



TRANSFORMACE KRUŽNICE

Vlasta Moravcová

Letní škola geometrie, Česká Lípa, 29. 6. až 2. 7. 2025

TRANSFORMACE OBJEKTU

- Transformace objektu je proces změny jeho polohy, velikosti, tvaru nebo orientace. Může se jednat o posun, otočení, změnu měřítka nebo zkosení, a to jak v grafických aplikacích, tak i v jiných oblastech. Transformace se provádí aplikací matematických operací na souřadnice bodů, které tvoří daný objekt.
- ZOBRAZENÍ
 - vzor ... A
 - obraz ... A'
 - samodružný bod
 - silně/slabě samodružný útvar

O KTERÝCH ZOBRAZENÍCH TU DNES BUDE ŘEČ

- shodnost
 - osová souměrnost $\rightarrow$ středová souměrnost $\rightarrow$ posunutí $\rightarrow$ otočení
 - identita
 - posunutá souměrnost
- podobnost – stejnolehlost
- osová afinita
- kruhová inverze

SHODNOST

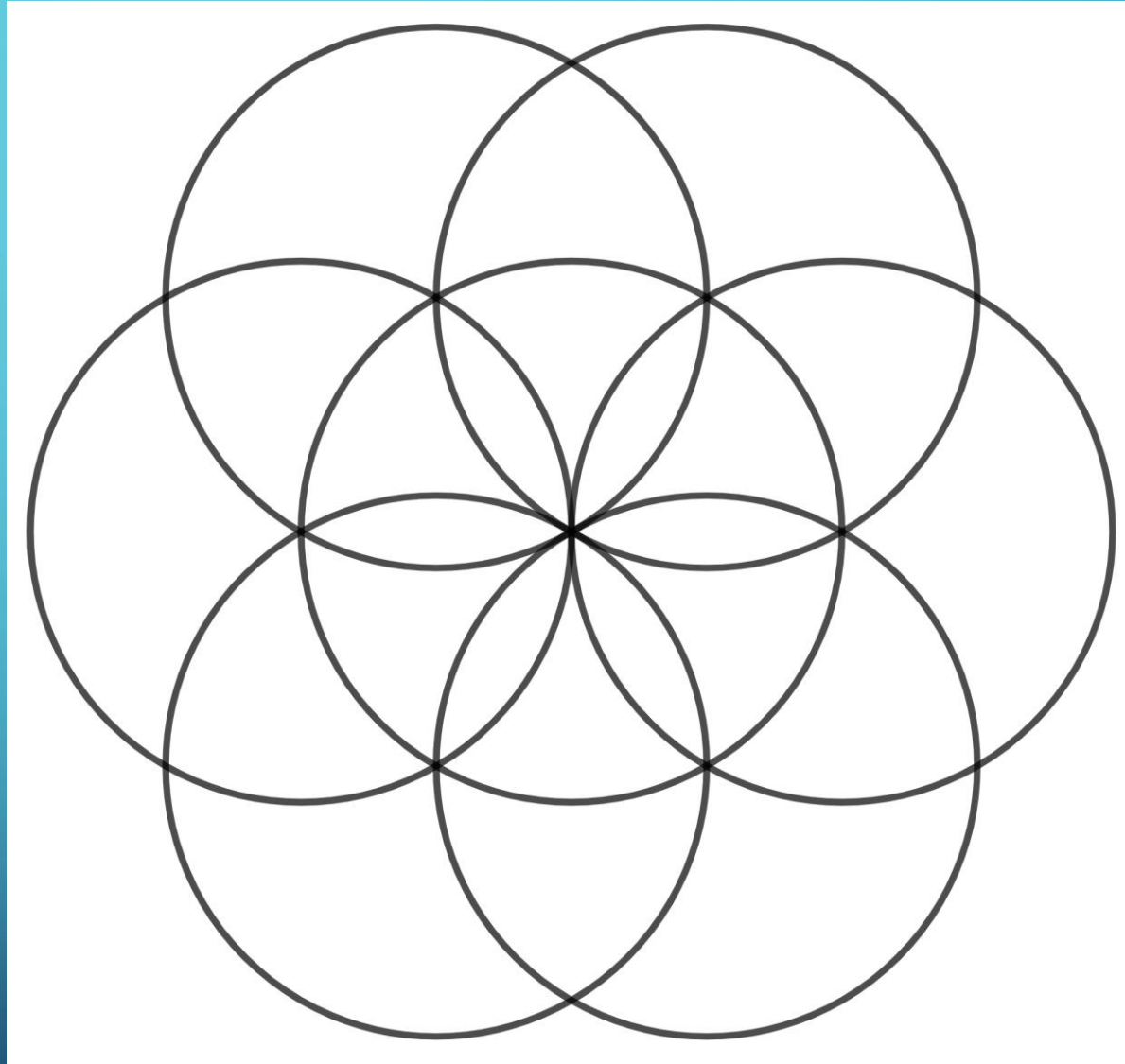
- Zobrazení Z roviny/prostoru nazveme *shodností*, pokud $\forall A, \forall B$ platí:

$$|A'B'| = |AB|$$

- Obrazem kružnice $k(S; r)$ je kružnice $k'(S'; r)$.

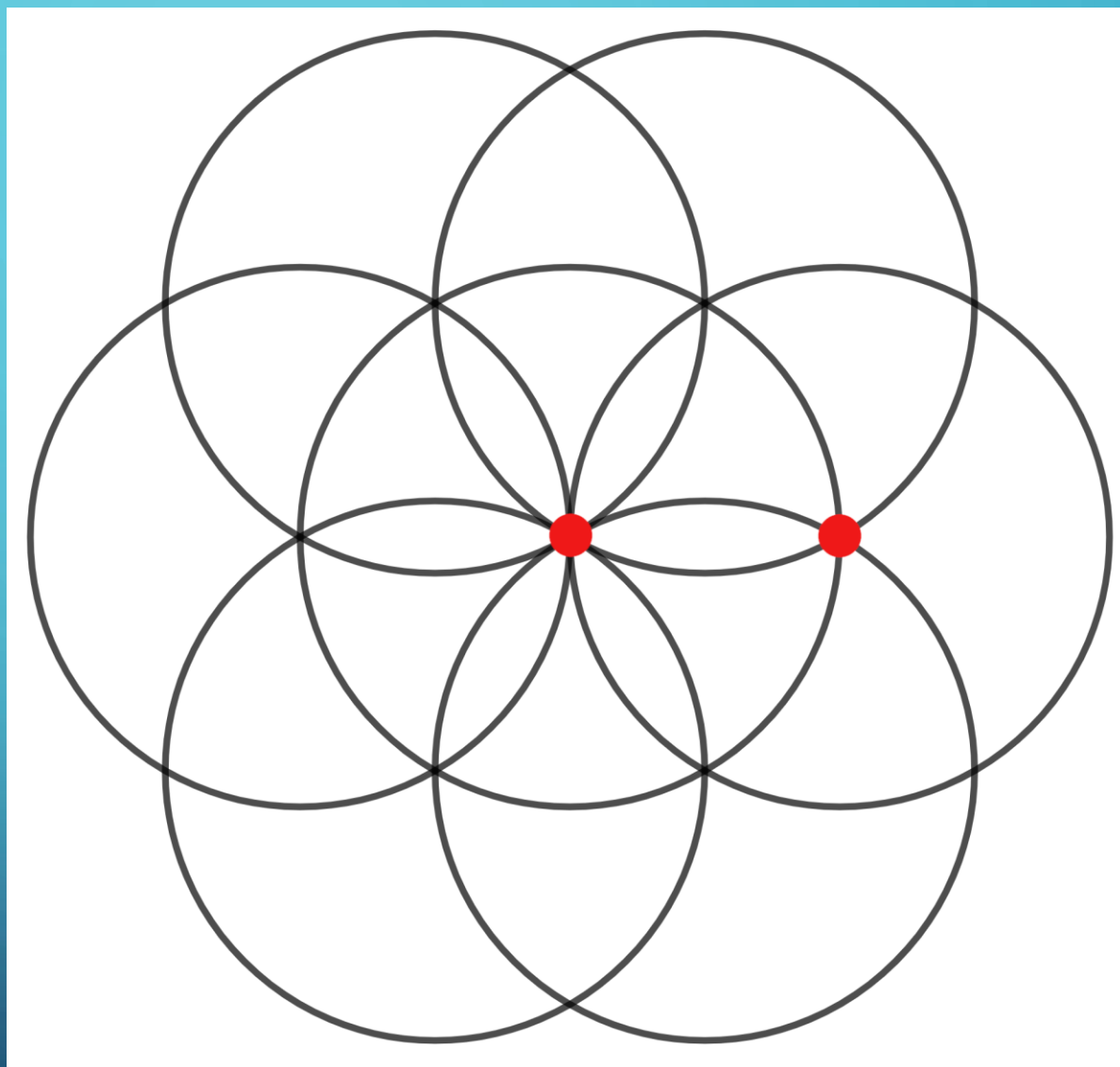
SHODNOST

Úloha I.1



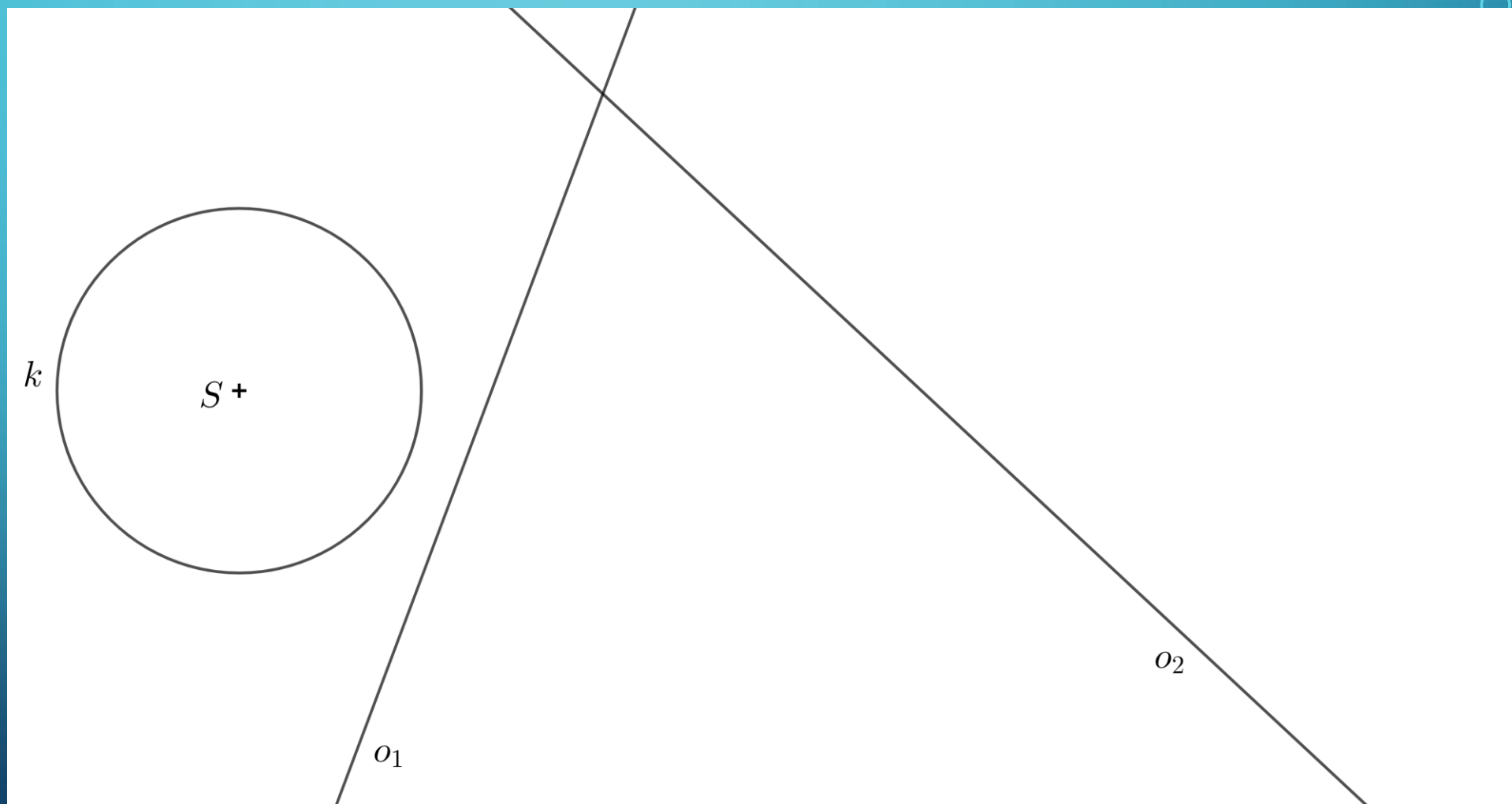
SHODNOST

Úloha 1.1



SHODNOST

Úloha I.3



PODOBNOST

- Zobrazení Z roviny/prostoru nazveme *podobností*, pokud existuje $k > 0$ takové, že $\forall A, \forall B$ platí:

