KONSTRUKČNÍ ÚLOHY

Vlasta Moravcová

Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze

&

Gymnázium Na Pražačce
Nad Ohradou 23
Praha 3

Letní škola geometrie 2018,
4. července 2018, Česká Lípa

Obsah

- Typy planimetrických kostrukčních úloh
- Metody řešení konstrukčních úloh
- Části konstrukční úlohy
- Konvence směru popisu útvarů
- Nepřesnosti v zápisu konstrukční úlohy
- Počet řešení konstrukční úlohy

Co je to „konstrukční úloha“?

Je to úloha, v níž je požadováno sestrojení geometrického útvaru (všech geometrických útvarů) splňujícího dané podmínky.

Podstatou není samotná konstrukce, ale deduktivní úvaha vedoucí k řešení úlohy (nalezení ideální posloupnosti vhodných elementárních kroků).

Eukleidovská konstrukce = konstrukce „pravítkem a kružítkem“.

Dělení planimetrických konstrukčních úloh

a) dle vstupních předpokladů:

- polohové
- nepolohové

b) dle volnosti zadání:

- konkrétní zadání (bez parametrů)
- s parametrem (popřípadě s více parametry)

Typ konstrukční úlohy může mít zásadní vliv na počet řešení (a), resp. části řešení (b).

Polohová vs. nepolohová úloha

Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže $a = 4\,\mathrm{cm}$, $b = 5\,\mathrm{cm}$, $c = 6\,\mathrm{cm}$.

Je dána úsečka AB délky $6\,\mathrm{cm}$. Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže $a = 4\,\mathrm{cm}$, $b = 5\,\mathrm{cm}$.

Je dán bod A. Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže $a = 4\,\mathrm{cm}$, $b = 5\,\mathrm{cm}$, $c = 6\,\mathrm{cm}$.

Úloha s parametrem vs. bez parametru

Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže $a = 4\,\mathrm{cm}$, $b = 5\,\mathrm{cm}$, $c = 6\,\mathrm{cm}$.

Diskutujte konstrukci trojúhelníku ABC v závislosti na obecně zadané délce c, jestliže $a = 4\,\mathrm{cm}$, $b = 5\,\mathrm{cm}$.

Metody řešení konstrukčních úloh

- metoda množin bodů dané vlastnosti
- metoda geometrického zobrazení
- algebraická metoda

- obvykle užití kombinace metod

Metody řešení – množiny bodů dané vlastnosti

Nejběžnější:

- kružnice
- přímka, polopřímka (rameno úhlu)
- ekvidistanta přímky
- Thalétova kružnice
- kružnicový oblouk (množina bodů, z nichž je úsečka vidět pod jistým úhlem)

Metody řešení – geometrická zobrazení

- úlohy cílené na užití zobrazení
- středová souměrnost
  - trojúhelník zadaný těžnicí
- osová souměrnost
  - v zadání součet/rozdíl délek stran
- posunutí
  - rovnoběžníky, lichoběžníky
- stejnolehlost
  - zadány poměry délek
- Apolloniovy úlohy

Metody řešení – algebraický výpočet

- dopočítání velikosti úhlu, délky strany (je-li úloha konstrukční, mělo by být řešeno skutečně konstrukčně)
- konstrukce úsečky iracionální délky (Pýthagorova věta, Eukleidovy věty)
- konstrukce útvaru o daném obsahu
- konstrukce úseček o délkách vyjádřených v závislosti na délkách známých úseček pomocí algebraického výrazu ($x = \frac{ab}{c}$, $x = a\sqrt{2}$, $x = 3\sqrt{a^2 - b^2}$, $x = \sqrt{ab}$ aj.)

Samostatnou kapitolou jsou úlohy, které nelze řešit eukleidovsky (rektifikace kružnice, kvadratura kruhu, trisekce úhlu, $ab\varrho$, ...).

Části konkrétně zadané konstrukční úlohy

- **rozbor**
  - náčrt
  - rozmyšlení postupu (uvedení hlavních myšlenek, popis získání neznámých vrcholů)
- **konstrukce a její zápis**
  - není podstatné, co dříve
  - v konstrukci musí být všechna různá řešení
  - v zápisu mohou být rozepsána různá řešení (lze, pokud konstrukce předchází zápisu)
  - zápis je jednoznačně zapsaný algoritmus
- **(zkouška)**
- **počet řešení (výpis řešení)**

Je třeba zohlednit věk a pokročilost žáků!!!

Části konstrukční úlohy s parametrem

- **rozbor**
- **(konstrukce a zápis)**
- **diskuse** počtu řešení

Diskutujte konstrukci trojúhelníku ABC v závislosti na obecně zadané **kladné** délce c, jestliže $a = 4\,\mathrm{cm}$, $b = 5\,\mathrm{cm}$.

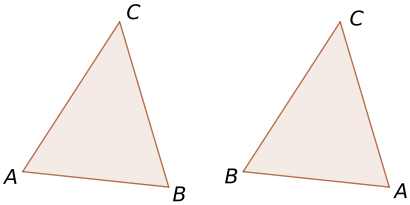
$$5 < 4 + c \ \wedge \ c < 5 + 4 \ \Rightarrow \ c \in (1; 9)$$

$c \in (1 \text{ cm}; 9 \text{ cm}) \ldots 1$ řešení

$c \in (0 \text{ cm}; 1 \text{ cm}\rangle \cup \langle 9 \text{ cm}; \infty \text{ cm}) \ldots$ nemá řešení

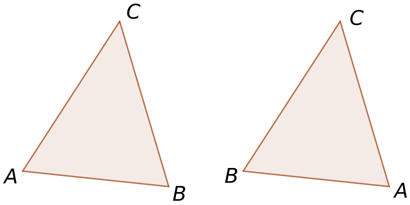
Konvence směru popisu vrcholů

- jen proti směru pohybu hodinových ručiček?



