Úlohy z pravděpodobnosti

Jakub Staněk

20. září, 2024

- Proč je pravděpodobnost na střední škole většinou pouhou aplikací kombinatoriky?

- Proč je pravděpodobnost na střední škole většinou pouhou aplikací kombinatoriky?
- Je to dobře?

Úloha o rozdělení sázky

Italský rukopis z r. 1380 (později řešil Fra Luca Paccioli [1445-1514] či Niccolo Tarlaglia [1499-1557], přičemž oba uvedli nesprávné řešení; dnes se traduje, že tuto úlohu do Itálie přinesli Arabové):

Úloha o rozdělení sázky

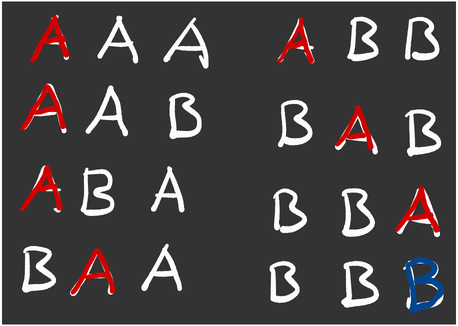
Italský rukopis z r. 1380 (později řešil Fra Luca Paccioli [1445-1514] či Niccolo Tarlaglia [1499-1557], přičemž oba uvedli nesprávné řešení; dnes se traduje, že tuto úlohu do Itálie přinesli Arabové):
Dva hráči (označíme je A a B) spolu hrají sérii partií. Výhru získá hráč, který jako první vyhraje šest partií. Pravděpodobnost vítězství v každé partii je pro oba hráče stejná, tedy $\frac{1}{2}$. Hra byla přerušena za stavu 5:3 ve prospěch hráče A. Jak si mají hráči rozdělit výhru?

Úloha o rozdělení sázky

Italský rukopis z r. 1380 (později řešil Fra Luca Paccioli [1445-1514] či Niccolo Tarlaglia [1499-1557], přičemž oba uvedli nesprávné řešení; dnes se traduje, že tuto úlohu do Itálie přinesli Arabové):
Dva hráči (označíme je A a B) spolu hrají sérii partií. Výhru získá hráč, který jako první vyhraje šest partií. Pravděpodobnost vítězství v každé partii je pro oba hráče stejná, tedy $\frac{1}{2}$. Hra byla přerušena za stavu 5:3 ve prospěch hráče A. Jak si mají hráči rozdělit výhru?

Řesení 1.

Budeme uvažovat další tři partie. Jelikož v sedmi z osmi možných výsledků vyhrává hráč A, tak je pravděpodobnost výhry hráče A $\frac{7}{8}$. Tedy výhru dělíme v poměru $7:1$ ve prospěch hráče A.

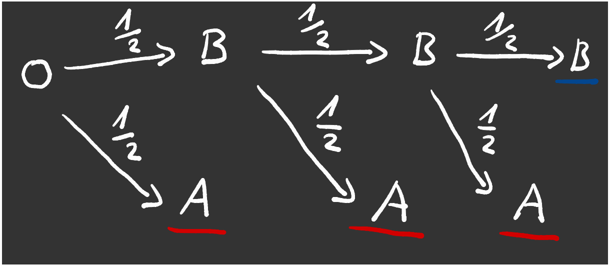


Úloha o rozdělení sázky - řesení 2.

Lze využít také pravděpodobnostního stromu. Předpokládejme, že by se série her dohrála až do rozhodnutí.

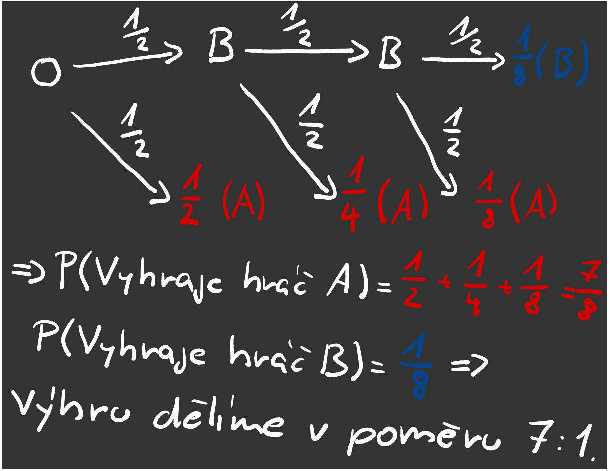
Úloha o rozdělení sázky - řesení 2.

