

Rovnice kružnice desetkrát jinak

Zdeněk Halas

KDM MFF UK

2. července 2025

Čím se budeme zabývat

Různé charakterizace kružnice

Eukleidovy Základy

Pýthagorova věta

Eukleidova věta o výšce

Eukleidova věta o výšce pro elipsu

Mocnost bodu ke kružnici

Úloha o žebříku

Úloha o dvou mraveništích

Rovnice kružnice s nekonečným poloměrem

Komplexní čísla

Rovnice kružnice pomocí determinantů

Kružnice a chybějící 2 body

Co je to střed kružnice?

Eukleidés, Základy, def. I, 15
κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον
ὕπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον
ἣ καλεῖται **περιφέρεια**,
πρὸς ἣν ἂν ἐνὸς σημείου
τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων
πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι
πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν
ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

def. I, 16

κέντρον δὲ τοῦ κύκλου
τὸ σημεῖον καλεῖται.

def. I, 17

διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖα τις
διὰ τοῦ κέντρου ἡγμένη
καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη
ὕπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας,
ἣ τις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

Kruh je rovinný útvar
ohraničený jednou křivkou,
jež se nazývá **obvod**,
k němuž z jednoho bodu
ležícího uvnitř útvaru
všechny úsečky vedené
k obvodu kruhu
jsou navzájem shodné.

Středem kruhu
se nazývá tento bod.

Průměr kruhu je nějaká úsečka
vedená středem
a na obou stranách ohraničená
obvodem kruhu
a která jej dělí na poloviny.

Definice kružnice

Nechť $S \in \mathbb{E}_2$, $r > 0$. Potom kružnicí se středem S a poloměrem r nazýváme množinu

$$K = \{X \in \mathbb{E}_2; |XS| = r\}.$$

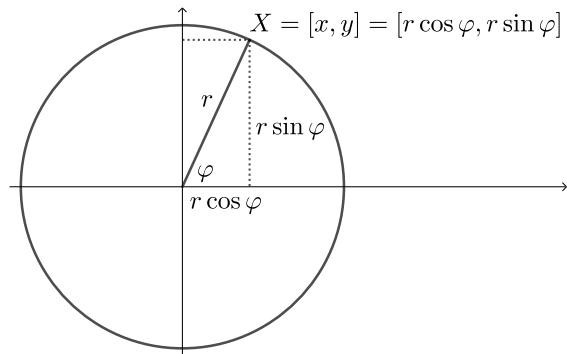
Kružnice je tedy definována jako množina všech bodů X v rovině, které mají od daného bodu S (nazývá se střed kružnice) vzdálenost rovnou dané kladné konstantě r (nazývá se poloměr kružnice). Dostáváme tak základní charakterizaci kružnice:

$$|XS| = r.$$

BÚNO: v odvozeních uvažujme kružnici se středem v počátku

Rovnice kružnice – z definice (Pýthagorova věta)

$$K = \{X \in \mathbb{E}_2; \quad |XS| = r\}$$



$$|XS| = r \iff \sqrt{x^2 + y^2} = r \iff \boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

$$\boxed{x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle}$$

BÚNO: střed v počátku

Dvě různá odvození

$$S = [0, 0]$$

$$|XS| = r \iff \sqrt{x^2 + y^2} = r \iff \boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

$$S = [m, n]$$

$$|XS| = r \iff \sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} = r$$

$$\boxed{(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2}$$

Transformace grafu, rovnice, ...