$$|A'B'| = k|AB|$$

- Obrazem kružnice $k(S; r)$ je kružnice $k'(S'; r')$, kde $r' = kr$.

STEJNOLEHLOST

- Ve stejnolehlosti se středem S a nenulovým koeficientem λ přiřazujeme
 - bodu S bod S ;
 - bodu $X \neq S$ bod X' takový, že $|SX'| = |\lambda| \cdot |SX|$ a zároveň bod X' náleží polopřímce SX pro $\lambda > 0$, resp. polopřímce opačné k polopřímce SX pro $\lambda < 0$.
- lze ukázat, že
 - stejnolehlost s koeficientem λ je podobností s koeficientem $|\lambda|$
 - ve stejnolehlosti je každý směr samodružný
 - přímky procházející středem stejnolehlosti jsou slabě samodružné

STEJNOLEHLOST

Úloha II.1

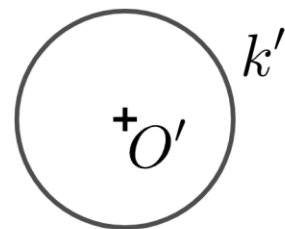
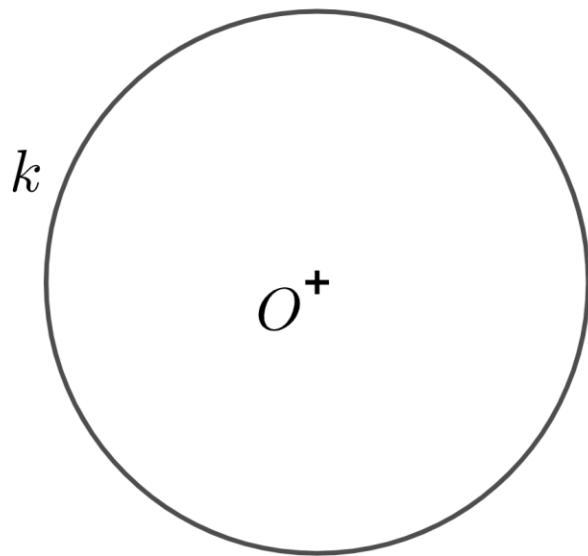
$S +$

$+ O$

STEJNOLEHLOST

Úloha II.2a

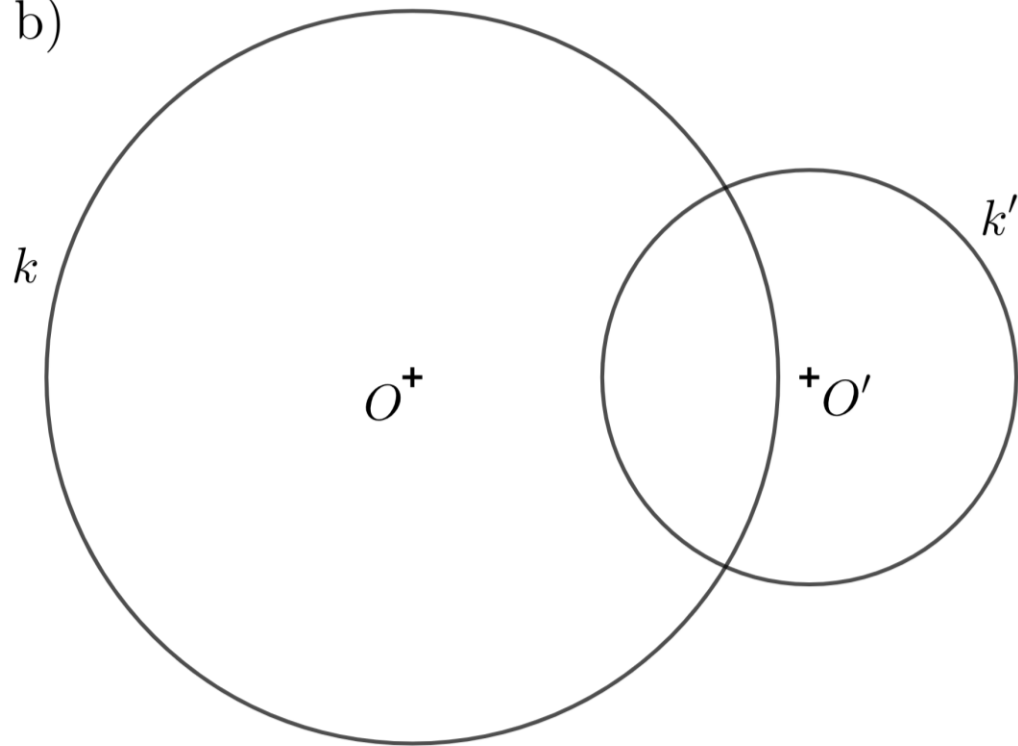
a)



STEJNOLEHLOST

Úloha II.2b

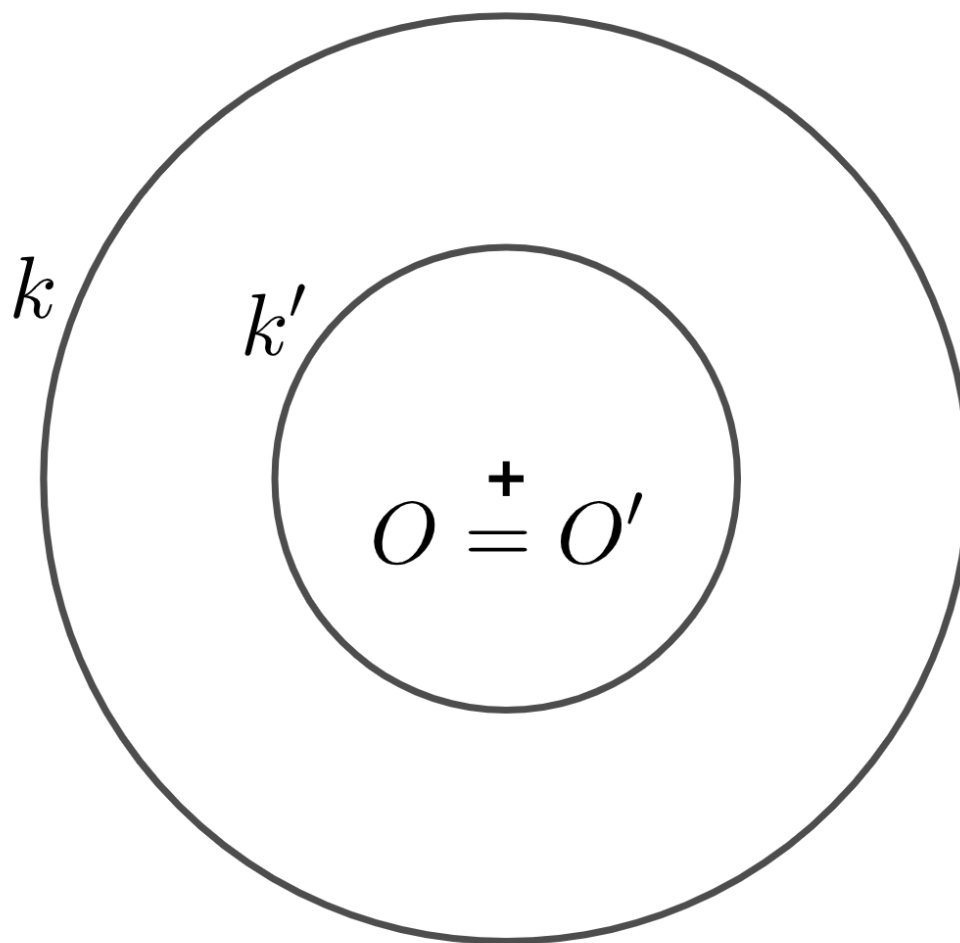
b)



STEJNOLEHLOST

Úloha II.2c

c)



STEJNOLEHLOST

Úloha II.2d

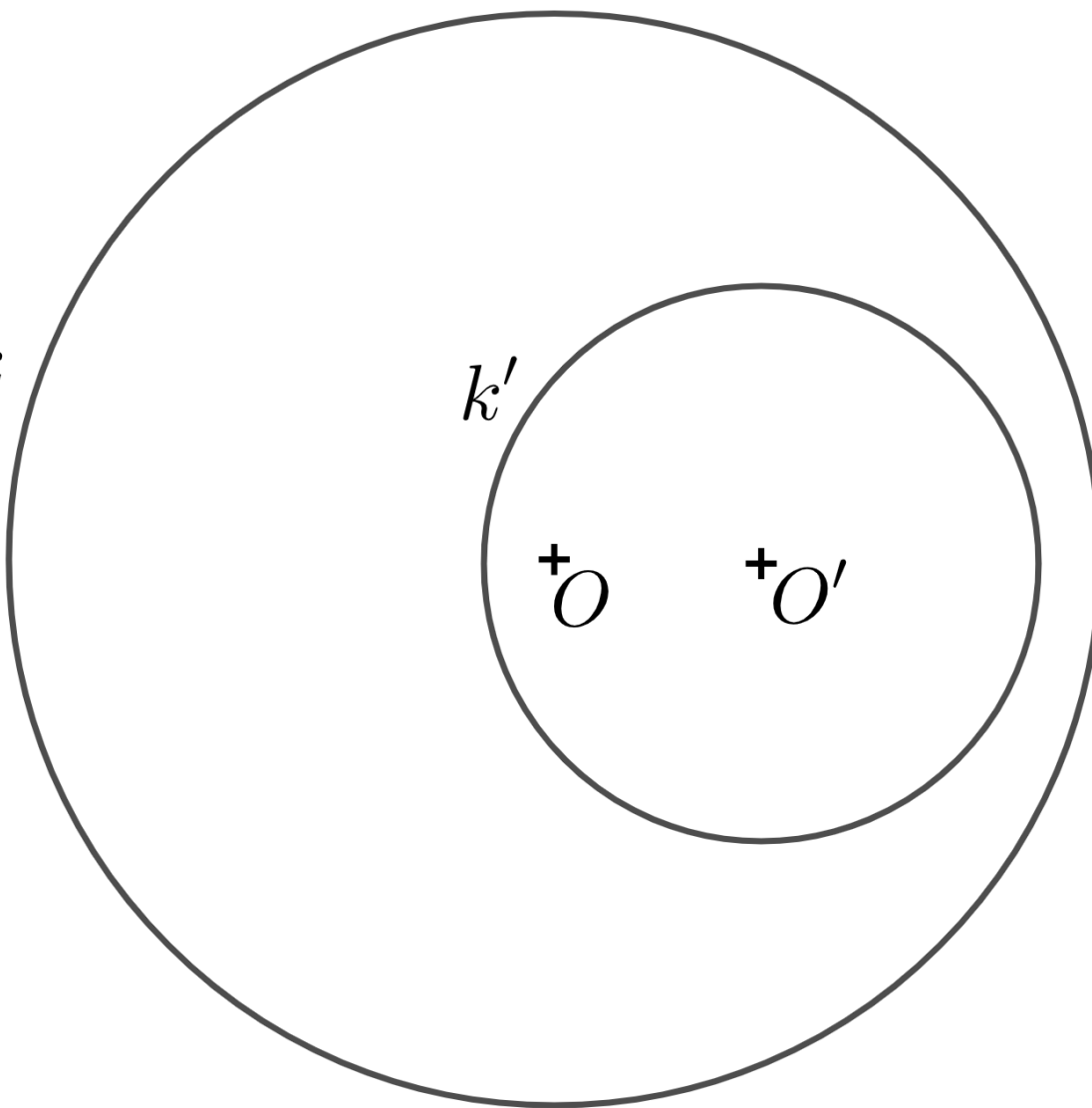
d)

