Sférická trigonometrie aplikovaná na zeměkouli

Jaroslav Richter

Letní škola geometrie 2019

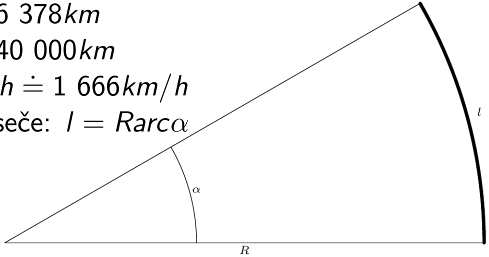
Příprava

$$\varrho^\circ = \frac{180}{\pi} \doteq 57.296^\circ; \quad arc\alpha = \frac{\alpha^\circ}{\varrho^\circ}; \quad \alpha^\circ = \varrho^\circ arc\alpha$$

$$\alpha = 50^\circ 19' 30'' = \left(50 + \frac{19}{60} + \frac{30}{3600}\right)^\circ = 50.325^\circ \doteq arc\ 0.87834$$

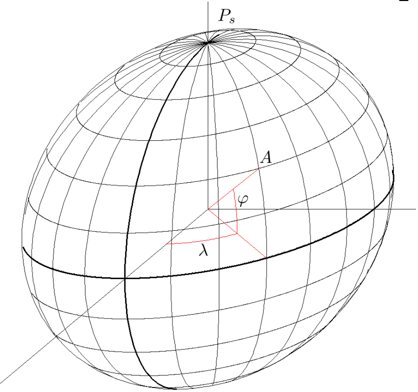
$$\alpha = arc 0.87834 = (\varrho 0.87834) = 50.325^\circ$$

Poloměr zeměkoule $R = 6\ 378 km$
Obvod zeměkoule je cca $40\ 000 km$
tj. rychlost $40\ 000 km/24h \doteq 1\ 666 km/h$
Délka oblouku kruhové úseče: $l = Rarc\alpha$



Sférické souřadnice

Systém poledníků a rovnoběžek. Každý bod má (zeměpisnou) šířku a délku φ,λ. $\varphi \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, $\lambda \in (-\pi, \pi\rangle$ (Hiparchos 2. stol B.C.)



Poledníky a rovník jsou hlavní kružnice - ortodromy. (nejkratší spojnice)

Ostatní rovnoběžky nejsou ortodromy.

Poloměr rovnoběžky příslušné šířky:

$$r = R\cos\varphi$$

Jaká je vzdálenost odpovídající $1^\circ/1''$ měřeno po poledníku:

$$\frac{1^\circ}{\varrho^\circ} R \cong 111 km \quad \frac{1''}{\varrho} \cong 31 m$$

měřeno po rovnoběžce na šířce $\varphi = 50^\circ$:

$$\frac{1^\circ}{\varrho^\circ} R\cos\varphi \cong 71 km \quad \frac{1''}{\varrho} \cong 19 m$$

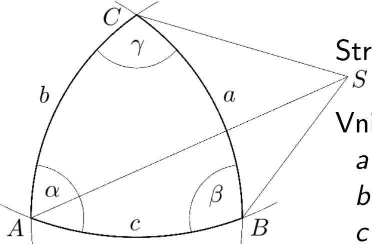
Na zeměkouli měříme φ od rovníku a λ od poledníku procházejícího Hvězdárnou v Greenwichi. Dříve (cca do začátku 19.stol) se λ měřila od poledníku procházejícím ostrůvkem Ferro $\lambda_{Ferro} \doteq 16^\circ v.d$

Převod mezi sférickými a pravoúhlými souřadnicemi

$$
\begin{aligned}
x &= R\cos\varphi\cos\lambda \\
y &= R\cos\varphi\sin\lambda \\
z &= R\sin\varphi
\end{aligned}
$$

Sférická trigonometrie (na jednotkové kulové ploše)

Každými dvěma body A, B vede právě jedna ortodroma - to pro nás bude "přímka" na kulové ploše. Třema body vedou tři "přímky"(ortodromy). Části těchto ortodrom jsou strany sférického trojúhelníka.



