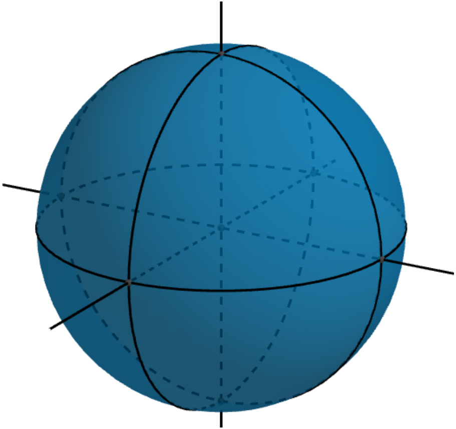
Sférická geometrie

Jan Sedlák
ve spolupráci s Jiřinou Bagalovou

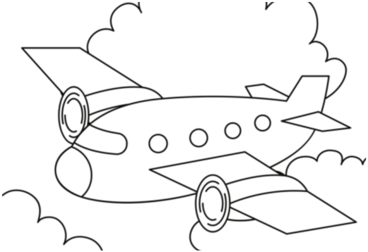
MFF UK
Letní škola geometrie 2023

Obsah



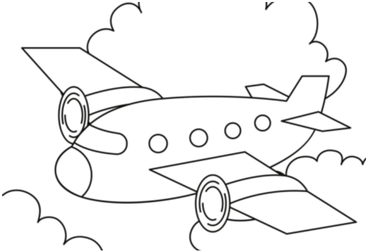
Úvodní úloha

- Letadlo letí 100 kilometrů směrem na sever a 100 km na východ.



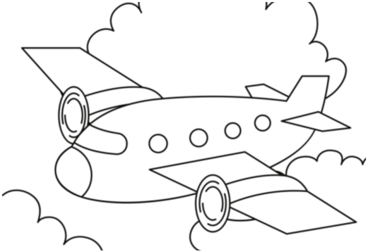
Úvodní úloha

- Letadlo letí 100 kilometrů směrem na sever a 100 km na východ.
  - Jaká je vzdálenost startu a cíle?



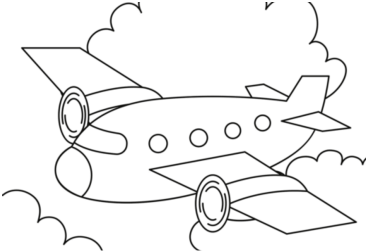
Úvodní úloha

- Letadlo letí 100 kilometrů směrem na sever a 100 km na východ.
    - Jaká je vzdálenost startu a cíle?
    - Můžeme použít k řešení Pythagorovu větu?



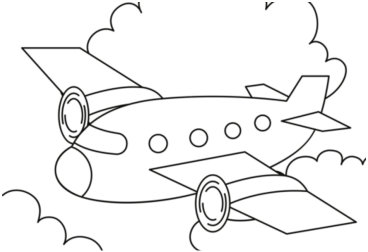
Úvodní úloha

- Letadlo letí 100 kilometrů směrem na sever a 100 km na východ.
    - Jaká je vzdálenost startu a cíle?
    - Můžeme použít k řešení Pythagorovu větu?
    - V jakém případě je to dobré (=uspokojivě přesné) řešení?



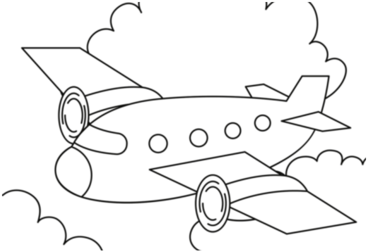
Úvodní úloha

- Letadlo letí 100 kilometrů směrem na sever a 100 km na východ.
  - Jaká je vzdálenost startu a cíle?
  - Můžeme použít k řešení Pythagorovu větu?
  - V jakém případě je to dobré (=uspokojivě přesné) řešení?
- Letadlo uletí stejně kilometrů na sever, na západ a na jih. Po takovém letu letadlo přistálo opět na stejném místě.