k

k'

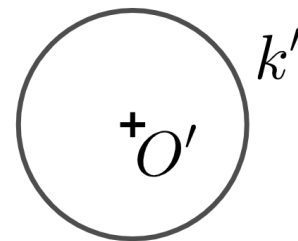
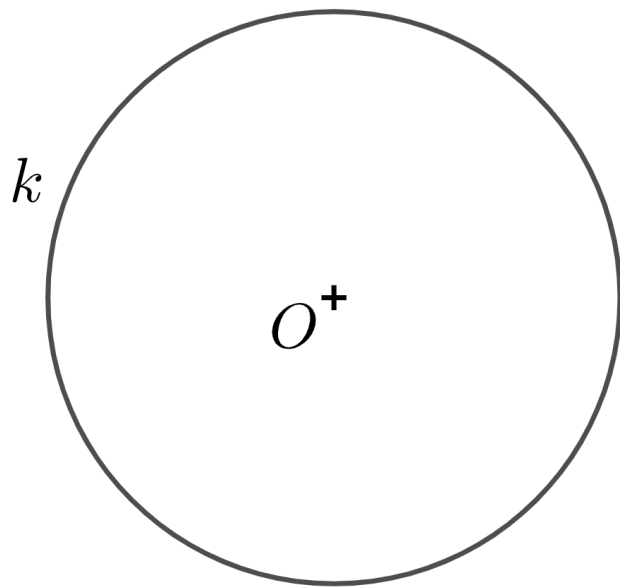
^+O

$^+O'$



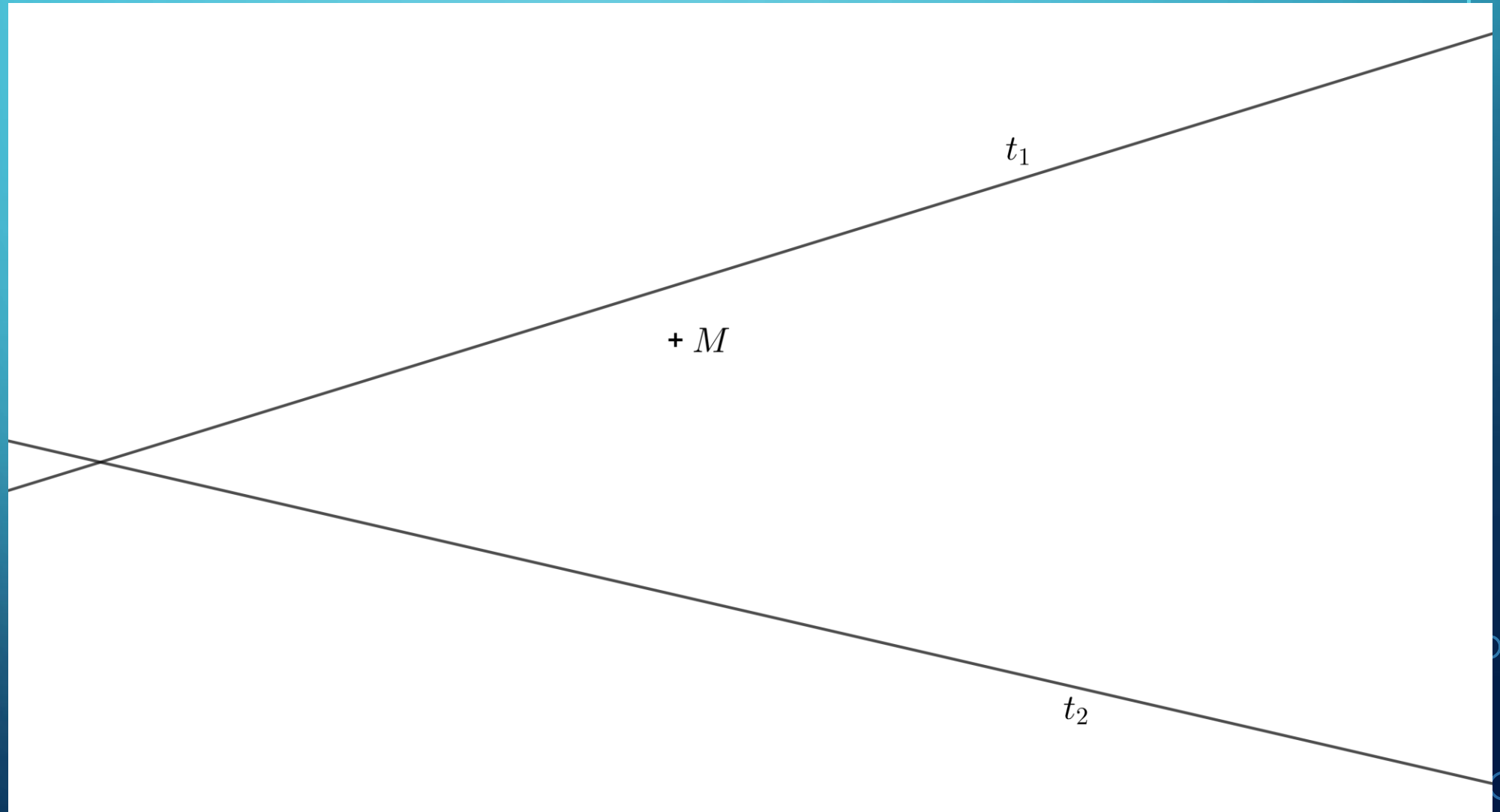
STEJNOLEHLOST

Úloha II.3



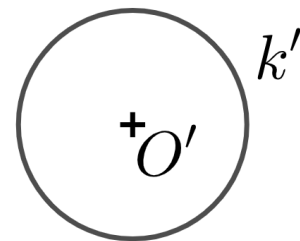
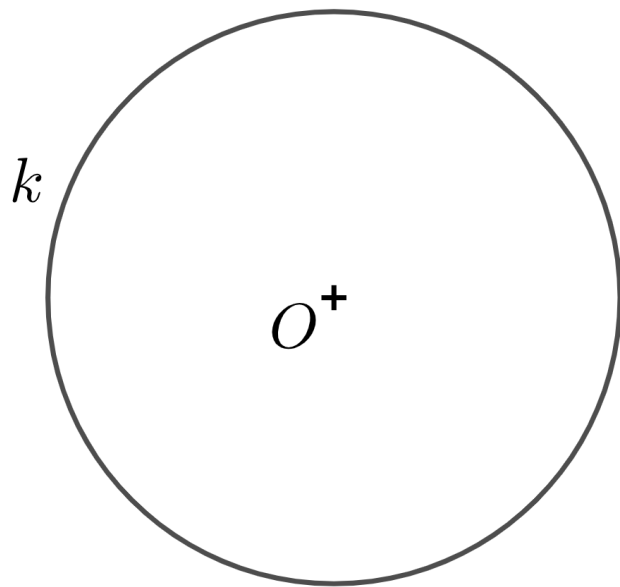
STEJNOLEHLOST