Strany trojúhelníka ABC jsou odchylky polopřímek:

Vnitřní úhly trojúhelníka ABC jsou odchylky rovin:

$$a = \angle(SB, SC) \quad \alpha = \angle(SAB, SAC)$$
$$b = \angle(SA, SC) \quad \beta = \angle(SAB, SBC)$$
$$c = \angle(SA, SB) \quad \gamma = \angle(SAC, SBC)$$

Na úhly α, β, γ můžeme nahlížet také jako na úhel tečen ortodrom procházejích příslušným bodem. Vlastnosti sférického trojúhelníka:

$$a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in (0, \pi)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \varepsilon$$

ε - sférický exces

Základní věty sférické trigonometrie

Sinová věta

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}$$

Kosinová věta pro strany

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \; sinc \cos\alpha$$

$+$cyklická záměna

Kosinová věta pro úhly

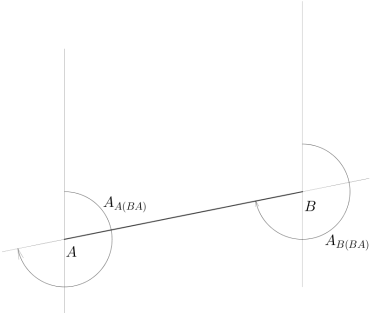
$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$$

$+$cyklická záměna

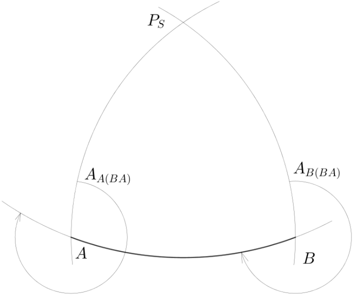
Sférická geometrie aplikovaná na zeměkouli

Pomáhá nám řešit vztah mezi **dvěma** body na zeměkouli. . . . **dva** body a **tri**gonometrie? Jak to jde dohromady? Jako třetí bod nám poslouží severní (nebo jižní) pól.
Pro řešení úloh na zeměkouli potřebujem vědět co to je **azimut** v bodě A na bod B značíme ho A_B.
Je to orientovaný úhel mezi mezi rovinou poledníku procházejícím bodem A a rovinou ortodromy procházející body A a B. Opět na tento azimut můžeme nahlížet jako na úhel mezi tečnami v bodě A. Tečnou k poledníku a tečnou k ortodromě procházející body A a B.
Délka části ortodromy mezi body A a B (označovat ji budeme l **není** strana c sférického trojúhelníka).

Azimut v rovině/na kouli

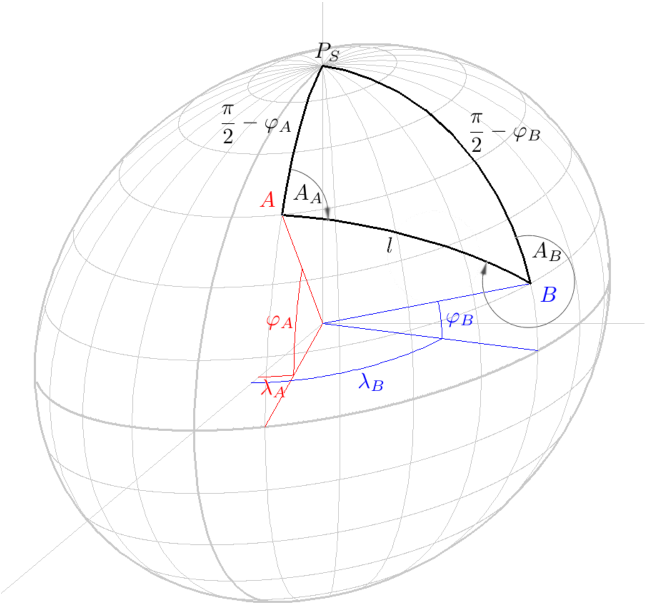


$$A_{A(BA)} = A_{B(BA)}$$

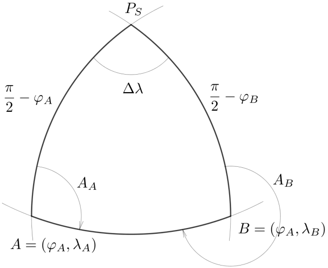


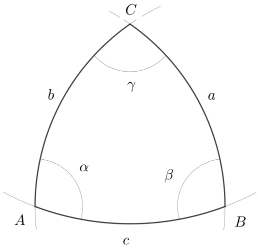
$$A_{A(BA)} \neq A_{B(BA)}$$

Sférický trojúhelník na zeměkouli



Přechod na jednotkovou kulovou plochu





$\gamma = |\Delta\lambda| = |\lambda_B - \lambda_A|$

$\alpha = A_A$	$\beta = 2\pi - A_B$	pro $\Delta\lambda > 0$
$\alpha = 2\pi - A_A$	$\beta = A_B$	pro $\Delta\lambda < 0$

