý může zvolit dvě varianty:

- Každý měsíc si nechá převádět zdaněný úrok na svůj běžný účet.
- Ponechá úroky na termínovaném vkladu.

Rozhodněte, která varianta by přinesla panu Tichému vyšší zisk. Kolik korun by činil rozdíl na konci roku?

Předpokládejte, že banka zaokrouhluje na haléře.

Vklad s převodem úroků na běžný účet

Jedná se o jednoduché úročení, neboť každý měsíc se úročí stejná částka 250 000 Kč a pan Tichý získá vždy za jedno úrokovací období stejný úrok:

$$K' = 250\,000 \text{ Kč} + 12 \cdot \left(0,85 \cdot \frac{0,0028}{12} \cdot 250\,000 \text{ Kč} \right) = 250\,595 \text{ Kč}.$$

Vklad bez převodu na účet

Jedná se o složené úročení, neboť v každém dalším úrokovacím období se částka úročí společně s úrokem:

$$K' = 250\,000 \text{ Kč} \cdot \left(1 + 0,85 \cdot \frac{0,0028}{12} \right)^{12} \doteq 250\,595,65 \text{ Kč}$$

$$\text{Rozdíl: } 250\,595,65 \text{ Kč} - 250\,595 \text{ Kč} = 0,65 \text{ Kč}$$

Odpověď: Obě varianty přinášejí přibližně stejný zisk.

Metodické poznámky

- Při vyšších úrokových sazbách bude odpovídajícím způsobem růst rozdíl v zisku, tj. vklad bez převodu na účet bude finančně výhodnější. Doporučujeme při vkladu 250 000 Kč úlohu s žáky řešit například pro úrokovou sazbu 3 % (rozdíl v zisku je 75 Kč).
- V případě daného vkladu bez převodu na účet banka při výpočtu úroku každý měsíc zaokrouhlí na haléře, proto se uvedený výsledek může od reálné situace lišit (dokonce by se mohlo v naší úloze stát, že výsledný úrok u vkladu s převodem na běžný účet bude nepatrně vyšší než u vkladu bez převodu).
- V této úloze jsme předpokládali, že ve všech dvanácti úrokovacích obdobích je úroková sazba neměnná. U termínovaných vkladů s opakováním je zaručena úroková sazba pouze pro první úrokovací období, v dalších úrokovacích obdobích může být úroková sazba nižší, nebo vyšší.

4. Termínovaný vklad na dva měsíce a na jeden rok

Paní Rychlá vložila na termínovaný vklad na 2 měsíce s opakováním 80 000 Kč, úroková sazba činila 0,38 %. Peníze ponechala i s úroky na účtu jeden rok, úroková sazba byla po celou dobu neměnná a banka úročila vždy na konci každého druhého měsíce. Její sousedka založila termínovaný vklad na stejnou částku na jeden rok, úroková sazba činila 1,05 %, banka úročila její vklad pouze jednou, na konci roku.

a) Určete, kolik korun dostala paní Rychlá na konci roku.

$$K_6 = K_0 \cdot \left(1 + 0,85 \cdot \frac{i}{6}\right)^6 = 80\,000 \text{ Kč} \cdot \left(1 + 0,85 \cdot \frac{0,0038}{6}\right)^6 \doteq 80\,258,75 \text{ Kč}$$

Odpověď: Paní Rychlá obdržela na konci roku 80 259 Kč.

b) Určete, kolik korun dostala na konci roku její sousedka.

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + 0,85 \cdot i) = 80\,000 \text{ Kč} \cdot (1 + 0,85 \cdot 0,0105) = 80\,714 \text{ Kč}$$

Odpověď: Sousedka dostala na konci roku 80 714 Kč.

c) Určete, kolik korun činil rozdíl mezi oběma částkami, které byly vyplaceny v hotovosti.

$$80\,714 \text{ Kč} - 80\,259 \text{ Kč} = 455 \text{ Kč}$$

Odpověď: Rozdíl v ziscích činil 455 Kč.

Metodická poznámka

- Doporučujeme upozornit žáky, že úrokové sazby s růstem délky úrokovacího období obvykle také rostou. I když se v úkolu a) úročí šestkrát (jde o složené úročení), je zisk vzhledem k nižší úrokové sazbě menší než zisk zjištěný ve druhém úkolu.

5. Termínovaný vklad a sankce

Paní Novotná vložila 350 000 Kč na termínovaný vklad na jeden rok s úrokovou sazbou 1,2 %. Banka úročí vklad pouze jednou, v den jeho splatnosti. Po šesti měsících paní Novotná potřebovala peníze, a proto se rozhodla vklad zrušit. V bance jí sdělili, že za předčasnou výpověď účtují sankční poplatek ve výši 2 % z vložené částky.

- a) Vypočítejte úrok po zdanění z termínovaného vkladu za šest měsíců.

$$u' = 350\,000 \text{ Kč} \cdot 0,85 \cdot \frac{0,012}{2} = 1\,785 \text{ Kč}$$

Odpověď: Úrok za šest měsíců po zdanění činí 1 785 Kč.

- b) Určete sankční poplatek.

$$s = 0,02 \cdot 350\,000 \text{ Kč} = 7\,000 \text{ Kč}$$

Odpověď: Sankční poplatek činí 7 000 Kč.

- c) Kolik korun paní Novotná prodělala?

$$7\,000 \text{ Kč} - 1\,785 \text{ Kč} = 5\,215 \text{ Kč}$$

Odpověď: Paní Novotná prodělala 5 215 Kč.

Metodické poznámky

- Doporučujeme zdůraznit, že před uložením peněz na termínovaný vklad je třeba zvážit, po jakou dobu nebudeme vložené peníze potřebovat. Sankce za předčasný výběr bývají poměrně vysoké (například 2 % či 3 % z vybírané částky) a dochází tak ke značným finančním ztrátám.
- Některé bankovní ústavy v případě termínovaných vkladů povolují jednou za úrokovací období výběr určité částky bez sankcí (např. do výše 25 % z vkladu).

3.2.2 Variace na téma INVESTICE

1. Akcie

Podnikatel Mařátka vlastní 480 kusů akcií firmy *CSI*. Tržní cena jedné akcie činila před rokem 673 Kč, současná cena je 596 Kč. Přitom za poslední rok nebyly vypláceny dividendy. Určete, o kolik korun se snížil jeho majetek v akciích za poslední rok.

Rozdíl tržních cen 480 akcií: $480 \cdot (673 \text{ Kč} - 596 \text{ Kč}) = 36\,960 \text{ Kč}$

Odpověď: Cena majetku podnikatele Mařátka v akciích klesla o 36 960 Kč.

Metodická poznámka

- Žáci by si měli uvědomit, že na rozdíl od termínovaného vkladu, kde je zaručen jistý zisk (z hlediska nominální hodnoty), u akcií tomu tak nemusí být.