$$x' = x - m, \quad y' = y - n$$

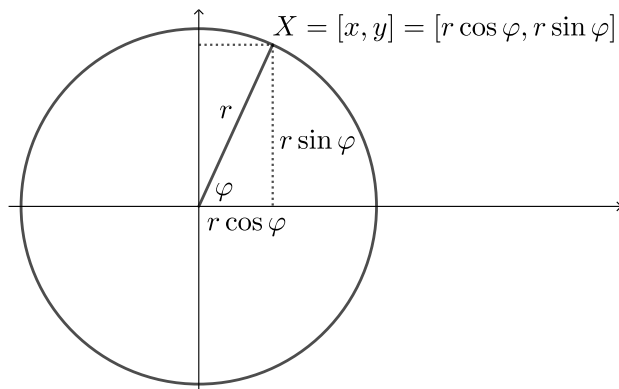
Hodí se u transformace grafů funkcí.

$$\boxed{x = m + r \cos \varphi, \quad y = n + r \sin \varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle}$$

Parametrizace kružnice o poloměru r

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Tyto rovnice jsou důsledkem definice goniometrických funkcí sinus a kosinus.



Parametrizace kružnice o poloměru r

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Souvislost s rovnicí kružnice (prosté dosazení):

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2.$$

Analogicky pro elipsu: bod

$$X = [a \cos \varphi, b \sin \varphi]$$

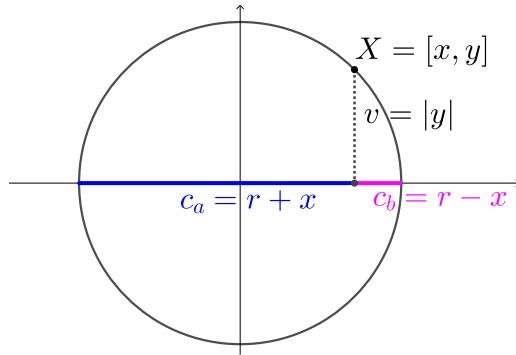
je bodem elipsy pro každé $\varphi \in \mathbb{R}$, neboť jeho souřadnice vyhovují rovnici elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

Rovnice kružnice (EOV) $y = \dots$

- z Thalétovy věty plyne, že $\triangle$ nad průměrem kružnice je pravoúhlý
- Eukleidovy věty o výšce vyjádříme vzdálenost v bodu X od osy x :

$$v^2 = c_a \cdot c_b \iff y^2 = (r+x) \cdot (r-x) \iff \boxed{y^2 = r^2 - x^2}$$

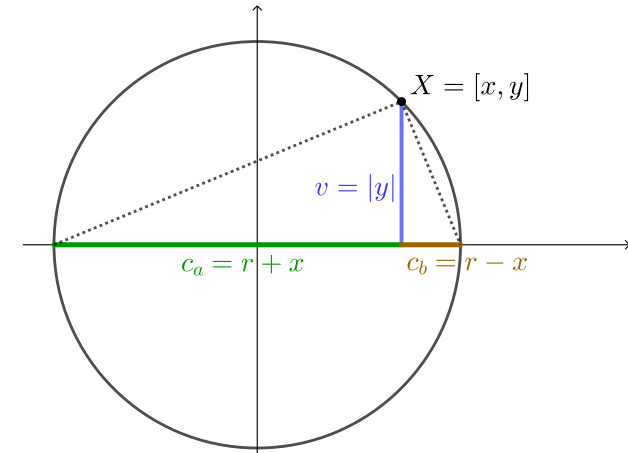


Ve starověkém Řecku: **Eukleidova věta o výšce** – „věta o kružnici“

Eukleidova věta o výšce pro kružnici

Eukleidova věta o výšce ($v^2 = c_a \cdot c_b$):

$$y^2 = (r+x) \cdot (r-x), \quad \text{neboli} \quad \frac{y^2}{(r+x) \cdot (r-x)} = 1$$



