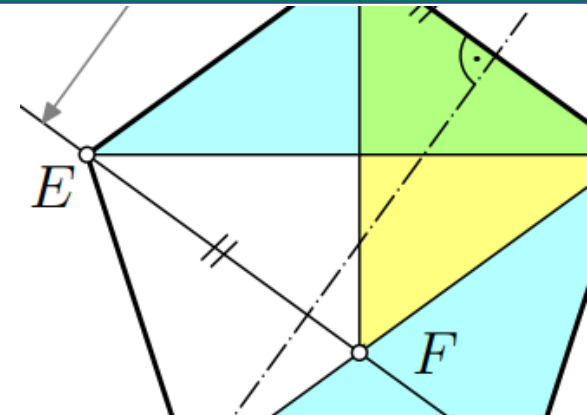
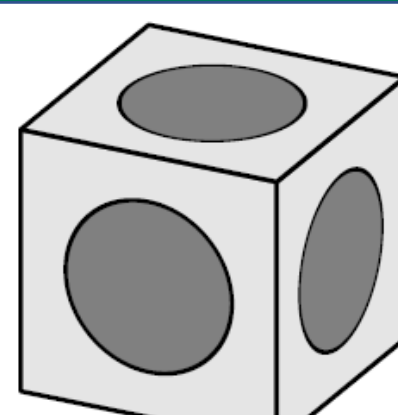
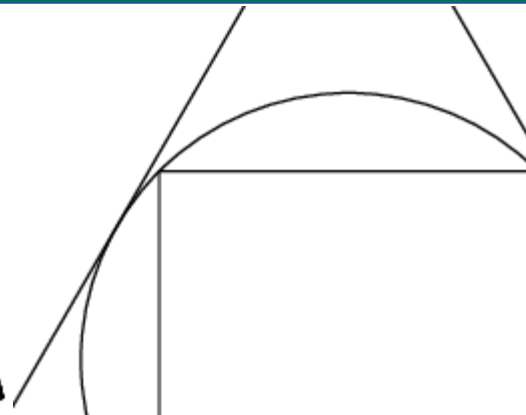
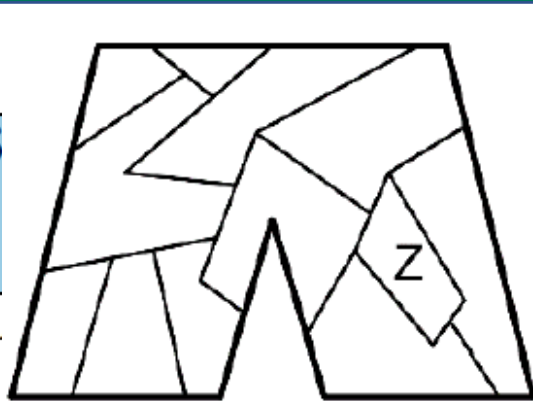
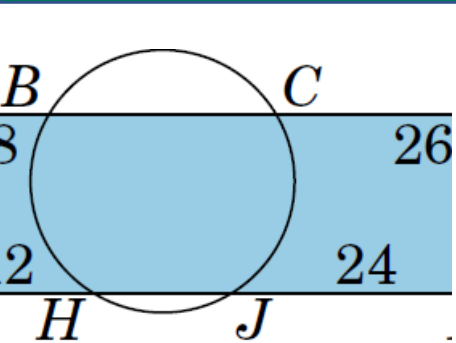




Geometrická představivost v soutěžních úlohách



Karel Pazourek

Letní škola geometrie, Česká Lípa, 2023

GP v soutěžních úlohách



- Manipulace s útvary (transformace, dělení)
- GP jako výchozí bod pro výpočty nebo logické úvahy
- Práce s modely
- Prostorová představivost
- Hledání vztahů

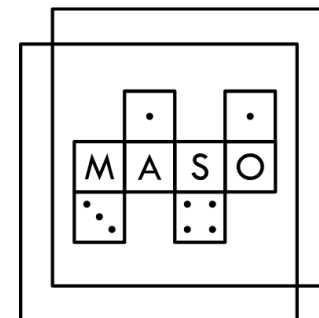
Soutěže



Matematická olympiáda, 72. ročník (<https://www.matematickaolympiada.cz/>)



Matematický klokan, r. 2022 (<https://matematickyklokan.net/>)



Pythagoriáda, r. 2022 (<https://www.pythagoriada.cz/>)

MaSo, podzim 2022 (<https://maso.mff.cuni.cz/>)



Pikommat MFF UK, 38. ročník (<https://pikommat.mff.cuni.cz/>)



Pangea, r. 2023 (<https://www.pangeasoutez.cz/>)

PIKOMAT MFF UK

PYTHAGORIÁDA

Manipulace s tvary



- Jako cíl úloh
- Jako metoda řešení úloh

Transformace obrazce

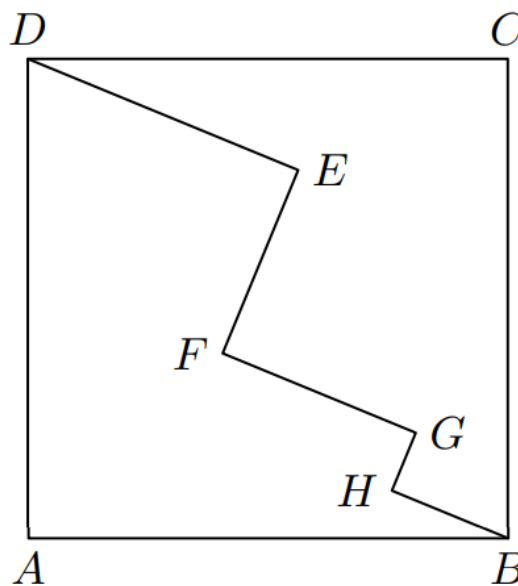


Z9–I–6

Vrcholy čtverce $ABCD$ spojuje lomená čára $DEFGHB$. Menší úhly u vrcholů E , F , G , H jsou pravé a úsečky DE , EF , FG , GH , HB po řadě měří 6 cm, 4 cm, 4 cm, 1 cm, 2 cm.

Určete obsah čtverce $ABCD$.

(*M. Dillingerová*)



Transformace obrazce

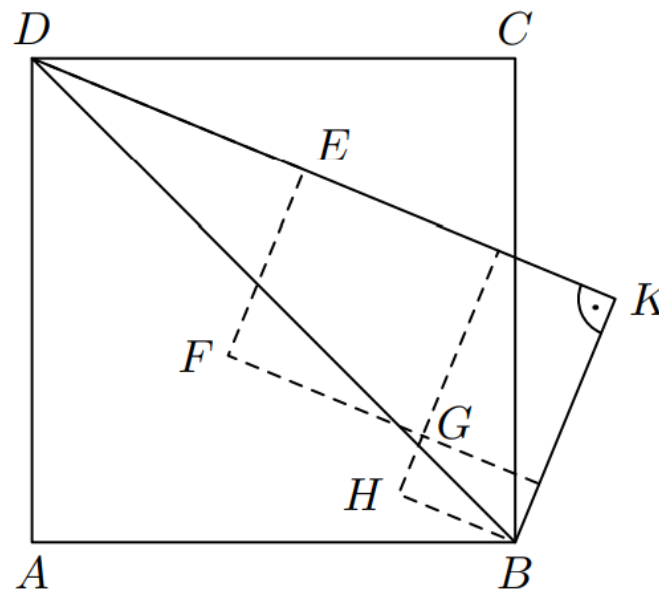
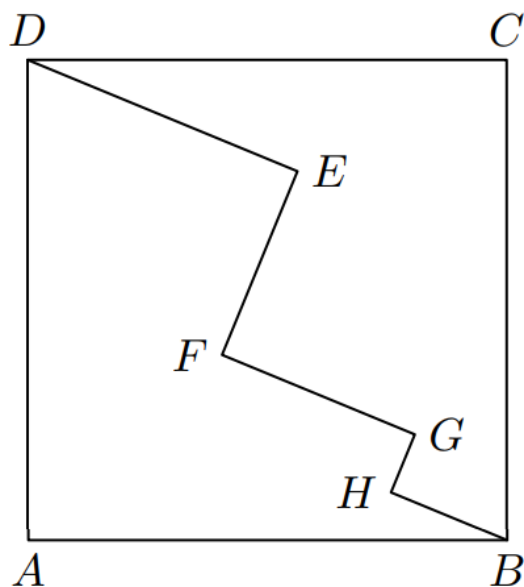


Z9–I–6

Vrcholy čtverce $ABCD$ spojuje lomená čára $DEFGHB$. Menší úhly u vrcholů E , F , G , H jsou pravé a úsečky DE , EF , FG , GH , HB po řadě měří 6 cm, 4 cm, 4 cm, 1 cm, 2 cm.

Určete obsah čtverce $ABCD$.

(*M. Dillingerová*)

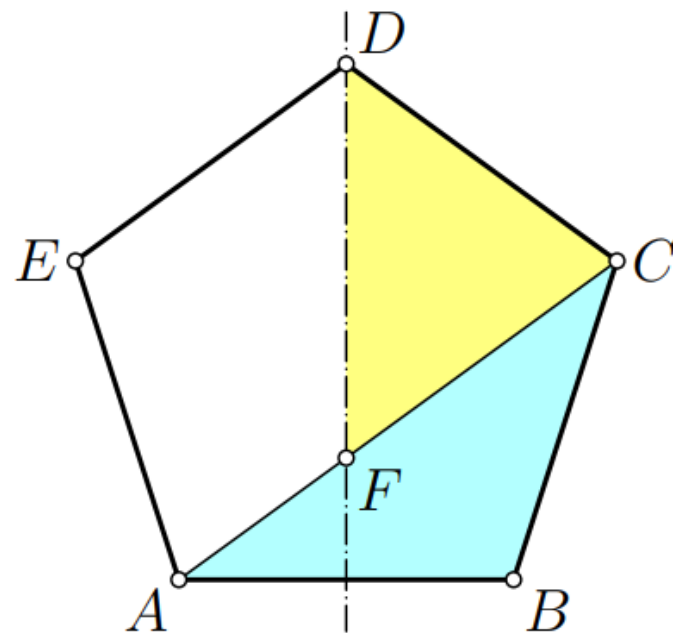


Transformace obrazce



Nechť $ABCDE$ je pravidelný pětiúhelník. Průsečík úhlopříčky AC s osou strany AB označme F . Dokažte, že trojúhelníky ABC a CDF mají stejný obsah.

(David Hruška)

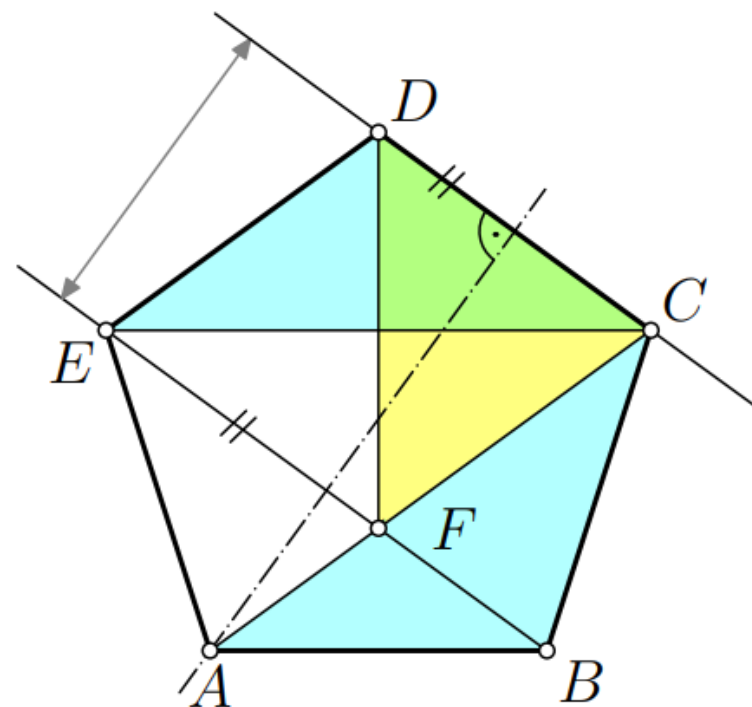


Transformace obrazce



Nechť $ABCDE$ je pravidelný pětiúhelník. Průsečík úhlopříčky AC s osou strany AB označme F . Dokažte, že trojúhelníky ABC a CDF mají stejný obsah.