2. Dluhopis

Podnikatel Pokorný zakoupil za 10 000 eur dluhopis s dobou splatnosti 5 let a s mírou výnosu 3 % ročně. Banka úročí vždy po roce, daň z úroku činí 15 %. Pan Pokorný bude po dobu 5 let dostávat na svůj devizový účet vždy po uplynutí roku úrok z 10 000 eur. Na konci pátého roku obdrží vloženou částku 10 000 eur spolu s úrokem za poslední rok.

- a) Určete úrok po zdanění za jeden rok.

$$u'_1 = 0,85 \cdot 0,03 \cdot 10\,000 \text{ €} = 255 \text{ €}$$

Odpověď: Úrok po zdanění za jeden rok činí 255 €.

- b) Určete čistý výnos z dluhopisu.

$$u' = 5 \cdot u'_1 = 5 \cdot 255 \text{ €} = 1\,275 \text{ €}$$

Odpověď: Čistý výnos z dluhopisu je 1 275 €.

Metodická poznámka

- Doporučujeme žákům předem připomenout, co znamená míra výnosu a čistý výnos z dluhopisu.

3. Výnos podílových fondů

Paní Divoká nakoupila 500 kusů podílových listů podílového fondu *AB Růstový* po 1,573 2 Kč a 1 000 kusů listů podílového fondu *CD Konzervativní* po 1,152 4 Kč. Po jednom roce se kurz podílového listu fondu *AB Růstový* snížil na 1,344 1 Kč, kurz podílového listu *CD Konzervativní* se zvýšil na 1,360 1 Kč. Určete celkový výnos z podílových listů paní Divoké po jednom roce.

Při vlastnictví podílových listů aspoň 6 měsíců se úroky nedaní.

$$500 \cdot (1,344\ 1\ \text{Kč} - 1,573\ 2\ \text{Kč}) + 1\ 000 \cdot (1,360\ 1\ \text{Kč} - 1,152\ 4\ \text{Kč}) = 93,15\ \text{Kč}$$

Odpověď: Celkový výnos z podílových listů činí 93,15 Kč.

Metodická poznámka

- Doporučujeme před řešením úlohy žákům připomenout, co je kurz podílového listu a co znamená výnos z podílového listu.

4. Podílové listy versus termínovaný vklad

Pan Krátký vložil 20 000 Kč do *UT-banky* na termínovaný vklad na jeden rok s úrokovou sazbou 0,85 %. Daň z úroku na termínovaném vkladu činí 15 %. Banka úročí jednou, v den splatnosti vkladu.

Paní Krátká nakoupila za 20 000 Kč celkem 16 000 podílových listů podílového fondu *PC Invest* po 1,250 0 Kč. Po roce vzrostl kurz podílového listu *PC Invest* na 1,283 5 Kč. Při vlastnictví podílových listů aspoň 6 měsíců se úroky nedaní.

a) Určete zisk pana Krátkého.

$$0,008\ 5 \cdot 0,85 \cdot 20\ 000\ \text{Kč} = 144,50\ \text{Kč}$$

Odpověď: Zisk pana Krátkého činí 144,50 Kč.

b) Určete zisk paní Krátké.

$$16\ 000 \cdot (1,283\ 5\ \text{Kč} - 1,250\ 0\ \text{Kč}) = 536\ \text{Kč}$$

Odpověď: Zisk paní Krátké činí 536 Kč.

c) Zjistěte, kdo z nich měl větší zisk.

Odpověď: Větší zisk měla paní Krátká (rozdíl byl 391,50 Kč).

Metodické poznámky

- Je třeba, aby si žáci uvědomili, že výsledek úlohy souvisí s výnosem podílových listů v daném období. V jiném období by mohla být situace z hlediska finančního efektu obrácená.
- Předpokládáme, že paní Krátká při nákupu podílových listů neplatila žádný poplatek.

4. Spoření a úvěry

Do této kapitoly jsou zařazeny dva pracovní listy:

- Variace na téma **SPOŘENÍ**
- Variace na téma **ÚVĚRY**

Pracovní list na téma spoření sleduje využití znalostí a dovedností pracovat se vzorci pro geometrické posloupnosti ve finanční matematice. To umožní klientovi banky, který spoří, aby si výsledný kapitál vypočítal sám (banky obvykle informace tohoto typu automaticky neposkytují). V případě úvěrů nabízejí bankovní domy tabulky pro různé výše úvěru, různé úrokové sazby a různé úrokové doby. Proto je pracovní list na úvěry zaměřen pouze na práci s tabulkami z finančních institucí.

4.1 Text pro učitele

Pojmy a vzorce z finanční matematiky

Pro spoření používáme následující dva vzorce pro výsledný kapitál S_n .

Na **začátku** každého úrokovacího období se ukládá kapitál K_0 :

$$S_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right) \cdot \frac{\left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n - 1}{k \cdot i \cdot \frac{t}{360}}$$

Na **konci** každého úrokovacího období se ukládá kapitál K_0 :

$$S_n = K_0 \cdot \frac{\left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n - 1}{k \cdot i \cdot \frac{t}{360}}$$

Symbole i , k , t a n mají stejný význam jako ve vzorcích pro K_n v předchozí kapitole. Používá se standard 30E/360.

Spořicí účet je účet, který je primárně určen ke spoření, ale lze ho používat i jako běžný účet.

Úmor úvěru (dluhu) je ta část splátky úvěru, která je určena na snížení dlužné částky.

Umorovací plán je dokument, který obsahuje pro jednotlivá období splácení úvěru výši splátky, výši úmoru dluhu, výši úroku z dluhu a stav dluhu po odečtení úmoru.

Anuita neboli **anuitní splátka** je splátka dané výše, která se opakuje v pravidelných časových intervalech.

Pro anuitní splátku s úvěru ve výši V platí vzorec:

$$s = \frac{V \cdot i \cdot \frac{t}{360}}{1 - \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^{-n}}$$

Symbole i , k , t a n mají stejný význam jako ve vzorcích pro K_n v předchozí kapitole. Používá se standard 30E/360. Splátky se platí od konce prvního úrokovacího období, jednou za úrokovací období, vždy na jeho konci.

Spotřebitelský úvěr (spotřební úvěr) je úvěr, který umožňuje financovat nepodnikatelské potřeby občanů.

Podnikatelský úvěr je úvěr poskytovaný fyzickým osobám-podnikatelům a právnickým osobám na financování jejich podnikatelských potřeb.

Hypoteční úvěr je dlouhodobý úvěr určený občanům i obcím k financování investic do nemovitostí (koupě, výstavba nemovitosti, rekonstrukce bytu, ...). Hypoteční úvěr může být účelový i neúčelový (americká hypotéka). V obou případech je úvěr zajištěn zástavou nemovitosti na území ČR.

