

# Mocnost bodu ke kružnici

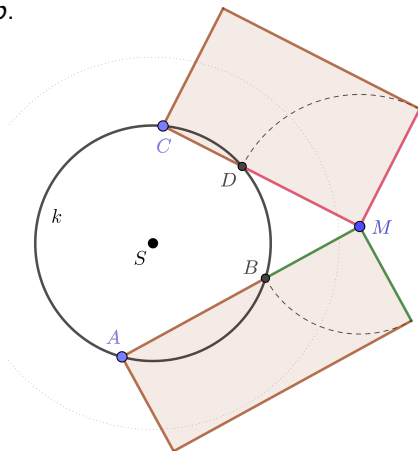
Jana Hromadová

Katedra didaktiky matematiky, MFF UK

30. červen 2025

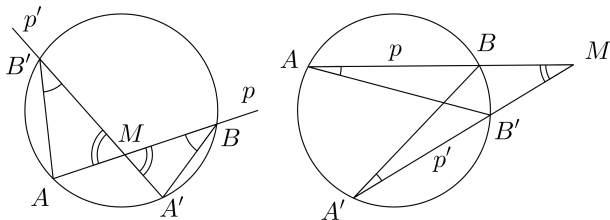
# Motivace

- V rovině je dána kružnice  $k$  a bod  $M$ . Sečna  $p$  kružnice  $k$  vedená bodem  $M$  protíná kružnici  $k$  v bodech  $A, B$ .
- Hypotéza: Obsah obdélníku, jehož strany mají délky  $|MA|$ ,  $|MB|$  nezávisí na volbě polohy sečny  $p$ .



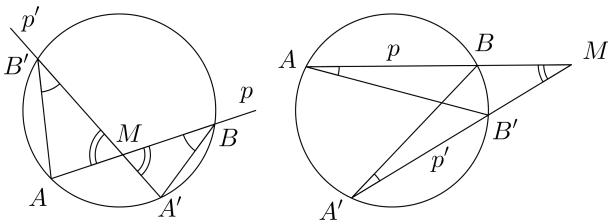
# Zavedení pojmu

- Snadno ověříme vyslovenou hypotézu:



# Zavedení pojmu

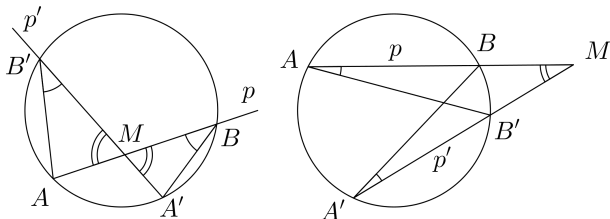
- Snadno ověříme vyslovenou hypotézu:



- $\triangle MAB' \sim \triangle MA'B$

# Zavedení pojmu

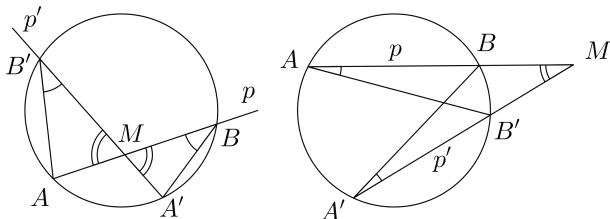
- Snadno ověříme vyslovenou hypotézu:



- $\triangle MAB' \sim \triangle MA'B$
- $\frac{|AM|}{|B'M|} = \frac{|A'M|}{|BM|}$

# Zavedení pojmu

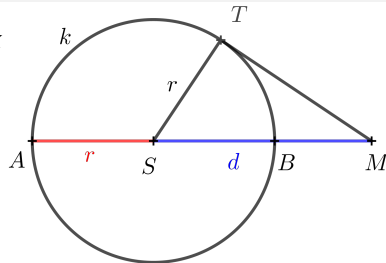
- Snadno ověříme vyslovenou hypotézu:



- $\triangle MAB' \sim \triangle MA'B$
- $\frac{|AM|}{|B'M|} = \frac{|A'M|}{|BM|}$
- $|AM| \cdot |BM| = |A'M| \cdot |B'M|$

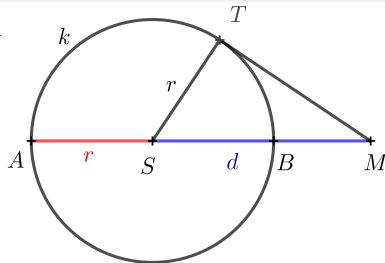
# Zavedení pojmu

- sečna vedená středem  $S$  kružnice  $k$  o poloměru  $r$ ; označme  $|MS| = d$



# Zavedení pojmu

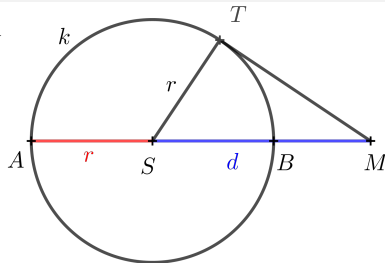
- sečna vedená středem  $S$  kružnice  $k$  o poloměru  $r$ ; označme  $|MS| = d$
- $|MA| = |d + r|$ ,  $|MB| = |d - r|$





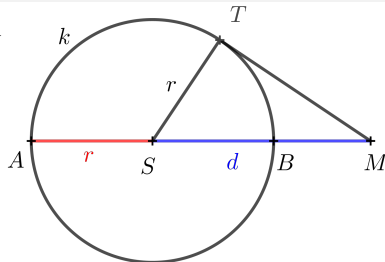
# Zavedení pojmu

- sečna vedená středem  $S$  kružnice  $k$  o poloměru  $r$ ; označme  $|MS| = d$
- $|MA| = |d + r|$ ,  $|MB| = |d - r|$
- $|MA| \cdot |MB| = |d + r| \cdot |d - r|$   
 $|MA| \cdot |MB| = |d^2 - r^2|$



