Rozvíjení geometrické představivosti pomocí planimetrických úloh

Vlasta Moravcová
KDM, MFF UK, Praha

Letní škola geometrie
SPŠ Česká Lípa

1. až 4. července 2023

Představivost

schopnost člověka vytvářet představy, tj. názorné obrazy něčeho, co v daném okamžiku nepůsobí na naše receptory

Prostorová představivost

- soubor schopností týkajících se reprodukčních i anticipačních, statických i dynamických představ o tvarech, vlastnostech a vzájemných vztazích mezi geometrickými útvary v prostoru (Molnár, 2009)
- soubor dílčích schopností týkajících se našich představ o prostoru, o tvarech a vzájemných vztazích mezi tělesy, o vztazích mezi předměty a námi a konečně také o prostorových vztazích jednotlivých částí našeho těla navzájem (Šarounová, 1982)

Geometrická představivost

- (prostorová) představivost s geometrickým obsahem
- složka názorného myšlení, která spočívá v dovednosti vybavovat si geometrické útvary a jejich vlastnosti; přitom obvykle můžeme používat, případně vytvářet, jejich jedno, dvou nebo třídimenzionální modely (Kuřina, 1987)
- podle Šarounové (1982) zahrnuje 4 složky:
  - schopnost rozeznávat rovinné útvary
  - představy o některých vztazích mezi útvary v rovině
  - schopnost rozeznávat základní tělesa v prostoru
  - představy o vzájemné poloze těles a rovin v prostoru
- uplatnění nejen v geometrii, ale i v dalších oblastech matematiky (algebra, funkce, pravděpodobnost a statistika aj.)

Geometrická představivost v rovině

- rovina je součástí prostoru
- lze trénovat čistě jen „představivost“
  - odhad velikosti, vzdálenosti, vztahu
  - doplnění chybějící části útvaru
  - ...
- ale i „objevovat“ vlastnosti útvarů či posilovat konceptuální znalosti
  - vlastnosti trojúhelníků, čtyřúhelníků, ...
  - obvody a obsahy útvarů
  - transformace roviny (souměrnosti, posunutí, rotace)
  - ...

Přístupy k řešení

A) „manipulace“
- sjednocení a průniky
- rotace a další transformace
- objevování vlastností na základě manipulace s objektem, procedurální přístup

B) „vizualizace“
- cílem pracovat jen s abstraktní představou
- upevnění konceptuálních znalostí

Mezi postupy A) a B) není jasně vymezená hranice, zpravidla lze úlohu uchopit oběma způsoby, přičemž ten procedurální bývá snazší.

Cesta od A) k B) vede skrze náčrtky.

Trénink představivosti

1. Rovnoběžnost přímek

Trénink představivosti

1. Rovnoběžnost přímek
   - $a \parallel c$, $e \parallel g$

Trénink představivosti

1. Rovnoběžnost přímek
   - $a \parallel c$, $e \parallel g$
   - zjednodušení

Trénink představivosti

1. Rovnoběžnost přímek
   - $a \parallel c$, $e \parallel g$
   - zjednodušení
   - ztížení

Trénink představivosti

1. Rovnoběžnost přímek
   - $a \parallel c$, $e \parallel g$
   - zjednodušení
   - ztížení

2. Porovnání délek úseček

Trénink představivosti

1. Rovnoběžnost přímek
   - $a \parallel c$, $e \parallel g$
   - zjednodušení
   - ztížení

2. Porovnání délek úseček
   - $|IJ| < |AB| < |GH| < |EF| < |KL| < |CD|$

Trénink představivosti

1. Rovnoběžnost přímek
   - $a \parallel c$, $e \parallel g$
   - zjednodušení
   - ztížení

2. Porovnání délek úseček
   - $|IJ| < |AB| < |GH| < |EF| < |KL| < |CD|$
   - zjednodušení

Trénink představivosti

1. Rovnoběžnost přímek
   - $a \parallel c$, $e \parallel g$
   - zjednodušení
   - ztížení

2. Porovnání délek úseček
   - $|IJ| < |AB| < |GH| < |EF| < |KL| < |CD|$
   - zjednodušení
   - ztížení

Trénink představivosti

Alternativní úlohy

- kolmost
- dokreslování různých objektů, např.
  - rovnoběžek
  - pravidelných n-úhelníků
  - kružnicových oblouků
- porovnání obvodů, obsahů
  - podobných útvarů
  - zcela odlišných útvarů
- odhad velikosti úhlu
- atd.