Zdroje informací včetně jejich aktualizací

- Spoření – <http://www.mesec.cz/sporeni/>
- Spotřebitelský úvěr – <http://www.finance.cz/uvery-a-pujcky/spotrebitelske/srovnani-uveru/>
- Hypoteční úvěr – <http://www.penize.cz/hypoteky>, <http://www.finance.cz/financovani-bydleni/informace/hypoteky/co-to-je/>

Požadavky na žáka, začlenění do výuky

Při řešení pracovního listu **Variace na téma SPOŘENÍ** je třeba, aby žák

- znal geometrické posloupnosti (zvláště vzorec pro součet prvních n členů), ovládal řešení exponenciálních a logaritmických rovnic;
- pracovní list lze jako celek zařadit do tématu Posloupnosti.

Při práci s pracovním listem **Variace na téma ÚVĚRY** by měl žák

- ovládat operace s čísly a práci s procenty;
- pracovní list lze zařadit například již do úvodního opakování učiva na střední škole, je však třeba předem uvést a objasnit některé pojmy z finanční matematiky.

4.2 Pracovní listy s řešením a metodickými poznámkami

4.2.1 Variace na téma SPOŘENÍ

1. Kolik spořit?

Pan Vaňousek si chce nejpozději za dva roky pořídit horské kolo, které stojí 34 900 Kč. Peníze bude ukládat pravidelně na začátku každého měsíce na spořicí účet s úrokovou sazbou 1,8 %. Úrokovací období banky je jeden měsíc. Jakou nejnižší částku musí pan Vaňousek měsíčně ukládat?

Kapitál S_n na konci n -tého úrokovacího období	34 900 Kč
Úroková sazba i	0,018
Zdaňovací koeficient k	0,85
Počet dní úrokovacího období	30
Počet úrokovacích období	$n = 24$
Částka uložená v jednom úrokovacím období	$K_0 = ?$

Dané údaje dosadíme do vzorce

$$S_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right) \cdot \frac{\left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n - 1}{k \cdot i \cdot \frac{t}{360}} :$$

$$34\,900 \text{ Kč} = K_0 \cdot \left(1 + 0,85 \cdot 0,018 \cdot \frac{30}{360}\right) \cdot \frac{\left(1 + 0,85 \cdot 0,018 \cdot \frac{30}{360}\right)^{24} - 1}{0,85 \cdot 0,018 \cdot \frac{30}{360}}$$

$$34\,900 \text{ Kč} = K_0 \cdot (1,001\,275) \cdot \frac{(1,001\,275)^{24} - 1}{0,001\,275}$$

$$34\,900 \text{ Kč} = K_0 \cdot (1,001\,275) \cdot \frac{0,031\,052\,896}{0,001\,275}$$

$$34\,900 \text{ Kč} = K_0 \cdot (1,001\,275) \cdot 24,355\,212$$

$$34\,900 \text{ Kč} = K_0 \cdot 24,386\,265$$

$$K_0 \doteq 1\,431,13 \text{ Kč}$$

$$K_0 \doteq 1\,432 \text{ Kč}$$

Odpověď: Pan Vaňousek musí ukládat měsíčně alespoň 1 432 Kč.

Metodické poznámky

- V úloze předpokládáme, že úroková sazba spořicího účtu zůstává po celou dobu neměnná.
- Pokud žáci budou v průběhu výpočtu zaokrouhlovat nejvýše na 4 desetinná místa, nezískají správný výsledek.
- Úlohu lze řešit také tím způsobem, že se ze vzorce vyjádří K_0 a poté se teprve dosazuje.

2. Za jak dlouho naspoříme?

Paní Tichá si chce koupit novou lednici, která stojí 16 700 Kč. Rozhodla se pravidelně ukládat na začátku každého měsíce na spořicí účet částku 1 000 Kč. Úroková sazba spořicího účtu je 1,7 %, banka úročí jednou měsíčně. Za kolik měsíců paní Tichá potřebnou částku naspoří?

Kapitál S_n na konci n -tého úrokovacího období	16 700 Kč
Částka K_0 uložena v jednom úrokovacím období	1 000 Kč
Úroková sazba i	0,017
Zdaňovací koeficient k	0,85
Počet dní úrokovacího období	30
Počet úrokovacích období	$n = ?$

Dané údaje dosadíme do vzorce

$$S_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right) \cdot \frac{\left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n - 1}{k \cdot i \cdot \frac{t}{360}} :$$

$$16\,700 \text{ Kč} = 1\,000 \text{ Kč} \cdot \left(1 + 0,85 \cdot 0,017 \cdot \frac{30}{360}\right) \cdot \frac{\left(1 + 0,85 \cdot 0,017 \cdot \frac{30}{360}\right)^n - 1}{0,85 \cdot 0,017 \cdot \frac{30}{360}}$$

$$16\,700 \text{ Kč} = 1\,000 \text{ Kč} \cdot (1,001\,204\,167) \cdot \frac{(1,001\,204\,167)^n - 1}{0,001\,204\,167}$$

$$16\,700 \text{ Kč} = 1\,000 \text{ Kč} \cdot 831,449\,597 \cdot \frac{(1,001\,204\,167)^n - 1}{1}$$

$$1,020\,085\,403 = (1,001\,204\,167)^n$$

$$\log 1,020\,085\,403 = n \log 1,001\,204\,167$$

$$n \doteq 16,5$$

Odpověď: Paní Tichá naspoří potřebnou částku za 17 měsíců.

Metodické poznámky

- V úloze předpokládáme, že úroková sazba spořicího účtu zůstává po celou dobu neměnná.
- Stejně jako v předchozí úloze lze postupovat i tak, že se ze vzorce vyjádří n a poté se teprve dosazují konkrétní hodnoty.

4.2.2 Variace na téma ÚVĚRY

1. Umořovací plán

Paní Boušková zřizuje krejčovskou dílnu. Od banky získala na začátku roku podnikatelský úvěr ve výši 2 miliony korun s úrokovou sazbou 13 %. Úrokovací období je jeden rok. Podle smlouvy s bankou splatí úvěr ve třech ročních splátkách vždy na konci roku. První splátka bude činit 600 000 Kč, druhá 800 000 Kč.

a) Kolik korun bude činit třetí splátka?

Vypočítáme stav dluhu na konci jednotlivých let (po připsání úroku a splátce).