(David Hruška)



Přemístění trojúhelníku, Cavalieriho princip

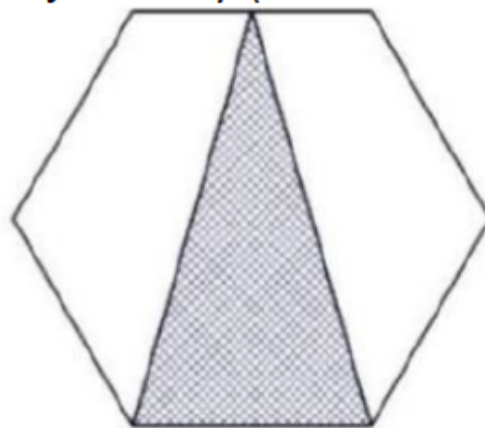
Cavalieriho princip



PYTHAGORIÁDA

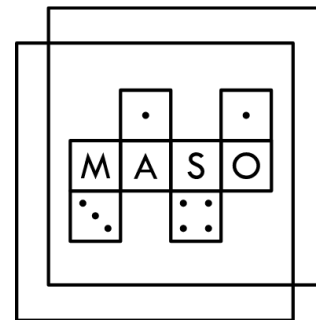
9. ročník, úloha 10

Vyjádři zlomkem v základním tvaru, jakou část pravidelného šestiúhelníku tvoří vyšrafovaný rovnoramenný trojúhelník, který má vrchol ve středu protější strany (viz obrázek).



Vyšrafovaná část tvoří šestiúhelníku.

Dělení na části

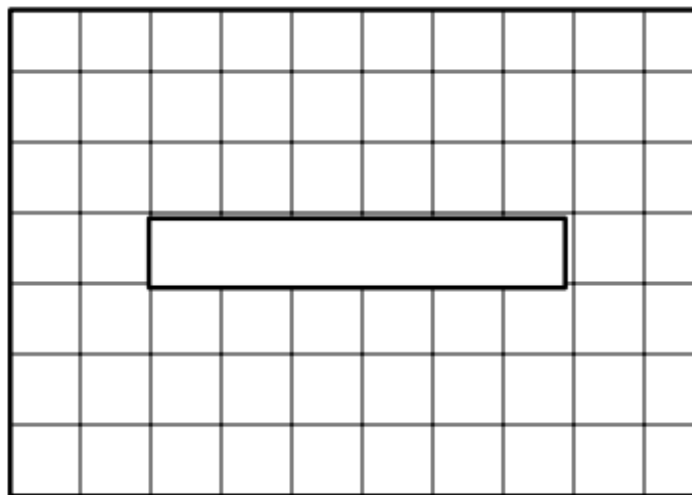


Příklad 35.

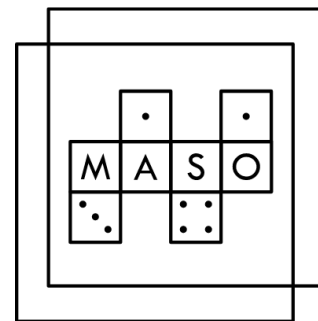
Zadání

MaSo, podzim 2022

Rozřežte obdélník s dírou uprostřed (viz obrázek) na dvě části tak, aby se z nich dal složit čtverec 8×8 (bez té díry uprostřed).



Dělení na části

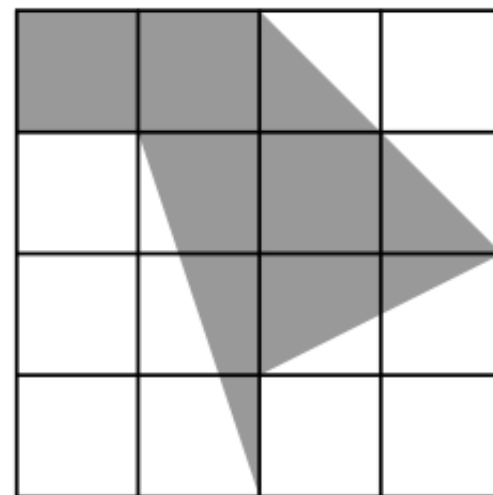
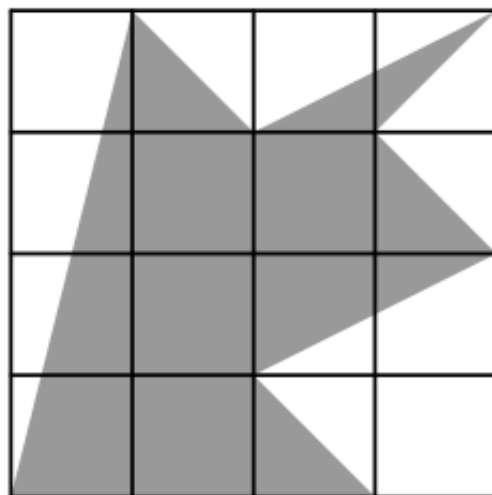


Příklad 6.

Zadání

MaSo, podzim 2022

O kolik centimetrů čtverečních se liší obsahy následujících šedých obrazců? Délka strany jednoho malého čtverečku je 1 cm.



Dělení na části

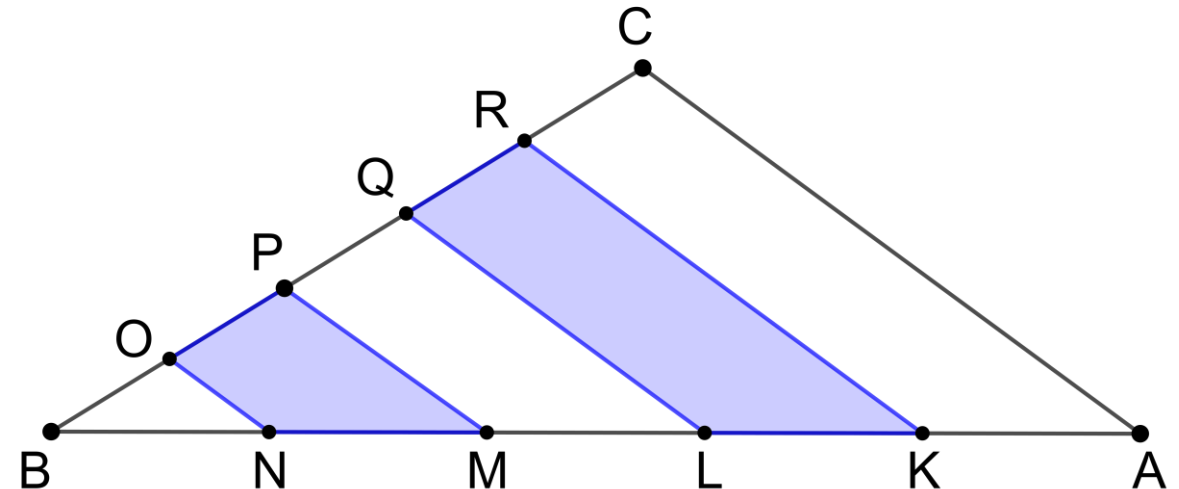


Z9–II–2

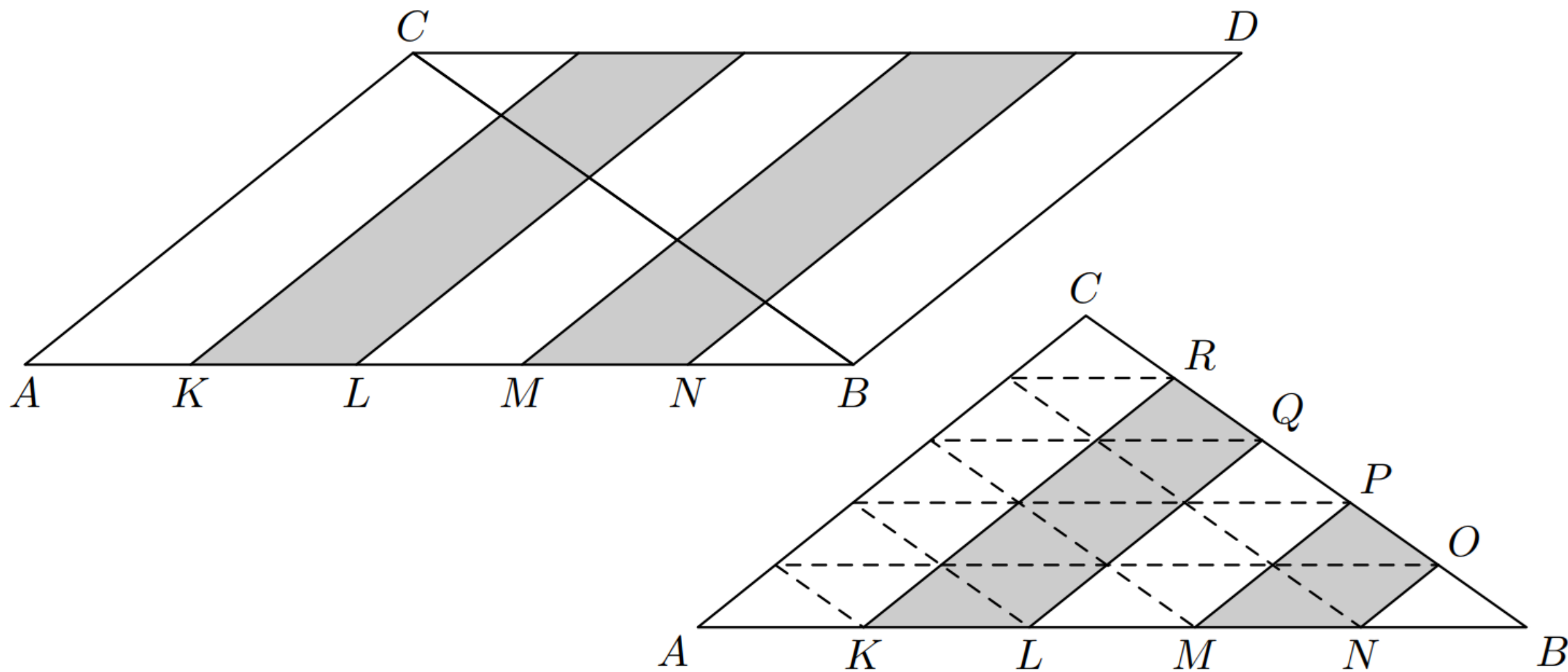
Trojúhelník ABC má stranu AC dlouhou 24 cm a výšku z vrcholu B dlouhou 25 cm. Strana AB je rozdělena na pět shodných částí, dělicí body jsou postupně od A k B označeny K, L, M, N . Každým z těchto bodů prochází rovnoběžka se stranou AC . Průsečíky rovnoběžek se stranou BC jsou postupně od B k C označeny O, P, Q, R .

Vypočítejte součet obsahů lichoběžníků $KLQR$ a $MNOP$.