Sjednocení útvarů

Domluva:

- ZŠ klasifikace rovinných útvarů
  - rovnostranný trojúhelník není speciálním případem rovnoramenného trojúhelníku, čtverec není speciálním případem obdélníku atd.
- útvary k sobě přikládáme tak, že
  - se žádné jejich části nekryjí
  - mají vždy jednu stranu společnou
  - při manipulaci lze „vystoupit“ z roviny (nepřímá shodnost)

Sjednocení útvarů

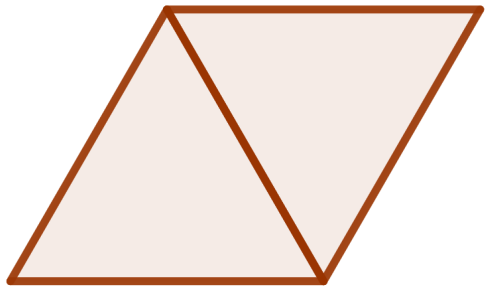
Dva shodné trojúhelníky

a) rovnostranné

Sjednocení útvarů

Dva shodné trojúhelníky

a) rovnostranné
   - kosočtverec



Sjednocení útvarů

Dva shodné trojúhelníky

b) rovnoramenné

Sjednocení útvarů

Dva shodné trojúhelníky

b) rovnoramenné

– kosodélník, pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník, čtverec, kosočtverec, deltoid, nekonvexní čtyřúhelník

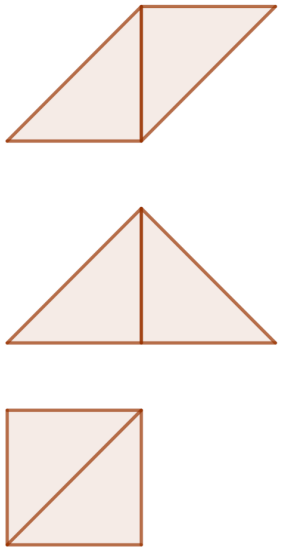
Sjednocení útvarů

Dva shodné trojúhelníky

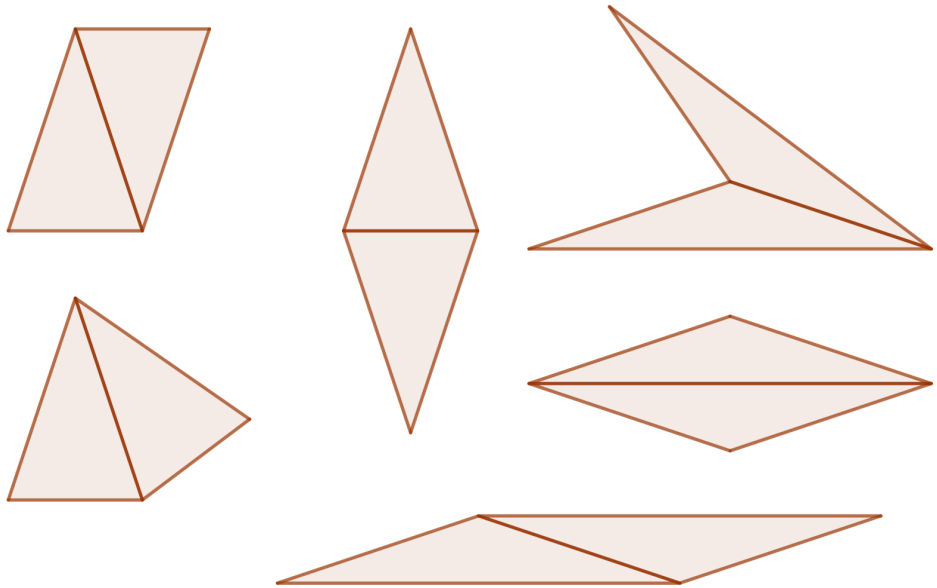
b) rovnoramenné

– kosodélník, pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník, čtverec, kosočtverec, deltoid, nekonvexní čtyřúhelník