Na konci prvního roku

Banka připiše úrok:

$$2\,000\,000\text{ Kč} + 0,13 \cdot 2\,000\,000\text{ Kč} = 2\,000\,000\text{ Kč} + 260\,000\text{ Kč} = 2\,260\,000\text{ Kč}$$

Podnikatelka splatí 600 000 Kč:

$$2\,260\,000\text{ Kč} - 600\,000\text{ Kč} = 1\,660\,000\text{ Kč}$$

Na konci druhého roku

Banka připiše úrok:

$$1\,660\,000\text{ Kč} + 0,13 \cdot 1\,660\,000\text{ Kč} = 1\,660\,000\text{ Kč} + 215\,800\text{ Kč} = 1\,875\,800\text{ Kč}$$

Podnikatelka splatí 800 000 Kč:

$$1\,875\,800\text{ Kč} - 800\,000\text{ Kč} = 1\,075\,800\text{ Kč}$$

Na konci třetího roku

Banka připiše úrok:

$$1\,075\,800\text{ Kč} + 0,13 \cdot 1\,075\,800\text{ Kč} = 1\,075\,800\text{ Kč} + 139\,854\text{ Kč} = 1\,215\,654\text{ Kč}$$

Podnikatelka splatí 1 215 654 Kč.

Odpověď: Třetí splátka činí 1 215 654 Kč.

b) Vypočítejte, kolik korun zaplatí paní Boušková bance celkem.

$$600\,000\text{ Kč} + 800\,000\text{ Kč} + 1\,215\,654\text{ Kč} = 2\,615\,654\text{ Kč}$$

Odpověď: Celkem zaplatí 2 615 654 Kč.

c) Sestavte umořovací plán.

	Splátka (Kč)	Úrok (Kč)	Úmor (Kč)	Stav dluhu (Kč)
Počáteční stav	-	-	-	2 000 000
Konec 1. roku	600 000	260 000	340 000	1 660 000
Konec 2. roku	800 000	215 800	584 200	1 075 800
Konec 3. roku	1 215 654	139 854	1 075 800	0

Metodické poznámky

- Žáky je třeba upozornit, že je třeba dodržet pořadí – připsání úroku, splátka.
- Doporučujeme žákům upozornit na to, jak se mění výše úroku a vzájemný poměr úroku a úmoru v jednotlivých letech.

2. Počet splátek spotřebitelského úvěru

Pan Pavlíček si chce půjčit 50 000 Kč na sedací soupravu. Banka nabízí spotřebitelský úvěr se splatností 12 až 84 měsíců, jak ukazuje tabulka. Úvěr se splácí pravidelnými měsíčními splátkami, které jsou uvedeny v korunách v následující tabulce.

Výše úvěru (Kč)	12 splátek	24 splátek	36 splátek	48 splátek	60 splátek	72 splátek	84 splátek
50 000	4 622	2 512	1 817	1 471	1 266	1 128	1 039
100 000	9 132	4 946	3 552	2 872	2 471	2 199	2 077

a) Kolik korun by pan Pavlíček zaplatil celkem ve splátkách při různých úrokových dobách?

Pro řešení stačí vynásobit výši splátky příslušným počtem splátek.

Pro 12 splátek $12 \cdot 4\,622 \text{ Kč} = 55\,464 \text{ Kč}$

Pro 24 splátek $24 \cdot 2\,512 \text{ Kč} = 60\,288 \text{ Kč}$

Pro 36 splátek $36 \cdot 1\,817 \text{ Kč} = 65\,412 \text{ Kč}$

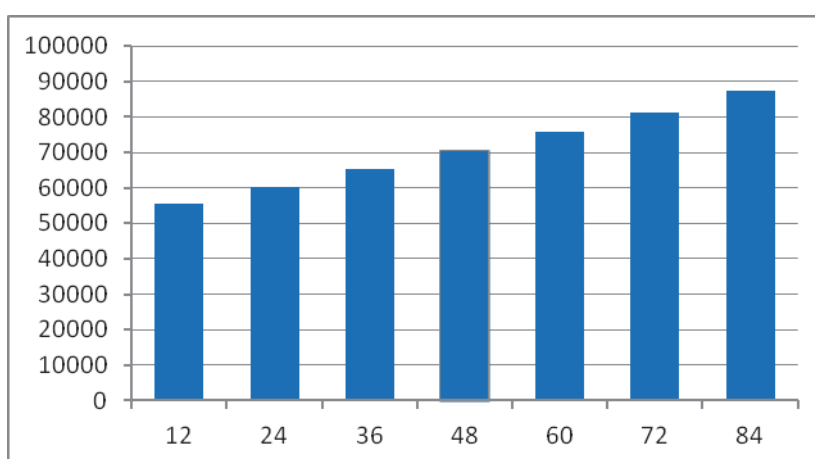
Pro 48 splátek $48 \cdot 1\,471 \text{ Kč} = 70\,608 \text{ Kč}$

Pro 60 splátek $60 \cdot 1\,266 \text{ Kč} = 75\,960 \text{ Kč}$

Pro 72 splátek $72 \cdot 1\,128 \text{ Kč} = 81\,216 \text{ Kč}$

Pro 84 splátek $84 \cdot 1\,039 \text{ Kč} = 87\,276 \text{ Kč}$

b) Sestavte sloupkový diagram celkové výše všech splátek v závislosti na úrokové době.



Obr. 3 - Celková výše splátek

Metodické poznámky

- S využitím dané tabulky lze řešit další úlohu pro úvěr ve výši 100 000 Kč.
- V sloupkovém diagramu z úkolu b) by si žáci měli všimnout, že s prodlužováním doby splácení úvěru roste celková výše splátek. Závislost celkové výše splátek na počtu splátek není lineární.

3. Hypoteční úvěr

V následující tabulce jsou uvedeny vybrané informace, které uvádí hypoteční banka. Jedná se o **koeficienty**, jejichž hodnota závisí na době splatnosti hypotečního úvěru a úrokové sazbě.

Úroková sazba	Doba splatnosti úvěru v letech				
	5	10	15	20	30
4,0 %	0,018417	0,010125	0,007397	0,006060	0,004774
4,5 %	0,018643	0,010364	0,007650	0,006326	0,005067
5,0 %	0,018871	0,010607	0,007908	0,006600	0,005368
5,5 %	0,019101	0,010853	0,008171	0,006879	0,005678
6,0 %	0,019333	0,011102	0,008439	0,007164	0,005996

Z uvedené tabulky lze vypočítat výši měsíční anuitní splátky tak, že se výše úvěru vynásobí příslušným koeficientem.

- a) Vypočítejte postupně výši měsíční anuity pro úvěr 2 miliony korun, úrokovou sazbu úvěru 5,5 % a pro dobu splatnosti 5 let, 10 let, 15 let, 20 let a 30 let.

Pro řešení stačí vynásobit výši úvěru příslušným koeficientem:

Měsíční anuita 5 let	38 202 Kč
Měsíční anuita 10 let	21 706 Kč
Měsíční anuita 15 let	16 342 Kč
Měsíční anuita 20 let	13 758 Kč
Měsíční anuita 30 let	11 356 Kč

- b) Řešte stejný úkol pro případ, že úroková sazba je 6 %.