# Zavedení pojmu

- sečna vedená středem  $S$  kružnice  $k$  o poloměru  $r$ ; označme  $|MS| = d$



- $|MA| = |d + r|$ ,  $|MB| = |d - r|$

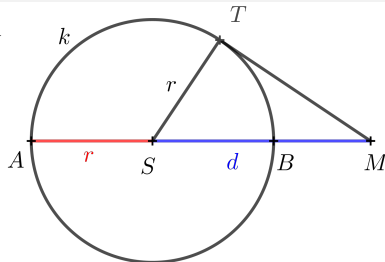
- $|MA| \cdot |MB| = |d + r| \cdot |d - r|$   
 $|MA| \cdot |MB| = |d^2 - r^2|$

- **Definice:** Je dán bod  $M$  a kružnice  $k(S, r)$ ,  $|MS| = d$ . Číslo  $m_k^M = d^2 - r^2$  nazýváme mocnost bodu  $M$  ke kružnici  $k$ .

- $m_k^M > 0$  pro body ve vnější oblasti kružnice  $k$
- $m_k^M = 0$  pro body kružnice  $k$
- $m_k^M < 0$  pro body ve vnitřní oblasti kružnice  $k$

# Zavedení pojmu

- sečna vedená středem  $S$  kružnice  $k$  o poloměru  $r$ ; označme  $|MS| = d$



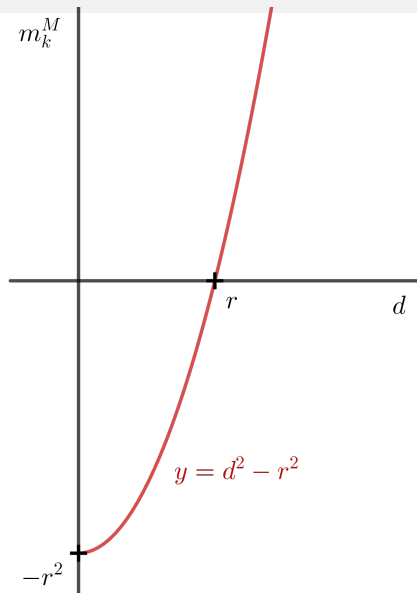
- $|MA| = |d + r|$ ,  $|MB| = |d - r|$

- $|MA| \cdot |MB| = |d + r| \cdot |d - r|$   
 $|MA| \cdot |MB| = |d^2 - r^2|$

- **Definice:** Je dán bod  $M$  a kružnice  $k(S, r)$ ,  $|MS| = d$ . Číslo  $m_k^M = d^2 - r^2$  nazýváme mocnost bodu  $M$  ke kružnici  $k$ .

- $m_k^M > 0$  pro body ve vnější oblasti kružnice  $k$
  - $m_k^M = 0$  pro body kružnice  $k$
  - $m_k^M < 0$  pro body ve vnitřní oblasti kružnice  $k$
- tečna kružnice  $k$  s bodem dotyku  $T$  (mezní případ sečny, body  $A$  i  $B$  splynou):  $m_k^M = |MT|^2$

# Zavedení pojmu



# Zavedení pojmu

- množina bodů, které mají stejnou mocnost ke kružnici  $k(S, r)$  jako zadaný bod  $M$ :

# Zavedení pojmu

- množina bodů, které mají stejnou mocnost ke kružnici  $k(S, r)$  jako zadaný bod  $M$ :

kružnice soustředná s  $k$ , procházející bodem  $M$

# Zavedení pojmu

- množina bodů, které mají stejnou mocnost ke kružnici  $k(S, r)$  jako zadaný bod  $M$ :

kružnice soustředná s  $k$ , procházející bodem  $M$

- množina bodů, které mají stejnou mocnost ke dvěma nesoustředným kružnicím:

# Zavedení pojmu

- množina bodů, které mají stejnou mocnost ke kružnici  $k(S, r)$  jako zadaný bod  $M$ :

kružnice soustředná s  $k$ , procházející bodem  $M$

- množina bodů, které mají stejnou mocnost ke dvěma nesoustředným kružnicím:

chordála - přímka kolmá na spojnici středů obou zadaných kružnic



# Zavedení pojmu

- množina bodů, které mají stejnou mocnost ke kružnici  $k(S, r)$  jako zadaný bod  $M$ :

kružnice soustředná s  $k$ , procházející bodem  $M$

- množina bodů, které mají stejnou mocnost ke dvěma nesoustředným kružnicím:

chordála - přímka kolmá na spojnici středů obou zadaných kružnic

- množina bodů, které mají stejnou mocnost ke třem kružnicím, jejichž středy neleží na jedné přímce:

# Zavedení pojmu

- množina bodů, které mají stejnou mocnost ke kružnici  $k(S, r)$  jako zadaný bod  $M$ :

kružnice soustředná s  $k$ , procházející bodem  $M$

- množina bodů, které mají stejnou mocnost ke dvěma nesoustředným kružnicím:

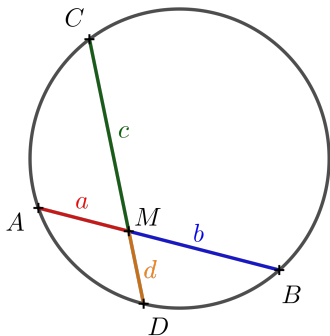
chordála - přímka kolmá na spojnici středů obou zadaných kružnic