(I. Jančígová)



Dělení na části



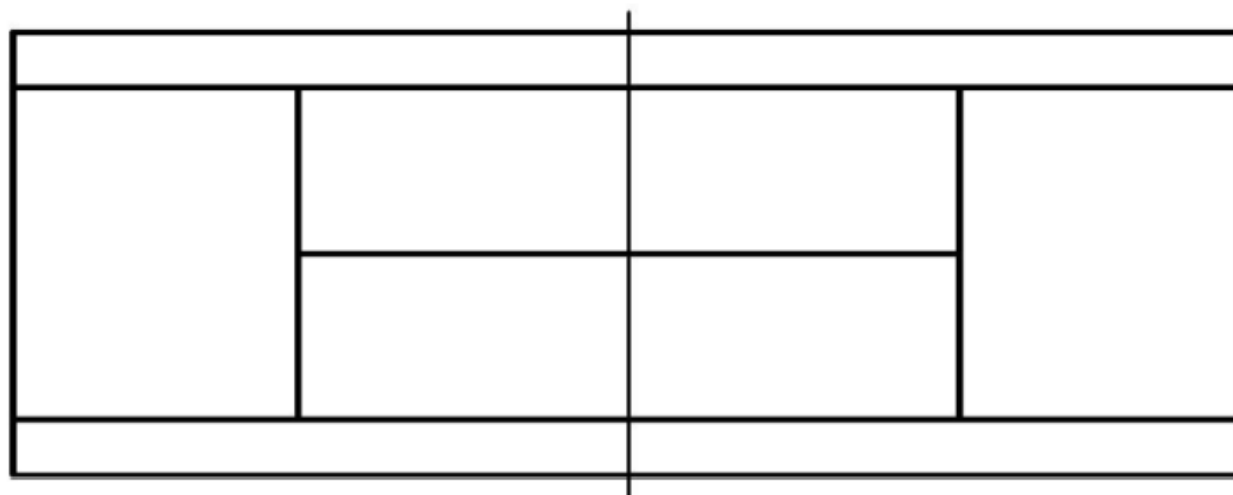
Počítání částí



PYTHAGORIÁDA

9. ročník, úloha 6

Na obrázku vidíš tenisový kurt. Kolik je na něm obdélníků (žádný z čtyřúhelníků není čtverec)?

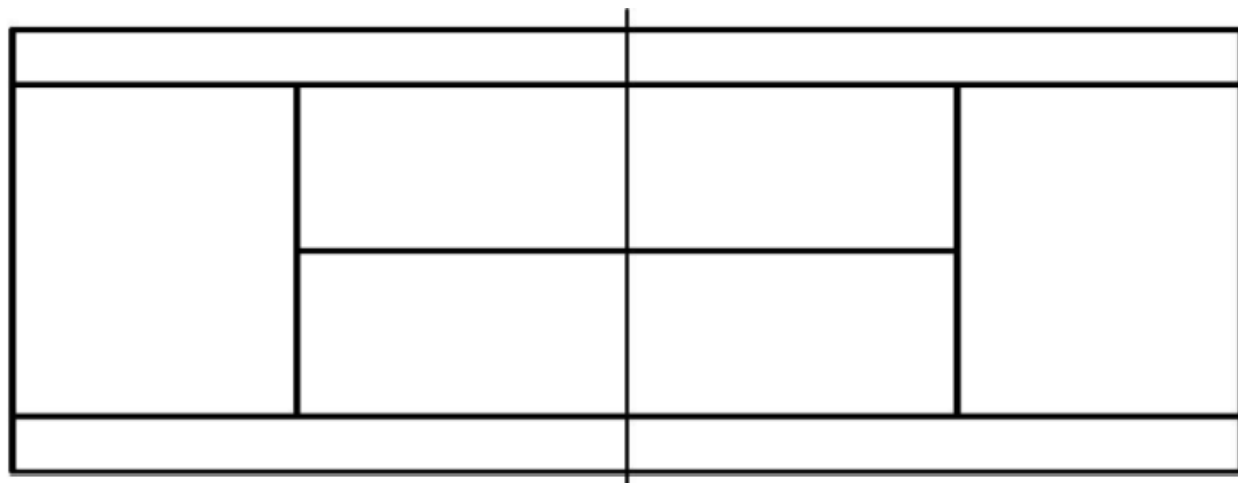


Na obrázku je celkem obdélníků.

Počítání částí



PYTHAGORIÁDA



Z 1 obdélníku:	10
Ze 2 obdélníků:	6
Ze 3 obdélníků:	2
Ze 4 obdélníků:	5
Z 5 obdélníků:	4
Ze 6 obdélníků:	1
Ze 7 obdélníků:	0
Z 8 obdélníků:	2
Z 9 obdélníků:	0
Z 10 obdélníků:	1
<hr/>	
Celkem	31

Počítání částí



PYTHAGORIÁDA

Okresní kolo, 8. ročník

5. Jaký je největší možný počet průsečíků 7 různých přímek?

GP jako výchozí bod úvah



- Pro aritmetické úlohy
- Pro logické úlohy

- Geometrická kombinatorika

- GP omezuje náročnost výpočtů

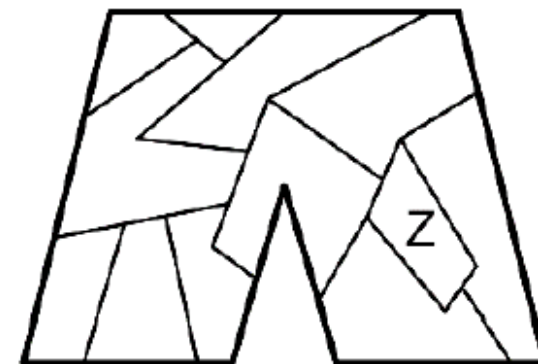
Od geometrie k logice



PYTHAGORIÁDA

Okresní kolo, 6. ročník

14. Švadlenka šije šaškovi kalhoty podle obrázku. Má červenou (č), zelenou (z) a modrou (m) látku. Šaškova podmínka je, že spolu nesmí sousedit stranou dvě stejné barvy. Kolik polí celkem (včetně označeného) bude zelených?



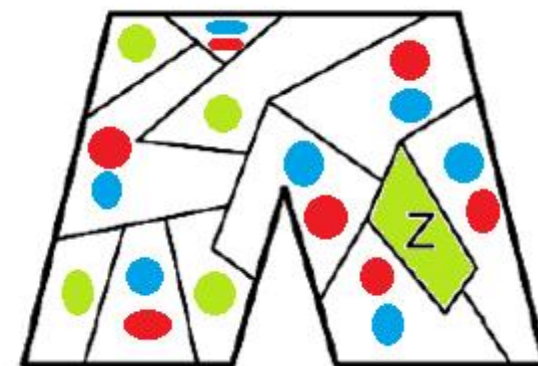
Od geometrie k logice



PYTHAGORIÁDA

Okresní kolo, 6. ročník

14. Švadlenka šije šaškovi kalhoty podle obrázku. Má červenou (č), zelenou (z) a modrou (m) látku. Šaškova podmínka je, že spolu nesmí sousedit stranou dvě stejné barvy. Kolik polí celkem (včetně označeného) bude zelených?



Od geometrie k logice

PYTHAGORIÁDA

6. ročník, 5. úloha



V Dlouhé ulici bydlí Karel vedle Břeti, Hynek naproti Evelíny, Timotej vedle Franty a Gertruda vedle Karla. Franta naproti Gertrudy a vedle Hynka. Láďa pak bydlí vedle Timoteje. Kdo bydlí vedle Gertrudy z druhé strany než Karel?

		Karel		

Od geometrie k logice

PYTHAGORIÁDA



V Dlouhé ulici bydlí Karel vedle Břeti, Hynek naproti Evelíny, Timotej vedle Franty a Gertruda vedle Karla. Franta naproti Gertrudy a vedle Hynka. Láďa pak bydlí vedle Timoteje. Kdo bydlí vedle Gertrudy z druhé strany než Karel?

	Gertruda	Karel	Břetá	

Od geometrie k logice

PYTHAGORIÁDA



V Dlouhé ulici bydlí Karel vedle Břeti, Hynek naproti Evelíny, Timotej vedle Franty a Gertruda vedle Karla. Franta naproti Gertrudy a vedle Hynka. Láďa pak bydlí vedle Timoteje. Kdo bydlí vedle Gertrudy z druhé strany než Karel?

	Gertruda	Karel	Břetá	
?Hynek	Franta	?Hynek		

Od geometrie k logice

PYTHAGORIÁDA



V Dlouhé ulici bydlí Karel vedle Břeti, Hynek naproti Evelíny, Timotej vedle Franty a Gertruda vedle Karla. Franta naproti Gertrudy a vedle Hynka. Láďa pak bydlí vedle Timoteje. Kdo bydlí vedle Gertrudy z druhé strany než Karel?

Evelína	Gertruda	Karel	Břeťa	
Hynek	Franta			

Od geometrie k logice

PYTHAGORIÁDA



V Dlouhé ulici bydlí Karel vedle Břeti, Hynek naproti Evelíny, Timotej vedle Franty a Gertruda vedle Karla. Franta naproti Gertrudy a vedle Hynka. Láďa pak bydlí vedle Timoteje. Kdo bydlí vedle Gertrudy z druhé strany než Karel?

Evelína	Gertruda	Karel	Břéta	
Hynek	Franta	Timotej	Láďa	

GP omezuje náročnost počítání



24. Délka úhlopříčky čtverce $ABCD$ je 7 cm a čtverce $EFGA$ je 10 cm. Bod P je středem čtverce $ABCD$. Vypočítejte obsah trojúhelníku DFP .

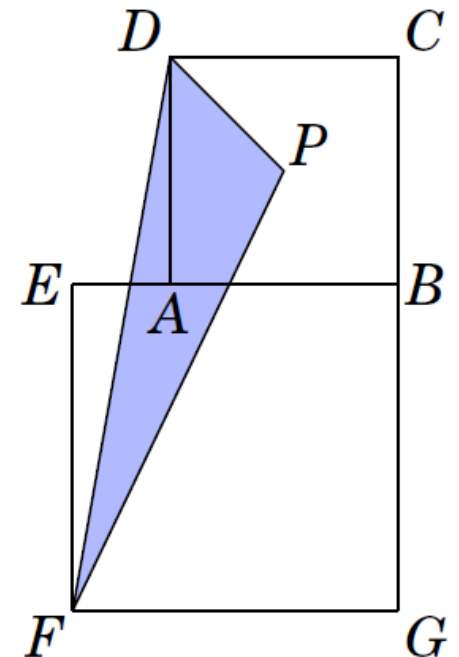
(A) $14,5 \text{ cm}^2$

(B) 15 cm^2

(C) $15,75 \text{ cm}^2$

(D) $16,5 \text{ cm}^2$

(E) $17,5 \text{ cm}^2$

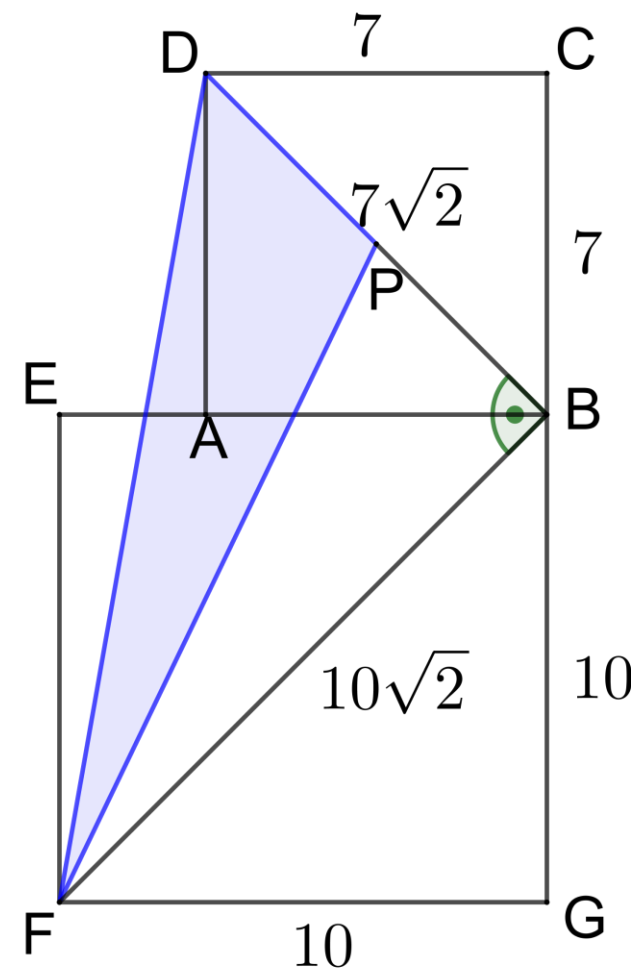


GP omezuje náročnost počítání



Délka úhlopříčky čtverce $ABCD$ je 7 cm a čtverce $EFGA$ je 10 cm. Bod P je středem čtverce $ABCD$. Vypočítejte obsah trojúhelníku DFP .