Lze využít také pravděpodobnostního stromu. Předpokládejme, že by se série her dohrála až do rozhodnutí.



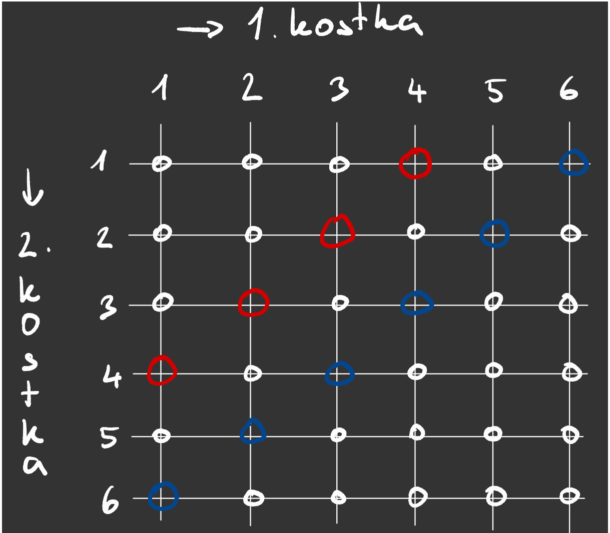
Úloha o rozdělení sázky - řesení 2.

Lze využít také pravděpodobnostního stromu. Předpokládejme, že by se série her dohrála až do rozhodnutí.



Házíme dvěma pravidelnými kostkami najednou, dokud nepadne součet 5 (výhra hráče A) nebo součet 7 (výhra hráče B). S jakou pravděpodobností padne dříve součet 5 než součet 7 (tedy vyhraje hráč A)?

Házíme dvěma pravidelnými kostkami najednou, dokud nepadne součet 5 (výhra hráče A) nebo součet 7 (výhra hráče B). S jakou pravděpodobností padne dříve součet 5 než součet 7 (tedy vyhraje hráč A)?



Řešení I.

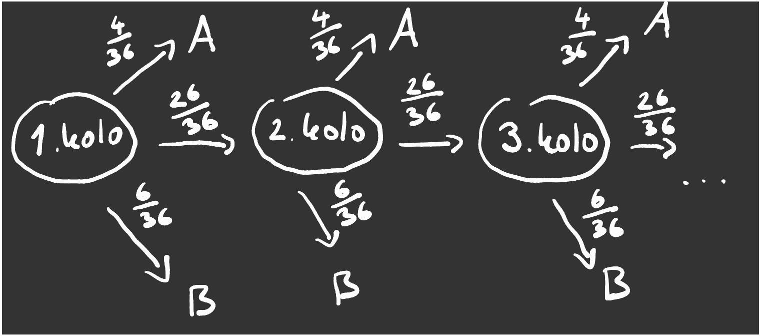
- Pravděpodobnost, že v prvním kole vyhraje hráč A, je $\frac{4}{36}$.

Řešení I.

- Pravděpodobnost, že v prvním kole vyhraje hráč A, je $\frac{4}{36}$.
- Pravděpodobnost, že v prvním kole vyhraje hráč B, je $\frac{6}{36}$.

Řešení I.

- Pravděpodobnost, že v prvním kole vyhraje hráč A, je $\frac{4}{36}$.
- Pravděpodobnost, že v prvním kole vyhraje hráč B, je $\frac{6}{36}$.



Řešení I.

Řešení I.

- Pravděpodobnost, že v i-tém kole vyhraje hráč A, je $\left(\frac{26}{36}\right)^{i-1} \cdot \frac{4}{36}$.

Řešení I.

- Pravděpodobnost, že v i-tém kole vyhraje hráč A, je $\left(\frac{26}{36}\right)^{i-1} \cdot \frac{4}{36}$.
- Pravděpodobnost, že v i-tém kole vyhraje hráč B, je $\left(\frac{26}{36}\right)^{i-1} \cdot \frac{6}{36}$.