Eukleidova věta o výšce pro elipsu

Vyjádříme postupně y^2 z rovnice elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

dostaneme:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2},$$

neboli

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2).$$

Vydělíme-li tuto rovnici $a^2 - x^2$:

$$\frac{y^2}{a^2 - x^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

neboli

$$\boxed{\frac{y^2}{(a-x) \cdot (a+x)} = \frac{b^2}{a^2}.$$

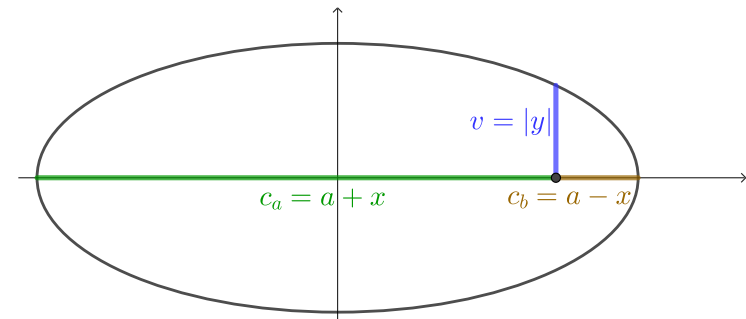
Eukleidova věta o výšce pro elipsu

Pozorujeme, že poměr

$$\frac{[y(x)]^2}{(a-x) \cdot (a+x)}$$

je pro všechna $x \in (-a, a)$ konstantní (konst = $\frac{b^2}{a^2}$).

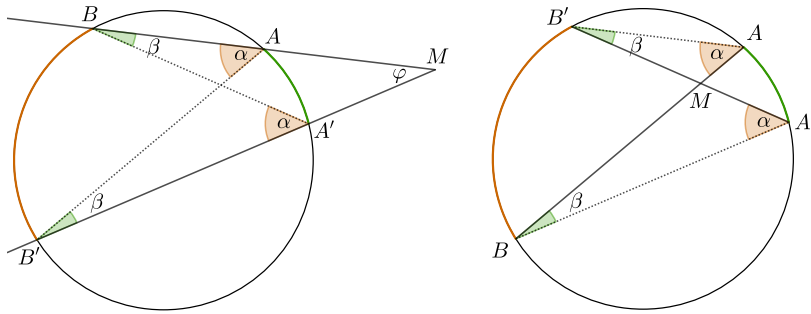
Touto vlastností lze elipsu charakterizovat, což odvodil již ve svých *Kónikách* Apollónios z Pergé (200 př. Kr.).



Mocnost bodu ke kružnici

Pozorování:

$$|MA| \cdot |MB| = \text{konst.}$$

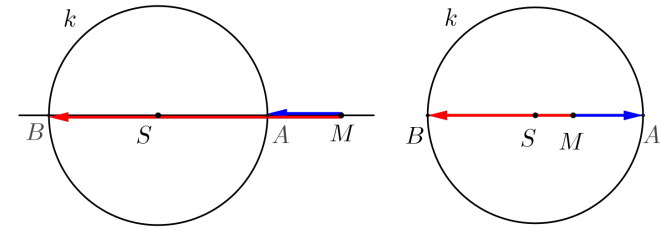


Mocnost bodu M ke kružnici

Mocnost bodu ke kružnici

volba sečny procházející středem S kružnice $k(S, r)$:

$$|MA| = ||MS| - r|, \quad |MB| = |MS| + r$$



$$m(M, k) = |MA|_z \cdot |MB|_z = (|MS| - r) \cdot (|MS| + r) = |MS|^2 - r^2.$$

$$S = [0, 0]$$

$$m(M, k) = x^2 + y^2 - r^2$$

$$M = [x, y] \in k \iff m(M, k) = 0$$

Mocnost bodu ke kružnici

$$m(M, k) = |MA|_z \cdot |MB|_z = (|MS| - r) \cdot (|MS| + r) = |MS|^2 - r^2.$$

Jelikož je $|MS|^2 = x^2 + y^2$ (Pýthagorova věta), dostáváme interpretaci výrazu známého z rovnice kružnice