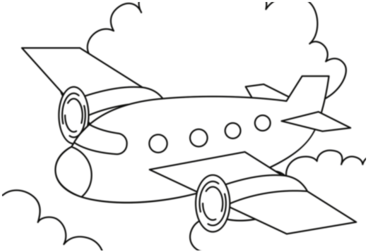
Úvodní úloha

- Letadlo letí 100 kilometrů směrem na sever a 100 km na východ.
  - Jaká je vzdálenost startu a cíle?
  - Můžeme použít k řešení Pythagorovu větu?
  - V jakém případě je to dobré (=uspokojivě přesné) řešení?
- Letadlo uletí stejně kilometrů na sever, na západ a na jih. Po takovém letu letadlo přistálo opět na stejném místě.
  - Vymyslete co nejvíce různých trajektorií, které odpovídají popisu.



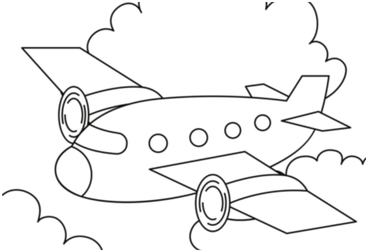
Úvodní úloha

- Letadlo letí 100 kilometrů směrem na sever a 100 km na východ.
  - Jaká je vzdálenost startu a cíle?
  - Můžeme použít k řešení Pythagorovu větu?
  - V jakém případě je to dobré (=uspokojivě přesné) řešení?
- Letadlo uletí stejně kilometrů na sever, na západ a na jih. Po takovém letu letadlo přistálo opět na stejném místě.
  - Vymyslete co nejvíce různých trajektorií, které odpovídají popisu.
  - Co z toho plyne pro součet vnitřních úhlů sférických trojúhelníků?



Úvodní úloha

- Letadlo letí 100 kilometrů směrem na sever a 100 km na východ.
    - Jaká je vzdálenost startu a cíle?
    - Můžeme použít k řešení Pythagorovu větu?
    - V jakém případě je to dobré (=uspokojivě přesné) řešení?
- Letadlo uletí stejně kilometrů na sever, na západ a na jih. Po takovém letu letadlo přistálo opět na stejném místě.
    - Vymyslete co nejvíce různých trajektorií, které odpovídají popisu.
    - Co z toho plyne pro součet vnitřních úhlů sférických trojúhelníků?
    - Co to je sférický trojúhelník?

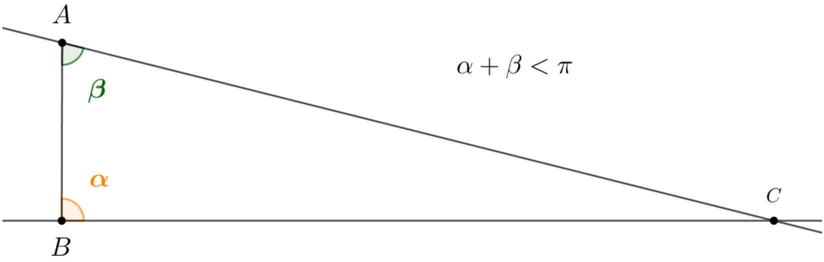


Eukleidovy postuláty

1. Dva body zadávají úsečku.
2. Úsečku lze prodloužit.
3. Středem a bodem na obvodu je daná kružnice.
4. Všechny pravé úhly jsou si rovny.