Úloha II.4



STEJNOLEHLOST

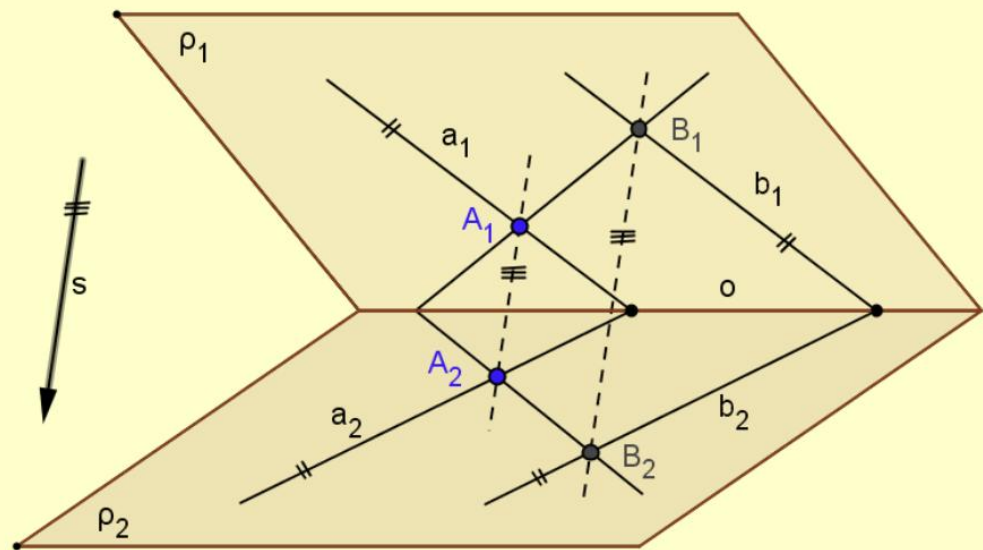
Úloha II.5



OSOVÁ AFINITA

PROSTOR

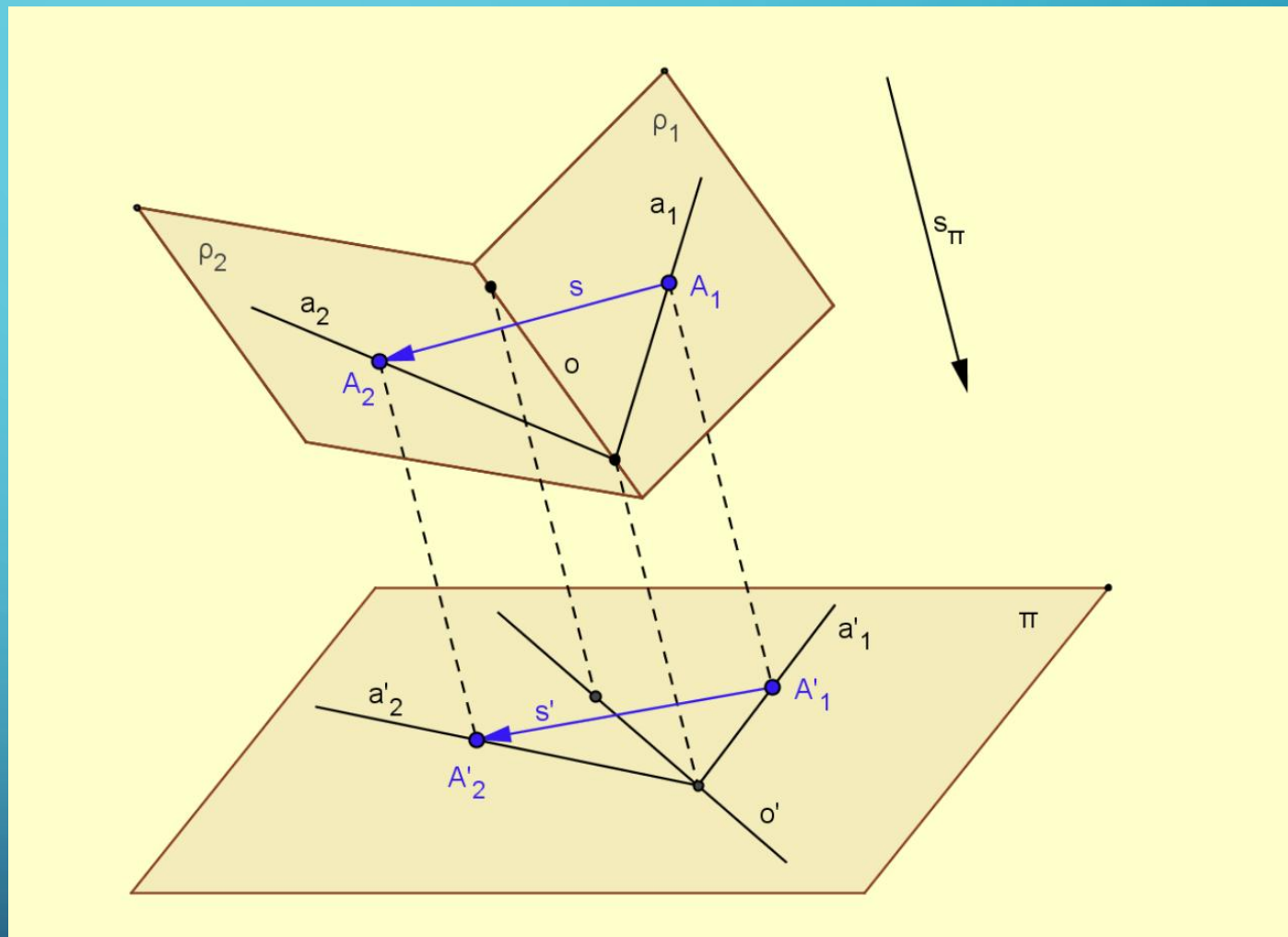
- vztah mezi dvěma navzájem různoběžnými rovinami, bod a jeho obraz náleží přímce daného směru



OSOVÁ AFINITA

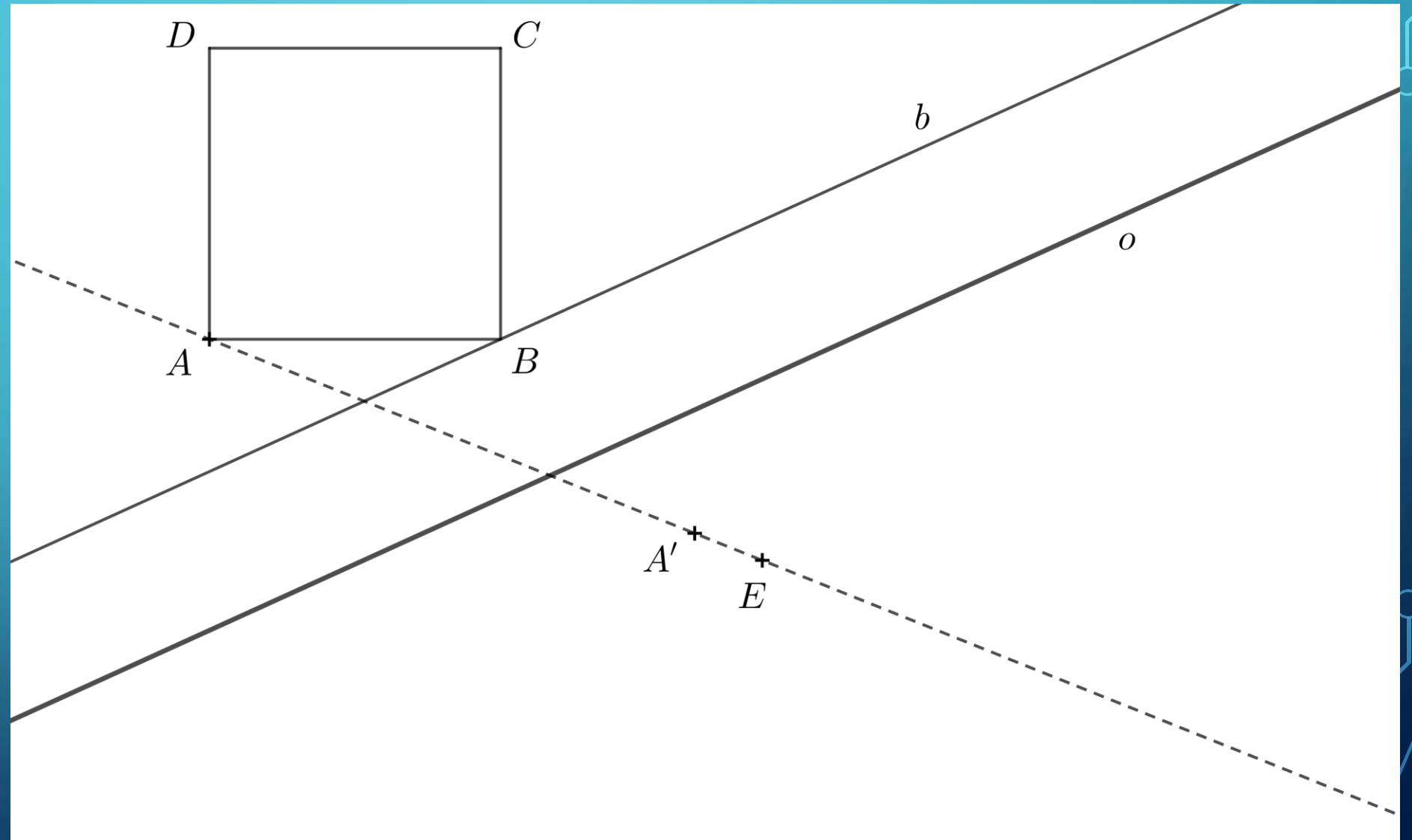
ROVINA

- Zobrazení roviny takové, že bod a jeho obraz leží na přímce daného směru, obrazem přímky je přímka a množinou všech samodružných bodů je přímka.