- množina bodů, které mají stejnou mocnost ke třem kružnicím, jejichž středy neleží na jedné přímce:

potenční střed

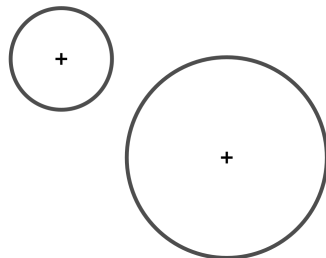
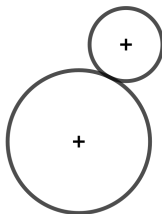
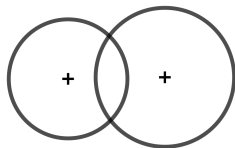
## Využití mocnosti při řešení úloh

Jsou dány nekolineární body  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Dále je dán vnitřní bod  $M$  úsečky  $AB$ . Označme  $|MA| = a$ ,  $|MB| = b$ ,  $|MC| = c$ . Určete vzdálenost bodu  $M$  od průsečíku  $D$  ( $D \neq C$ ) přímky  $MC$  s kružnicí opsanou trojúhelníku  $ABC$ .



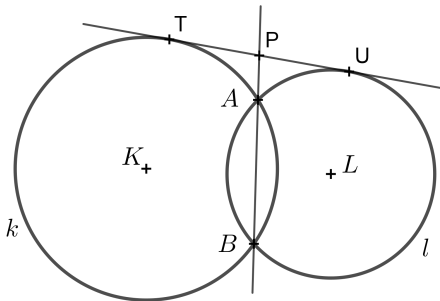
# Využití mocnosti při řešení úloh

Sestrojte chordálu dvou kružnic.



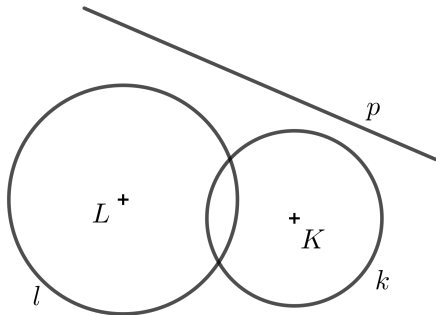
## Využití mocnosti při řešení úloh

Kružnice  $k, l$  se středy  $K, L$  se protínají v bodech  $A, B$ . Přímka  $AB$  protne společnou tečnu kružnic  $k, l$ , která se jich dotýká v bodech  $T, U$ , v bodě  $P$ . Dokažte, že platí  $|PT| = |PU|$ .



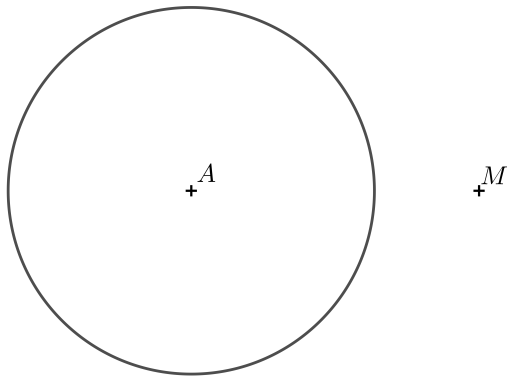
## Využití mocnosti při řešení úloh

Na přímce  $p$  najděte bod  $P$ , z něhož lze vést „stejně dlouhé tečny“ ke dvěma daným kružnicím.



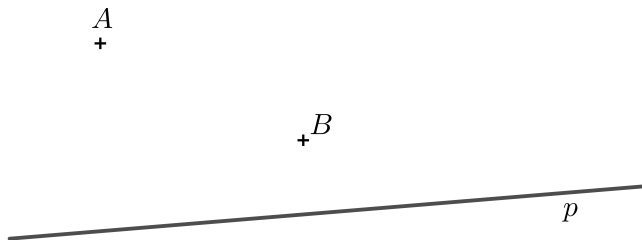
## Využití mocnosti při řešení úloh

Je dána kružnice  $k(S; 7\text{cm})$  a bod  $M$ ,  $|MS| = 11\text{ cm}$ . Bodem  $M$  vedte sečnu kružnice  $k$  tak, aby jeden její průsečík s kružnicí  $k$  byl středem úsečky s krajními body v bodě  $M$  a ve druhém průsečíku.



# Využití mocnosti při řešení úloh

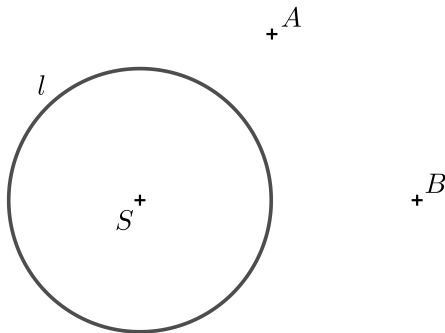
Sestrojte kružnici procházející body  $A$ ,  $B$  a dotýkající se přímky  $p$ .





## Využití mocnosti při řešení úloh

Jsou dány body  $A, B$  ve vnější oblasti kružnice  $l(S, r)$ , střed  $S$  neleží na přímce  $AB$ . Sestrojte kružnici  $k$ , která prochází danými body  $A, B$  a dotýká se vně zadané kružnice  $l$ .



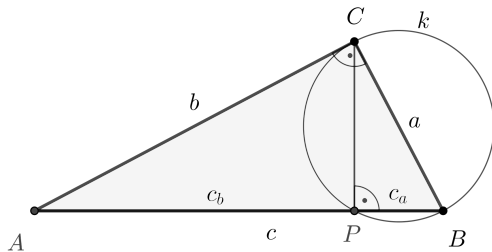
# Eukleidova věta o odvěsně

V pravoúhlém trojúhelníku rozdělíme přeponu patou výšky na přeponu na dva úseky. Potom je obsah čtverce nad libovolnou z odvěsen roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s přeponou a úsekem přepony přilehlým k příslušné odvěsně.