Pro řešení stačí vynásobit výši úvěru příslušným koeficientem:

Měsíční anuita 5 let	38 666 Kč
Měsíční anuita 10 let	22 204 Kč
Měsíční anuita 15 let	16 878 Kč
Měsíční anuita 20 let	14 328 Kč
Měsíční anuita 30 let	11 992 Kč

- c) S využitím výsledků úkolů z a) i b) určete, kolik činí úrok z úvěru v jednotlivých případech *celkem*.

Pro úvěr z a)

Úvěr na 5 let	$5 \cdot 12 \cdot 38\,202\text{ Kč} - 2\,000\,000\text{ Kč} = 292\,120\text{ Kč}$
Úvěr na 10 let	$10 \cdot 12 \cdot 21\,706\text{ Kč} - 2\,000\,000\text{ Kč} = 604\,720\text{ Kč}$
Úvěr na 15 let	$15 \cdot 12 \cdot 16\,342\text{ Kč} - 2\,000\,000\text{ Kč} = 941\,560\text{ Kč}$
Úvěr na 20 let	$20 \cdot 12 \cdot 13\,758\text{ Kč} - 2\,000\,000\text{ Kč} = 1\,301\,920\text{ Kč}$
Úvěr na 30 let	$30 \cdot 12 \cdot 11\,356\text{ Kč} - 2\,000\,000\text{ Kč} = 2\,088\,160\text{ Kč}$

Pro úvěr z b)

Úvěr na 5 let	$5 \cdot 12 \cdot 38\,666\text{ Kč} - 2\,000\,000\text{ Kč} = 319\,960\text{ Kč}$
Úvěr na 10 let	$10 \cdot 12 \cdot 22\,204\text{ Kč} - 2\,000\,000\text{ Kč} = 664\,480\text{ Kč}$
Úvěr na 15 let	$15 \cdot 12 \cdot 16\,878\text{ Kč} - 2\,000\,000\text{ Kč} = 1\,038\,040\text{ Kč}$
Úvěr na 20 let	$20 \cdot 12 \cdot 14\,328\text{ Kč} - 2\,000\,000\text{ Kč} = 1\,438\,720\text{ Kč}$
Úvěr na 30 let	$30 \cdot 12 \cdot 11\,992\text{ Kč} - 2\,000\,000\text{ Kč} = 2\,317\,120\text{ Kč}$

Metodické poznámky

- Doporučujeme zaměřit se s žáky detailně na problematiku růstu celkového úroku z hypotečního úvěru v závislosti na růstu počtu let splácení.
- Úkol c) lze doplnit o sestavení sloupkových diagramů zobrazujících výši úvěru na době splácení.
- Úkol c) lze rozšířit o výpočet, kolik procent činí celkový úrok z úvěru.

Pracovní listy

- Variace na téma **TELEVIZOR**
- Variace na téma **KORUNY a EURA**
- Variace na téma **PRONÁJEM AUTA**
- Variace na téma **TERMÍNOVANÉ VKLADY**
- Variace na téma **INVESTICE**
- Variace na téma **SPOŘENÍ**
- Variace na téma **ÚVĚRY**

Pracovní list – Variace na téma TELEVIZOR

Počáteční cena televizoru **T** je v prodejně *Na rohu* **14 490 Kč**. Kromě úloh 3 a 4 zůstáváme stále jen v této prodejně.

1. Reklama na T

AKCE: Televizor T je zlevněn o 20 % na 12 599 Kč.

- a) Odhadněte, zda zlevnění činí skutečně 20 %.

- b) Jaká by byla cena televizoru při zlevnění o 20 %?

2. Další reklama na T

Televizor **T** má být zlevněn o 12 %. Ve výloze se objevilo:

CENOVÁ BOMBA: Televizor T je zlevněn na 12 %.

- a) Je to totéž?

- b) Vypočítejte cenu televizoru **T** po zlevnění o 12 % a po zlevnění na 12 %.

- c) Při kolika procentech je zlevnění **o** stejné jako zlevnění **na**?

3. Zlevnění T ve dvou prodejnách

V prodejně *Na rohu* byl televizor **T** zlevněn z původní ceny 14 490 Kč o 12 %. V konkurenční prodejně byl zlevněn o 15 %, přitom původní cena byla 15 799 Kč. Ve které prodejně je televizor **T** po zlevnění lacinější?

4. Cena s DPH a bez DPH

V prodejně *Na rohu* je cena 14 490 Kč televizoru **T** uvedena včetně DPH (*Daně z Přidané Hodnoty*), která činí 20 % z ceny bez DPH. V konkurenční prodejně stojí stejný televizor 12 500 Kč bez DPH. Ve které prodejně je televizor **T** pro plátce DPH levnější?

5. Téměř vše se zlevňuje

CENY PADAJÍ: Téměř všechno zboží zlevněno o 30 % až 70 %.

Kolik bude stát televizor **T**?

6. Dvojitá zlevnění

Televizor **T** byl dvakrát po sobě zlevněn. Nejprve o 15 % a později ještě o 10 %. Zjistěte cenu po dvojitým zlevnění.

7. Zdražení a zlevnění

Televizor **T** byl před vánočními svátky zdražen o 15 % a na začátku ledna byl následně zlevněn o 15 %.

a) Odhadněte, zda konečná cena **T** je vyšší či nižší než počáteční cena, nebo zda je stejná.

b) Vypočítejte konečnou cenu.

c) Řešte tento problém obecně pro případ, že zdražení i následné zlevnění je a %.

8. Zdražení a zlevnění podruhé

Televizor **T** byl před vánočními svátky zdražen o 15 %. Na začátku ledna má být zlevněn o tolik procent, aby cena byla stejná jako před zdražením.

a) Kolik procent to bude?

b) Řešte tento problém pro zdražení o a %.

Pracovní list – Variace na téma KORUNY A EURA

1. Nákup 500 eur

Banka A prodává dnes 1 euro za 26,40 Kč. Poplatek za směnu peněz činí 1 % z částky, která se směňuje. Kolik korun zaplatím za nákup 500 eur?

2. Změny kurzu euro-koruna

Dne 1. 11. bylo v *bance B* při nákupu 1 euro za 26,31 Kč, dne 14. 11. za 26,07 Kč. V této bance je poplatek za směnu peněz nulový.

a) Kolik korun bych v *bance B* zaplatil za 500 eur dne 1. 11. a kolik korun zaplatím 14. 11.?

b) Kolik korun činí rozdíl?

3. Nákup eur za 12 000 Kč

Chci si dnes v *bance C* koupit eura za 12 000 Kč, ze kterých se uhradí i poplatek ve výši 1,5 % za směnu peněz. Banka prodává 1 euro za 26,27 Kč.

a) Kolik dostanu eur?

b) Kolik korun činí poplatek za směnu peněz?