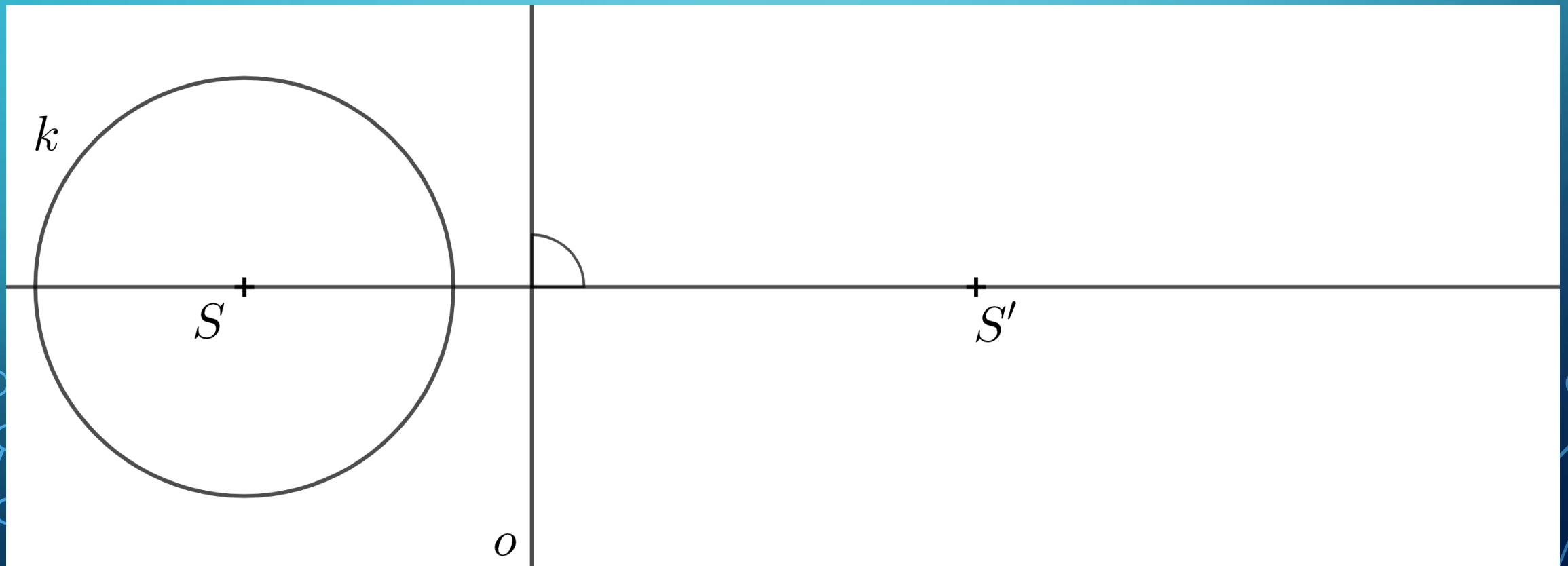
OSOVÁ AFINITA

Úloha III.1



OSOVÁ AFINITA

Úloha III.2



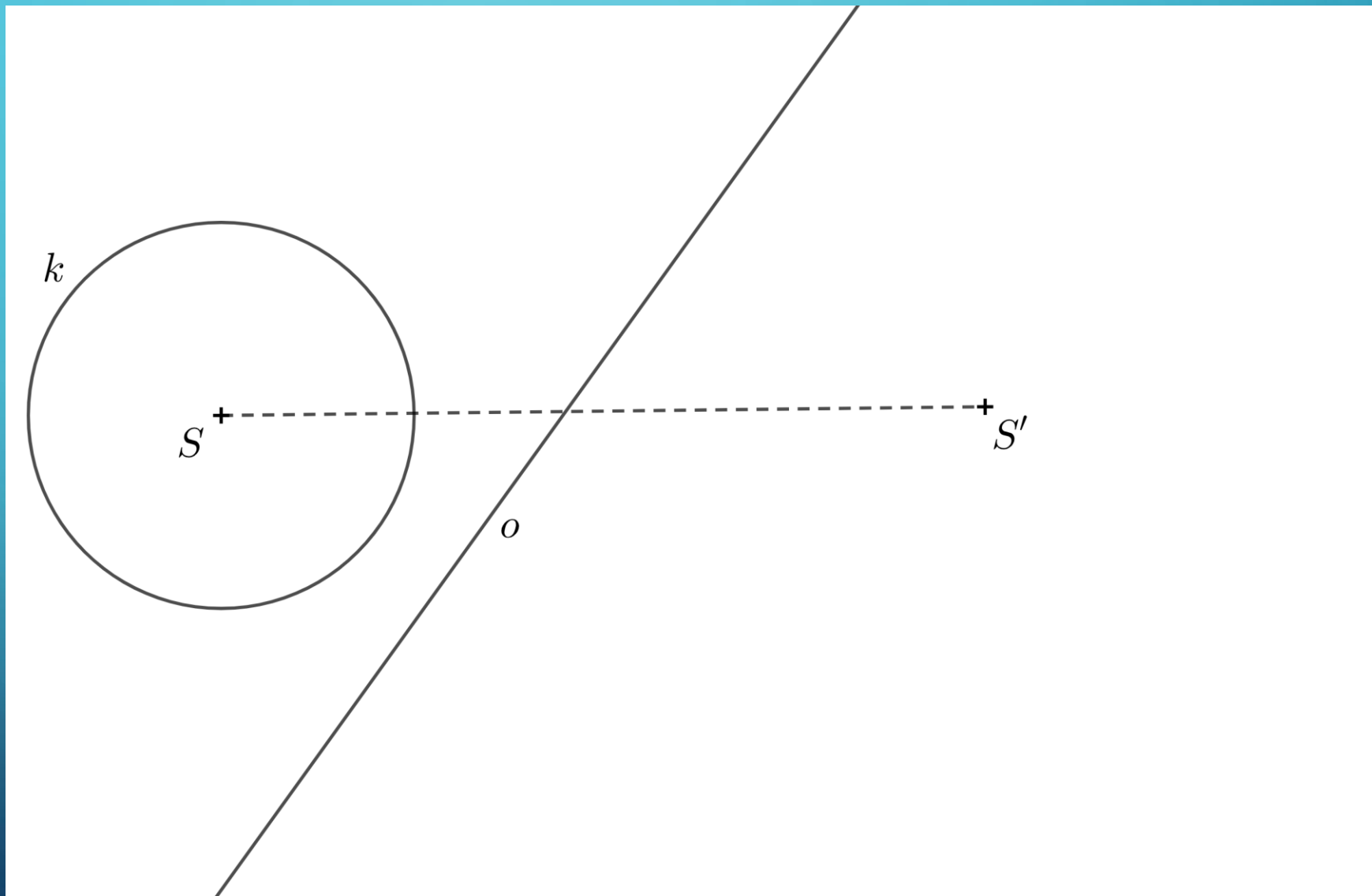
OSOVÁ AFINITA

Úloha III.3



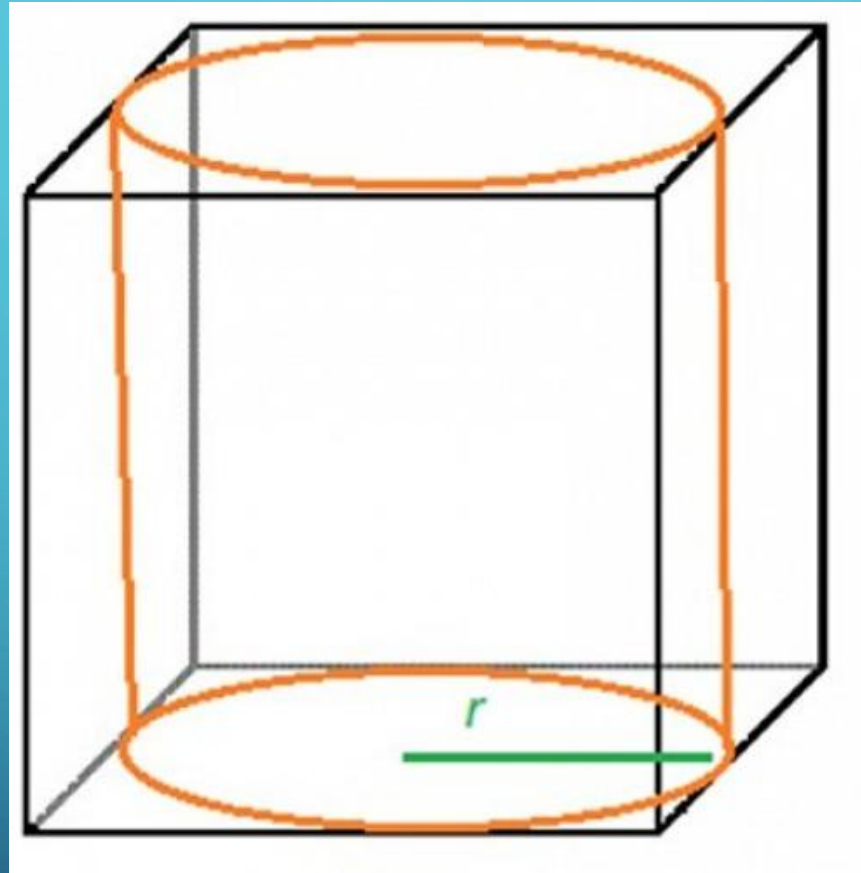
OSOVÁ AFINITA

Úloha III.4



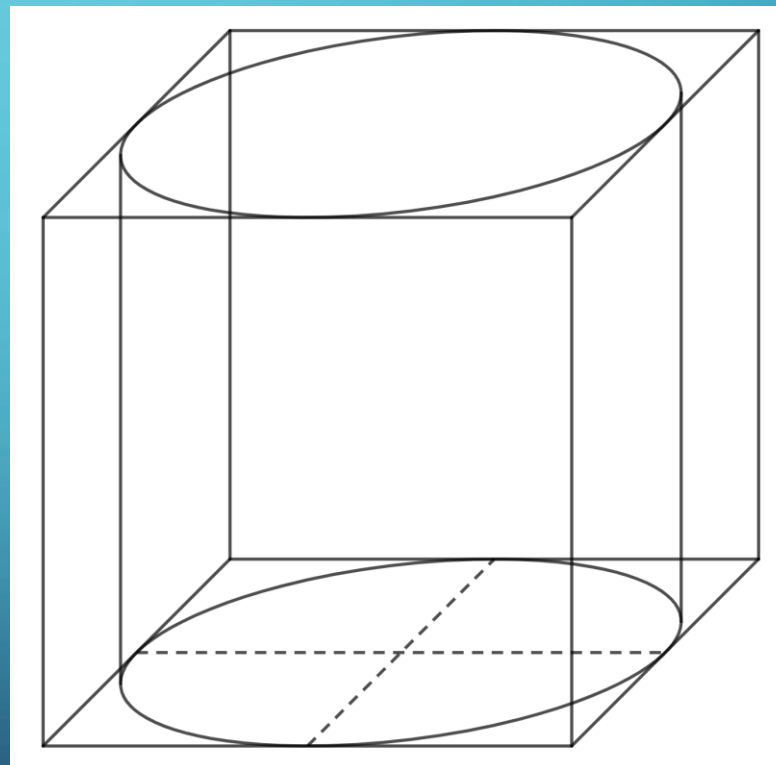
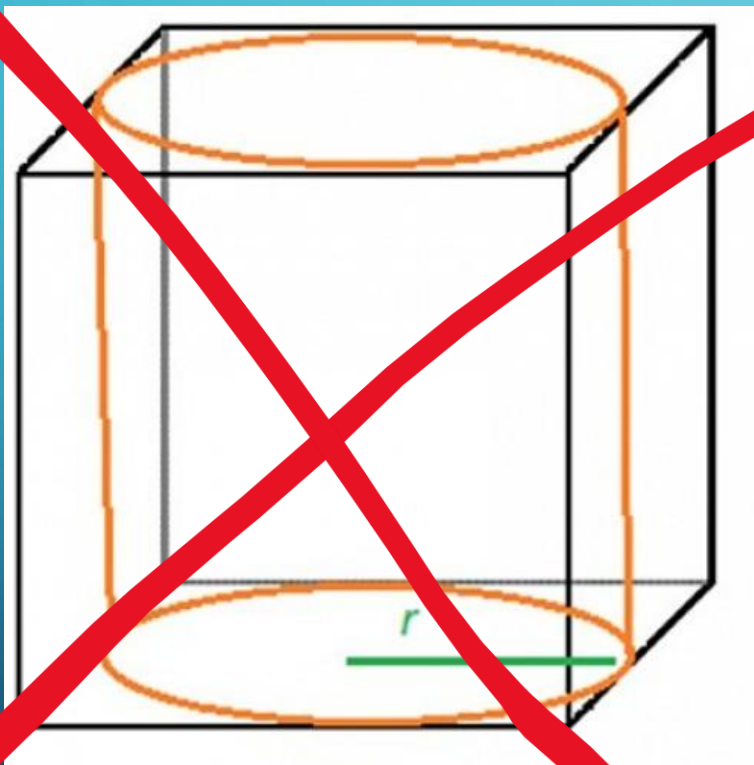
OSOVÁ AFINITA

Úloha III.3



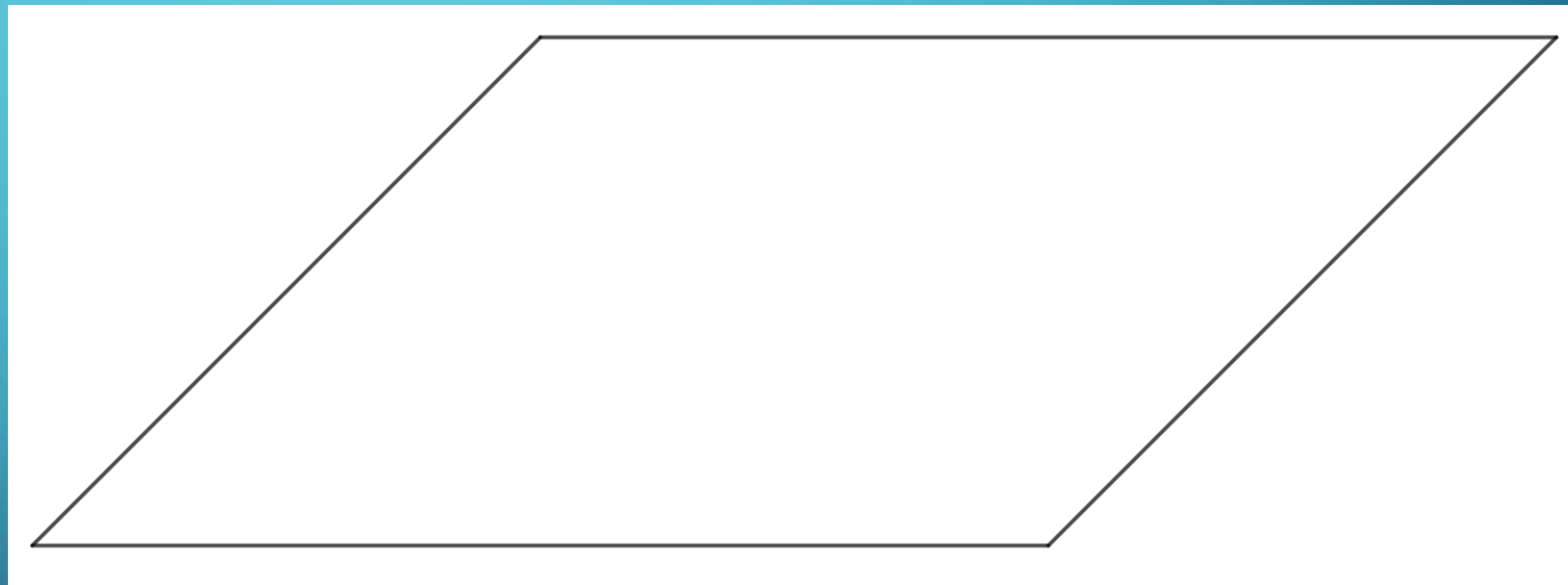
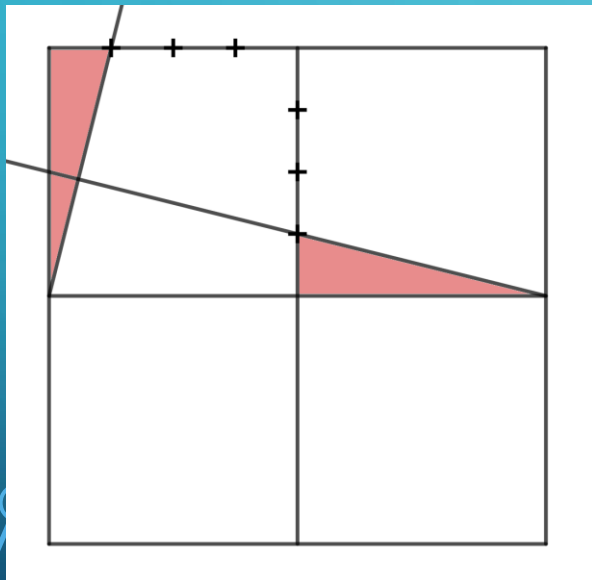
OSOVÁ AFINITA