pravoúhlé



ostatní



Sjednocení útvarů

Dva shodné trojúhelníky

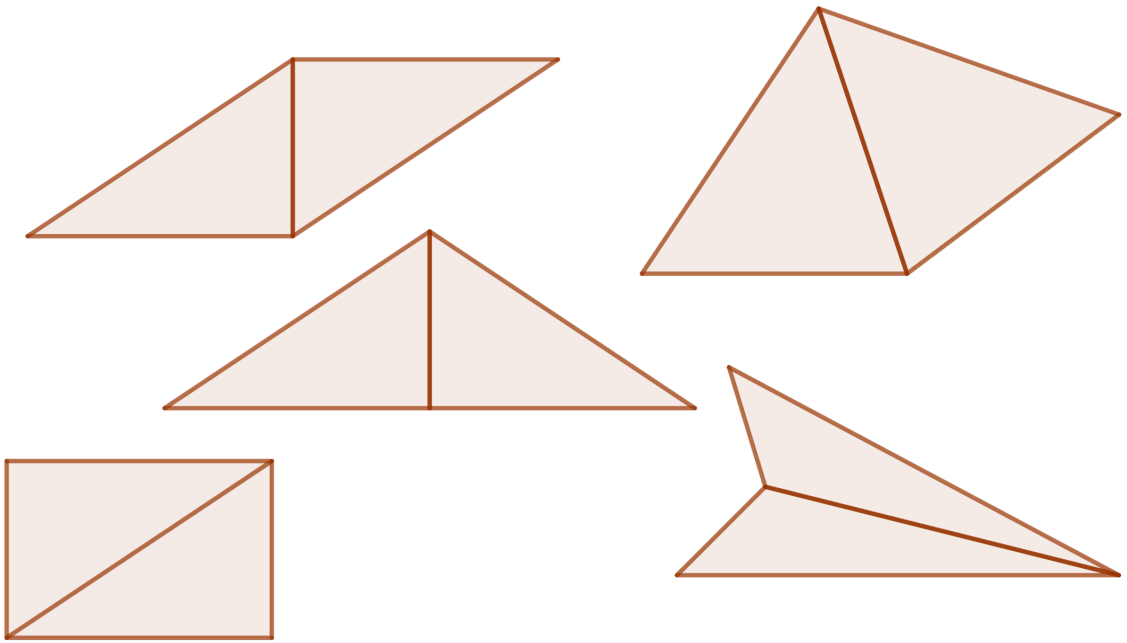
c) různostranné

Sjednocení útvarů

Dva shodné trojúhelníky

c) různostranné

- kosodélník, rovnoramenný trojúhelník, obdélník, deltoid, nekonvexní čtyřúhelník



Sjednocení útvarů

Dva shodné trojúhelníky

d) pravoúhlé

Sjednocení útvarů

Dva shodné trojúhelníky

d) pravoúhlé

- čtverec, obdélník, rovnoramenný trojúhelník (pravoúhlý, nepravoúhlý), kosodélník

Sjednocení útvarů

Dva shodné trojúhelníky

d) pravoúhlé

- čtverec, obdélník, rovnoramenný trojúhelník (pravoúhlý, nepravoúhlý), kosodélník

Doplňující otázky:

1. Kolik různých útvarů můžeme v tomto případě získat?

Sjednocení útvarů

Dva shodné trojúhelníky

d) pravoúhlé

- čtverec, obdélník, rovnoramenný trojúhelník (pravoúhlý, nepravoúhlý), kosodélník

Doplňující otázky:

1. Kolik různých útvarů můžeme v tomto případě získat?
2. Za jakých podmínek lze ze dvou shodných trojúhelníků získat trojúhelník?

Sjednocení útvarů

Dva shodné trojúhelníky

d) pravoúhlé

- čtverec, obdélník, rovnoramenný trojúhelník (pravoúhlý, nepravoúhlý), kosodélník

Doplňující otázky:

1. Kolik různých útvarů můžeme v tomto případě získat?
2. Za jakých podmínek lze ze dvou shodných trojúhelníků získat trojúhelník?
3. Můžeme ze dvou pravoúhlých trojúhelníků získat kosočtverec? Jak/Proč ne?

Sjednocení útvarů

Dva shodné trojúhelníky

d) pravoúhlé

- čtverec, obdélník, rovnoramenný trojúhelník (pravoúhlý, nepravoúhlý), kosodélník

Doplňující otázky:

1. Kolik různých útvarů můžeme v tomto případě získat?
2. Za jakých podmínek lze ze dvou shodných trojúhelníků získat trojúhelník?
3. Můžeme ze dvou pravoúhlých trojúhelníků získat kosočtverec? Jak/Proč ne?
4. Získáme-li kosodélník, jaké jsou jeho výšky? (Popište výšky ve vztahu k výškám daných trojúhelníků.)

