# Hérónův vzorec: 2000 let poté

Antonín Slavík
Matematicko-fyzikální fakulta UK

Cesty k matematice, 20. září 2024

# Hérónův vzorec

Obsah trojúhelníku, jehož strany mají délky $a$, $b$, $c$, je roven

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kde $s = (a+b+c)/2$ je polovina obvodu. Ekvivalentně:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

- Nejsložitější matematický vzorec základní školy?
- Existuje pěkný elementární důkaz?
- Možná znal již Archimédés, první dochovaný důkaz (pomocí kružnice vepsané a vlastností tětivových čtyřúhelníků) od Héróna Alexandrijského – *Metrika*, 1. stol.; tamtéž: algoritmus pro přibližný výpočet odmocniny, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n})$.

# Aplikace: izoperimetrická úloha pro trojúhelníky

Jak vypadá trojúhelník s předepsaným obvodem $\ell$, jehož obsah $S$ je maximální?

Platí $S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, kde $s = \ell/2$.

AG nerovnost:

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{s-a+s-b+s-c}{3} = \frac{s}{3},$$

přičemž rovnost nastává jedině pro $s-a = s-b = s-c$, tj. $a = b = c$.

Tudíž

$$S^2 \leq s\left(\frac{s}{3}\right)^3 = \frac{s^4}{3^3} = \frac{\ell^4}{2^4 \cdot 3^3},$$

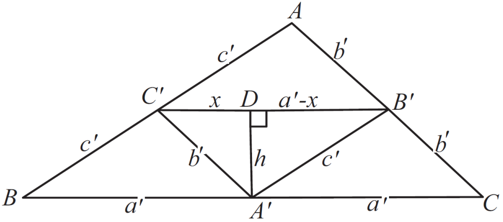
přičemž rovnost nastává jedině pro rovnostranný trojúhelník.

# Důkaz pomocí kosinové věty

$$
\begin{aligned}
S^2 &= \left(\frac{1}{2}ab\sin\gamma\right)^2 = \\
&= \frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos^2\gamma) \\
&= \frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma) = \\
&= \frac{1}{16}(2ab-2ab\cos\gamma)(2ab+2ab\cos\gamma) = \\
&= \frac{1}{16}(2ab+c^2-a^2-b^2)(2ab+a^2+b^2-c^2) = \\
&= \frac{1}{16}(c^2-(a-b)^2)((a+b)^2-c^2) = \\
&= \frac{1}{16}(c+a-b)(c-a+b)(a+b+c)(a+b-c)
\end{aligned}
$$

# Důkaz pomocí Pýthagorovy věty (1)

Platí $a' = a/2$, $b' = b/2$, $c' = c/2$, tedy $s = a' + b' + c'$.
Dále $a'^2 + b'^2 - c'^2 = a'^2 + x^2 + h^2 - (a' - x)^2 - h^2 = 2a'x$.



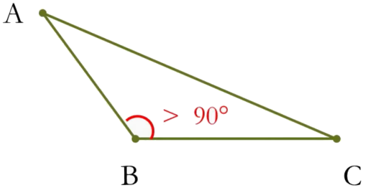

$$
\begin{aligned}
S^2 &= \left(4 \cdot \frac{1}{2} a' h\right)^2 = (2a'h)^2 = (2a')^2 (b'^2 - x^2) = \\
&= (2a')^2 (b' + x)(b' - x) = (2a'b' + 2a'x)(2a'b' - 2a'x) = \\
&= (a'^2 + b'^2 - c'^2 + 2a'b')(c'^2 - a'^2 - b'^2 + 2a'b') = \\
&= ((a' + b')^2 - c'^2)(c'^2 - (a' - b')^2) = \\
&= (a' + b' + c')(a' + b' - c')(c' + a' - b')(c' + b' - a') = \\
&= \frac{1}{16}(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c + b - a)
\end{aligned}
$$

# Důkaz pomocí Pýthagorovy věty (2)

V předchozím důkazu využíváme toho, že výška trojúhelníku procházející bodem $A$ protíná stranu $BC$.

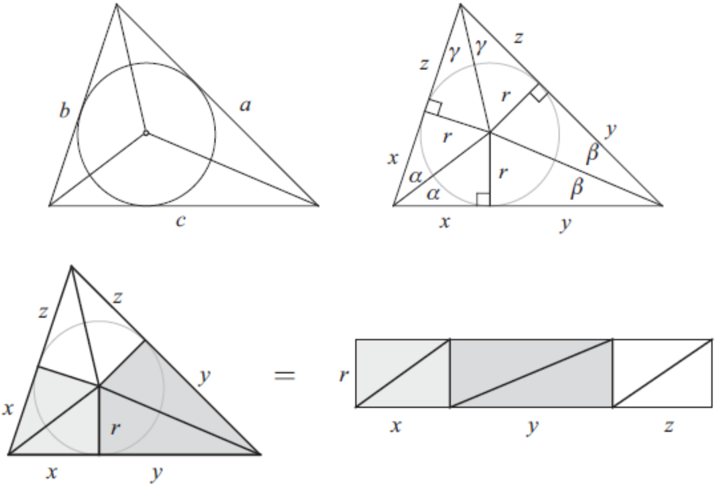
V každém trojúhelníku existuje aspoň jedna výška s touto vlastností.