Úloha III.3



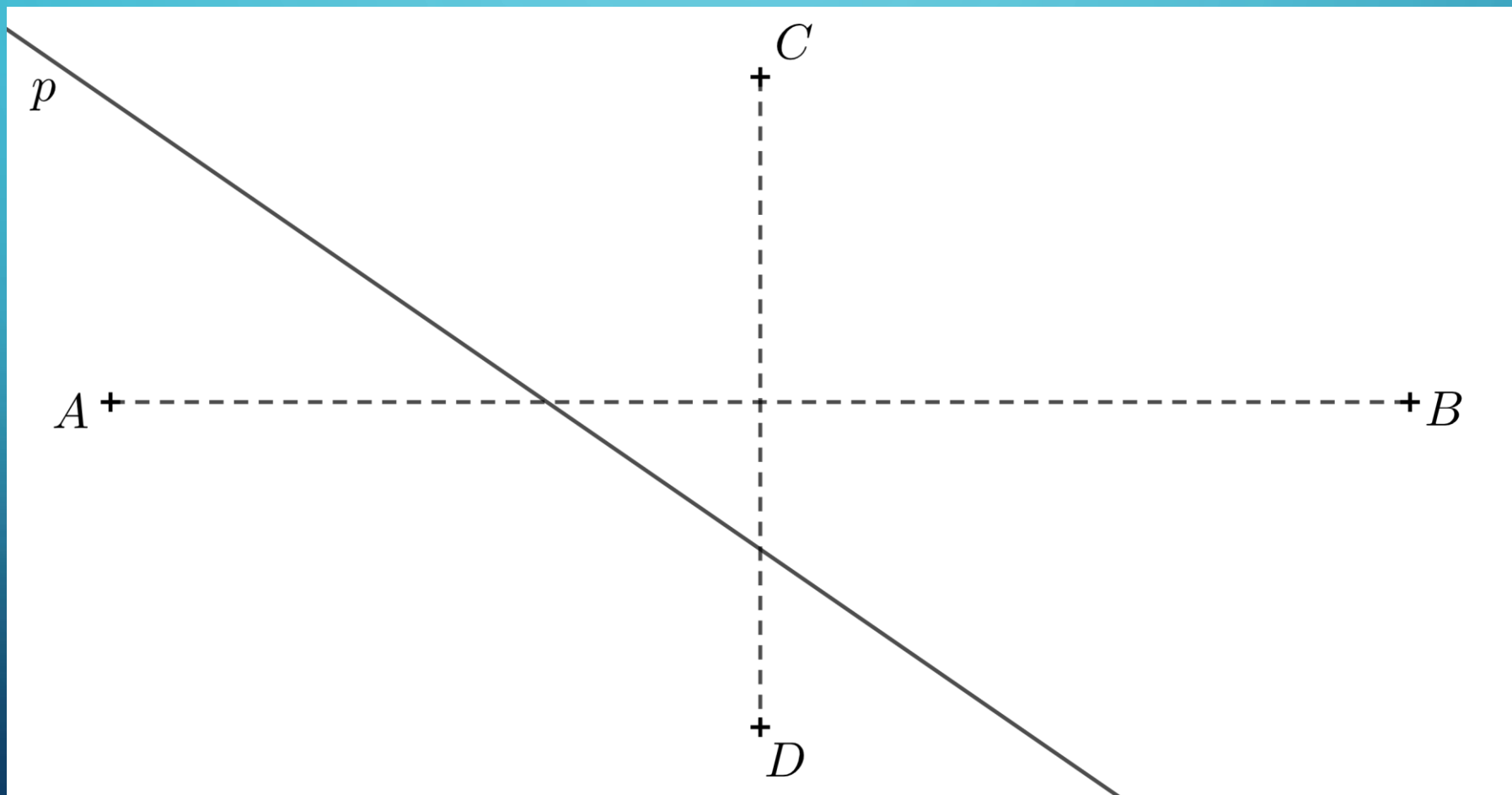
OSO VÁ AFINITA

Úloha III.5 – příčková konstrukce



OSO VÁ AFINITA

Úloha III.6 – průsečíky přímky s elipsou



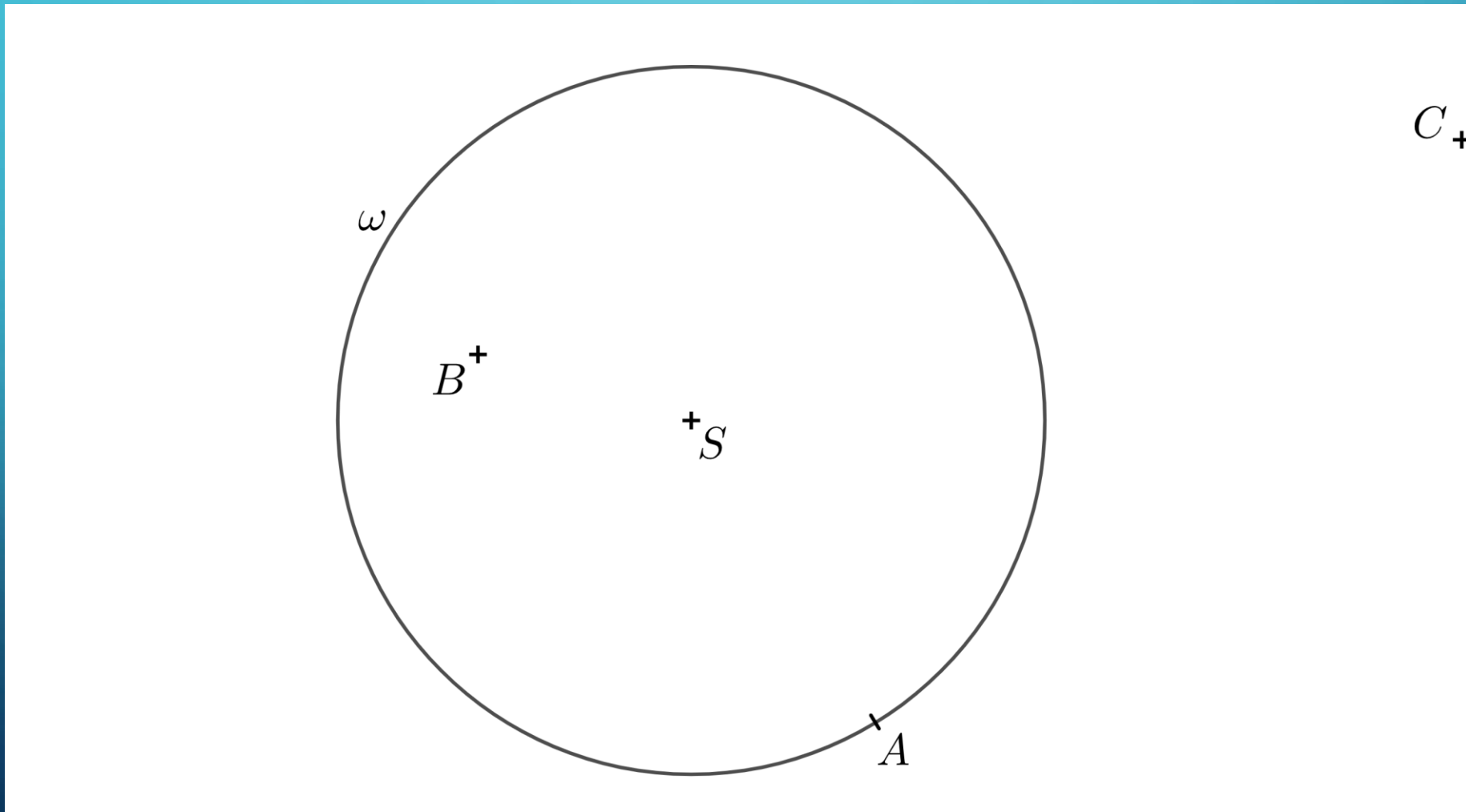
KRUHOVÁ INVERZE

- Möbiova rovina = eukleidovská rovina sjednocená s jedním nevlastním bodem
 - tento bod náleží každé přímce Möbiovy roviny a zároveň leží ve vnější oblasti každé kružnice
- V kruhové inverzi se základní kružnicí $\omega(S; r)$ přiřazujeme
 - bodu S nevlastní bod Möbiovy roviny (S_∞);
 - bodu $X \neq S$ bod X' takový, že $|SX'| \cdot |SX| = r^2$ a zároveň bod X' náleží polopřímce SX .