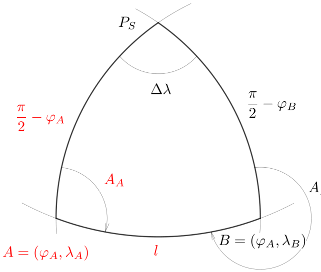
$a = \frac{\pi}{2} - \varphi_B$

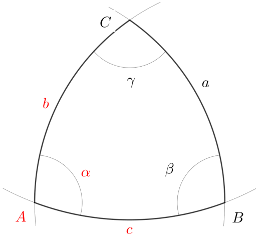
$b = \frac{\pi}{2} - \varphi_A$

$c = \frac{l}{R}$

1.základní geodetická úloha

znám: $\varphi_A,\ \lambda_A,\ A_A,\ l$
chci spočítat: $\varphi_B,\ \lambda_B,\ A_B$





- Kosinová věta pro úhel: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$
  $a = \cos^{-1}(\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha)$
- Sinová věta: $\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}$
  $\gamma = \sin^{-1}(\frac{\sin(c)\sin(\alpha)}{\sin(a)})$ $\beta = \sin^{-1}(\frac{\sin(b)\sin(\alpha)}{\sin(a)})$
- $\varphi_B = \frac{\pi}{2} - a,\ \lambda_B = \lambda_A + \gamma,\ A_B = 2\pi - \beta$ (pro $\alpha < \pi$)
  $\varphi_B = \frac{\pi}{2} - a,\ \lambda_B = \lambda_A - \gamma,\ A_B = \beta$ (pro $\alpha > \pi$)

1.základní geodetická úloha

$$R = 6\ 378\ 000 m$$
$$\varphi_A = 40^\circ 30' 5'' = 49.5013\overline{8}^\circ \qquad = arc\ 0.8639622204212486$$
$$\lambda_A = 15^\circ \qquad = arc\ 0.2617993877991494$$
$$l = 132\ 068.643 m$$
$$A_A = 32^\circ 25' 25.41'' = 32.423725\overline{4}^\circ \qquad = arc\ 0.5658862126007651$$

$$c = \frac{l}{R} = arc\ 0.02070674866729382$$
$$b = \frac{\pi}{2} - \varphi_A = arc\ 0.7068341063736480$$
$$A_A \in (0, \pi) \Rightarrow \alpha = A_A = 32^\circ 25' 25.41'' = arc\ 0.5658862126007651$$
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha = arc\ 0.5658862126007651$$
$$a = \cos^{-1}(\cos a) = arc\ 0.6894292950146127$$
$$\gamma = \sin^{-1}(\sin c \sin \alpha / \sin a) = arc\ 0.01745329196015884 = 0.9999999679267135^\circ \doteq 1^\circ$$
$$\varphi_B = \frac{\pi}{2} - a = arc\ 0.8813670317802839 = 50.49861112298296^\circ = 50^\circ 29' 55''$$
$$A_A \in (0, \pi) \Rightarrow \lambda_B = \lambda_A + \gamma = 16^\circ$$
$$\beta = \sin^{-1}(\sin b \sin \alpha / \sin a) = arc\ 0.5792568564258919 = 33.18897312721909^\circ = 33^\circ 11' 20.3''$$

1.základní geodetická úloha

$$
\begin{aligned}
R &= 6\ 378\ 000 m \\
\varphi_A &= 40^\circ 30' 5'' = 49.5013\overline{8}^\circ && = arc\ 0.8639622204212486 \\
\lambda_A &= 15^\circ && = arc\ 0.2617993877991494 \\
l &= 132\ 068.643 m \\
A_A &= 32^\circ 25' 25.41'' = 32.423725\overline{4}^\circ && = arc\ 0.5658862126007651
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{l}{R} = arc\ 0.02070674866729382 \\
b &= \frac{\pi}{2} - \varphi_A = arc\ 0.7068341063736480 \\
A_A \in (0, \pi) \Rightarrow \alpha &= A_A = 32^\circ 25' 25.41'' = arc\ 0.5658862126007651 \\
\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha = arc\ 0.5658862126007651 \\
a &= \cos^{-1}(\cos a) = arc\ 0.6894292950146127 \\
\gamma &= \sin^{-1}(\sin c \sin \alpha / \sin a) = arc\ 0.01745329196015884 = 0.9999999679267135^\circ \doteq 1^\circ \\
\varphi_B &= \frac{\pi}{2} - a = arc\ 0.8813670317802839 = 50.49861112298296^\circ = 50^\circ 29' 55'' \\
A_A \in (0, \pi) \Rightarrow \lambda_B &= \lambda_A + \gamma = 16^\circ \\
\beta &= \sin^{-1}(\sin b \sin \alpha / \sin a) = arc\ 0.5792568564258919 = 33.18897312721909^\circ = 33^\circ 11' 20.3''
\end{aligned}
$$

1.základní geodetická úloha

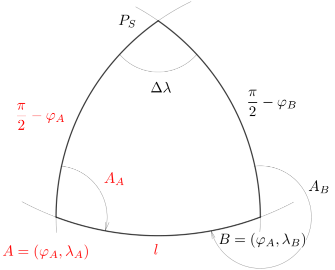
. . . součet vnitřních úhlů?