$$m(M, k) = |MS|^2 - r^2 = x^2 + y^2 - r^2.$$

$$m(M, k) = x^2 + y^2 - r^2$$

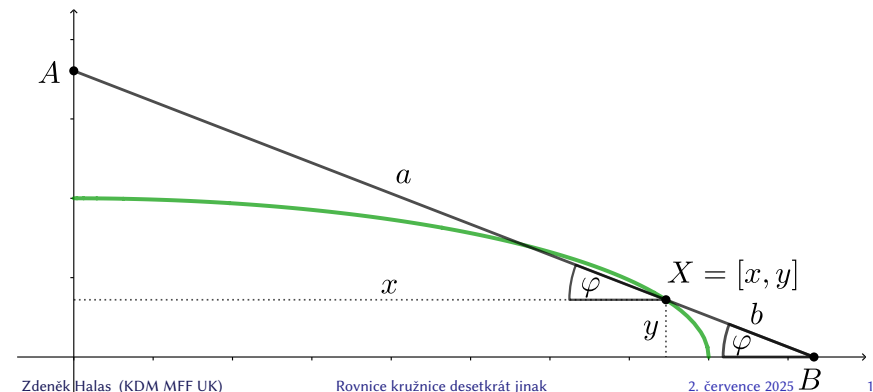
Charakterizace bodů roviny pomocí mocnosti:

- ▶ $M \in k(S, r) \iff m(M, k) = 0 \iff x^2 + y^2 - r^2 = 0$
- ▶ M leží ve vnější oblasti kružnice: $m(M, k) > 0$
- ▶ M leží ve vnitřní oblasti kružnice: $m(M, k) < 0$

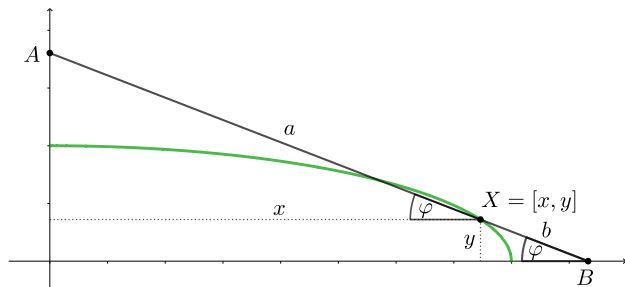
Úloha o žebříku

Představme si následující situaci: při malování pokoje stojíme na žebříku (např. v jeho čtvrtině), ten nám na kluzké podlaze náhle „ujede“, sklouzne tedy po podlaze, přičemž bude stále opřen o stěnu.

Po jaké křivce se budou při sklouznutí žebříku pohybovat naše chodidla stále stojící na žebříku?



Úloha o žebříku



zjistíme souřadnice bodu $X = [x, y]$ (naše chodidla):

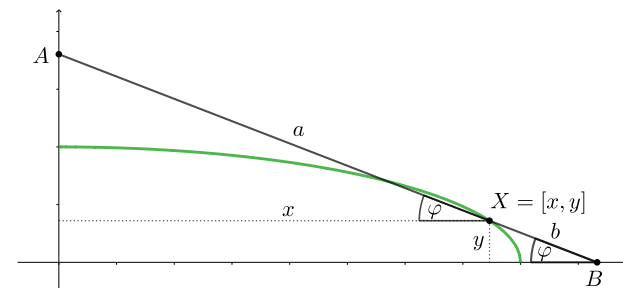
- ▶ z malého pravouhlého trojúhelníku s přeponou XB :

$$\sin \varphi = \frac{y}{b}$$

- ▶ z velkého pravouhlého trojúhelníku s přeponou XA :

$$\cos \varphi = \frac{x}{a}$$

Úloha o žebříku



$$\cos \varphi = \frac{x}{a}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{b}$$

Hledané souřadnice bodu X : $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, neboli

$$X = [a \cos \varphi, b \sin \varphi], \quad \varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

parametrické vyjádření oblouku **elipsy**

Úloha o žebříku $a = b$ (stojíme uprostřed žebříku)