4. Nákup a prodej eur

V *bance D* jsem nakoupil na dovolenou 500 eur po 25,76 Kč. Na dovolenou jsem nakonec neodjel, a šel jsem proto do *banky D* eura prodat. Banka odkupovala ten den 1 euro za 24,97 Kč. Při nákupu jsem platil za směnu peněz poplatek 1 %, při prodeji mi byla sražena 2 % z částky vyplacené v korunách.

Kolik korun jsem na této „dvojsměně“ prodělal? Výsledky zaokrouhľujte na koruny podle matematických pravidel.

5. S poplatkem i bez poplatku

Banka E prodává dnes 1 euro za 25,28 Kč s poplatkem 1%, *banka F* prodává 1 euro za 25,82 Kč bez poplatku.

Ve které bance je pro mě nákup eur finančně výhodnější?

6. Minimální a maximální poplatek

Banka G prodává 1 euro za 25,64 Kč. Poplatek činí 1 % ze směňované částky, minimální poplatek je ale 50 Kč bez ohledu na výši této částky, maximální poplatek činí 2 500 Kč. *Banka H* má ten den stejný směnný kurz koruna – euro, poplatek za směnu peněz je 1 %, a to bez ohledu na výši směňované částky.

a) Pro které částky eur je finančně výhodnější zajít do *banky G*?

b) Ve které bance je finančně výhodnější nakoupit 500 eur?

Pracovní list – Variace na téma PRONÁJEM AUTA

1. Pronájem osobního automobilu

Panu Zlámalovi se před cestou k zákazníkovi rozbilo auto, a proto se rozhodl pronajmout si v půjčovně aut na jeden den automobil Škoda Roomster. Může si vybrat ze dvou tarifů:


- Zaplatit denní paušál ve výši 920 Kč.
- Zaplatit denní pronájem 450 Kč a navíc za každý ujetý kilometr 7 Kč.

V obou případech benzin hradí sám.

- a) Jaký tarif je výhodnější, jestliže zákazník bydlí ve vzdálenosti 50 km?
- b) Pro jaký počet ujetých kilometrů je finančně výhodnější denní paušál? Výsledek uveďte v celých kilometrech.

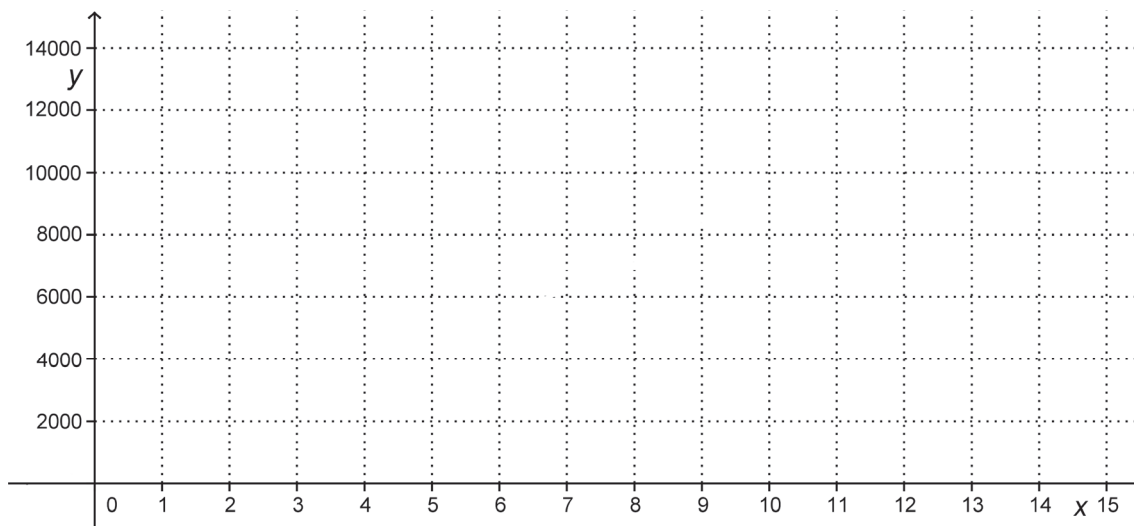
2. Pronájem užitkového vozu

Oprava auta pana Zlámala trvala déle, než předpokládal. Jako instalatér má domluvené zakázky v celém regionu, proto si potřebuje pronajmout užitkový vůz. V půjčovně blízko bydliště si vybral Ford Tranzit (uvedené ceny jsou s DPH):

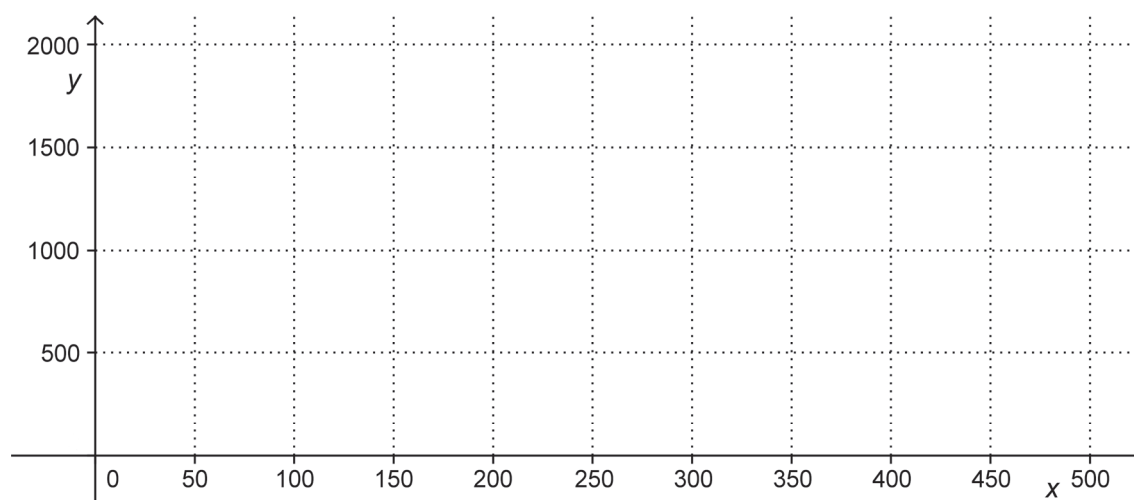
	Dny	Tarif A/den	Tarif B/den
	1–3	1 200 Kč	2 300 Kč
	4–6	1 100 Kč	1 900 Kč
	7–14	1 000 Kč	1 500 Kč
	15–21	900 Kč	1 400 Kč
	22–29	800 Kč	1 200 Kč
	30 a více	700 Kč	900 Kč
Tarif A – do 200 km denně, 1 km nad limit 3 Kč		Tarif B – bez limitu km	

- a) Doplňte následující tabulku a sestrojte graf závislosti ceny pronájmu v *tarifu A* na počtu dní při dodržení denního limitu 200 km.