KRUHOVÁ INVERZE

Úloha IV.1

$$|SX'| \cdot |SX| = r^2$$

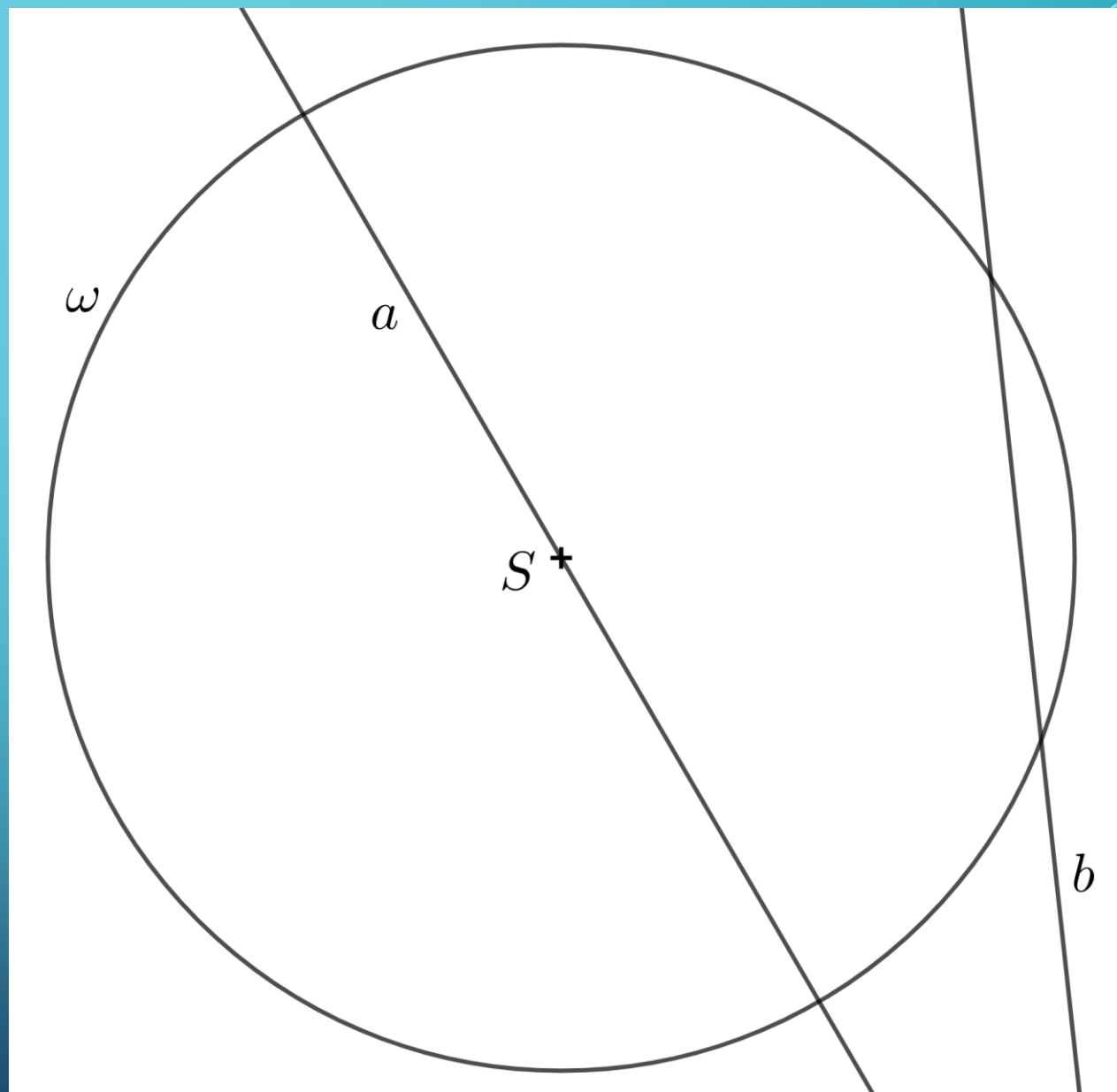


KRUHOVÁ INVERZE

Úloha IV.2

- Lze ukázat, že v kruhové inverzi platí:

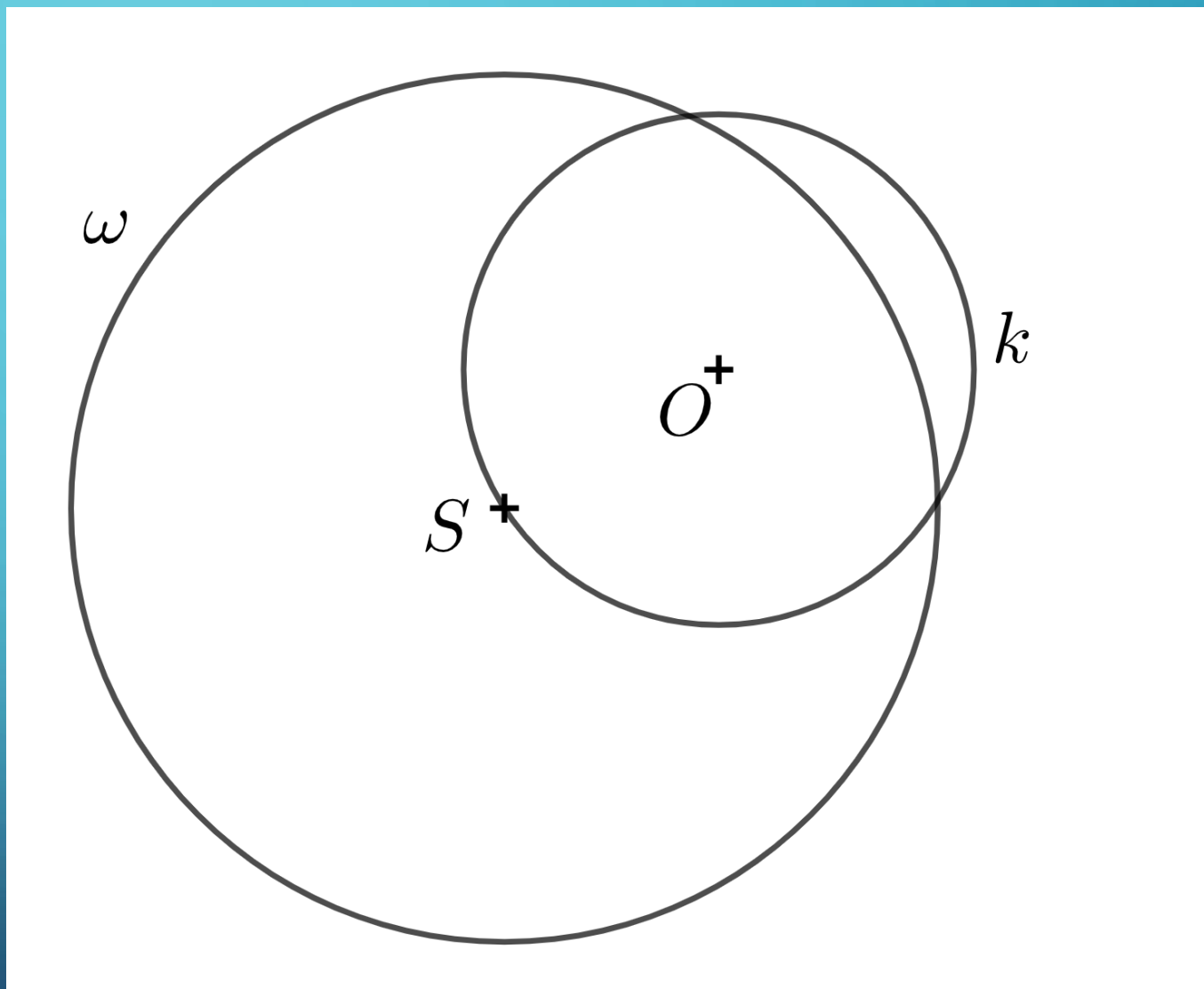
$$|\angle SMN| = |\angle SM'N'|$$



KRUHOVÁ INVERZE

Úloha IV.3

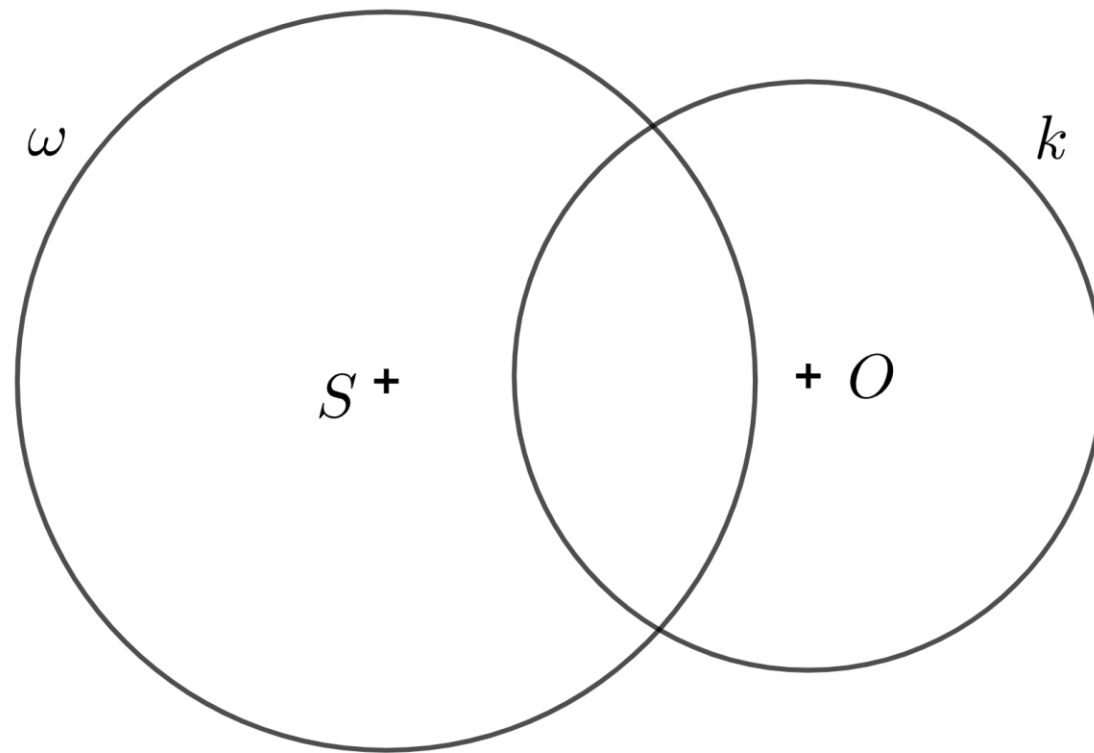
- Z definice plyne, že kruhová inverze je involutorní zobrazení (tj. zobrazení, jehož složením samo se sebou získáme identitu)



KRUHOVÁ INVERZE

- Lze dokázat, že v kruhové inverzi je obrazem kruhové křivky kruhová křivka.