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}$$

Hledané souřadnice bodu X : $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, neboli

$$X = [r \cos \varphi, r \sin \varphi], \quad \varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

parametrické vyjádření **kružnicového** oblouku

Úloha o dvou mraveništích

Množina všech bodů X v rovině;

$$\frac{|XA|}{|XB|} = k, \quad k > 0, \quad k \neq 1.$$

zvolme: $A = [-1, 0]$, $B = [0, 0]$, $X = [x, y]$

Úloha o dvou mraveništích

$$\frac{|XA|}{|XB|} = k \quad \text{neboli} \quad |XA| = k \cdot |XB|$$

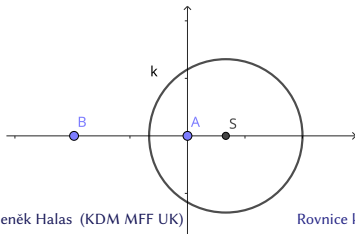
zvolme: $A = [-1, 0]$, $B = [0, 0]$, $X = [x, y]$

$$(x+1)^2 + y^2 = k^2 \cdot (x^2 + y^2)$$

doplněním na čtverec zjistíme, že se skutečně jedná o kružnici...

$$S = \left[\frac{1}{k^2 - 1}, 0 \right], \quad r = \frac{k}{|k^2 - 1|}$$

$k = 2$:



Zdeněk Halas (KDM MFF UK)

Rovnice kružnice desetkrát jinak

2. července 2025

21 / 38

Rovnice kružnice s nekonečným poloměrem

- ▶ kružnice procházející pevně zvoleným bodem (např. počátkem)
- ▶ $S = [a, b]$
- ▶ poloměr je tedy $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$r \rightarrow +\infty$$

ve směru (a, b)

Jak to zařídíme?

$$S_\alpha = [\alpha a, \alpha b], \quad \alpha \rightarrow +\infty$$

Zdeněk Halas (KDM MFF UK)

Rovnice kružnice desetkrát jinak

2. července 2025

22 / 38

Rovnice kružnice s nekonečným poloměrem

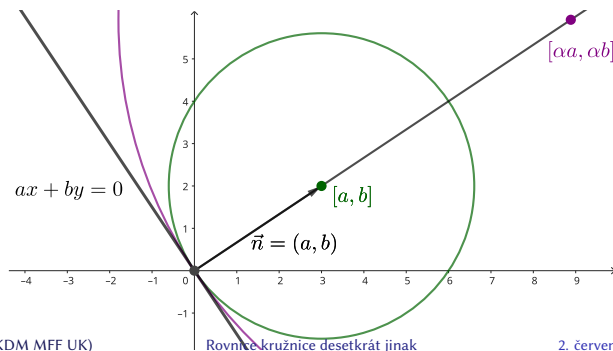
- ▶ kružnice procházející pevně zvoleným bodem (např. počátkem)
- ▶ $S_\alpha = [\alpha a, \alpha b], \quad \alpha \rightarrow +\infty$

Rovnice:

$$(x - \alpha a)^2 + (y - \alpha b)^2 = r^2$$

neboli

$$x^2 + y^2 - 2\alpha ax - 2\alpha by = 0$$



Zdeněk Halas (KDM MFF UK)

Rovnice kružnice desetkrát jinak

2. července 2025

23 / 38

Rovnice kružnice s nekonečným poloměrem

- ▶ kružnice procházející pevně zvoleným bodem (např. počátkem)
- ▶ $S_\alpha = [\alpha a, \alpha b], \quad \alpha \rightarrow +\infty$

Rovnice:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha ax - 2\alpha by = 0$$

střed posouváme ve směru vektoru (a, b) , $S' = [\alpha a, \alpha b]$

$$x^2 + y^2 - 2\alpha ax - 2\alpha by = 0 \quad : \alpha$$

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha} - 2ax - 2by = 0 \quad \alpha \rightarrow +\infty$$

$$0 + 0 - 2ax - 2by = 0$$

$$\boxed{ax + by = 0}$$

přímka procházející počátkem, normálový vektor $\vec{n} = (a, b)$

Zdeněk Halas (KDM MFF UK)