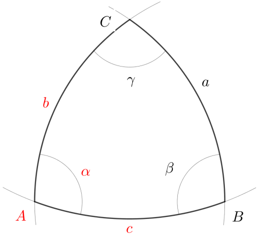
$$\alpha+\beta+\gamma \doteq 66^\circ \text{ } vs. \text{ } \alpha+\beta+\gamma=\pi+\varepsilon$$

to asi není dobře . . . kde jsme (jsem) udělal chybu
Jaký je obor hodnot $\sin^{-1}\delta$ . . . $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$
Jaký je obor hodnot $\cos^{-1}\delta$ . . . $\langle 0, \pi\rangle$
γ i β můžeme vypočítat pomocí Kosinové věty pro stranu:
Zde nám už nic nehrozí vnitřní úhly trojúhelníku jsou menší než π

1.základní geodetická úloha

znám: $\varphi_A,\ \lambda_A,\ A_A,\ l$
chci spočítat: $\varphi_B,\ \lambda_B,\ A_B$





- Kosinová věta pro stranu: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$
  $a = \cos^{-1}(\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha)$
- Kosinová věta pro stranu:
  $\cos \gamma = (\cos c - \cos a \cos b)/(\sin a \sin b)$
  $\gamma = \cos^{-1}(\cos c - \cos a \cos b)/(\sin a \sin b)$
  $\beta = \cos^{-1}(\cos b - \cos a \cos c)/(\sin a \sin c)$

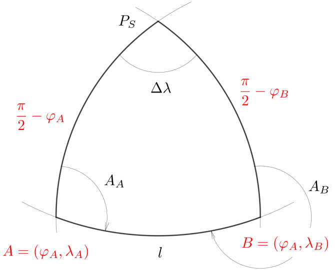
1.základní geodetická úloha

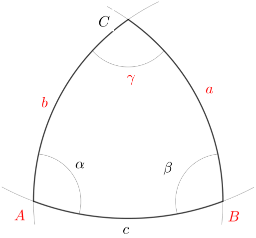
$$
\begin{aligned}
R &= 6\ 378\ 000 m \\
\varphi_A &= 40^\circ 30' 5'' = 49.5013\bar{8}^\circ && = arc\ 0.8639622204212486 \\
\lambda_A &= 15^\circ && = arc\ 0.2617993877991494 \\
l &= 132\ 068.643 m \\
A_A &= 32^\circ 25' 25.41'' = 32.423725\bar{4}^\circ && = arc\ 0.5658862126007651
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{l}{R} = arc\ 0.02070674866729382 \\
b &= \frac{\pi}{2} - \varphi_A = arc\ 0.7068341063736480 \\
A_A \in (0, \pi) \Rightarrow \alpha &= A_A = arc\ 0.5658862126007651 \\
\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha = arc\ 0.5658862126007651 \\
a &= \cos^{-1}(\cos a) = arc\ 0.6894292950146127 \\
\cos \gamma &= (\cos c - \cos a \cos b) / \sin a \sin b = 0.9998476951661606 \\
\gamma &= \cos^{-1}(\cos \gamma) = arc\ 0.01745329196015884 = 0.9999999679267135^\circ \doteq 1^\circ \\
\varphi_B &= \frac{\pi}{2} - a = arc\ 0.8813670317802839 = 50.49861112298296^\circ = 50^\circ 29' 55'' \\
A_A \in (0, \pi) \Rightarrow \lambda_B &= \lambda_A + \gamma = 16^\circ \\
\sin \beta &= \sin b \sin \alpha / \sin a = 0.01745240587758431 \\
\cos \beta &= (\cos b - \cos a \cos c) / \sin a \sin c = -0.8368696793713599 \\
\beta &= \cos^{-1}(\cos \beta) = arc\ 2.562335797163878 \\
A_B &= 2\pi - \beta = arc\ 3.720849510015708 = 213^\circ 11' 20.3''
\end{aligned}
$$

2.základní geodetická úloha

znám: $\varphi_A, \; \lambda_A, \; \varphi_B, \; \lambda_B, \; l$
chci spočítat: $l, \; A_A, \; A_B$