- (A) $14,5 \text{ cm}^2$ (B) 15 cm^2 (C) $15,75 \text{ cm}^2$
(D) $16,5 \text{ cm}^2$ (E) $17,5 \text{ cm}^2$



Práce s modely



Součástí zadání:

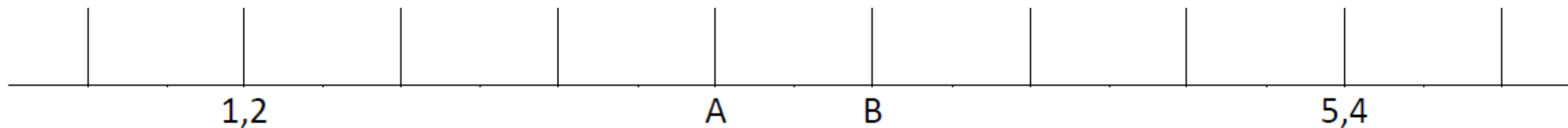
- Není obrázek
- Je částečný obrázek
- Je úplný obrázek

Modely, které známe



PYTHAGORIÁDA Okresní kolo, 7. ročník, 5. úloha

Jaké číslo leží přesně uprostřed mezi body A a B?



Přesně uprostřed mezi body A a B leží číslo

Modely, které známe



PYTHAGORIÁDA Okresní kolo, 8. ročník, 3. úloha

Bod A má souřadnice $[2; 3]$. Jestliže ho zobrazíme v osově souměrnosti podle osy x , dostaneme bod A_1 . Bod A_1 poté zobrazíme ve středové souměrnosti podle počátku soustavy souřadnic, tedy bodu $[0; 0]$ a získáme tak bod A_2 . Jaké jsou souřadnice tohoto bodu?

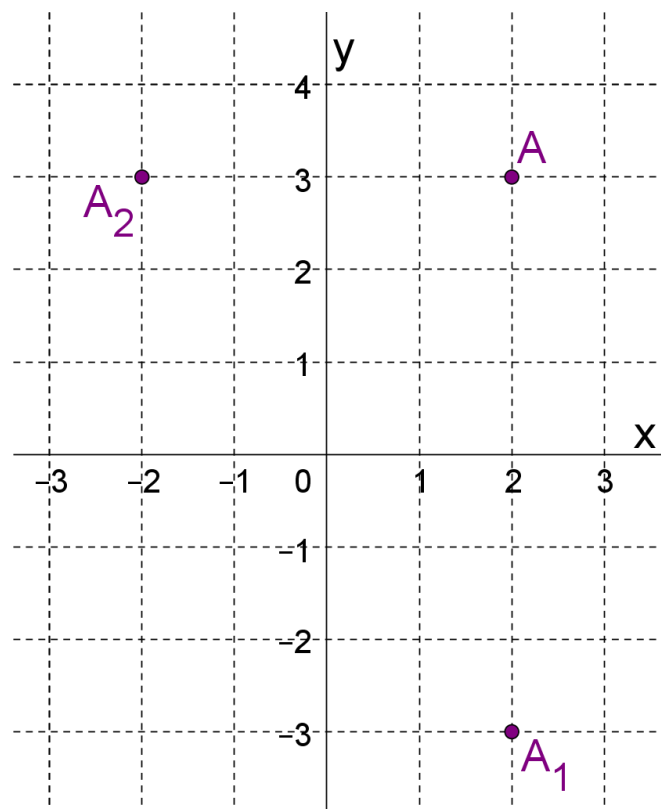
Souřadnice bodu A_2 jsou [..... ;].

Modely, které známe



PYTHAGORIÁDA

Okresní kolo, 8. ročník, 3. úloha



Modely, které dostaneme



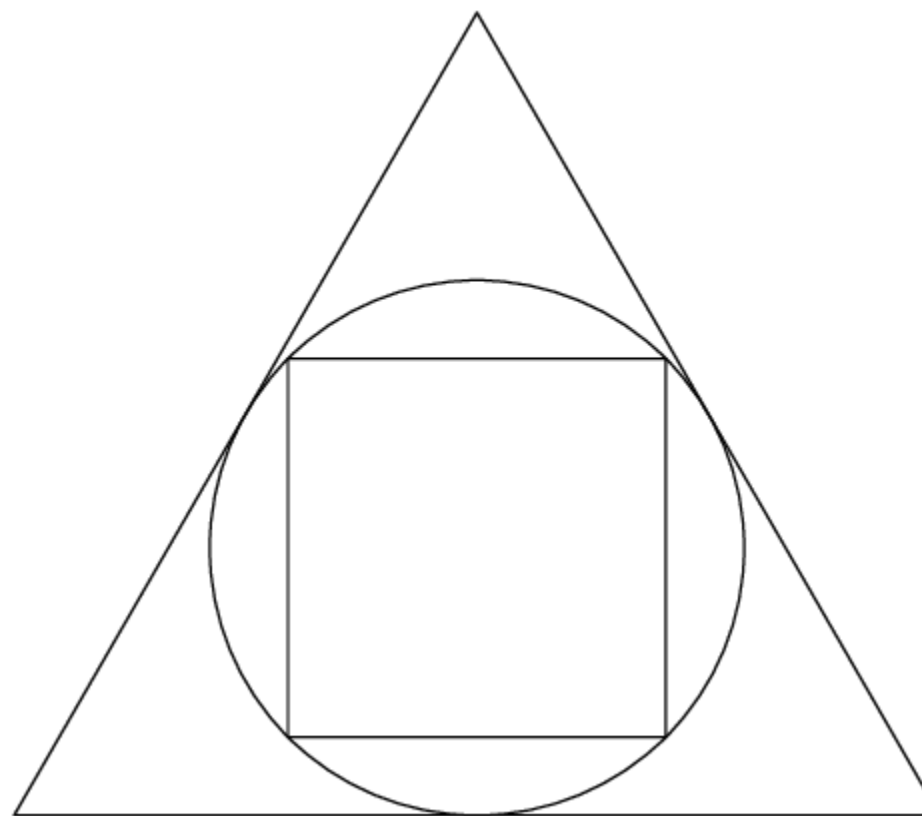
PIKOMAT MFF UK

38. ročník

3. série

2. příklad

„Je to rovnostranný trojúhelník, v něm je co největší kruh a v tom kruhu je co největší čtverec. Ten čtverec má stranu délky 4 cm.“ Jaká je délka strany trojúhelníku?



Modely, které dostaneme



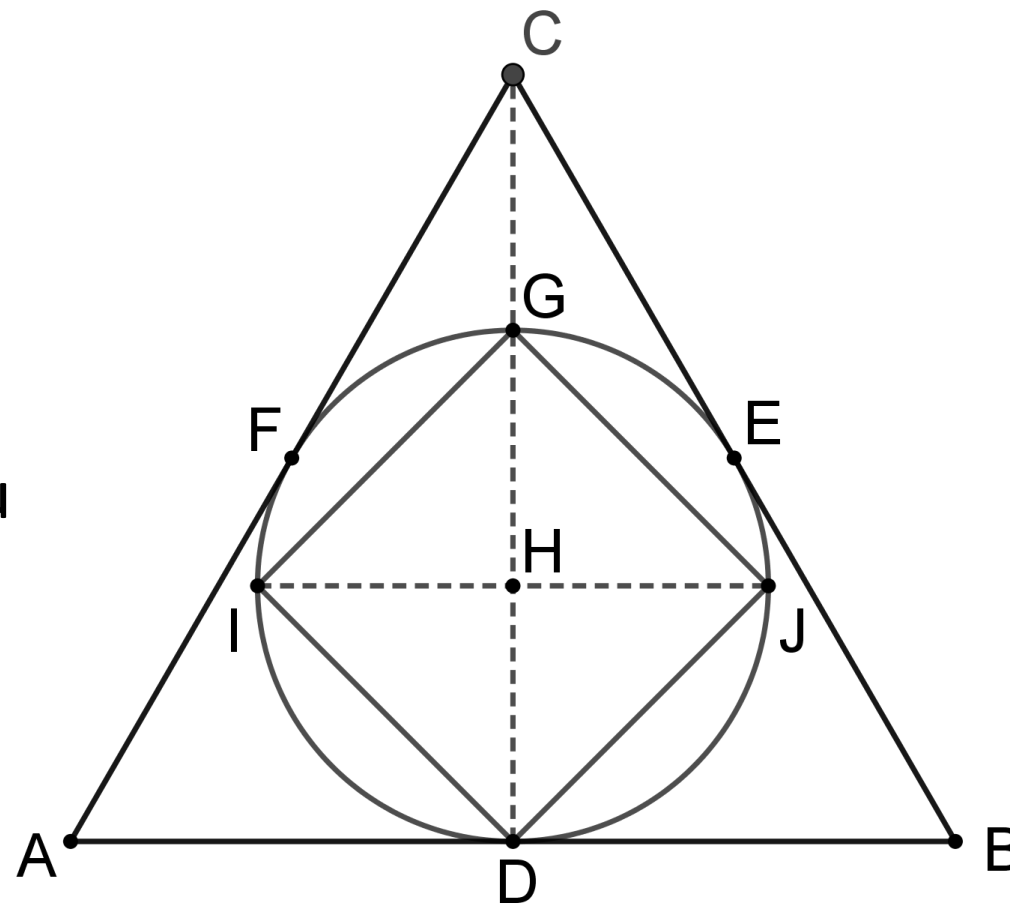
PIKOMAT MFF UK

38. ročník

3. série

2. příklad

„Je to rovnostranný trojúhelník, v něm je co největší kruh a v tom kruhu je co největší čtverec. Ten čtverec má stranu délky 4 cm.“ Jaká je délka strany trojúhelníku?



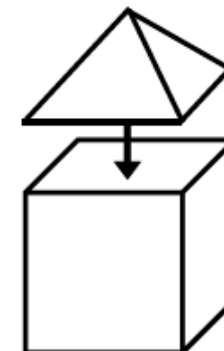
Modely, které dostaneme z části



PYTHAGORIÁDA 6. ročník, 9. úloha

U vchodu hvězdárny jsou zavěšeny prostorové hvězdy. Uprostřed hvězdy je krychle a na každou její stěnu je přilepený jehlan, jehož podstava přesně odpovídá stěně krychle (viz obrázek). Kolik stěn má takto vyrobená hvězda?

Jedna hvězda má stěn.



Prostorová představivost



- Vhodné řezy tělesy
- Stavby z krychlí
- Vztahy v prostoru, zobrazení v prostoru

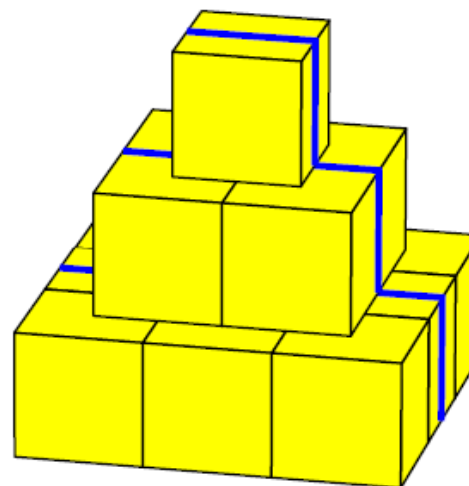
Stavby z krychlí



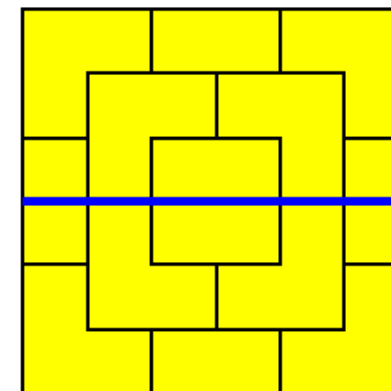
Kat. Klokánek

16. Pyramida na obrázku je sestavená z krychlí s hranami o délce 10 cm. Jak dlouhá bude cesta mravence, který pyramidu překoná po tlusté čáře?