# Eukleidova věta o odvěsně

V pravoúhlém trojúhelníku rozdělíme přeponu patou výšky na přeponu na dva úseky. Potom je obsah čtverce nad libovolnou z odvěsen roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s přeponou a úsekem přepony přilehlým k příslušné odvěsně.

- $a^2 = c \cdot c_a$        $b^2 = c \cdot c_b$

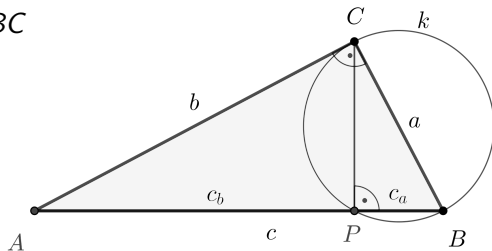


# Eukleidova věta o odvěsně

V pravoúhlém trojúhelníku rozdělíme přeponu patou výšky na přeponu na dva úseky. Potom je obsah čtverce nad libovolnou z odvěsen roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s přeponou a úsekem přepony přilehlým k příslušné odvěsně.

- $a^2 = c \cdot c_a$        $b^2 = c \cdot c_b$

- kružnice  $k$  nad průměrem  $BC$

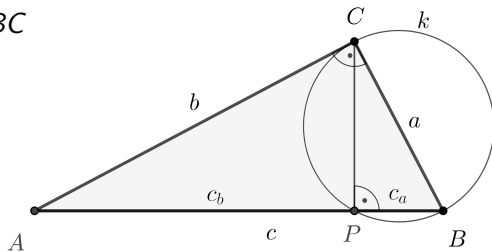


# Eukleidova věta o odvěsně

V pravoúhlém trojúhelníku rozdělíme přeponu patou výšky na přeponu na dva úseky. Potom je obsah čtverce nad libovolnou z odvěsen roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s přeponou a úsekem přepony přilehlým k příslušné odvěsně.

- $a^2 = c \cdot c_a$        $b^2 = c \cdot c_b$

- kružnice  $k$  nad průměrem  $BC$
- mocnost  $A$  vzhledem ke  $k$ :

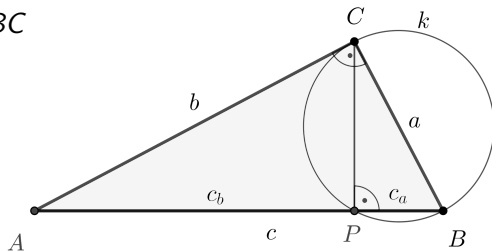


# Eukleidova věta o odvěsně

V pravoúhlém trojúhelníku rozdělíme přeponu patou výšky na přeponu na dva úseky. Potom je obsah čtverce nad libovolnou z odvěsen roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s přeponou a úsekem přepony přilehlým k příslušné odvěsně.

- $a^2 = c \cdot c_a$        $b^2 = c \cdot c_b$

- kružnice  $k$  nad průměrem  $BC$
- mocnost  $A$  vzhledem ke  $k$ :
- $m_k^A = b^2 = c \cdot c_b$



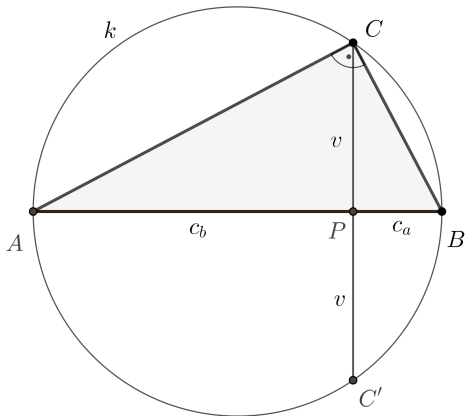
# Eukleidova věta o výšce

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad výškou na přeponu roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s úseky přepony, na něž je přepona rozdělena patou výšky.

# Eukleidova věta o výšce

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad výškou na přeponu roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s úseky přepony, na něž je přepona rozdělena patou výšky.

- $v^2 = c_a \cdot c_b$

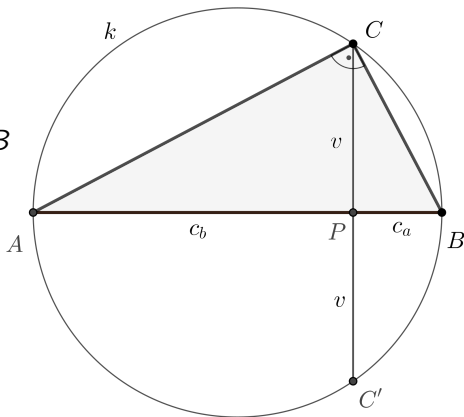




# Eukleidova věta o výšce

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad výškou na přeponu roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s úseky přepony, na něž je přepona rozdělena patou výšky.

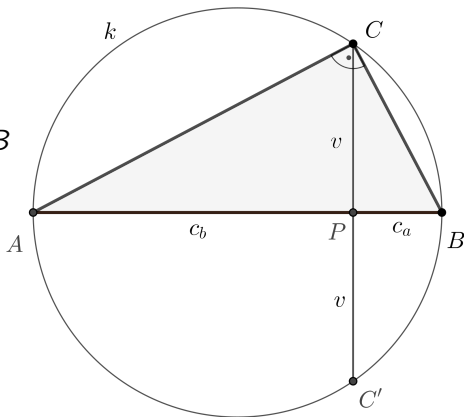
- $v^2 = c_a \cdot c_b$
- kružnice  $k$  nad průměrem  $AB$



# Eukleidova věta o výšce

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad výškou na přeponu roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s úseky přepony, na něž je přepona rozdělena patou výšky.