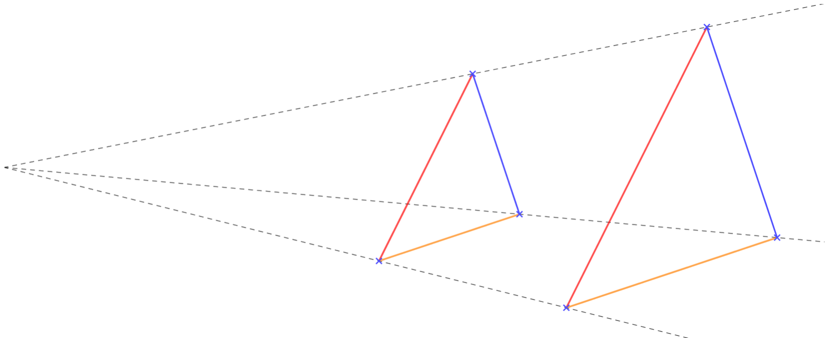
Eukleidovy postuláty

1. Dva body zadávají úsečku.
2. Úsečku lze prodloužit.
3. Středem a bodem na obvodu je daná kružnice.
4. Všechny pravé úhly jsou si rovny.
5. Jestliže úsečka protíná dvě úsečky tak, že na jedné straně je součet vnitřních přilehlých úhlů menší než dva pravé úhly, pak lze na této straně úsečky prodloužit tak, aby se tato jejich prodloužení protľala.



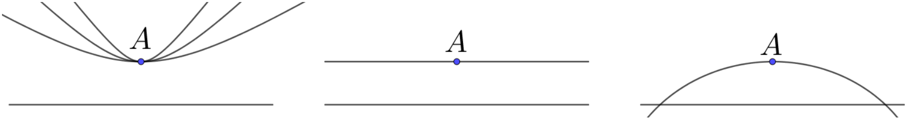
Eukleidovy postuláty

1. Dva body zadávají úsečku.
2. Úsečku lze prodloužit.
3. Středem a bodem na obvodu je daná kružnice.
4. Všechny pravé úhly jsou si rovny.
5. *Ekvivalentní formulace:* Existují podobné trojúhelníky, které nejsou shodné.



Eukleidovy postuláty

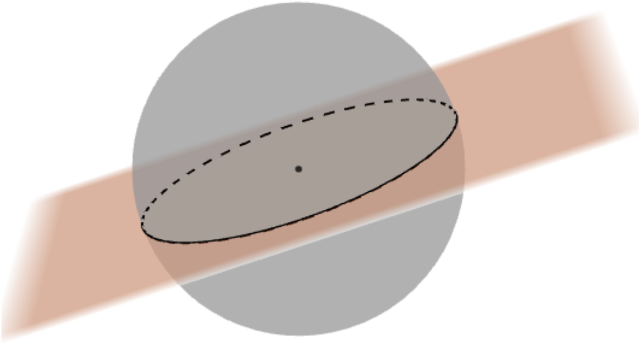
1. Dva body zadávají úsečku.
2. Úsečku lze prodloužit.
3. Středem a bodem na obvodu je daná kružnice.
4. Všechny pravé úhly jsou si rovny.
5. *Ekvivalentní formulace:* Pro přímku a bod A, který na ni neleží, existuje právě jedna rovnoběžka, procházející tímto bodem.



- Co je to přímka na sféře?
- Jaká máme očekávání od přímky?
- Reakce studentů: "kružnice není přímka"

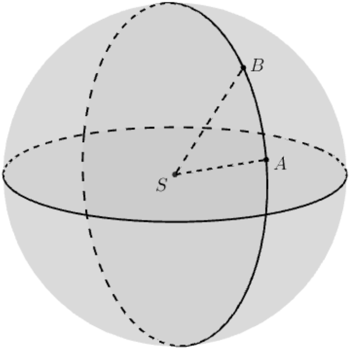
Přímka

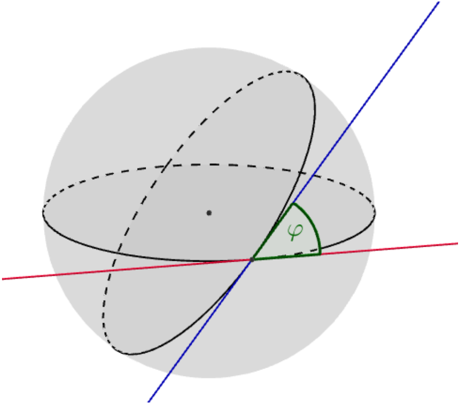
Ve sférické geometrii budeme za přímky považovat hlavní kružnice kulové plochy (tj. kružnice vznikající jako průnik roviny procházející středem kulové plochy s jejím povrchem).