- Kosinová věta pro stranu: $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$
  $c = \cos^{-1}(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma)$
- Kosinová věta pro stranu:
  $\cos \beta = (\cos b - \cos a \cos c)/(\sin a \sin c)$
  $\beta = \cos^{-1}(\cos b - \cos a \cos c)/(\sin a \sin c)$
  $\alpha = \cos^{-1}(\cos a - \cos b \cos c)/(\sin b \sin c)$

Z Cádizu na Bahamy (radíme Kryštofu Kolumbovi)

Vyplul 3.8.1492 ze Sevily (resp. z Cádizu), 6.září doplul na Kanárské ostrovy a 12.října na Bahamy. 13.ledna vyplul z dnešní Kuby a 4.března 1493 doplul do Lisabonu a 15.března zpět do Španělska.

Cádiz: $\varphi_A = 36^\circ 31' 59''$ $\lambda_A = -6^\circ 17' 52''$ Bahamy: $\varphi_B = 24^\circ 41' 51''$ $\lambda_B = -77^\circ 48' 34''$

Cádiz-Bahamy - 2.základní geodetická úloha

$$R = 6\ 378\ 000m$$

Cádiz:

$$\varphi_A = 36^\circ 31' 59'' = arc 0.6376221052584506$$

$$\lambda_A = -6^\circ 17' 52'' = arc\ -0.1099169577811540$$

Bahamy:

$$\varphi_B = 24^\circ 41' 51'' = arc\ 0.4310526920112995$$

$$\lambda_B = -77^\circ 48' 34'' = arc\ -1.358030994703165$$

$$a = \frac{\pi}{2} - \varphi_B = arc\ 1.139743634783597 \qquad b = \frac{\pi}{2} - \varphi_A = arc\ 0.9331742215364459$$

$$\Delta\lambda = -71^\circ 30' 42''$$

$$\gamma = |\Delta\lambda| = arc\ 1.248114036922011$$

$$c = \cos^{-1}(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma) = arc\ 1.069887790$$

$$l = cR \doteq 6\ 823km$$

$$\beta = \cos^{-1}(\cos b - \cos a \cos c)/(\sin a \sin c) = arc\ 1.052722647828321$$

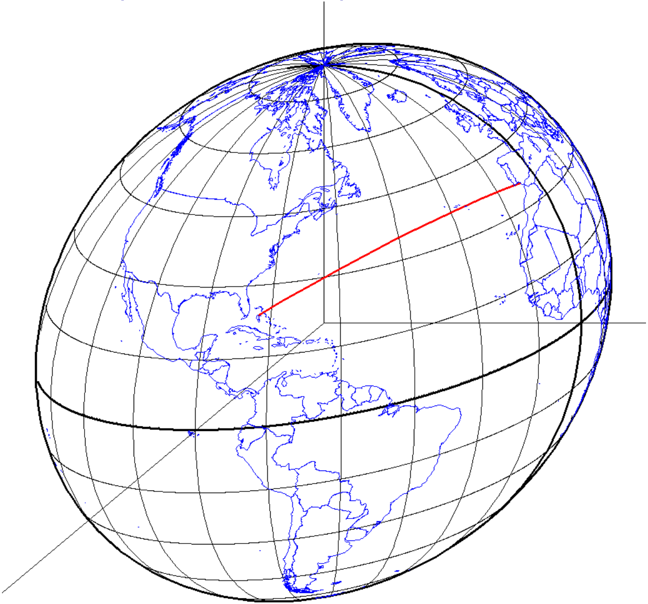
$$\alpha = \cos^{-1}(\cos a - \cos b \cos c)/(\sin b \sin c) = arc\ 1.382457936462283$$

$$\Delta\lambda < 0 \Rightarrow$$

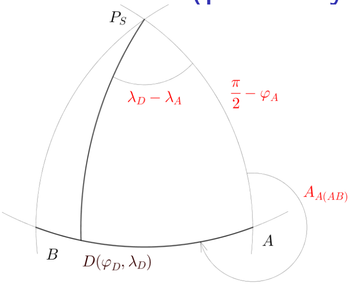
$$A_A = 2\pi - \alpha = 280^\circ 47' 27.6'' \text{ tj. } A_{A(AB)} = 280^\circ 47' 27.6''$$

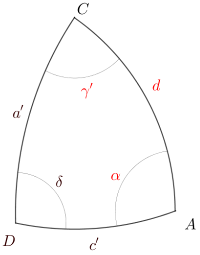
$$A_B = \beta = 60^\circ 18' 59.6'' \text{ tj. } A_{B(AB)} = \beta + \pi = 240^\circ 18' 59.6''$$

Cádiz-Bahamy (po ortodromě)