Počet dnů	1	2	3	4	5	6	7
Cena A v Kč							
Počet dnů	8	9	10	11	12	13	14
Cena A v Kč							



- b) Pro *tarif A* sestrojte graf závislosti ceny y v korunách jednodenního pronájmu na počtu x ujetých kilometrů.



- c) Při jakém počtu ujetých kilometrů je pro pana Zlámala výhodnější při pronájmu na jeden den zvolit *tarif A* než *tarif B*? Výsledek uveďte v celých kilometrech.

- d) Vypočítejte pro *tarif A* rozdíl cen pronájmu vozu na 29 dní a na 30 dní při nepřekročení limitu kilometrů.

- e) Na kolik dní nejvýše si může pan Zlámal v *tarifu A* pronajmout vůz v intervalu 22–29 dní, aby cena za tento pronájem nepřekročila cenu pronájmu na 30 dní? Předpokládejte, že bude dodržen denní limit počtu kilometrů.
- f) Určete, kolik kilometrů průměrně denně nad limit 200 km může pan Zlámal ujet, aby při pronájmu na 30 dní byl výhodnější *tarif A* než *tarif B*. Výsledek uveďte v celých kilometrech.

Pracovní list – Variace na téma TERMÍNOVANÉ VKLADY

Daň z úroku u termínovaných vkladů činí 15 %.

1. Úrok před zdaněním a po zdanění

Pan Spořivý vložil na začátku roku 90 000 Kč na termínovaný vklad na jeden rok s roční úrokovou sazbou 0,8 %. Banka úročí vklad jen jednou, a to v den jeho splatnosti.

a) Určete úrok před zdaněním.

b) Určete úrok po zdanění.

2. Úrokové sazby různých bank

Paní Váhavá zdělila 120 000 Kč a chystá se je vložit na termínovaný vklad na jeden měsíc. Pro tyto vklady nabízí *A-banka* úrokovou sazbu 0,35 % a *B-banka* 0,40 %. Obě banky úročí jen jednou, na konci měsíce. Vypočítejte, kolik korun by činil rozdíl úroků po zdanění v *A-bance* a *B-bance*.

3. Termínovaný vklad a převod na běžný účet

Pan Tichý se rozhodl vložit 250 000 Kč na termínovaný vklad na 1 měsíc s opakováním a úrokovou sazbou 0,28 %. Předpokládá, že vklad vybere po roce. Pan Tichý může zvolit dvě varianty:

- Každý měsíc si nechá převádět zdaněný úrok na svůj běžný účet.
- Ponechá úroky na termínovaném vkladu.

Rozhodněte, která varianta by přinesla panu Tichému vyšší zisk. Kolik korun by činil rozdíl na konci roku?

Předpokládejte, že banka zaokrouhluje na haléře.

4. Termínovaný vklad na dva měsíce a na jeden rok

Paní Rychlá vložila na termínovaný vklad na 2 měsíce s opakováním 80 000 Kč, úroková sazba činila 0,38 %. Peníze ponechala i s úroky na účtu jeden rok, úroková sazba byla po celou dobu neměnná a banka úročila vždy na konci každého druhého měsíce. Její sousedka založila termínovaný vklad na stejnou částku na jeden rok, úroková sazba činila 1,05 %, banka úročila její vklad pouze jednou, na konci roku.

- a) Určete, kolik korun dostala paní Rychlá na konci roku.

- b) Určete, kolik korun dostala na konci roku její sousedka.

- c) Určete, kolik korun činil rozdíl mezi oběma částkami, které byly vyplaceny v hotovosti.

5. Termínovaný vklad a sankce

Paní Novotná vložila 350 000 Kč na termínovaný vklad na jeden rok s úrokovou sazbou 1,2 %. Banka úročí vklad pouze jednou, v den jeho splatnosti. Po šesti měsících paní Novotná potřebovala peníze, a proto se rozhodla vklad zrušit. V bance jí sdělili, že za předčasnou výpověď účtují sankční poplatek ve výši 2 % z vložené částky.

- a) Vypočítejte úrok po zdanění z termínovaného vkladu za šest měsíců.

- b) Určete sankční poplatek.

- c) Kolik korun paní Novotná prodělala?

Pracovní list – Variace na téma INVESTICE

1. Akcie

Podnikatel Mařátko vlastní 480 kusů akcií firmy *CSI*. Tržní cena jedné akcie činila před rokem 673 Kč, současná cena je 596 Kč. Přitom za poslední rok nebyly vypláceny dividendy. Určete, o kolik korun se snížil jeho majetek v akciích za poslední rok.

2. Dluhopis

Podnikatel Pokorný zakoupil za 10 000 eur dluhopis s dobou splatnosti 5 let a s mírou výnosu 3 % ročně. Banka úročí vždy po roce, daň z úroku činí 15 %. Pan Pokorný bude po dobu 5 let dostávat na svůj devizový účet vždy po uplynutí roku úrok z 10 000 eur. Na konci pátého roku obdrží vloženou částku 10 000 eur spolu s úrokem za poslední rok.

a) Určete úrok po zdanění za jeden rok.

b) Určete čistý výnos z dluhopisu.

3. Výnos podílových fondů

Paní Divoká nakoupila 500 kusů podílových listů podílového fondu *AB Růstový* po 1,573 2 Kč a 1 000 kusů listů podílového fondu *CD Konzervativní* po 1,152 4 Kč. Po jednom roce se kurz podílového listu fondu *AB Růstový* snížil na 1,344 1 Kč, kurz podílového listu *CD Konzervativní* se zvýšil na 1,360 1 Kč. Určete celkový výnos z podílových listů paní Divoké po jednom roce.

Při vlastnictví podílových listů aspoň 6 měsíců se úroky nedaní.

4. Podílové listy versus termínovaný vklad

Pan Krátký vložil 20 000 Kč do *UT-banky* na termínovaný vklad na jeden rok s úrokovou sazbou 0,85 %. Daň z úroku na termínovaném vkladu činí 15 %. Banka úročí jednou, v den splatnosti vkladu.

Paní Krátká nakoupila za 20 000 Kč celkem 16 000 podílových listů podílového fondu *PC Invest* po 1,250 0 Kč. Po roce vzrostl kurz podílového listu *PC Invest* na 1,283 5 Kč. Při vlastnictví podílových listů aspoň 6 měsíců se úroky nedaní.

a) Určete zisk pana Krátkého.

b) Určete zisk paní Krátké.

c) Zjistěte, kdo z nich měl větší zisk.

Pracovní list – Variace na téma SPOŘENÍ

1. Kolik spořit?

Pan Vaňousek si chce nejpozději za dva roky pořídit horské kolo, které stojí 34 900 Kč. Peníze bude ukládat pravidelně na začátku každého měsíce na spořicí účet s úrokovou sazbou 1,8 %. Úrokovací období banky je jeden měsíc. Jakou nejnižší částku musí pan Vaňousek měsíčně ukládat?