- (A) 30 cm (B) 60 cm (C) 70 cm
(D) 80 cm (E) 90 cm



pohled shora

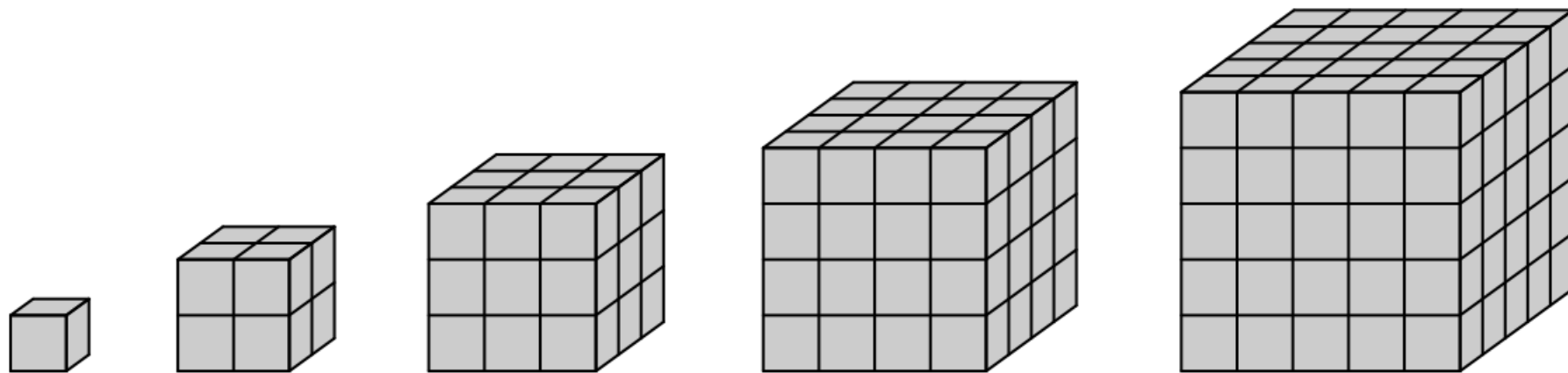


Stavby z krychlí



Z6–II–3

Zuzka měla pět čtverečkových kostek s hranami délek od 1 do 5 čtverečků:



Ze všech těchto kostek slepila věž, ve které menší kostky stavěla na větší, a to vždy celou jednou stěnou. Poté Zuzka celou věž kromě podstavné stěny obarvila. Barvu měla v kelímcích, z nichž každý stačil k obarvení plochy odpovídající přesně 5 čtverečkům.

Kolik kelímků barvy stačilo Zuzce k obarvení věže?

(*E. Novotná*)

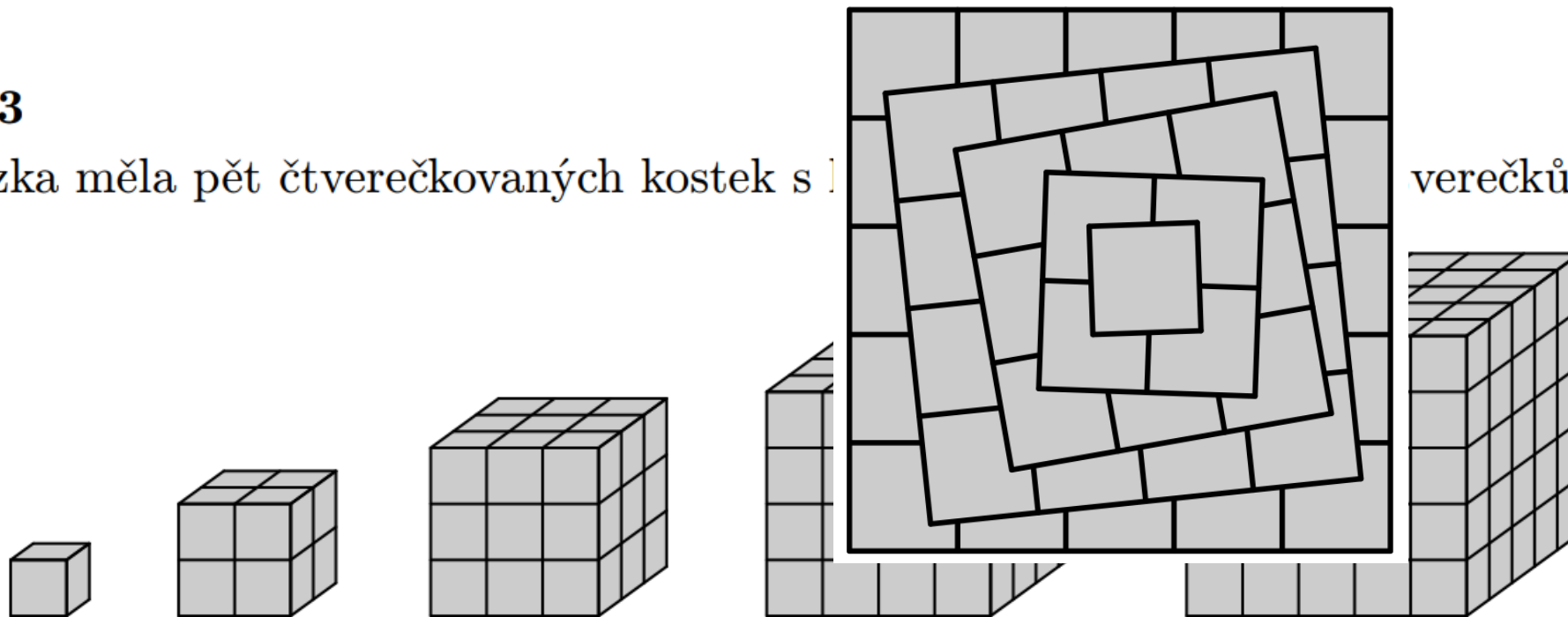
Stavby z krychlí



Z6–II–3

Zuzka měla pět čtverečkových kostek s

verečků:



Ze všech těchto kostek slepila věž, ve které menší kostky stavěla na větší, a to vždy celou jednou stěnou. Poté Zuzka celou věž kromě podstavné stěny obarvila. Barvu měla v kelímcích, z nichž každý stačil k obarvení plochy odpovídající přesně 5 čtverečkům.

Kolik kelímků barvy stačilo Zuzce k obarvení věže?

(*E. Novotná*)

Stavby z krychlí



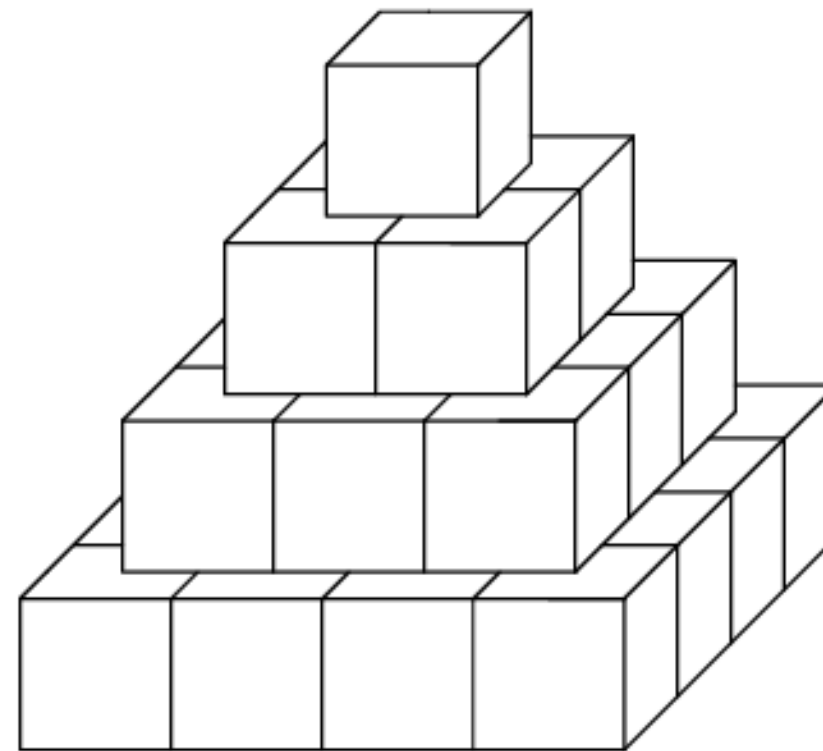
PIKOMAT MFF UK

38. ročník

3. série

3. příklad

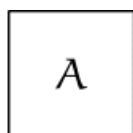
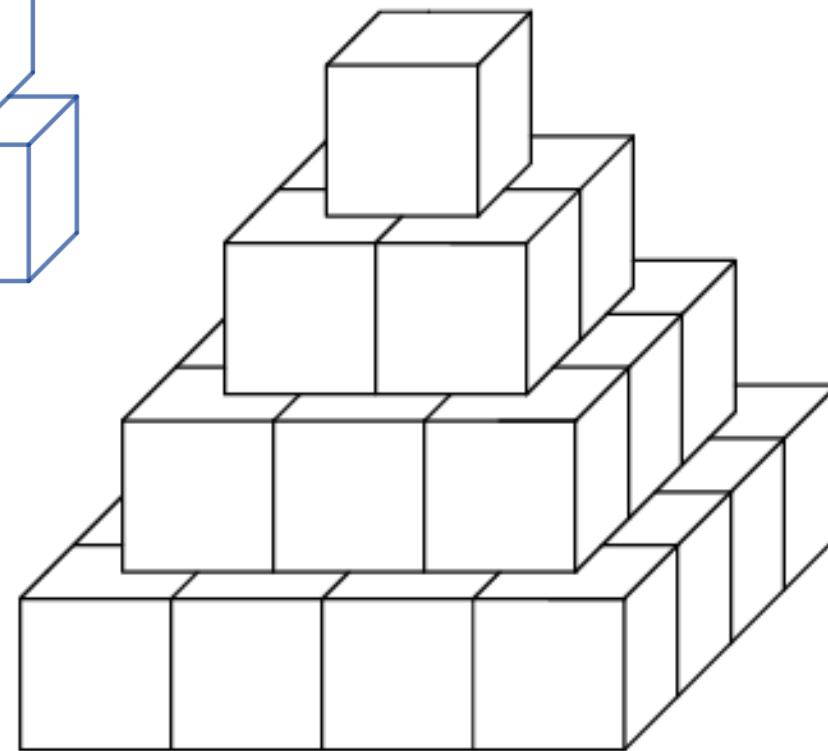
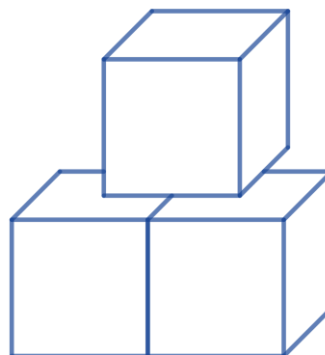
Skládačka sestává z alespoň dvou stejných dílů, které vznikly slepením alespoň dvou krychliček. Ze skládačky se dá postavit čtyřpatrová pyramida, jejíž první patro je čtverec 4×4 , druhé 3×3 , třetí 2×2 a poslední je tvořené jen jednou kostičkou. Středy těchto čtverců leží nad sebou, jejich strany jsou rovnoběžné. Jak vypadá díl skládačky a jakým způsobem lze pyramidu sestavit?



Stavby z krychlí



C	E	D
F	B	G
I	H	J



A	A
B	B

C	C	D	D
F	E	E	G
F	H	H	G
I	I	J	J

Řezy těles



Junior

20. Z krychle o hraně délky 2 dm byly odstraněny dotýkající se shodné polokoule, jejichž středy jsou shodné se středy stěn krychle (viz obrázek). Určete průměr polokoulí.

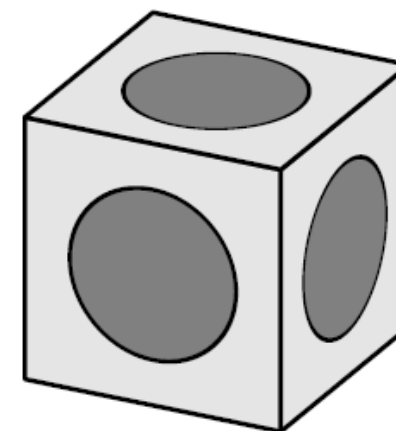
(A) 1 dm

(B) 2 dm

(C) $\sqrt{2}$ dm

(D) $\frac{3}{2}$ dm

(E) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ dm



Řezy těles



Junior

20. Z krychle o hraně délky 2 dm byly odstraněny dotýkající se shodné polokoule, jejichž středy jsou shodné se středy stěn krychle (viz obrázek). Určete průměr polokoulí.