- $v^2 = c_a \cdot c_b$
- kružnice  $k$  nad průměrem  $AB$
- průsečík  $C'$  přímky  $CP$  s  $k$

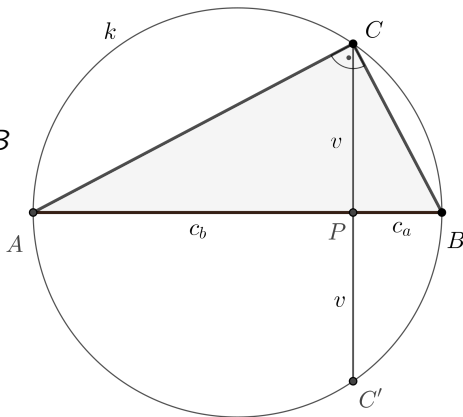




# Eukleidova věta o výšce

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad výškou na přeponu roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s úseky přepony, na něž je přepona rozdělena patou výšky.

- $v^2 = c_a \cdot c_b$
- kružnice  $k$  nad průměrem  $AB$
- průsečík  $C'$  přímky  $CP$  s  $k$
- mocnost  $P$  vzhledem ke  $k$ :
- $m_k^P = v \cdot v = c_a \cdot c_b$



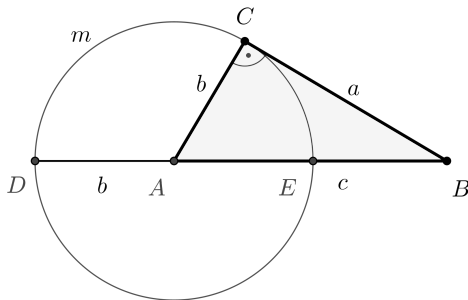
# Pýthagorova věta

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad přeponou roven součtu obsahů čtverců nad odvěsnami.

# Pýthagorova věta

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad přeponou roven součtu obsahů čtverců nad odvěsnami.

- $c^2 = a^2 + b^2$

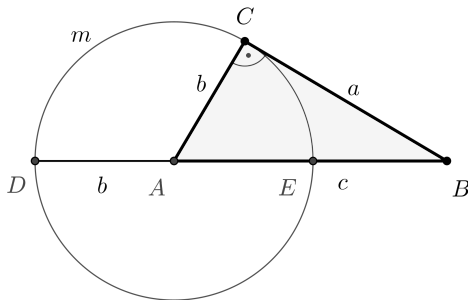


# Pýthagorova věta

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad přeponou roven součtu obsahů čtverců nad odvěsnami.

- $c^2 = a^2 + b^2$

- kružnice  $m(A, b)$



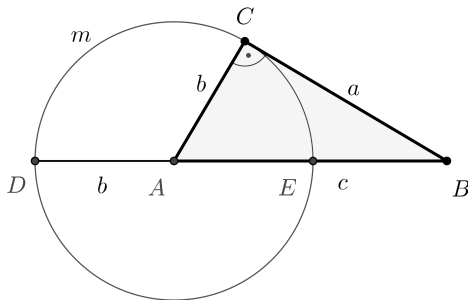
# Pýthagorova věta

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad přeponou roven součtu obsahů čtverců nad odvěsnami.

- $c^2 = a^2 + b^2$

- kružnice  $m(A, b)$

- $D, E$  - průsečíky přímky  $AB$  s kružnicí  $m$





# Pýthagorova věta

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad přeponou roven součtu obsahů čtverců nad odvěsnami.

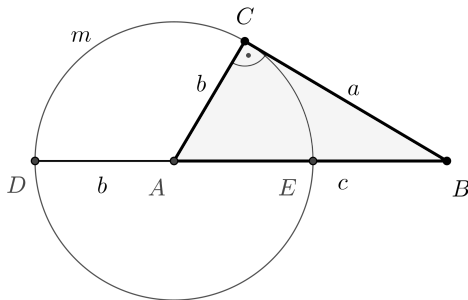
- $c^2 = a^2 + b^2$

- kružnice  $m(A, b)$

- $D, E$  - průsečíky přímky  $AB$  s kružnicí  $m$

- $|DA| = |AE| = |AC| = b$

- $|DB| = c + b \quad |EB| = c - b$



# Pýthagorova věta

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad přeponou roven součtu obsahů čtverců nad odvěsnami.

- $c^2 = a^2 + b^2$

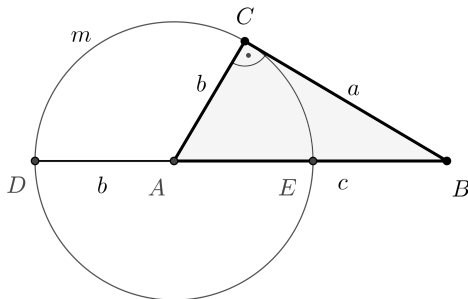
- kružnice  $m(A, b)$

- $D, E$  - průsečíky přímky  $AB$  s kružnicí  $m$

- $|DA| = |AE| = |AC| = b$

- $|DB| = c + b \quad |EB| = c - b$

- mocnost bodu  $B$  vzhledem k  $m$ :



# Pýthagorova věta

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad přeponou roven součtu obsahů čtverců nad odvěsnami.