Konvence směru popisu vrcholů

- jen proti směru pohybu hodinových ručiček?



NE

Vede k problémům s určením počtu řešení, popisem stěn těles, konstrukcím v deskriptivní geometrii.

Co třeba s popisem obrazu útvaru, který vznikne osovou souměrností?

Zápis konstrukce

- obvyklá struktura
- **symbolika**
  - $p;\, p \parallel a \wedge p \in A$
  - $S;\ \ S = \frac{1}{2}|AB|$
  - $S;\ \ |AS| = |SB|$
  - $AB;\, c = 4\,\text{cm}$
  - $R;\, R \in k \cap |AB|$
- výpis **více řešení**
  - $C_1,\ C_2;\ C_1,\ C_2 \in k \cap l$
  - $\Delta ABC_1;\ \ \Delta ABC_2$
- kroky připouštějící řešení, která nevyhovují zadání

Počet řešení

Nepolohová úloha

- nezáleží na umístění útvaru
- shodná řešení počítáme jako jedno řešení (shodná ve smyslu shodných odpovídajících si stran)

Polohová úloha

- záleží na umístění útvaru
- shodná řešení lišící se umístěním

počet řešení p.ú. $\geq$ počet řešení n.ú.

Počet řešení „v polorovině?“

- omyl základoškolských učebnic
- popírá princip vět *sss*, *sus*, *usu*, *Ssu*
- vede k nevhodnému návyku hledat řešení jen v jedné polorovině – na ZŠ nevadí, na SŠ se objeví úlohy, kde pak žák „ztratí“ řešení

Úloha 1

Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže $b = 7\,\text{cm}$, $t_a = 6\,\text{cm}$, $t_c = 9\,\text{cm}$.

Rozbor: Začneme trojúhelníkem ATC (sss), sestrojíme krajní body S_a, S_c těžnic t_a, t_c, potom B je průsečíkem polopřímek AS_c, CS_a.

Zápis:

1) AC; $|AC| = 7\,\text{cm}$
2) k_1; $k_1(A; 4\,\text{cm})$
3) k_2; $k_2(C; 6\,\text{cm})$
4) T; $T \in k_1 \cap k_2$
5) S_a; $S_a \in \rightarrow AT \wedge |AS_a| = 6\,\text{cm}$
6) S_c; $S_c \in \rightarrow CT \wedge |CS_c| = 9\,\text{cm}$
7) B; $B \in \rightarrow AS_c \cap \rightarrow CS_a$
8) ΔABC

Úloha má 1 řešení: ΔABC

Úloha 2

Je dána úsečka AB délky 5 cm, sestrojte všechny trojúhelníky ABC, jestliže $v_c = 3\,\text{cm}$, $\gamma = 75°$.

Rozbor: AB dána. Bod C je průsečíkem množiny bodů, z nichž je AB vidět pod úhlem 75°, a rovnoběžky s AB vzdálené 3 cm od AB.

Zápis:

1) $AB;\ |AB| = 5\,\text{cm}$
2) $p;\ p \parallel AB\ \wedge |p, AB| = 3\,\text{cm}$
3) $M;\ M = \{X; |\sphericalangle AXB| = 75°\}$
4) $C;\ C \in p \cap M$
5) ΔABC

Úloha má 4 řešení: ΔABC_1, ΔABC_2, ΔABC_3, ΔABC_4

Lichoběžník – kde je chyba?

Sestrojte lichoběžník $ABCD$ se základnou AB, jestliže $a = 7\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$, $d = 4\,\text{cm}$.

Rozbor: Využijeme posunutí úsečky AD o vektor DC, obraz bodu A označíme P. Sestrojíme trojúhelník PBC (sss), ...

Zápis:

1) ΔPBC (sss): $|PB| = 2\,\text{cm}$, $|BC| = 3\,\text{cm}$, $|PC| = 4\,\text{cm}$
2) A; $A \in\leftrightarrow BP \;\wedge\; |PA| = 5\,\text{cm}$
3) p; $p \parallel AB \;\wedge\; C \in p$
4) D; $D \in p \wedge\; |CD| = 5\,\text{cm}$
5) lichoběžník $ABCD$

Počet řešení?

Počet řešení?

Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže $c = 7{,}5\,\mathrm{cm}$, $r = 4\,\mathrm{cm}$, $v_c = 2\,\mathrm{cm}$.

a) nepolohově
b) je dána AB
c) je dána kružnice opsaná a na ní bod A

Počet řešení?

Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže $a = 5\,\mathrm{cm}$, $c = 3{,}5\,\mathrm{cm}$, $v_a = 3\,\mathrm{cm}$.

a) je dána AB
b) je dána BC

Závěrem

- význam konstrukčních úloh
  - motorika
  - algoritmizace, analýza a syntéza problému
  - geometrická představivost
  - trpělivost
- volba obtížnosti a preciznost zápisu přiměřeně věku žáků
- různé metody pro zpestření
  - geometrický diktát (učitel $\rightsquigarrow$ žák, žák $\rightsquigarrow$ učitel, žák $\rightsquigarrow$ žák)
  - interakce ve dvojicích: konstrukce + zápis
- gradace obtížnosti
  - kombinace zadaných prvků
  - přidávání parametrů