Vzdálenost a úhly

- Sférická vzdálenost: $d(A, B) = 2\pi r \cdot \frac{|\sphericalangle ASB|}{2\pi} = r \cdot |\sphericalangle ASB|$
- Sférický úhel je roven úhlu, který spolu svírají tečny k daným sférickým přímkám.





Sférické trojúhelníky

Definice: trojúhelník

Průnik tří polorovin, které mají různoběžné hraniční přímky.

Definice: sférický trojúhelník

Průnik tří polosfér, které mají různoběžné hraniční přímky.

- Jaký je součet úhlů ve sférickém trojúhelníku?

Sférické trojúhelníky

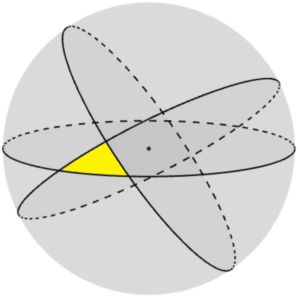
Definice: trojúhelník

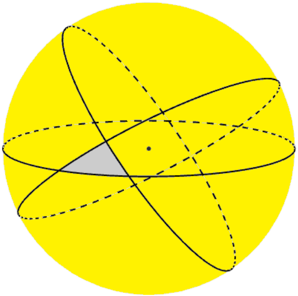
Průnik tří polorovin, které mají různoběžné hraniční přímky.

Definice: sférický trojúhelník

Průnik tří polosfér, které mají různoběžné hraniční přímky.

- Jaký je součet úhlů ve sférickém trojúhelníku?
- $180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$ (nebo 900°?)





Obsah sférického dvojúhelníku

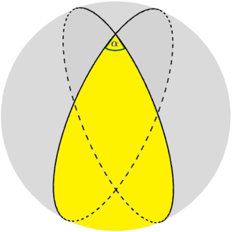
- S – Obsah kulové plochy o poloměru r

$$S = 4\pi r^2$$

Obsah sférického dvojúhelníku

- S – Obsah kulové plochy o poloměru r

$$S = 4\pi r^2$$



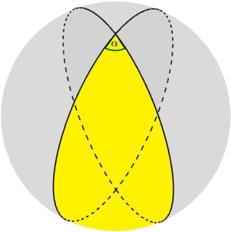
Obsah sférického dvojúhelníku

- S – Obsah kulové plochy o poloměru r

$$S = 4\pi r^2$$

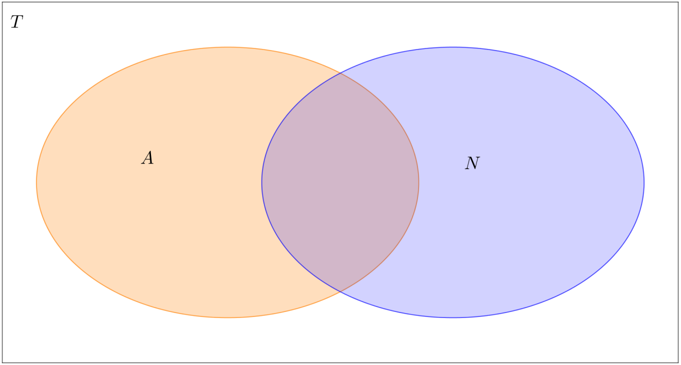
- P_α – Obsah dvojúhelníku na kulové ploše o poloměru r vymezeného hlavními polokružnicemi, které svírají úhel α

$$\begin{aligned} P_\alpha : S &= \alpha : 2\pi \\ P_\alpha &= \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 4\pi r^2 \\ P_\alpha &= 2\alpha r^2 \end{aligned}$$