- $c^2 = a^2 + b^2$

- kružnice  $m(A, b)$

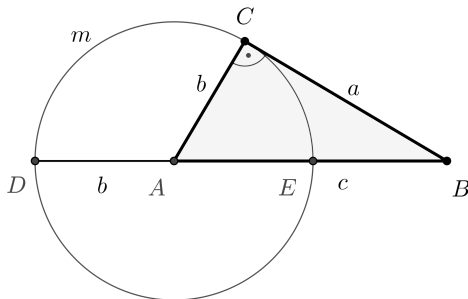
- $D, E$  - průsečíky přímky  $AB$  s kružnicí  $m$

- $|DA| = |AE| = |AC| = b$

- $|DB| = c + b \quad |EB| = c - b$

- mocnost bodu  $B$  vzhledem k  $m$ :

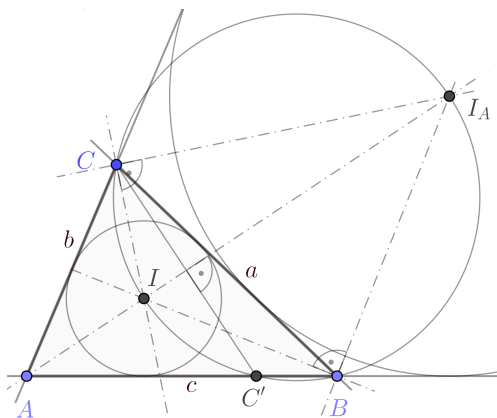
- $m_m^B = a^2 = (c - b) \cdot (c + b) = c^2 - b^2$



# Heronův vzorec

Pro obsah  $S$  trojúhelníku  $ABC$  platí  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ , kde  $a, b, c$  jsou délky jeho stran a  $s$  je poloviční obvod.

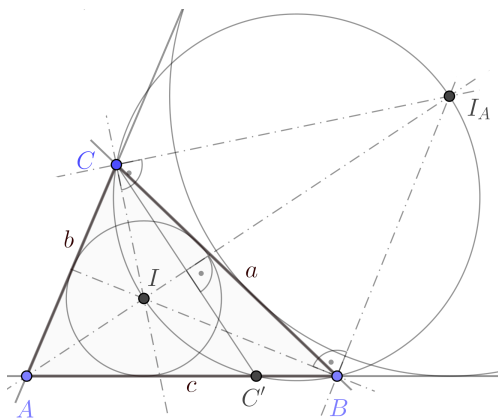
- Označme  $I$ , resp.  $I_A, I_B, I_C$  středy kružnice vepsané, resp. připsaných ke stranám  $a, b, c$ .



# Heronův vzorec

Pro obsah  $S$  trojúhelníku  $ABC$  platí  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ , kde  $a, b, c$  jsou délky jeho stran a  $s$  je poloviční obvod.

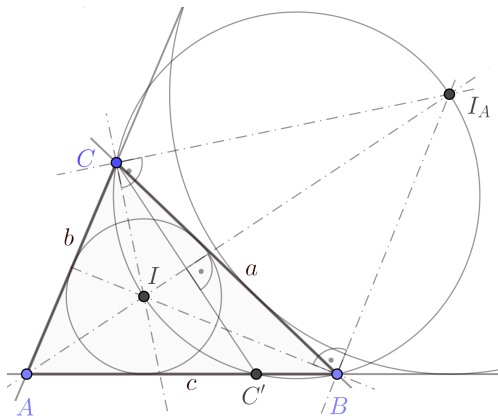
- Označme  $I$ , resp.  $I_A, I_B, I_C$  středy kružnice vepsané, resp. připsaných ke stranám  $a, b, c$ .
- nejprve odvodíme:  
 $|AB| \cdot |AC| = |AI| \cdot |AI_A|$



# Heronův vzorec

Pro obsah  $S$  trojúhelníku  $ABC$  platí  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ , kde  $a, b, c$  jsou délky jeho stran a  $s$  je poloviční obvod.

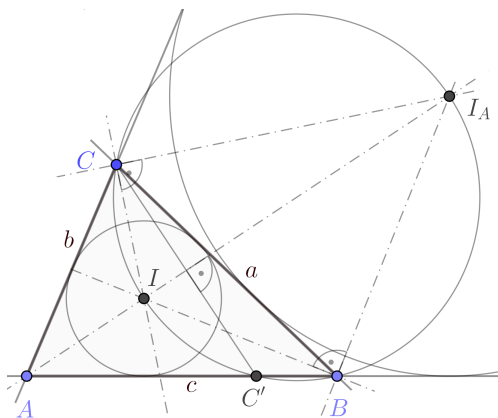
- Označme  $I$ , resp.  $I_A, I_B, I_C$  středy kružnice vepsané, resp. připsaných ke stranám  $a, b, c$ .
- nejprve odvodíme:  
 $|AB| \cdot |AC| = |AI| \cdot |AI_A|$
- čtyřúhelník  $CIBI_A$  je tětiový



# Heronův vzorec

Pro obsah  $S$  trojúhelníku  $ABC$  platí  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ , kde  $a, b, c$  jsou délky jeho stran a  $s$  je poloviční obvod.

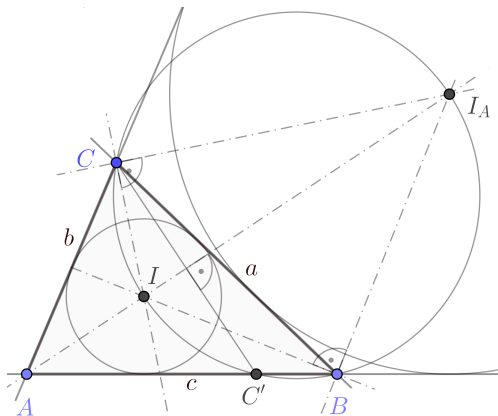
- Označme  $I$ , resp.  $I_A, I_B, I_C$  středy kružnice vepsané, resp. připsaných ke stranám  $a, b, c$ .
- nejprve odvodíme:  
 $|AB| \cdot |AC| = |AI| \cdot |AI_A|$
- čtyřúhelník  $CIBI_A$  je tětiový
- $O(I_A I) : C \rightarrow C'$



# Heronův vzorec

Pro obsah  $S$  trojúhelníku  $ABC$  platí  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ , kde  $a, b, c$  jsou délky jeho stran a  $s$  je poloviční obvod.