Řešení I.

- Pravděpodobnost, že v i-tém kole vyhraje hráč A, je $\left(\frac{26}{36}\right)^{i-1} \cdot \frac{4}{36}$.
- Pravděpodobnost, že v i-tém kole vyhraje hráč B, je $\left(\frac{26}{36}\right)^{i-1} \cdot \frac{6}{36}$.
- Pravděpodobnost, že vyhraje hráč A, je tedy

$$\frac{4}{36} + \frac{26}{36} \cdot \frac{4}{36} + \left(\frac{26}{36}\right)^2 \cdot \frac{4}{36} + \ldots = \frac{4}{36} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^i = \frac{\frac{4}{36}}{1 - \frac{26}{36}} = \frac{4}{10}.$$

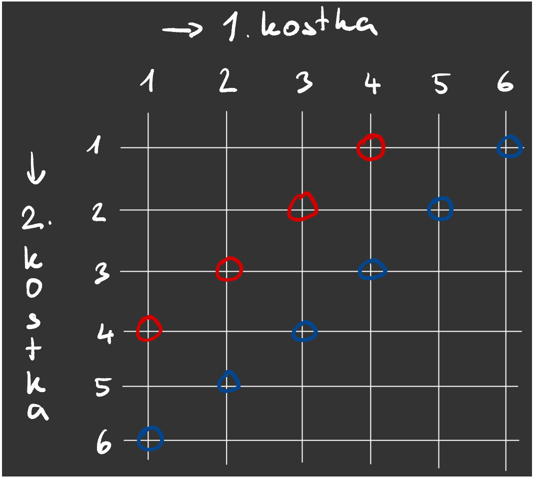
Řešení II.

Řešení II.

Zaměříme se na rozhodující kolo.

Řešení II.

Zaměříme se na rozhodující kolo.



Řešení II.

Pravděpodobnost, že v rozhodujícím kole vyhrál hráč A, je $\frac{4}{10}$.

Řešení II.

Pravděpodobnost, že v rozhodujícím kole vyhrál hráč A, je $\frac{4}{10}$.
Jde o koncept podmíněné pravděpodobnosti. Počítáme pravděpodobnost, že v daném kole vyhraje hráč A, za předpokladu, že je toto kolo poslední.

Řešení II.

Pravděpodobnost, že v rozhodujícím kole vyhrál hráč A, je $\frac{4}{10}$.
Jde o koncept podmíněné pravděpodobnosti. Počítáme pravděpodobnost, že v daném kole vyhraje hráč A, za předpokladu, že je toto kolo poslední. Tedy

$$P(\text{"v tomto kole vyhraje hráč A"} | \text{"toto kolo je poslední"}) =$$

$$= \frac{P(\text{"v tomto kole vyhraje hráč A a toto kolo je poslední"})}{P(\text{"toto kolo je poslední"})} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{4}{36} + \frac{6}{36}} = \frac{4}{10}.$$

Ruleta

Herní systém - Martingale

Herní systém - Martingale

- V prvním kole vsadíme 1$ na barvu. Pravděpodobnost výhry je $\frac{18}{37}$ (resp. $\frac{18}{38}$ v případě americké rulety).

Herní systém - Martingale

- V prvním kole vsadíme 1$ na barvu. Pravděpodobnost výhry je $\frac{18}{37}$ (resp. $\frac{18}{38}$ v případě americké rulety).
- Pokud nevyhrajeme, pak v dalším kole zdojnásobíme vsazenou částku. To opakujeme, dokud nevyhrajeme.

Herní systém - Martingale

- V prvním kole vsadíme 1$ na barvu. Pravděpodobnost výhry je $\frac{18}{37}$ (resp. $\frac{18}{38}$ v případě americké rulety).
- Pokud nevyhrajeme, pak v dalším kole zdojnásobíme vsazenou částku. To opakujeme, dokud nevyhrajeme.
- Po první výhře jsme v celkovém zisku 1$.

Herní systém - Martingale

- V prvním kole vsadíme 1$ na barvu. Pravděpodobnost výhry je $\frac{18}{37}$ (resp. $\frac{18}{38}$ v případě americké rulety).
- Pokud nevyhrajeme, pak v dalším kole zdojnásobíme vsazenou částku. To opakujeme, dokud nevyhrajeme.
- Po první výhře jsme v celkovém zisku 1$.
- Po výhře začínáme další cyklus s počáteční sázkou 1$.