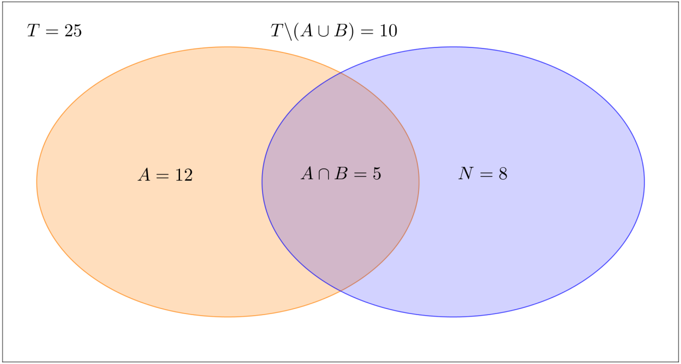
Návodná úloha

- Do třídy chodí 25 žáků, z toho 12 žáků mluví anglicky, 8 žáků mluví německy. 10 žáků nemluví ani jedním z těchto jazyků. Kolik žáků mluví oběma jazyky?



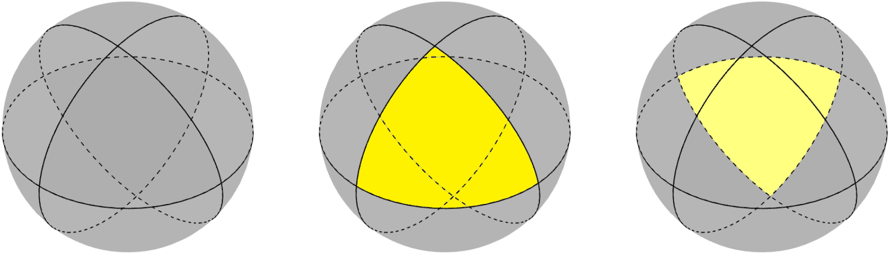
Návodná úloha

- Do třídy chodí 25 žáků, z toho 12 žáků mluví anglicky, 8 žáků mluví německy. 10 žáků nemluví ani jedním z těchto jazyků. Kolik žáků mluví oběma jazyky?

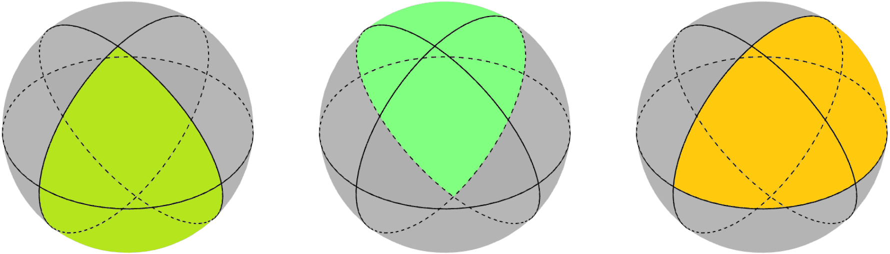


- Výsledek: Oběma jazyky mluví 5 žáků.