Body na ortodromě (průsečíky s poledníkem λ_D)





$$\gamma' = |\lambda_D - \lambda_A|, \ \alpha = 2\pi - A_{A(AB)}, \ d = \frac{\pi}{2} - \varphi_A,$$

Kosinova věta pro úhel, sinova věta

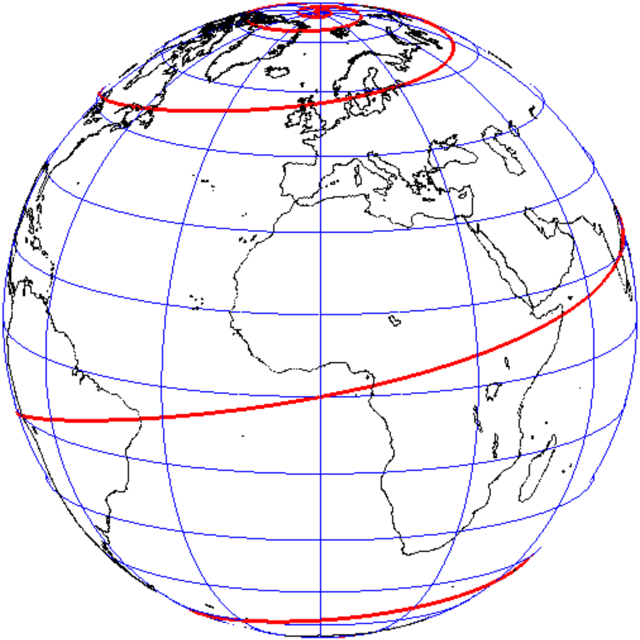
$$\cos\delta = -\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma'\cos d$$

$$\sin a' = \frac{\sin\alpha\sin d}{\sin\delta}$$

$$\varphi_D = \frac{\pi}{2} - a'$$

Navigace na Zemi

$A_{A(AB)} = 280^\circ 47' 27.6''$ ale $A_{B(AB)} = 240^\circ 18' 59.6''$
To znamená, že bychom museli během cesty plynule měnit kurz.
Což je dost obtížné ...
Proto je vhodnější pohybovat se po loxodromě.
Loxodroma je křivka na kulové ploše, která má konstantní azimut.



Vzdálenost po loxodromě, azimut loxodromy

- Vzálenost
  Na stejné rovnoběžce $l = R|\lambda_B - \lambda_A| \cos\varphi_A$
  (tj. loxodroma je tato rovnoběžka)
  Obecná poloha $l = R\frac{|\varphi_B - \varphi_A|}{\cos A}$
- Azimut

$$\tan A = \frac{\lambda_B - \lambda_A}{\tanh^{-1}(\sin\varphi_B) - \tanh^{-1}(\sin\varphi_A)}$$

Pro Cádiz-Bahamy:

loxodroma		ortodroma
$l = 6955km$	vs.	$6823km$
$A = 258^\circ 4' 55''$	vs.	$280^\circ 47' 28''$

Body na Loxodromě

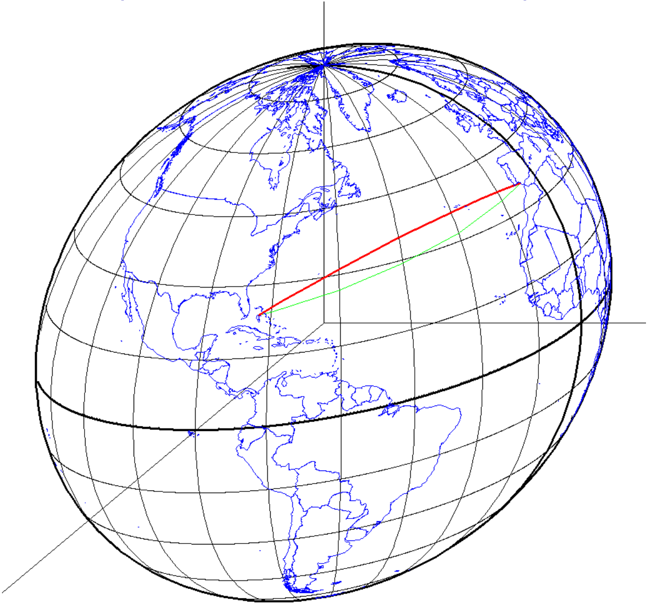
- Znám φ_A, λ_A, φ_B, A - zjišťuji λ_B

$$\lambda_B = \varphi_A(\ln\tan(\frac{\varphi_B}{2} + \frac{\pi}{4}) - \ln\tan(\frac{\varphi_A}{2} + \frac{\pi}{4}))\tan A$$