Herní systém - Martingale

- V prvním kole vsadíme 1$ na barvu. Pravděpodobnost výhry je $\frac{18}{37}$ (resp. $\frac{18}{38}$ v případě americké rulety).
- Pokud nevyhrajeme, pak v dalším kole zdojnásobíme vsazenou částku. To opakujeme, dokud nevyhrajeme.
- Po první výhře jsme v celkovém zisku 1$.
- Po výhře začínáme další cyklus s počáteční sázkou 1$.

Uvažujme situaci, kdy v deseti kolech měli následující posloupnost výher (V) a proher (P): P,V,P,V,P,P,P,P,V,V.
V následující tabulce jsou uvedeny naše vklady a průbežné zisky.

Herní systém - Martingale

- V prvním kole vsadíme 1$ na barvu. Pravděpodobnost výhry je $\frac{18}{37}$ (resp. $\frac{18}{38}$ v případě americké rulety).
- Pokud nevyhrajeme, pak v dalším kole zdojnásobíme vsazenou částku. To opakujeme, dokud nevyhrajeme.
- Po první výhře jsme v celkovém zisku 1$.
- Po výhře začínáme další cyklus s počáteční sázkou 1$.

Uvažujme situaci, kdy v deseti kolech měli následující posloupnost výher (V) a proher (P): P,V,P,V,P,P,P,P,V,V.
V následující tabulce jsou uvedeny naše vklady a průběžné zisky.

kolo	*vklad*	*V/P*	*zisk*
1	1	*P*	-1
2	2	*V*	1
3	1	*P*	0
4	2	*V*	2
5	1	*P*	1
6	2	*P*	-1
7	4	*P*	-5
8	8	*P*	-13
9	16	*V*	3
10	1	*V*	4

Martingale

- T...doba čekání na další výhru.

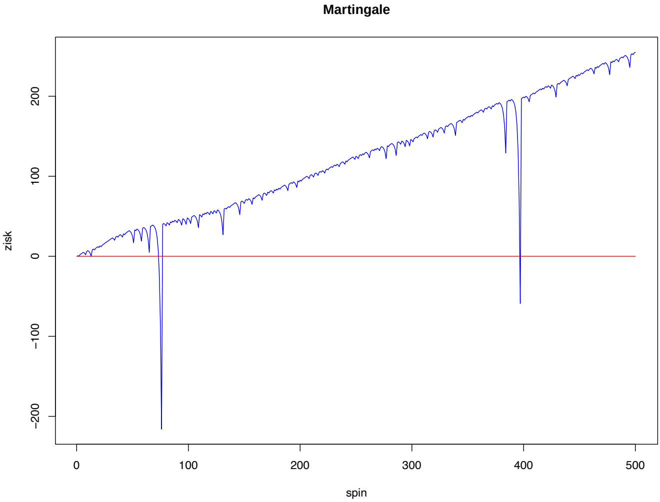
Martingale

- T...doba čekání na další výhru.
- $P(T = k) = p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, \ldots$, kde $p = \frac{18}{37}$ (francouzská ruleta), resp. $p = \frac{18}{38}$ (americká ruleta).

Martingale

- T...doba čekání na další výhru.
- $P(T=k)=p(1-p)^{k-1}, k=1,2,\dots$, kde $p=\frac{18}{37}$ (francouzská ruleta), resp. $p=\frac{18}{38}$ (americká ruleta).
- $$\mathbb{E}T=\sum_{k=1}^{\infty}kp(1-p)^{k-1}=-p\sum_{k=1}^{\infty}\left((1-p)^k\right)'=-p\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k\right)'$$
$$=-p\left(\frac{1-p}{p}\right)'=\frac{1}{p}.$$

Tedy $\mathbb{E}T=37/18=2.05556$.



Průběh jedné hry (500 kol).