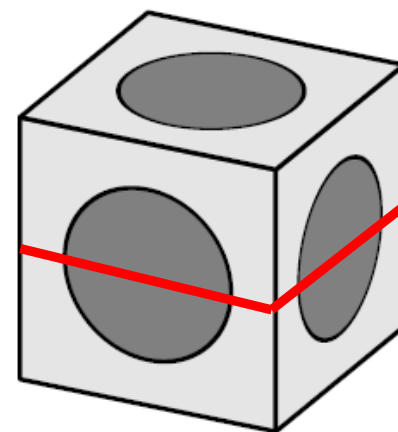
(A) 1 dm

(B) 2 dm

(C) $\sqrt{2}$ dm

(D) $\frac{3}{2}$ dm

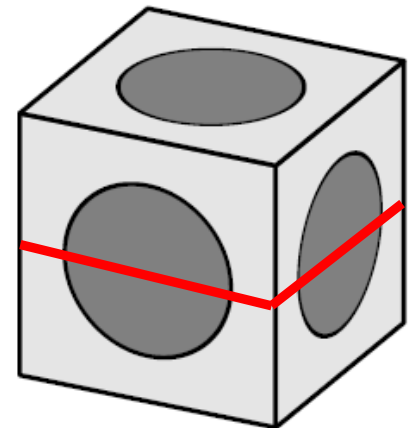
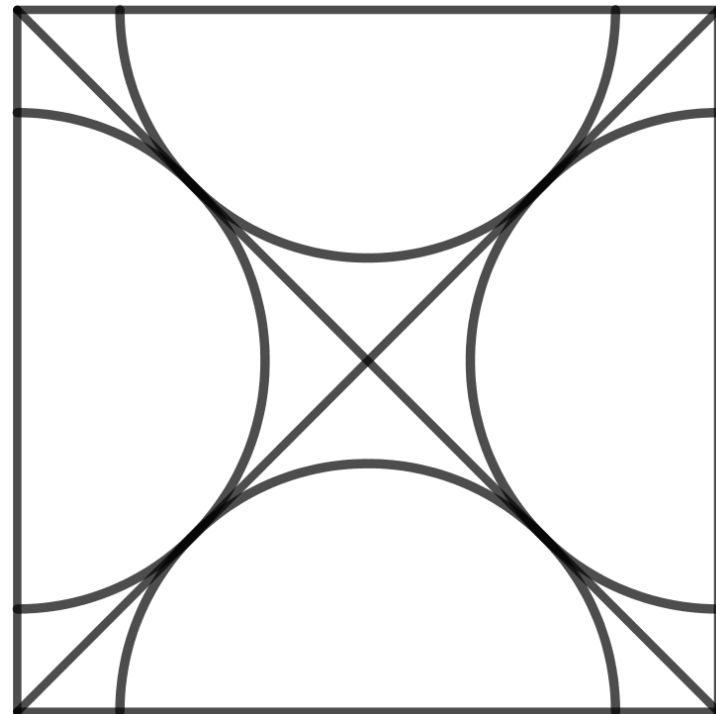
(E) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ dm



Řezy těles



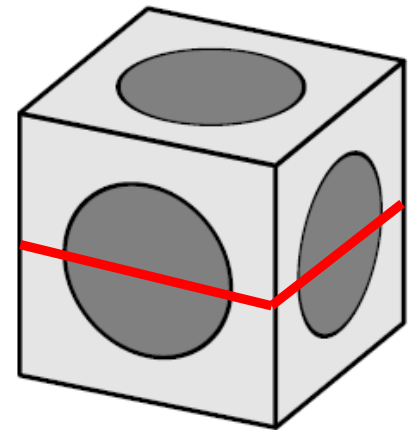
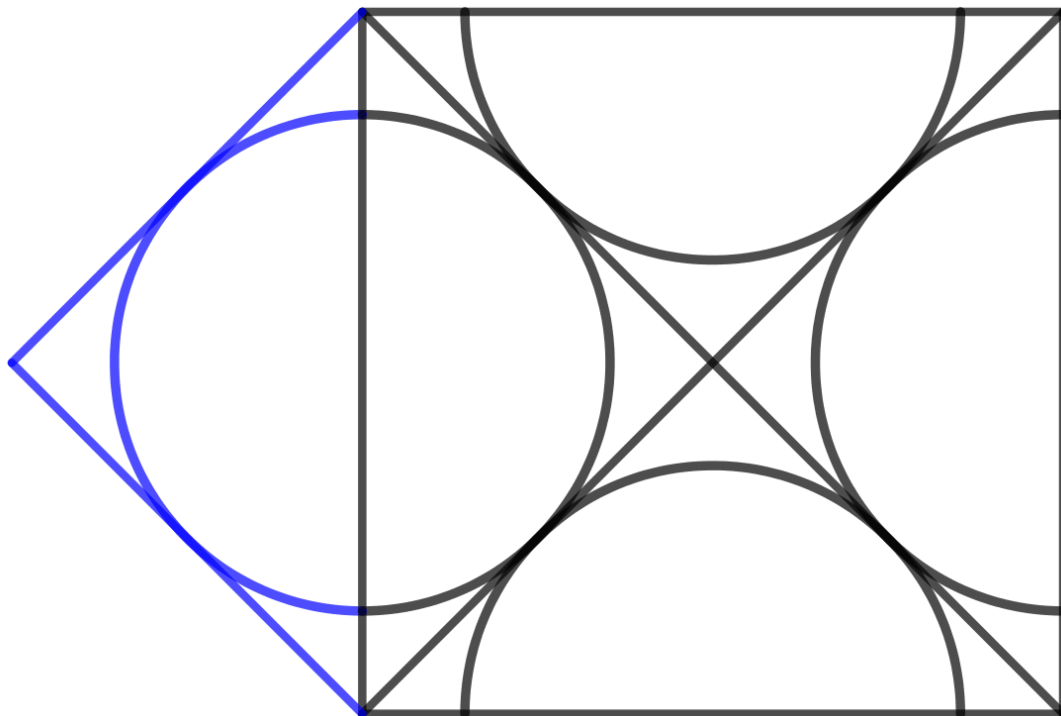
Junior



Řezy těles



Junior

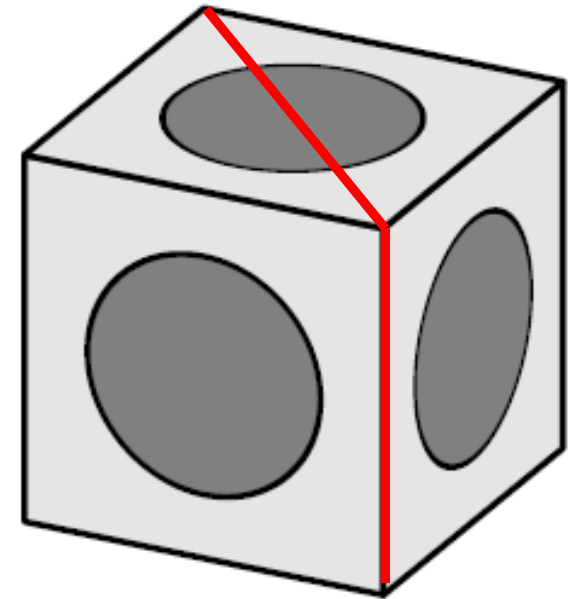


Řezy těles



Junior

A jak vypadá řez touto rovinou?

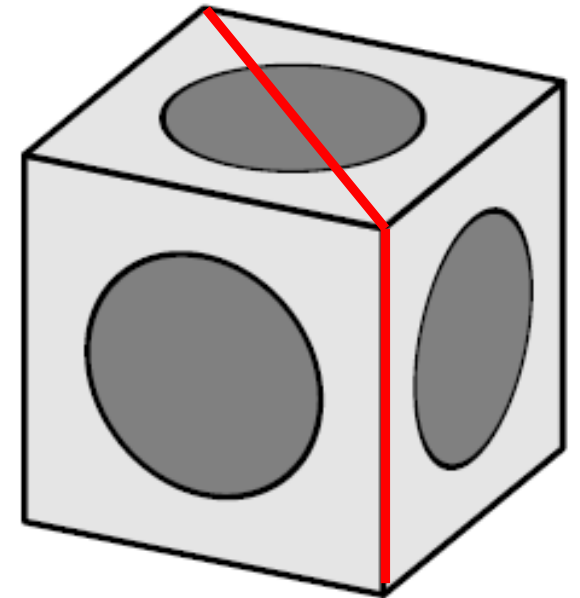
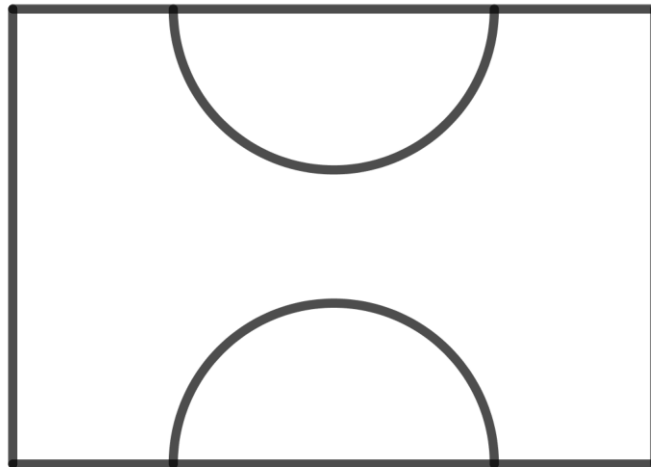


Řezy těles



Junior

A jak vypadá řez touto rovinou?



Přeměny kostky

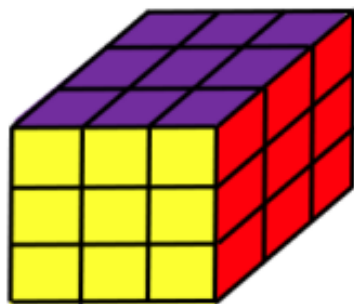


15. RUBIKOVA KOSTKA

6 bodů

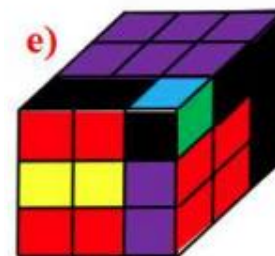
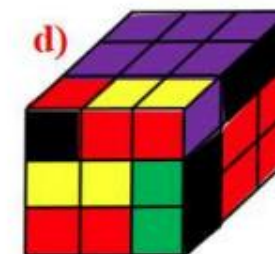
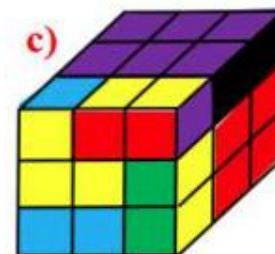
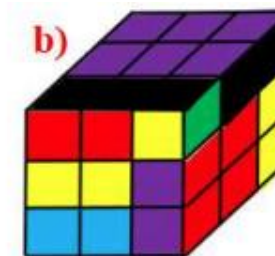
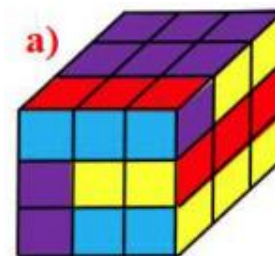
Do historie lidstva patří i vývoj her a rébusů. Jedním je i Rubikova kostka, která vznikla v roce 1974. Naše kostka má čelní stěnu žlutou, pravou boční stěnu červenou, levou boční stěnu modrou, horní stěnu fialovou, zadní stěnu černou, spodní stěnu zelenou.

6. ročník



Otočíš jednou spodní vrstvu o devadesát stupňů (čtvrt kruhu) doprava, pak otočíš pravou svislou vrstvu o čtvrt kruhu horním obloukem dozadu, nakonec otočíš horní vrstvu o čtvrt kruhu doleva (z tvého pohledu).

Vyber z nabídky tu kostku, která odpovídá výslednému postavení stěn.