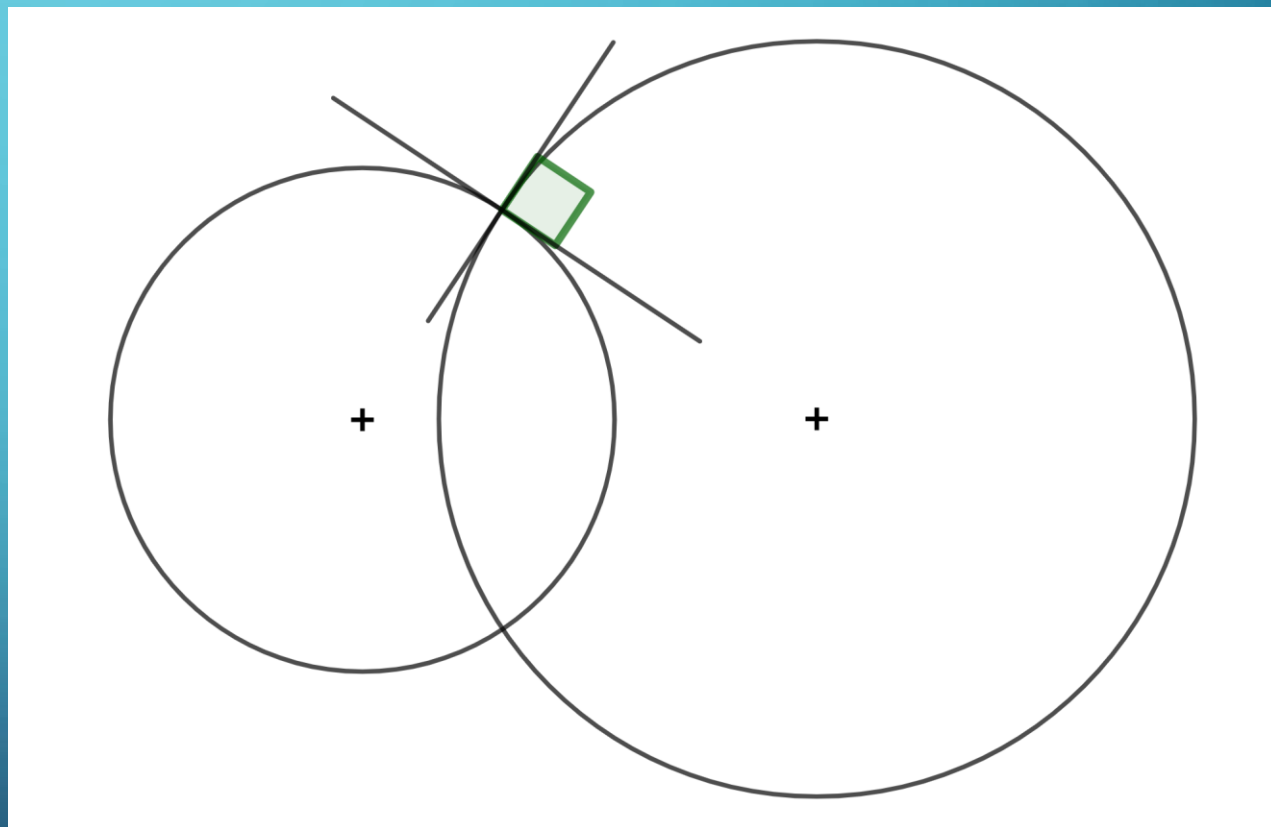
Úloha IV.4



KRUHOVÁ INVERZE

ORTOGONÁLNÍ KRUŽNICE

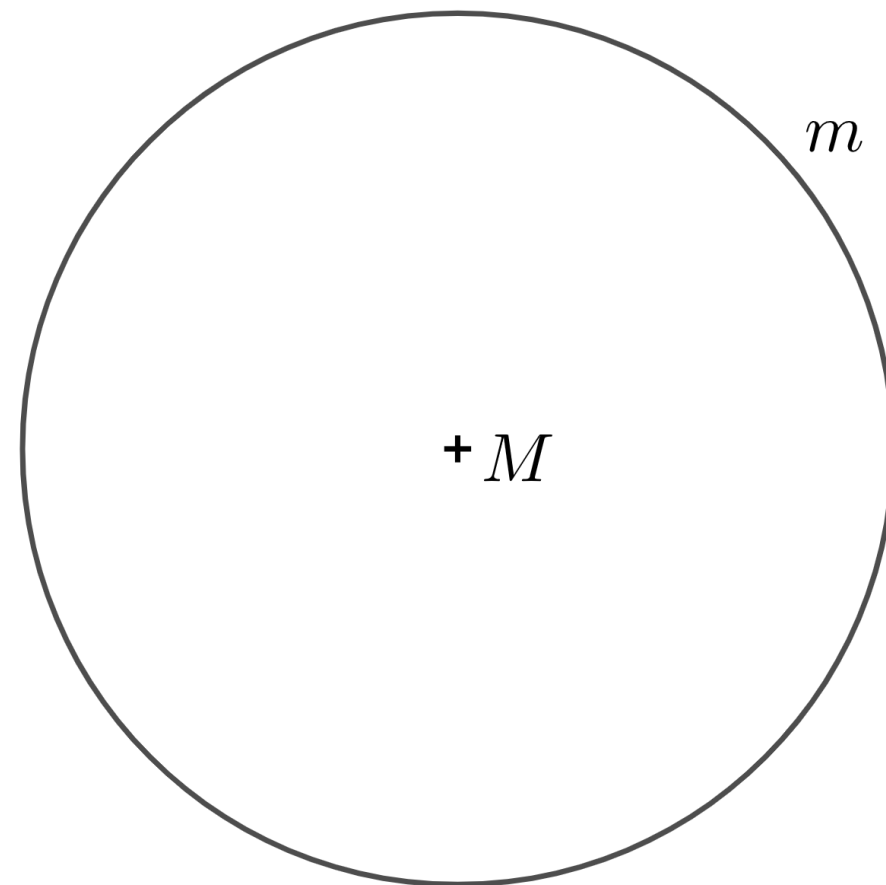
- Kružnice, které svírají pravý úhel – velikost úhlu měříme pomocí tečen ve společném bodě daných kružnic



KRUHOVÁ INVERZE

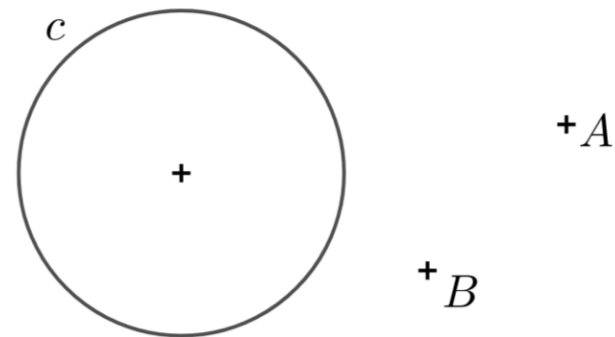
Úloha IV.5

$S +$



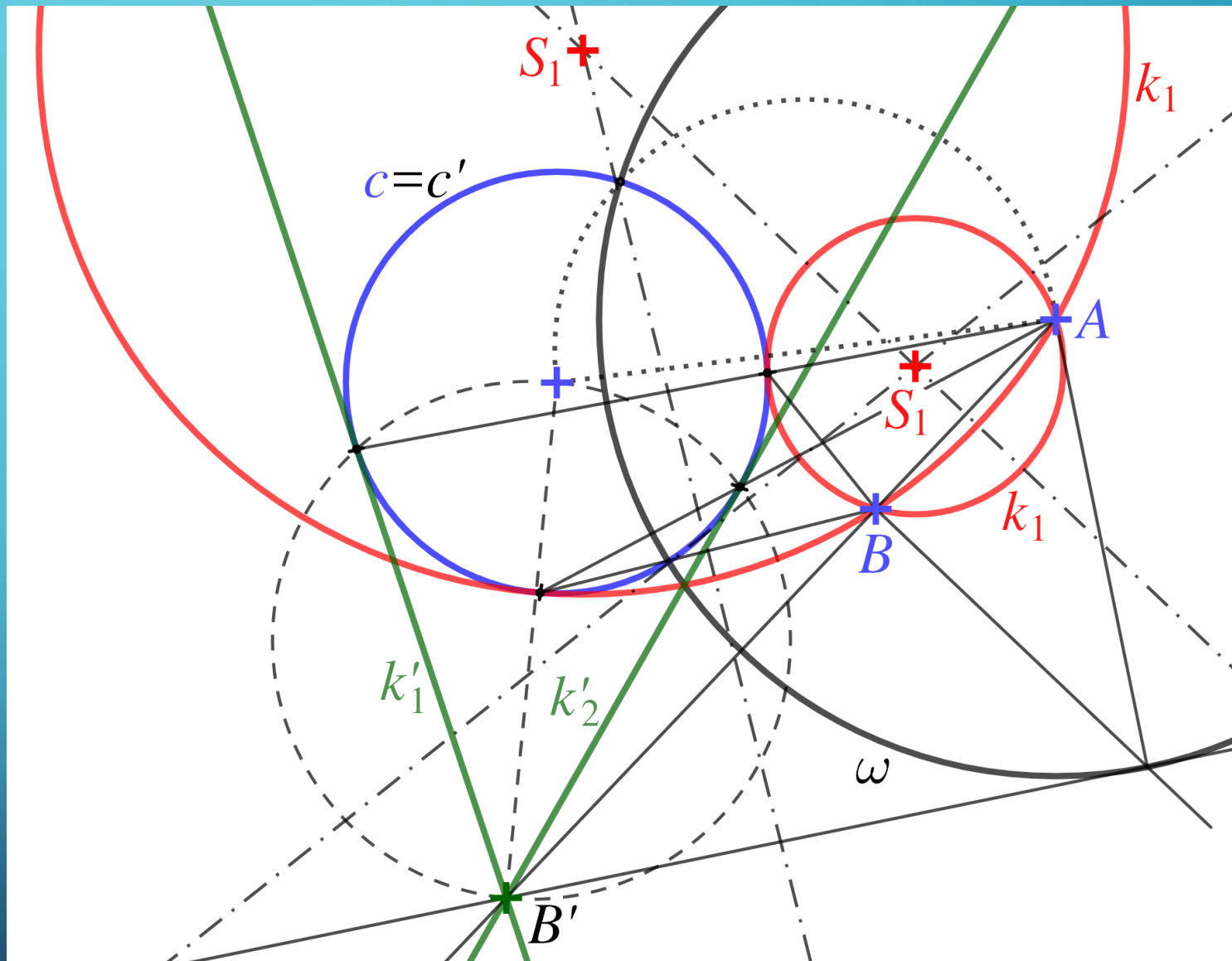
KRUHOVÁ INVERZE

Úloha IV.6



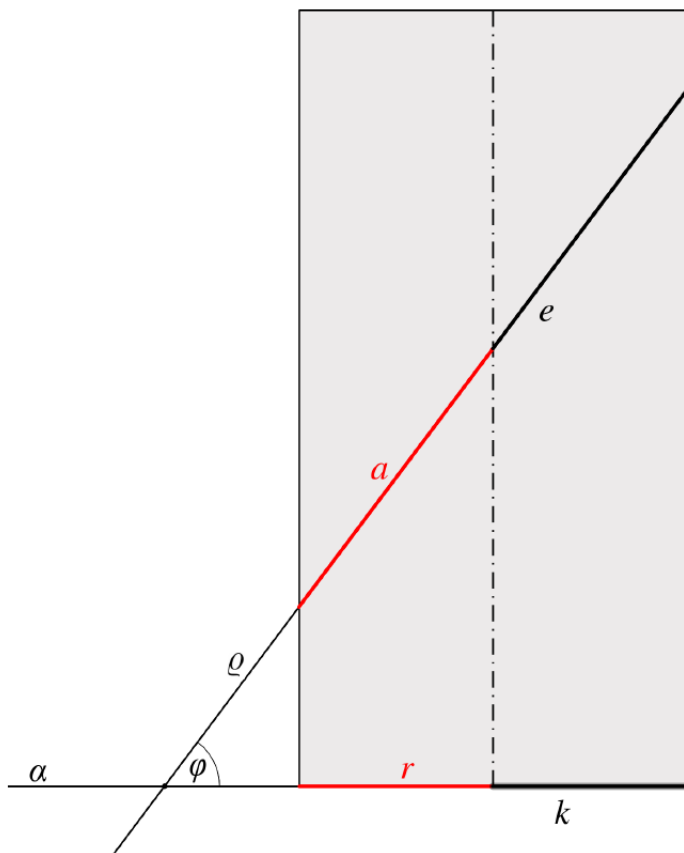
KRUHOVÁ INVERZE

Úloha IV.6



BONUSOVÁ ÚLOHA

- Je dána elipsa s hlavní poloosou $a = 5$ cm a vedlejší poloosou $b = 3$ cm. Vypočítejte (bez znalosti příslušného vztahu) obsah plochy ohraničené touto elipsou.



- Danou elipsu můžeme získat jako řez (přesněji obvod řezu) rotačního válce s poloměrem $r = 3$ cm vhodnou rovinou ρ (odchylka φ roviny ρ od roviny podstavy válce α musí být taková, aby délka hlavní osy elipsy byla rovna $2a$, tedy 10 cm).
- Mezi rovinami ρ, α je afinní vztah. Osou afinity je průsečnice rovin, směr afinity je určen osou válce. Kružnice k tvořící obvod podstavy válce se v této afinitě zobrazí na žádanou elipsu e . Pro obsahy ploch ohraničených kružnicí k a elipsou e platí stejný poměr jako pro délky odpovídajících si úseček kolmých k ose afinity. Poloměr r kružnice k (3 cm) se zobrazí na poloosu a elipsy e (5 cm), poměr je tedy 5:3, proto:

$$S = \frac{5}{3}\pi r^2 = 15\pi$$

ŘEŠENÍ