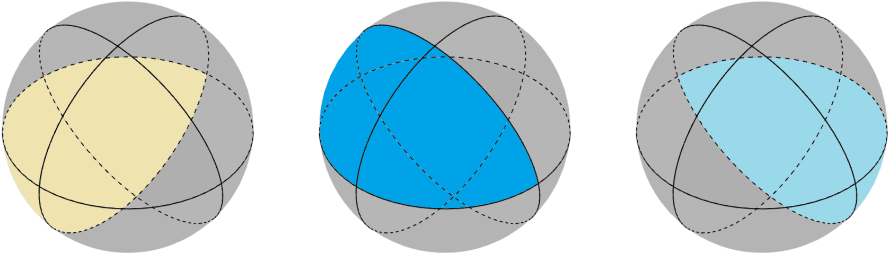
Obsah sférického trojúhelníku



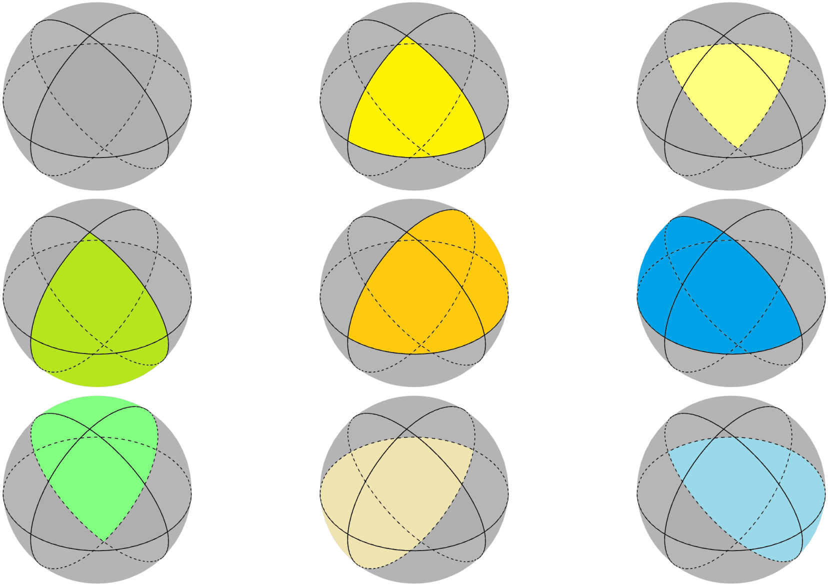
Obsah sférického trojúhelníku



Obsah sférického trojúhelníku



Obsah sférického trojúhelníku



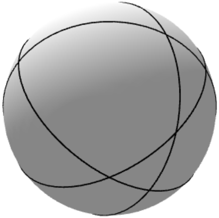
Obsah sférického trojúhelníku

- T – Obsah sférického trojúhelníku o úhlech α, β, γ na povrchu kulové plochy o poloměru r

$$
\begin{aligned}
2P_\alpha + 2P_\beta + 2P_\gamma &= 4\pi r^2 + 4T \\
2(P_\alpha + P_\beta + P_\gamma) &= 4\pi r^2 + 4T \\
2(2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2) &= 4\pi r^2 + 4T \\
4r^2(\alpha + \beta + \gamma) &= 4(\pi r^2 + T) \\
r^2(\alpha + \beta + \gamma) - \pi r^2 &= T \\
T &= r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)
\end{aligned}
$$

Obsah sférického čtyřúhelníku

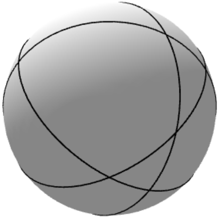
- Q – Obsah sférického čtyřúhelníku o úhlech $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ na povrchu kulové plochy o poloměru r

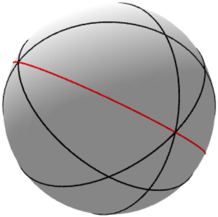


Obsah sférického čtyřúhelníku

- Q – Obsah sférického čtyřúhelníku o úhlech $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ na povrchu kulové plochy o poloměru r
- Rozdělíme čtyřúhelník na dva trojúhelníky ($\beta = \beta_1 + \beta_2, \delta = \delta_1 + \delta_2$)

$$
\begin{aligned}
T_1 &= r^2(\alpha + \beta_1 + \delta_1 - \pi) \\
T_2 &= r^2(\beta_2 + \gamma + \delta_2 - \pi) \\
T_1 + T_2 &= r^2(\alpha + \beta_1 + \delta_1 - \pi) + r^2(\beta_2 + \gamma + \delta_2 - \pi) \\
Q &= r^2(\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \gamma + \delta_1 + \delta_2 - 2\pi) \\
Q &= r^2(\alpha + \beta + \gamma + \delta - 2\pi)
\end{aligned}
$$





Obsah obecného sférického n-úhelníku

- A – Obsah sférického n-úhelníku (pro $n \geq 2$) o úhlech $\alpha_1,\ \alpha_2,\ ..\alpha_n$ na povrchu kulové plochy o poloměru r
- Polygon můžeme stejně jako sférický čtyřúhelník rozdělit na trojúhelníky, obsah tedy můžeme vyjádřit jako:

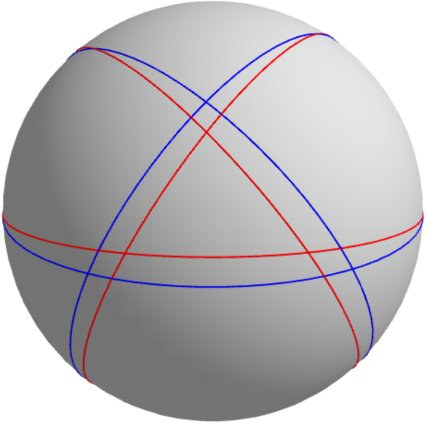
$$A = r^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n - (n-2)\pi)$$

- Pro pravidelný n-úhelníku s vnitřními úhly α platí:

$$A = r^2(n\alpha - (n-2)\pi)$$

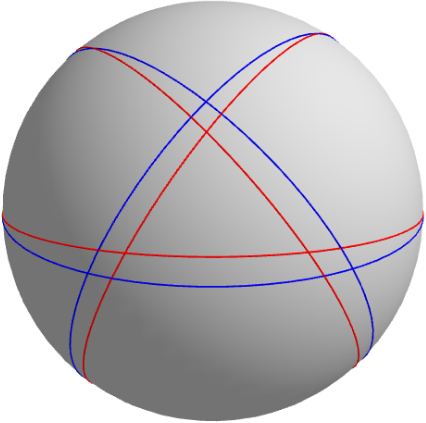
Věty o podobnosti sférických trojúhelníků

- Mohu mít dva sférické trojúhelníky na téže sféře, které jsou podobné, ale nejsou shodné?



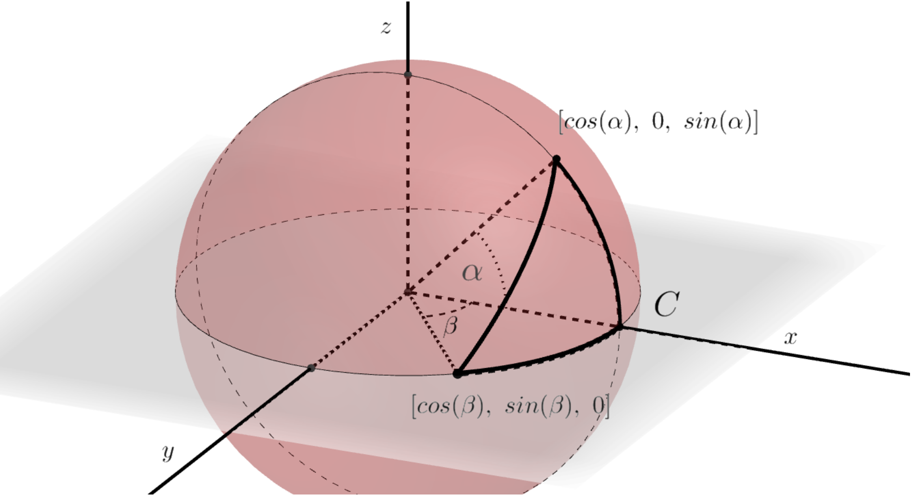
Věty o podobnosti sférických trojúhelníků

- Mohu mít dva sférické trojúhelníky na téže sféře, které jsou podobné, ale nejsou shodné?



- Věta o shodnosti trojúhelníků na základě shodnosti tří úhlů: UUU

Pythagorova věta na sféře



Jak nyní můžeme spočítat úhel mezi vektory?

Pythagorova věta na sféře

$$\cos\gamma = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sqrt{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\beta + \cos^2\beta)}} = \cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$$

- Je to opravdu "Pythagorova věta"?
- Můžeme z tohoto vzorce přejít k rovinné verzi Pythagorovy věty?

Pythagorova věta na sféře

$$\cos\gamma = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sqrt{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\beta + \cos^2\beta)}} = \cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$$

- Je to opravdu "Pythagorova věta"?
- Můžeme z tohoto vzorce přejít k rovinné verzi Pythagorovy věty?
- Taylor: $\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$

Upozornění

Prezentace je pouze doprovodná a obsahuje formální chyby, které jsou důsledkem stručnosti prezentace.

Závěr

Děkuji za pozornost.