- Znám φ_A, λ_A, λ_B, A - zjišťuji φ_B

$$\varphi_B = 2\tan^{-1}(\tan(\frac{\varphi_A}{2} + \frac{\pi}{4})\exp(\frac{\lambda_B - \lambda_A}{\tan A})) - \frac{\pi}{2}$$

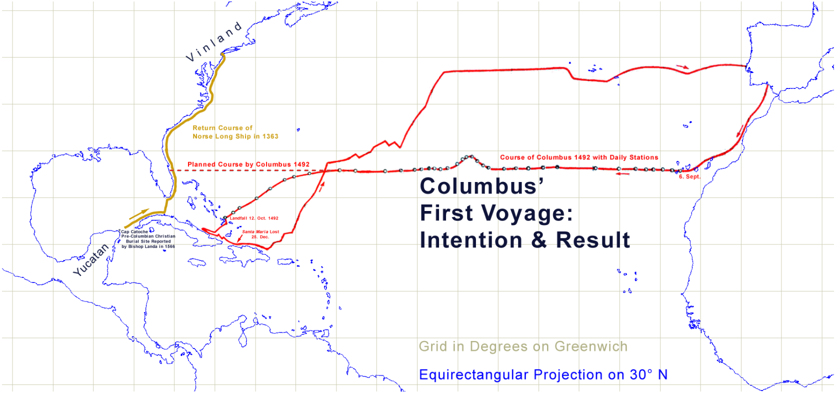
Cádiz-Bahamy (po ortodromě, loxodromě)



ortodroma/loxodroma

	Ortodroma		Loxodroma	
λ	φ	*azimut*	φ	*azimut*
$-6^\circ 17'$	$36^\circ 32'$	$280^\circ 47'$	$36^\circ 32'$	$258^\circ 5'$
-15°	$37^\circ 32'$	$275^\circ 32'$	$35^\circ 10'$	$258^\circ 5'$
-30°	$37^\circ 44'$	$266^\circ 21'$	$32^\circ 46'$	$258^\circ 5'$
-45°	$36^\circ 00'$	$257^\circ 19'$	$30^\circ 18'$	$258^\circ 5'$
-60°	$32^\circ 12'$	$248^\circ 52'$	$27^\circ 46'$	$258^\circ 5'$
-75°	$26^\circ 06'$	$241^\circ 31'$	$25^\circ 11'$	$258^\circ 5'$
$-77^\circ 48'$	$24^\circ 42'$	$240^\circ 19'$	$24^\circ 42'$	$258^\circ 5'$

Kudy plul Kryštof Kolumbus (a proč?)



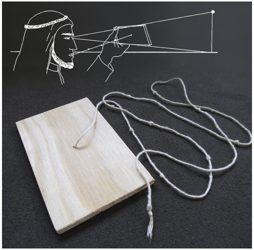
wikimedia.org

Jak určit svou polohu na zemi

Dnes je to snadné, téměř všichni nosíme v kapse mobilní telefon se zabudovaným GPS čipem tj. kdekoliv na zemi můžeme určit svou polohu s přesností na 2-3m. Tato možnost je pro širokou veřejnost "otevřena" až od roku 1994 - v této době se však cena GPS přístrojů pohybovala v desítkách tisíc korun. Já jsem si svou první GPS Garmin pořídil v roce 2009 za cca 9.000,-. Dnes je možné pořídit telefon s GPS v řádu jednotek tisíců korun.
Jak to ale bylo v minulosti (cca do dvacátých let 20.stol)?:

Určení zeměpisné šířky:

KAMAL



Čas. vesmír

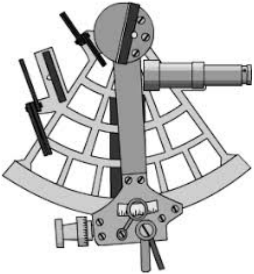
cca od 9.stol. Persie

Jakubova hůl

wiki.org

cca 11. stol. Čína, 14.stol. Evropa

Sextant



wiki.org

18.stol. Evropa

Určení zeměpisné délky

Toto byl dlouho oříšek. K určení zeměpisné délky potřebuji znát místní čas a zároveň čas na zvoleném nulovém poledníku. Místní čas mohu určit pomocí slunce. Čas v nulovém poledníku mohu zjistit dvěma cestami - buďto si ssebou vezu tento čas "zakonzervovaný" (tj. potřebuji přesné hodiny - lodní chronometr) ane.bo zjistím tento čas "na dálku" (pomocí radiových vln). Lodní chronometr byl vynalezen v roce 1731 Johnem Harrisonem, ale jeho cena byla příliš vysoká. V praxi se používal až od poloviny 19.století. Radiová komunikace je otázka 20.-30.let 20.století