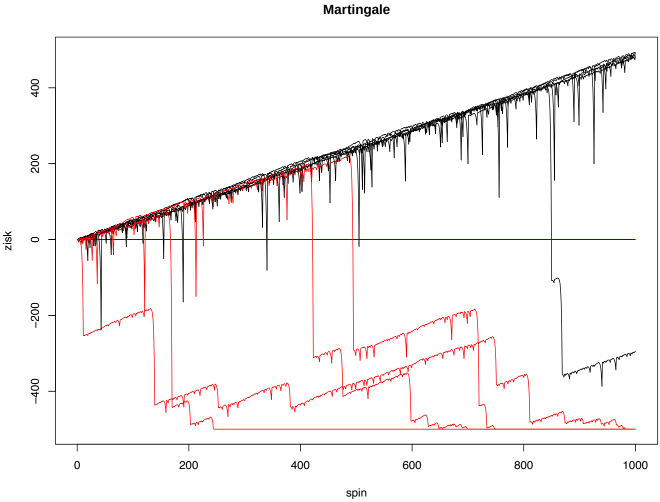
Martingale

- Z ... ztráta před další výhrou.

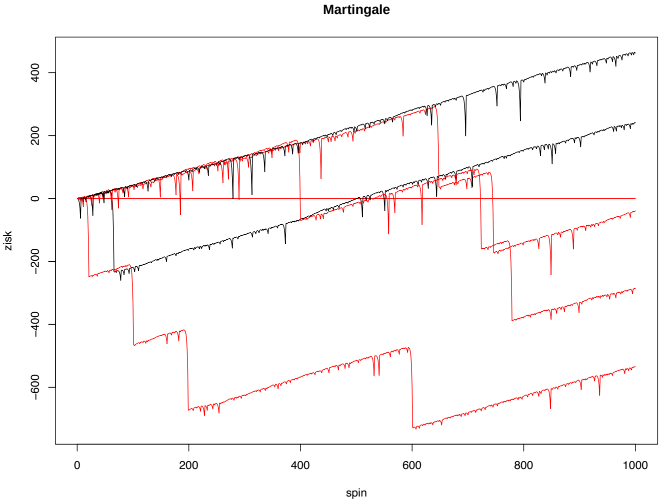
Martingale

- Z … ztráta před další výhrou.
- Pro $p \leq \frac{1}{2}$ je

$$\mathbb{E}Z = \sum_{k=0}^{\infty}(2^k - 1)p(1-p)^k = -1 + \sum_{k=0}^{\infty} 2^k p(1-p)^k$$
$$= -1 + p\sum_{k=0}^{\infty}(2(1-p))^k = \infty.$$



Průběh 10 her (1000 kol) při vstupním kapitálu 500$.



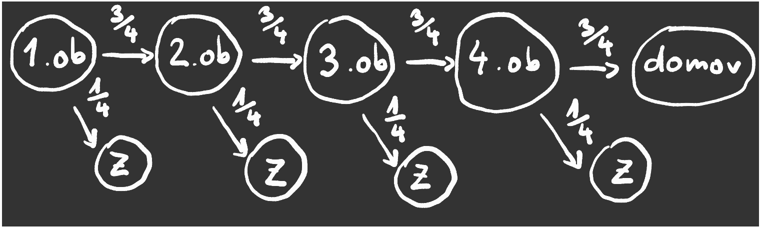
Průběh 5 her (1000 kol) při limitu pro maximální sázku 200$.

Roztržitý profesor

Profesor z matematicko-fyzikální fakulty se cestou z práce domů staví ve čtyřech knihkupectvích. Pokud profesor přišel do knihkupectví s deštníkem, pak je pravděpodobnost, že ho v tomto knihkupectví zapomene, rovna $\frac{1}{4}$. Pokud profesor vyrazil z práce s deštníkem a domů přišel bez deštníku, jaká je pravděpodobnost, že nechal deštník až v posledním knihkupectví?

Roztržitý profesor

Profesor z matematicko-fyzikální fakulty se cestou z práce domů staví ve čtyřech knihkupectvích. Pokud profesor přišel do knihkupectví s deštníkem, pak je pravděpodobnost, že ho v tomto knihkupectví zapomene, rovna $\frac{1}{4}$. Pokud profesor vyrazil z práce s deštníkem a domů přišel bez deštníku, jaká je pravděpodobnost, že nechal deštník až v posledním knihkupectví?