Hledání vztahů



- Vycházíme z vlastností útvarů

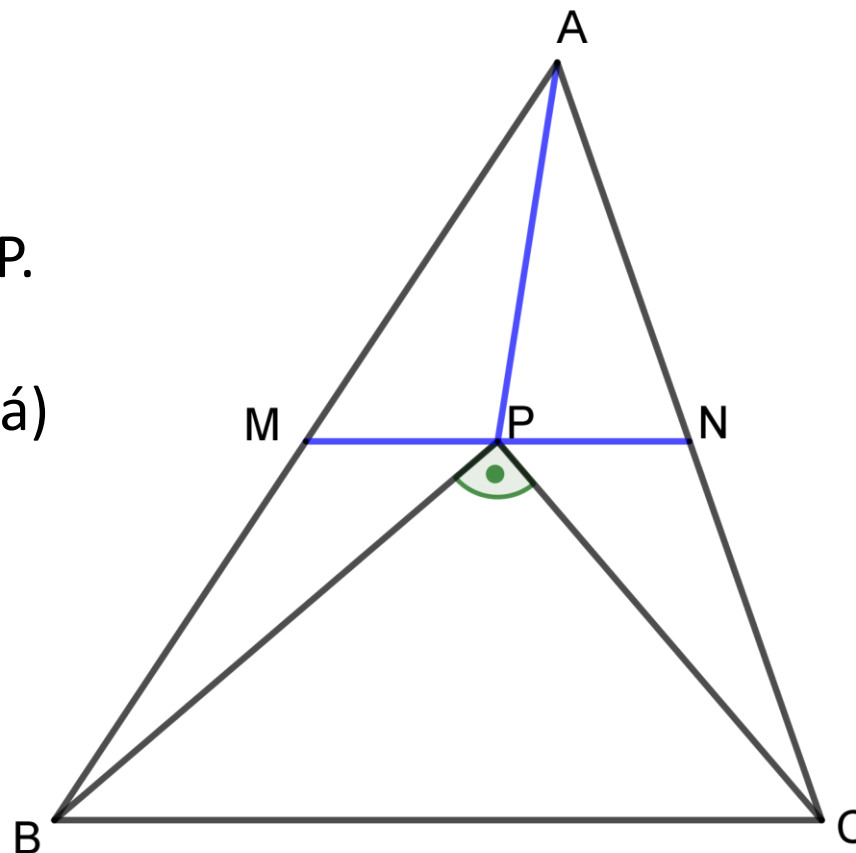
Hledání vztahů



C-I-3

V trojúhelníku ABC označme M střed strany AB , N střed strany AC a P střed úsečky MN .
Dokažte, že pokud $|MN| = |AP|$, pak $BP \perp CP$.

(Patrik Bak, Eliška Macáková)



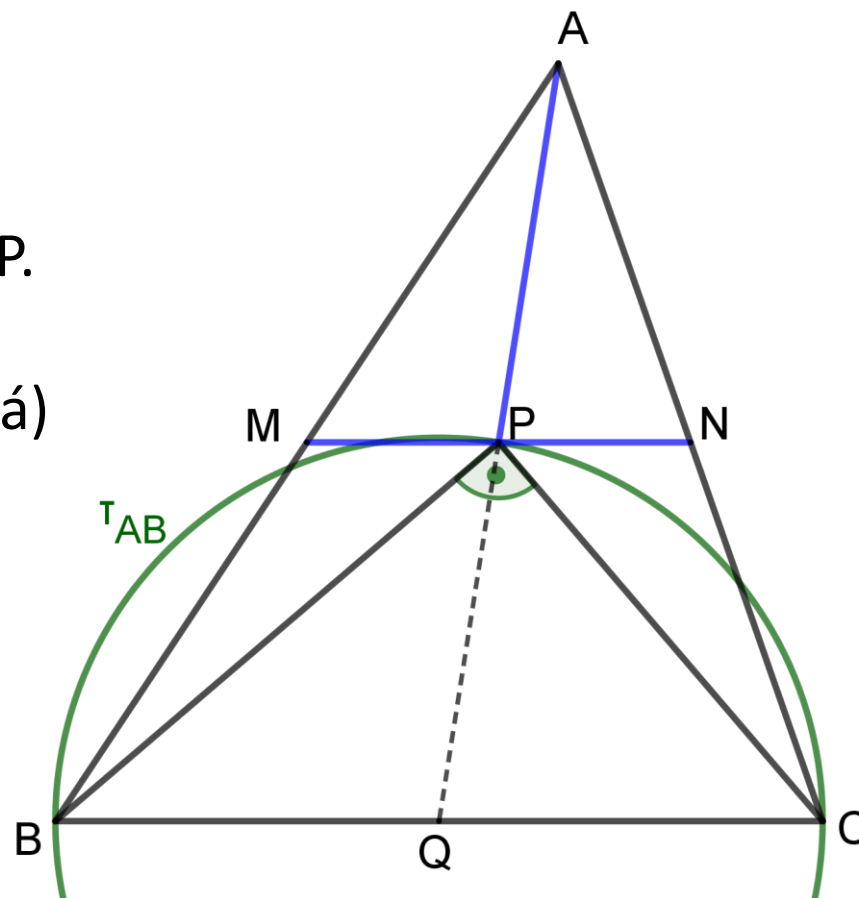
Hledání vztahů



C-I-3

V trojúhelníku ABC označme M střed strany AB , N střed strany AC a P střed úsečky MN .
Dokažte, že pokud $|MN| = |AP|$, pak $BP \perp CP$.

(Patrik Bak, Eliška Macáková)

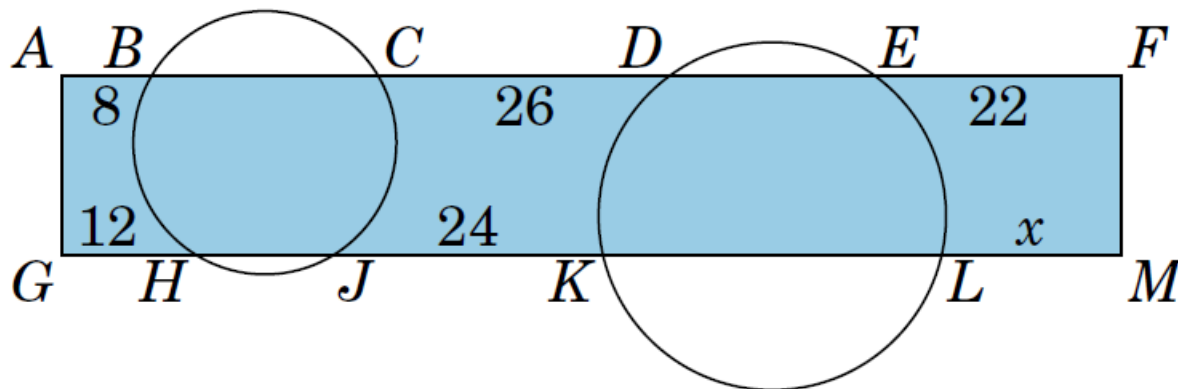


Hledání vztahů



Kategorie Student, úloha 23

Dvě kružnice protínají obdélník $AFMG$ jako na obrázku. Přitom $|AB| = 8$ m, $|CD| = 26$ m, $|EF| = 22$ m, $|GH| = 12$ m a $|JK| = 24$ m. V metrech určete $|LM|$.



(A) 14

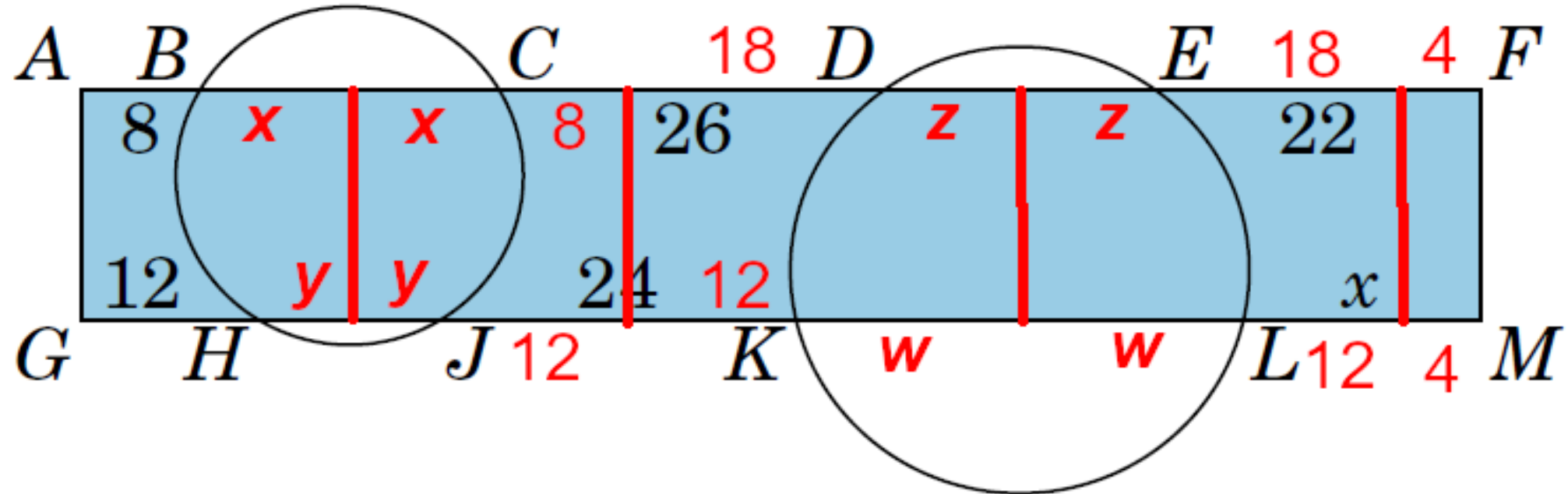
(B) 15

(C) 16

(D) 17

(E) 18

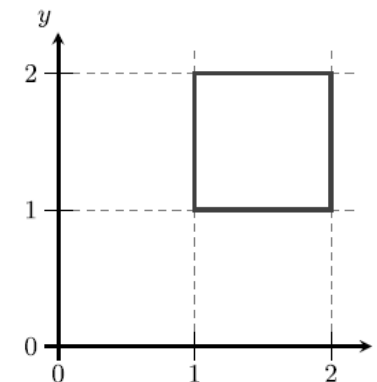
Hledání vztahů



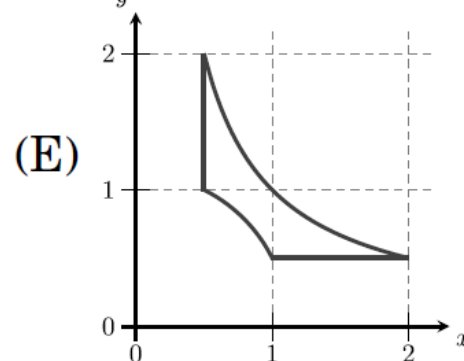
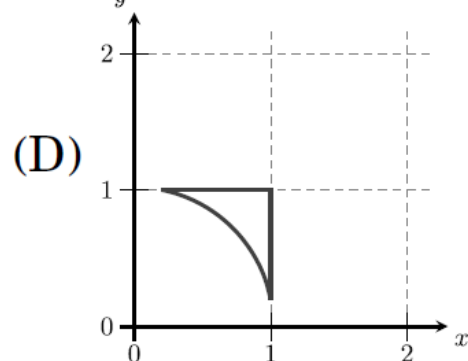
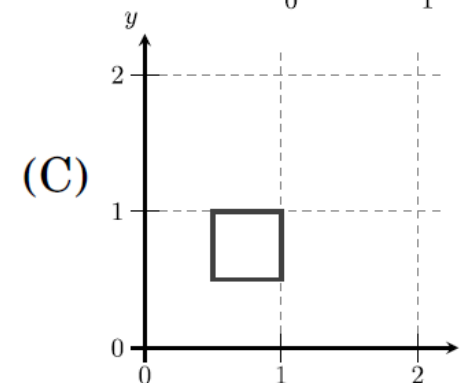
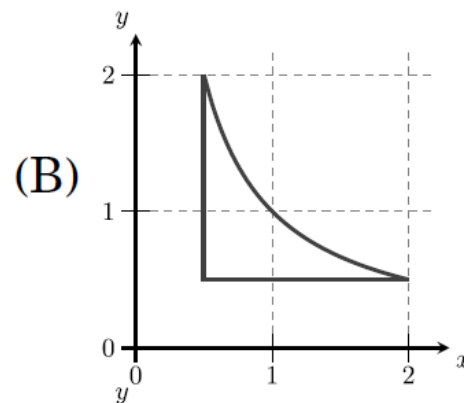
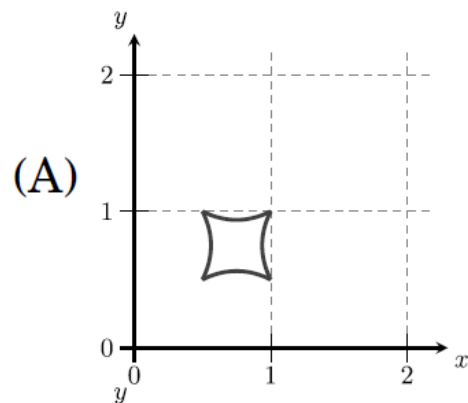
Hledání vztahů



21. Na obrázku vpravo je v kartézské soustavě souřadnic čtverec s vrcholy $[1, 1]$, $[2, 1]$, $[1, 2]$ a $[2, 2]$. Každý bod $[x, y]$ tohoto čtverce se zobrazí na bod $[\frac{1}{x}, \frac{1}{y}]$. Který z obrazců vznikne?