- Označme  $I$ , resp.  $I_A, I_B, I_C$  středy kružnice vepsané, resp. připsaných ke stranám  $a, b, c$ .
- nejprve odvodíme:  
 $|AB| \cdot |AC| = |AI| \cdot |AI_A|$
- čtyřúhelník  $CIBI_A$  je tětiový
- $O(I_A I) : C \rightarrow C'$
- $|AC| = |AC'|$

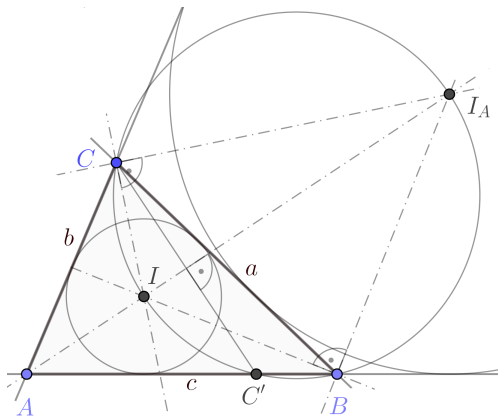




# Heronův vzorec

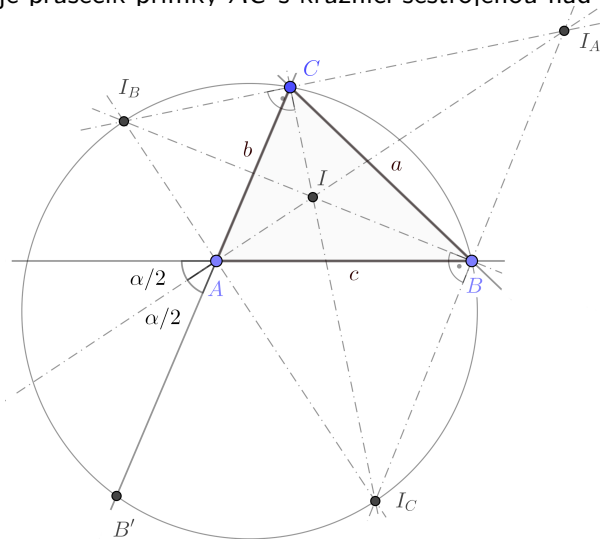
Pro obsah  $S$  trojúhelníku  $ABC$  platí  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ , kde  $a, b, c$  jsou délky jeho stran a  $s$  je poloviční obvod.

- Označme  $I$ , resp.  $I_A, I_B, I_C$  středy kružnice vepsané, resp. připsaných ke stranám  $a, b, c$ .
- nejprve odvodíme:  
 $|AB| \cdot |AC| = |AI| \cdot |AI_A|$
- čtyřúhelník  $CIBI_A$  je tětiový
- $O(I_A I) : C \rightarrow C'$
- $|AC| = |AC'|$
- mocnost bodu  $A$  ke kružnici nad průměrem  $I_A I$

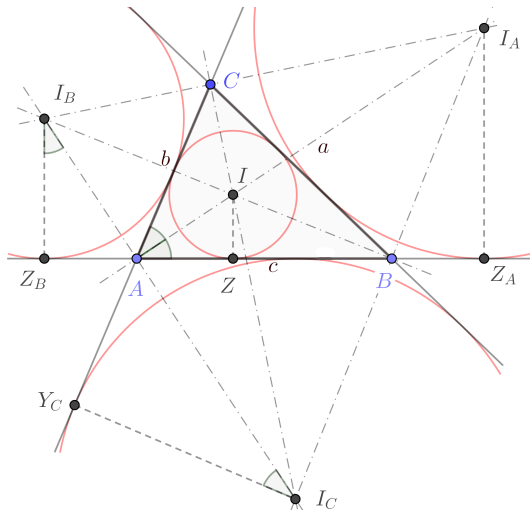


# Heronův vzorec

- Obdobně pak dokážeme:  $|AB| \cdot |AC| = |AB'| \cdot |AC| = |AI_B| \cdot |AI_C|$ , kde  $B'$  je průsečík přímky  $AC$  s kružnicí sestrojenou nad průměrem  $I_B I_C$ .



# Heronův vzorec



$$|AZ| = |AI| \cdot \cos(\alpha/2) = s - a$$

$$|AZ_B| = |AI_B| \cdot \sin(\alpha/2) = s - c$$

$$|AZ_A| = |AI_A| \cdot \cos(\alpha/2) = s$$

$$|AY_C| = |AI_C| \cdot \sin(\alpha/2) = s - b$$

# Heronův vzorec

Heronův vzorec postupně odvodíme z jiného vztahu pro výpočet obsahu trojúhelníku:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \alpha$$

$$S = |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$S = \sqrt{(|AB| \cdot |AC|)^2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

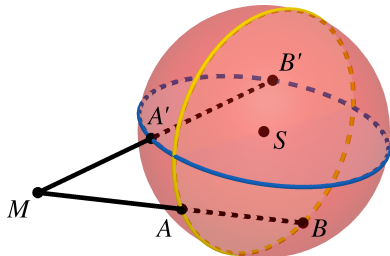
$$S = \sqrt{|A| \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot |A|_A \cdot \cos \frac{\alpha}{2} |A|_B \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot |A|_C \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

# Možnosti rozšíření pojmu

- Mocnost bodu ke kulové ploše

- Mějme sféru  $\kappa(S, r)$  a bod  $M$ , který neleží na sféře  $\kappa$ . Tímto bodem veďme dvě přímky tak, aby sféru  $\kappa$  protly v bodech  $A, B$  respektive  $A', B'$ . Pak platí:  $|MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'|$ .