2. Za jak dlouho naspoříme?

Paní Tichá si chce koupit novou lednici, která stojí 16 700 Kč. Rozhodla se pravidelně ukládat na začátku každého měsíce na spořicí účet částku 1 000 Kč. Úroková sazba spořicího účtu je 1,7 %, banka úročí jednou měsíčně. Za kolik měsíců paní Tichá potřebnou částku naspoří?

Pracovní list – Variace na téma ÚVĚRY

1. Umořovací plán

Paní Boušková zřizuje krejčovskou dílnu. Od banky získala na začátku roku podnikatelský úvěr ve výši 2 miliony korun s úrokovou sazbou 13 %. Úrokovací období je jeden rok. Podle smlouvy s bankou splatí úvěr ve třech ročních splátkách vždy na konci roku. První splátka bude činit 600 000 Kč, druhá 800 000 Kč.

a) Kolik korun bude činit třetí splátka?

b) Vypočítejte, kolik korun zaplatí paní Boušková bance celkem.

c) Sestavte umořovací plán.

	Splátka (Kč)	Úrok (Kč)	Úmor (Kč)	Stav dluhu (Kč)
Počáteční stav				
Konec 1. roku				
Konec 2. roku				
Konec 3. roku				

2. Počet splátek spotřebitelského úvěru

Pan Pavlíček si chce půjčit 50 000 Kč na sedací soupravu. Banka nabízí spotřebitelský úvěr se splatností 12 až 84 měsíců, jak ukazuje tabulka. Úvěr se splácí pravidelnými měsíčními splátkami.

Výše úvěru (Kč)	12 splátek	24 splátek	36 splátek	48 splátek	60 splátek	72 splátek	84 splátek
50 000	4 622	2 512	1 817	1 471	1 266	1 128	1 039
100 000	9 132	4 946	3 552	2 872	2 471	2 199	2 077

a) Kolik korun by pan Pavlíček zaplatil celkem ve splátkách při různých úrokových dobách?

b) Sestavte sloupkový diagram celkové výše všech splátek v závislosti na úrokové době.

3. Hypoteční úvěr

V následující tabulce jsou uvedeny vybrané informace, které uvádí hypoteční banka. Jedná se o **koeficienty**, jejichž hodnota závisí na době splatnosti hypotečního úvěru a úrokové sazbě.

Úroková sazba	Doba splatnosti úvěru v letech				
	5	10	15	20	30
4,0 %	0,018417	0,010125	0,007397	0,006060	0,004774
4,5 %	0,018643	0,010364	0,007650	0,006326	0,005067
5,0 %	0,018871	0,010607	0,007908	0,006600	0,005368
5,5 %	0,019101	0,010853	0,008171	0,006879	0,005678
6,0 %	0,019333	0,011102	0,008439	0,007164	0,005996

Z uvedené tabulky lze vypočítat výši měsíční anuitní splátky tak, že se výše úvěru vynásobí příslušným koeficientem.

a) Vypočítejte postupně výši měsíční anuity pro úvěr 2 miliony korun, úrokovou sazbu úvěru 5,5 % a pro dobu splatnosti 5 let, 10 let, 15 let, 20 let a 30 let.

b) Řešte stejný úkol pro případ, že úroková sazba je 6 %.

c) S využitím výsledků úkolů z a) i b) určete, kolik činí úrok z úvěru v jednotlivých případech *celkem*.

Literatura

1. CIPRA, T. *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*. 2. vydání. Praha: Ekopress, 2005. 308 s.
2. DVOŘÁKOVÁ, Z.; SMRČKA, L. a kol. *Finanční vzdělávání pro střední školy se sbírkou řešených příkladů na CD*. 1. vydání. Praha: C. H. Beck, 2011. 312 s.
3. HESOVÁ, A.; ZELENDOVÁ, E. a kol. *Finanční gramotnost ve výuce: Metodická příručka*. 1. vydání. Praha: NÚV, 2100. 59 s.
4. ODVÁRKO, O. *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 2005. 198 s.
5. ODVÁRKO, O. – ROBOVÁ, J. *Finanční matematika s kalkulačkami Casio*. Praha: Prometheus, 2005. 100 s.
6. ODVÁRKO, O. – ROBOVÁ, J. *Metodický portál*. Budování finanční gramotnosti v matematice [online]. 2009. Dostupný z: <<http://clanky.rvp.cz/clanek/c/ZVPD/6787/BUDOVANI-FINANCNI-GRAMOTNOSTI-V-MATEMATICE.html>>.
7. ODVÁRKO, O. – ROBOVÁ, J. *Metodický portál*. Jednoduché a složené úročení [online]. 2010. Dostupný z: <<http://clanky.rvp.cz/clanek/c/ZVB/8287/JEDNODUCHE-A-SLOZENE-UROCENI.html/>>.
8. ODVÁRKO, O. – ROBOVÁ, J. Nebezpečí finanční negramotnosti. *Matematika-fyzika-informatika*. 2010, roč. 19, č. 8. s. 449–456.
9. ROBOVÁ, J. *Metodický portál*. Finanční gramotnosti v učebnicích matematiky [online]. 2009. Dostupný z: <<http://clanky.rvp.cz/clanek/c/G/7347/financni-gramotnost-v-ucebnicich-matematiky.html/>>.
10. RADOVÁ, J. – DVOŘÁK, P. – MÁLEK, J. *Finanční matematika pro každého*. 7. Aktualizované vydání. Praha: Grada, 2009. 296 s.

Přehledové webové stránky

1. <http://www.finance.cz>
2. <http://www.mesec.cz>
3. <http://www.penize.cz>

REJSTŘÍK

Akcie	21	Období úrokovací	19
Anuita	26	Papír cenný	20
Anuitní splátka	26	Plán umořovací	26
Cena akcie	21	Sankce	20
Daň z přidané hodnoty	8	Sazba úroková	19
Daň z úroku	19	Standard finanční	19
Deviza	8	Standard finanční gramotnosti	6
Dividenda	21	Účet běžný	20
Dluhopis	20	Účet spořicí	26
Doba splatnosti vkladu	20	Účet termínovaný	20
Doba úroková	19	Úmor	26
Fond podílový	20	Úročení jednoduché	19
Gramotnost cenová	6	Úročení složené	20
Gramotnost finanční	6	Úrok	19
Gramotnost peněžní	6	Úvěr hypoteční	27
Gramotnost rozpočtová	6	Úvěr podnikatelský	27
Hodnota akcie jmenovitá	21	Úvěr spotřebitelský	27
Inflace	20	Valuta	8
Kurz podílového listu	20	Vklad termínovaný	20
Kurz směnný	8	Vklad termínovaný s revolvingem	20
List podílový	20	Výnos čistý	20
Míra úroková	19	Výnos hrubý	20
Míra úroková reálná	20		
Míra výnosu	20		