Sjednocení útvarů

Dva shodné trojúhelníky – shrnutí

- doplnění tabulky
- návrhy otázek

Vzájemná poloha objektů

6.

Vzájemná poloha objektů

6. a) sečna, 2 body

Vzájemná poloha objektů

6. a) sečna, 2 body
   b) úsečka (úhlopříčka) BD

Vzájemná poloha objektů

6. a) sečna, 2 body
   b) úsečka (úhlopříčka) BD
   c) kruhová výseč se středem C, poloměrem $\frac{|AB|}{2}$ a středovým úhlem o velikosti $60°$

Vzájemná poloha objektů

6. a) sečna, 2 body
   b) úsečka (úhlopříčka) BD
   c) kruhová výseč se středem C, poloměrem $\frac{|AB|}{2}$ a středovým úhlem o velikosti $60°$

7.

Vzájemná poloha objektů

6. a) sečna, 2 body
   b) úsečka (úhlopříčka) BD
   c) kruhová výseč se středem C, poloměrem $\frac{|AB|}{2}$ a středovým úhlem o velikosti $60°$

7. a) protínají se

Vzájemná poloha objektů

6. a) sečna, 2 body
   b) úsečka (úhlopříčka) BD
   c) kruhová výseč se středem C, poloměrem $\frac{|AB|}{2}$ a středovým úhlem o velikosti $60°$

7. a) protínají se
   b) m uvnitř k

Vzájemná poloha objektů

6. a) sečna, 2 body
   b) úsečka (úhlopříčka) BD
   c) kruhová výseč se středem C, poloměrem $\frac{|AB|}{2}$ a středovým úhlem o velikosti $60°$

7. a) protínají se
   b) m uvnitř k
   c) protínají se

Vzájemná poloha objektů

6. a) sečna, 2 body
   b) úsečka (úhlopříčka) BD
   c) kruhová výseč se středem C, poloměrem $\frac{|AB|}{2}$ a středovým úhlem o velikosti $60°$

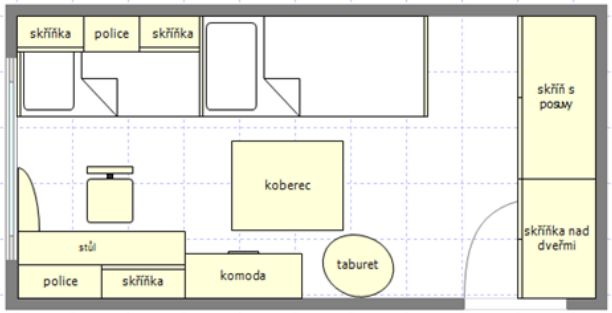
7. a) protínají se
   b) m uvnitř k
   c) protínají se

metody řešení

- představa obrázku
- naučená znalost

Význam rozvoje představivosti v rovině

- praxe
- planimetrie
  - vlastnosti rovinných útvarů
  - konstrukční úlohy
  - transformace v rovině
- analytická geometrie (v rovině)
- stereometrie – rovina je součástí prostoru
- deskriptivní geometrie
- vizualizace problémů z jiných oblastí matematiky



„Geometrická představivost není člověku vrozena. Je to dovednost, kterou se musí učit. Protože je to dovednost důležitá pro technickou tvořivost a potřebná v mnoha povoláních, je jedním z úkolů školy, aby geometrickou představivost systematicky rozvíjela od prvních ročníků základní školy.“ (Kuřina, 1987)

Základní literatura

Dušek, F. (1964). Rozvoj prostorové představivosti. *Matematika ve škole*, *14*(6), 313–318.

Jirotková, D. (1990). Rozvoj prostorové představivosti žáků. *Komenský*, *114*(5), 278–281.

Kuřina, F. (1987). Geometrická představivost a vyučování stereometrii. *Matematika a fyzika ve škole*, *18*(3), 201–212.

Molnár, J. (2009). *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii.* Univerzita Palackého.

Moravcová, V. (2023). Rozvíjení geometrické představivosti pomocí planimetrických úloh. In *Sborník konference Dva dny s didaktikou matematiky*, PedF UK, v tisku.

Šarounová, A. (1982). *Geometrická představivost.* Disertační práce, PedF UK.