Roztržitý profesor - řešení

Roztržitý profesor - řešení

- Pravděpodobnost, že profesor zapomene deštník v i-tém obchodě, je $\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3^{i-1}}{4^i}$.

Roztržitý profesor - řešení

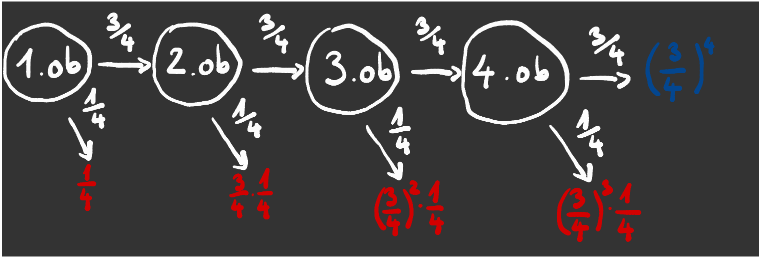
- Pravděpodobnost, že profesor zapomene deštník v i-tém obchodě, je $\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3^{i-1}}{4^i}$.
- Pravděpodobnost, že profesor donese deštník domů, je $\frac{3^4}{4^4}$.

Roztržitý profesor - řešení

- Pravděpodobnost, že profesor zapomene deštník v i-tém obchodě, je $\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3^{i-1}}{4^i}$.
- Pravděpodobnost, že profesor donese deštník domů, je $\frac{3^4}{4^4}$.
- Pravděpodobnost, že profesor deštník domů nedonese, je $1 - \frac{3^4}{4^4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3^2}{4^3} + \frac{3^3}{4^4} = \frac{175}{256}$.

Roztržitý profesor - řešení

- Pravděpodobnost, že profesor zapomene deštník v i-tém obchodě, je $\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3^{i-1}}{4^i}$.
- Pravděpodobnost, že profesor donese deštník domů, je $\frac{3^4}{4^4}$.
- Pravděpodobnost, že profesor deštník domů nedonese, je $1 - \frac{3^4}{4^4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3^2}{4^3} + \frac{3^3}{4^4} = \frac{175}{256}$.

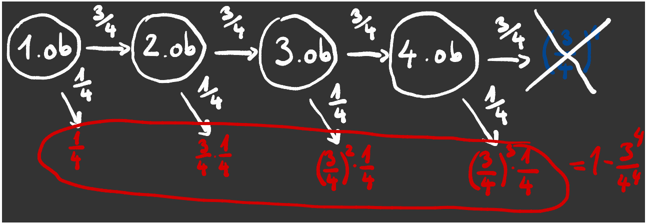


Roztržitý profesor - řešení

Jak se změní pravděpodobnostní strom, víme-li, že profesor deštník domů nedonesl?

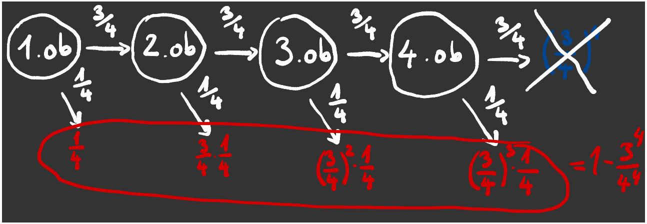
Roztržitý profesor - řešení

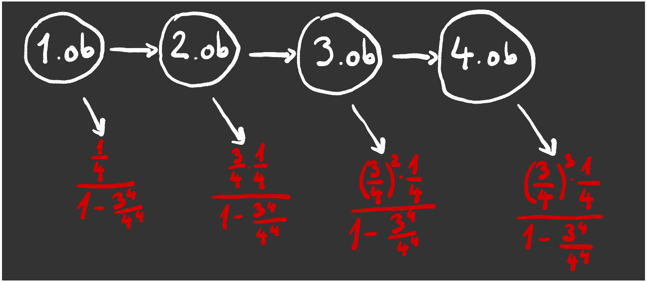
Jak se změní pravděpodobnostní strom, víme-li, že profesor deštník domů nedonesl?



Roztržitý profesor - řešení

Jak se změní pravděpodobnostní strom, víme-li, že profesor deštník domů nedonesl?





Děkuji za pozornost.