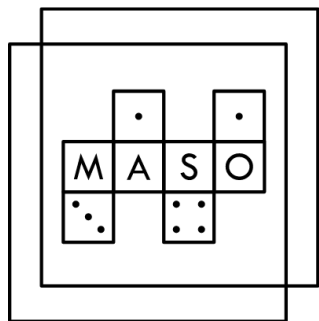


Kat. Student



Intuice vs. zdůvodnění

Hledání vztahů

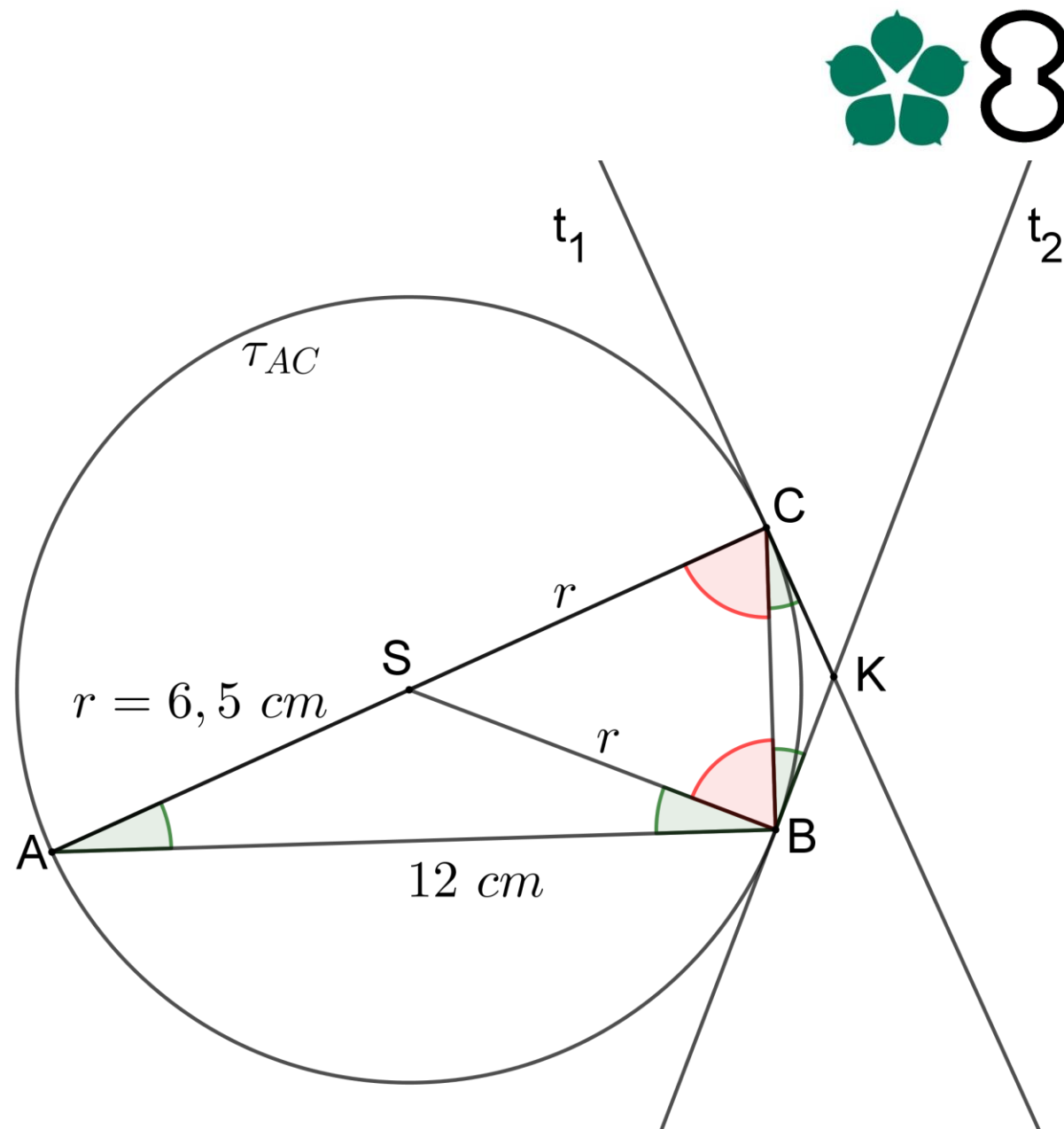


Podzim 2022, úloha 49

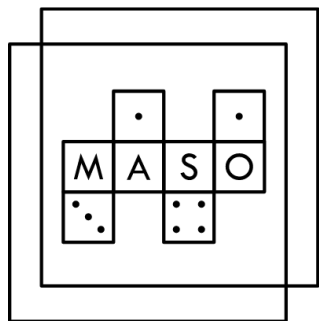
Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AC , kde $|AB| = 12$ cm a $|AC| = 13$ cm.

Označme K průsečík tečen ke kružnici opsané $\triangle ABC$ v bodech B a C .

Určete délku CK .

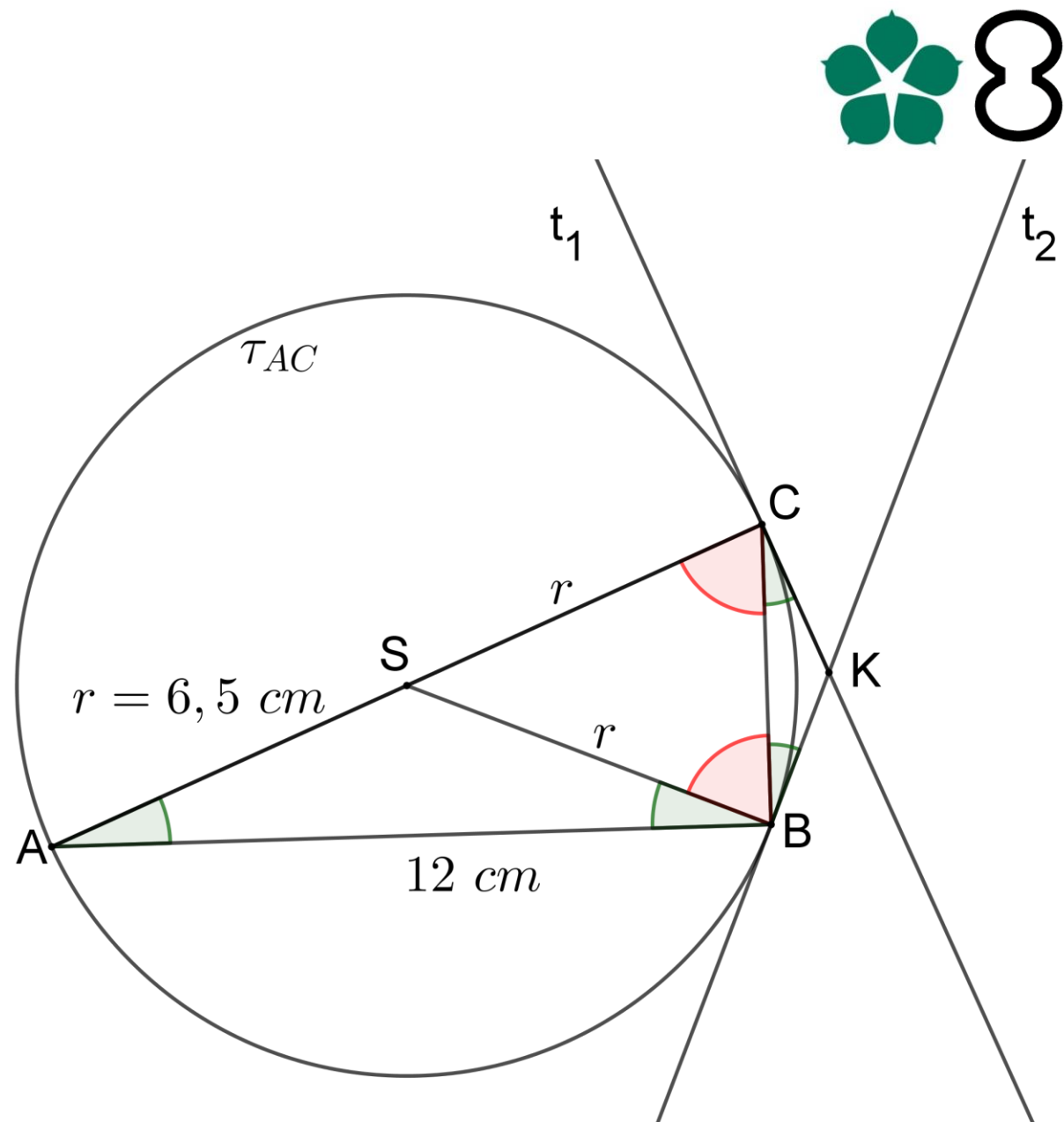


Hledání vztahů



Podzim 2022, úloha 49

- $|BC| = 5 \text{ cm}$
- $\alpha + \gamma = 90^\circ + \text{kolmice}$
- $\triangle ABS \sim \triangle CBK (uu)$
- $|CK| = \frac{5}{12} \cdot |AS| = \frac{65}{24} \text{ cm}$



Zdroje



Matematická olympiáda, řešení úloh [cit. 8. 5. 2023]:

- <https://www.matematickaolympiada.cz/media/3518287/z72ii-6-r.pdf>
- <https://www.matematickaolympiada.cz/media/3516462/z72ii-9-zr.pdf>
- <https://www.matematickaolympiada.cz/media/3518287/z72ii-6-r.pdf>
- <https://www.matematickaolympiada.cz/media/3494370/z72i-9.pdf>
- <https://www.matematickaolympiada.cz/media/3494409/c72i.pdf>

Pangea, 6. ročník, Soubor otázek, 2023 [cit. 8. 5. 2023]:

https://www.pangeasoutez.cz/files/test-files/2023_6_school_round_test.pdf

MaSo, podzim 2022 [cit. 8. 5. 2023]:

- https://maso.mff.cuni.cz/2022_podzim/dokumenty/priklady.pdf

Zdroje



Matematický klokan, sborník 2022 [cit. 8. 5. 2023]:

- https://matematickyklokan.net/phocadownload/sborniky/sbornik_klokan_2022.pdf

Pikomát MFF UK, 38. ročník [cit. 8. 5. 2023]:

- <https://pikomát.mff.cuni.cz/archiv/rocnik38/nr3>

Pythagoriáda 2022 [cit. 8. 5. 2023]:

- https://www.pythagoriada.cz/wp-content/uploads/2022/12/Pythagoriada_2022_skolni_kolo_opraveno-1-1.pdf
- https://www.pythagoriada.cz/wp-content/uploads/2022/12/Pytha_okres2022_kompletOP.pdf