Rovnice kružnice desetkrát jinak

2. července 2025

24 / 38

Komplexní čísla

rovnice kružnice v Gaussově rovině:

$$z = x + iy$$

$$|z - z_0| = r$$

a další...

elipsa: $|z - f_1| + |z - f_2| = 2a$

hyperbola: $||z - f_1| - |z - f_2|| = 2a$

parabola: ...

Komplexní čísla

obecná transformace rovnice do Gaussovy roviny:

$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

parabola:

$$y^2 = 2px$$

$$\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 = 2p \cdot \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$(z - \bar{z})^2 = -4p \cdot (z + \bar{z})$$

Rovnice přímky pomocí determinantů

přímka procházející 2 body: $X_1 = [x_1, y_1], \quad X_2 = [x_2, y_2]$

$$ax + by + c = 0$$

$$X_1 = [x_1, y_1], \quad X_2 = [x_2, y_2]$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$

$$ax_2 + by_2 + c = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}$$

Rovnice kružnice pomocí determinantů

kružnice procházející 3 body

$$x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0$$

$$x_2^2 + y_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F = 0$$

$$x_3^2 + y_3^2 + Dx_3 + Ey_3 + F = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \\ F \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 \\ x_3^2 + y_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Rovnice kuželosečky pomocí determinantů

obecná kuželosečka procházející 5 body

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Rovnice kružnice obecně

algebraický přístup: 3 koeficienty D, E, F ($4F < D^2 + E^2$)

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Kružnice:

$$A = C = 1, \quad B = 0, \quad 4F < D^2 + E^2$$

$A = C$, lze normovat: $A = C = 1$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad 4F < D^2 + E^2$$

střed:

$$S = \left[\frac{D}{2}, \frac{E}{2} \right]$$

$$x^2 + 2x\frac{D}{2} + \frac{D^2}{4} + y^2 + 2y\frac{E}{2} + \frac{E^2}{4} + F - \frac{D^2}{4} - \frac{E^2}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot (D^2 + E^2 - 4F)$$

Kružnice a chybějící 2 body

geometrický náhled

kuželosečka je zadána 5 body, kterými prochází

kružnice je zadána 3 body, kterými prochází

Kde jsou ty chybějící 2 body?

- ▶ mohly by to být body společné všem kružnicím
- ▶ kuželosečka jimi procházející by už byla kružnice
- ▶ označme si tyto záhadné body I, J

Rovnice kružnice obecně

algebraický přístup: 3 koeficienty D, E, F ($4F < D^2 + E^2$)

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad 4F < D^2 + E^2$$

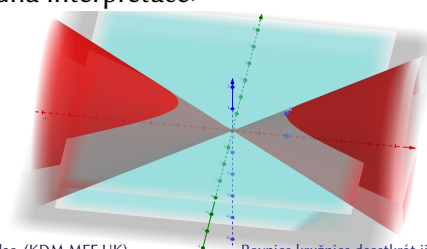
Takto rovnice není jednotná...

▶ snadná pomoc:

$$x^2 + y^2 + Dxz + Eyz + Fz^2 = 0$$

▶ snadný návrat: $z = 1$

▶ snadná interpretace:



Definice kružnice bez středu a poloměru

$$x^2 + y^2 + Dx + Eyz + Fz^2 = 0$$

Řešení je vidět:

$$1^2 + (\pm i)^2 + D \cdot 1 \cdot 0 + E \cdot (\pm i) \cdot 0 + F \cdot 0^2 = 0$$