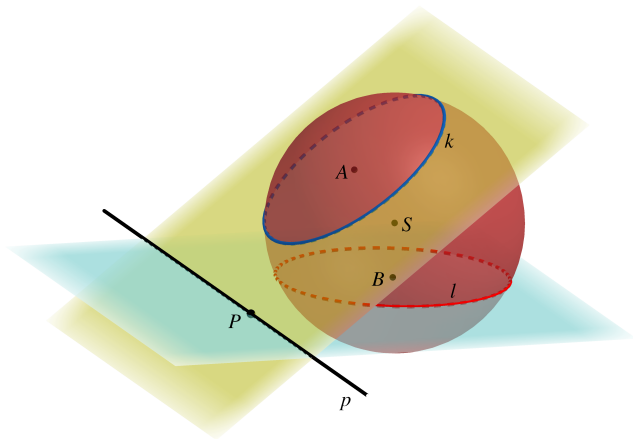


- Darbouxův součin

- Nechť jsou dány dvě nesoustředné kružnice  $k_1(S_1, r_1)$  a  $k_2(S_2, r_2)$ . Darbouxovým součinem těchto dvou kružnic, značíme  $k_1 * k_2$ , budeme rozumět hodnotu výrazu:  $k_1 * k_2 = d^2 - r_1^2 - r_2^2$ , kde  $d$  je délka úsečky  $S_1S_2$ .

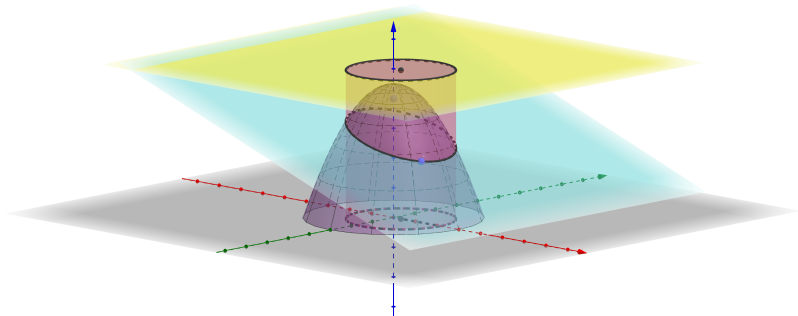
## Využití mocnosti bodu ke kulové ploše při řešení úloh

Kulová plocha  $\kappa$  protíná rovinu  $\phi$  v kružnici  $k(A, a)$  a rovinu  $\sigma$  v kružnici  $l(B, b)$ . Bod  $P$  je libovolný bod průsečnice  $p$  rovin  $\phi$  a  $\sigma$ . Vyjádřete  $|PA|^2 - |PB|^2$  pomocí poloměrů  $a, b$ .



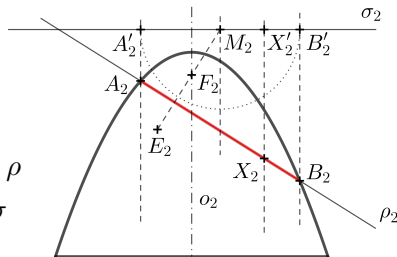
# Rovinný řez rotačního paraboloidu

Rotační paraboloid je prořat rovinou, která je různoběžná s osou rotace v elipse. Pravoúhlým průmětem této elipsy do roviny kolmé k ose rotace je kružnice.



# Rovinný řez rotačního paraboloidu

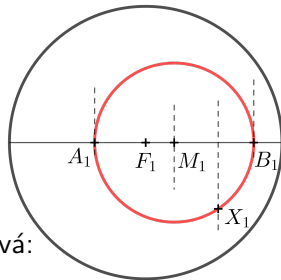
- $\rho$  - rovina řezu
- $\sigma$  - řídící rovina paraboloidu
- $F$  - ohnisko paraboloidu
- $E$  - bod souměrně sdružený s  $F$  dle  $\rho$
- $M$  - průsečík přímky  $EF$  s rovinou  $\sigma$
- $X$  - bod průnikové elipsy
- $X'$  - průmět bodu  $X$  do roviny  $\sigma$



Kulová plocha  $\kappa$  o středu  $X$ , procházející ohniskem  $F$  prochází též bodem  $E$  a dotýká se roviny  $\sigma$  v bodě  $X'$ .

Z mocnosti bodu  $M$  ke kulové ploše  $\kappa$  vyplývá:

$$|ME| \cdot |MF| = |MX'|^2 = \text{konst.}$$





# Literatura

- Blažek, J. (2021). Čtyři důkazy Heronova vzorce. Matematika–Fyzika–Informatika, 30(1), 18–26.  
[https://mfi.upol.cz/files/30/3001/mfi\\_3001\\_018\\_026.pdf](https://mfi.upol.cz/files/30/3001/mfi_3001_018_026.pdf)
- Drábek, K. Harant, F. Setzer, O. (1979). Deskriptivní geometrie II, SNTL, Praha, 288 stran.
- Moravcová, V. Hromadová, J. (2021). Základy planimetrie pro učitelské studium. Matfyzpress, Praha, 247 stran, ISBN: 978-80-7378-456-0. [https://karlin.mff.cuni.cz/~morava/Zaklady\\_planimetrie.pdf](https://karlin.mff.cuni.cz/~morava/Zaklady_planimetrie.pdf)
- Půlpán, M. (2024). Mocnost bodu ke kružnici, bakalářská práce.

jole@karlin.mff.cuni.cz