Další možnosti určování polohy

Azimut:
Pomocí magnetického (cca 9.stol Čína) nebo gyroskopického kompasu (začátek 20.stolení Evropa, Amerika)

wikimedia.org

Další možnosti určování polohy

Rychlost:
Pomocí tzv. logu - cívka na které je navinut provázek s uzlíky na konci je uvázán malý plovák, který se táhl za lodí. Rychlost se určovala podle rychlosti odvíjení - odtud měření rychlosti lodí na uzly. Rychlost jednoho uzlu odpovídá $1852 m/hod$

wikimedia.org

Zdroje

- Vykutil Josef: Vyšší geodézie
- Hiawtha Bray: Od kompasu k GPS
- Tomáš Bayer: https://web.natur.cuni.cz/~bayertom/images/courses/mmk/mk2.pdf
- Martina Polaufová: https://otik.zcu.cz/bitstream/11025/5572/1/Diplomova prace.pdf
- Čas. Vesmír:
  https://vesmir.cz/cz/on-line-clanky/2018/10/velke-umeni-astronavigace-od-astrolabu-po-sextant.html
- Čas. Vesmír: 10/2018
- WiKipedia: https://cs.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System
  https://cs.wikipedia.org/wiki/Ferrský_poledník
  https://cs.wikipedia.org/wiki/Základní_poledník
  https://en.wikipedia.org/wiki/Kamal_(navigation)
  https://cs.wikipedia.org/wiki/Gyrokompas
  https://en.wikipedia.org/wiki/Marine_chronometer
  https://cs.wikipedia.org/wiki/Jakubova_hůl
  https://cs.wikipedia.org/wiki/Loxodroma
  https://cs.wikipedia.org/wiki/Ortodroma
- Google maps: https://maps.google.com
- Mapy CZ: https://mapy.cz

ad 2.základní geodetická úloha

Máme dva body na stejné rovnoběžce (např. $\varphi_A = \varphi_B = 50^\circ$)

$$\lambda_A = 15^\circ, \; \lambda_B = 30^\circ$$

Jaká je vzdálenost těchto bodů po ortodromě a po loxodromě (loxodroma je v tomto případě daná rovnoběžka)

Délka po ortodromě

Máme tedy sférický trojúhelník $A, \; B, \; P_S$

$$a = b = 40^\circ \doteq arc\ 0.69813, \; \gamma = 15^\circ \doteq arc\ 0.26180$$

$$c \doteq arc\ 0.168 \Rightarrow l_o = cR = 1.071.495m$$

Délka po loxodromě

$$l_l = R|\gamma| \cos \varphi_A \doteq 1.073.298$$

Rozdíl vzdálenosti po ortodromě a po loxodromě

$$l_l - l_o = 1.803m$$

Zajímavosti

Měření obvodu Země: Eratosthenés z Kyrény 262-272 B.C.
Délka oblouku mezi Asuánem (blízko obratníku raka) a Syenou
Vypočetl poledníkový obvod Země na 252.000 *stadi* tj. cca 40.000 km $vs.$40.007 km

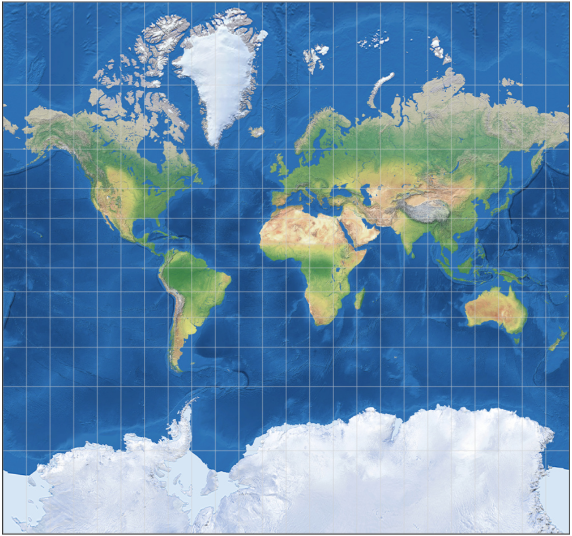
Zajímavosti

Mapa světa - cca 150 A.D. - Klaudios Ptolemaios

Zajímavosti

Merkátorovo zobrazení (nezkreslují se úhly tzv. Konformní zobrazení)

Nezkreslují se úhly $\Rightarrow$ loxodroma se zobrazí jako úsečka



Zajímavosti

Gnomonické zobrazení

Ortodroma se zobrazí jako úsečka