Body ležící na každé kružnici:

$$I = (1, i, 0), \quad J = (1, -i, 0).$$

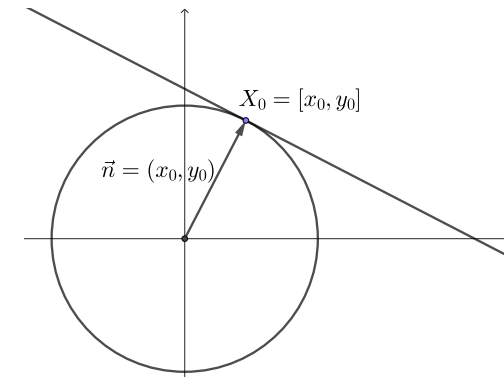
Definice: Každou kuželosečku procházející body I, J nazýváme kružnicí.

Nikde tu není uveden ani střed, ani poloměr...

Rovnice tečny kružnice v jejím bodě

$$k: x^2 + y^2 = r^2$$

$$t: xx_0 + yy_0 = r^2$$



$$k: (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

$$t: (x - m)(x_0 - m) + (y - n)(y_0 - n) = r^2$$

Asymptoty hyperboly

Co by mohl být střed kružnice?

Inspirujme se hyperbolou: průsečík asymptot.

Úloha: průsečík asymptot hyperboly

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$$

z:

$$h: \frac{(x - mz)^2}{a^2} - \frac{(y - nz)^2}{b^2} = 1 \cdot z^2$$

$$t: \frac{(x - mz)(x_0 - mz_0)}{a^2} - \frac{(y - nz)(y_0 - nz_0)}{b^2} = 1 \cdot zz_0$$

$$(x_0, y_0, z_0) = (a, \pm b, 0)$$

$$a_{1,2}: \frac{(x - mz)a}{a^2} - \frac{(y - nz)(\pm b)}{b^2} = 0$$

$$a_{1,2}: \frac{(x - mz)}{a} \mp \frac{(y - nz)}{b} = 0$$

Průsečík asymptot hyperboly

$$a_{1,2}: \frac{(x - mz)}{a} \mp \frac{(y - nz)}{b} = 0$$

Průsečík asymptot má souřadnice $[m, n]$ (při $z = 1$), neboť

$$\frac{(m - m)}{a} \mp \frac{(n - n)}{b} = 0.$$

Střed kružnice: průsečík asymptot kružnice = průsečík tečen v bodech I a J

tečna kružnice – SŠ (tj. $z = 1$):

$$(x - m)(x_0 - m) + (y - n)(y_0 - n) = r^2$$

tečna kružnice, z lib.:

$$(x - mz)(x_0 - mz_0) + (y - nz)(y_0 - nz_0) = r^2 zz_0$$

Střed kružnice jako průsečík jejích asymptot

tečna kružnice, z lib.:

$$(x - mz)(x_0 - mz_0) + (y - nz)(y_0 - nz_0) = r^2 z z_0$$

tečny kružnice v bodech $I = (1, i, 0)$ a $J = (1, -i, 0)$ (tj. asymptoty kružnice):

$$(x - mz)(1 - m \cdot 0) + (y - nz)(\pm i - n \cdot 0) = r^2 z \cdot 0$$

neboli

$$as_{1,2} : (x - mz) \pm i(y - nz) = 0$$

Který bod ($z = 1$) je průsečíkem?

Zvolme tedy $z = 1$:

$$as_{1,2} : (x - m) \pm i(y - n) = 0$$

$$x = m, \quad y = n$$

Průsečíkem asymptot kružnice je skutečně její střed: bod $S = [m, n]$.

- ▶ co je to kružnice
- ▶ rovnice kružnice, parametrizace
- ▶ alternativní odvození: věty Eukleidova, ...
- ▶ různé úlohy vedoucí na kružnici (žebřík, mraveniště, ...)
- ▶ přímka s nekonečným poloměrem
- ▶ komplexní čísla
- ▶ determinanty
- ▶ cirkulární (izotropické) body
- ▶ střed kružnice jako průsečík jejích asymptot