Zdůvodnění: Pokud výška z $A$ neprotíná stranu $BC$, pak úhel u jednoho z vrcholů $B$, $C$ (toho, který je blíže k patě kolmice) je větší než 90 stupňů. Takový vrchol může být v trojúhelníku jen jeden.



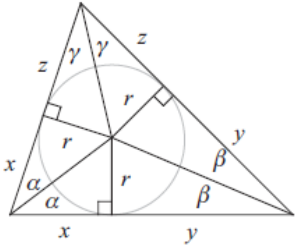
# Důkaz beze slov (1)

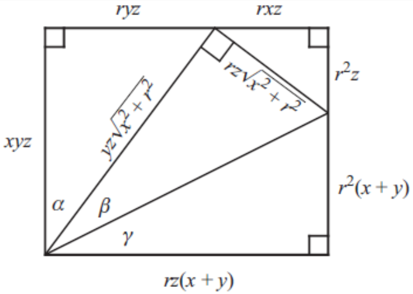
$S = rs$, kde $r$ je poloměr kružnice vepsané




Pozorování: $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$

# Důkaz beze slov (2)



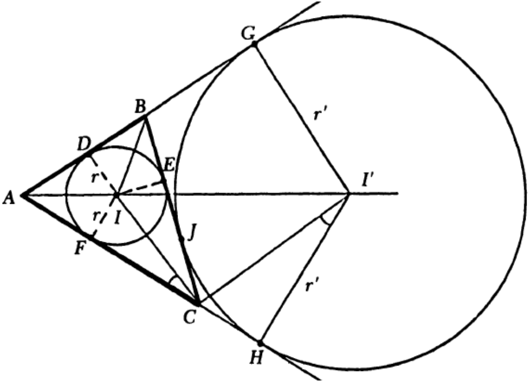

$\Rightarrow xyz = r^2(x + y + z)$

$$S^2 = r^2 s^2 = r^2 s(x + y + z) = sxyz = s(s - a)(s - b)(s - c)$$

Poznámka: Vztah $xyz = r^2(x + y + z)$ je ekvivalentní s

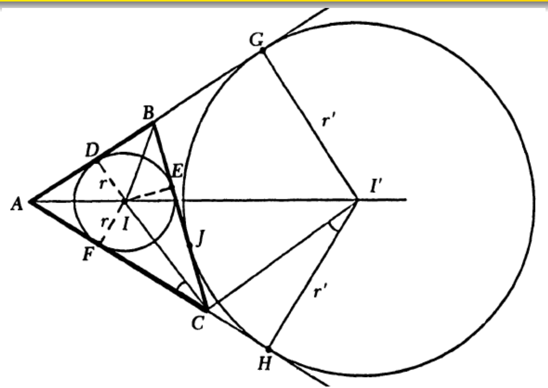
$$r = \sqrt{\frac{xyz}{x + y + z}} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}}.$$

# Důkaz pomocí kružnice vepsané a připsané (1)




$$AG + AH = (AD + DB + BG) + (AF + FC + CH) =$$
$$= (AD + DB + BJ) + (AF + FC + CJ) = (AD + DB) + (BJ + CJ) +$$
$$+ (AF + FC) = c + a + b = 2s \quad \Rightarrow \quad AG = AH = s$$

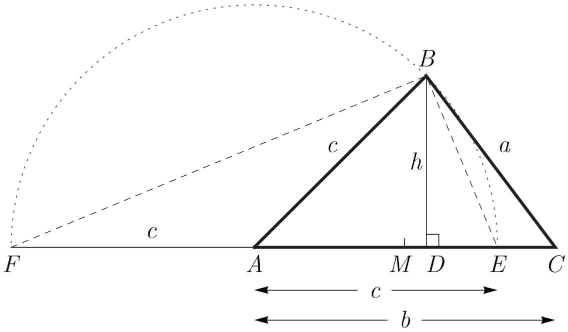
# Důkaz pomocí kružnice vepsané a připsané (2)




$$\triangle ADI \sim \triangle AGI' \Rightarrow \frac{DI}{AD} = \frac{GI'}{AG} \Rightarrow \frac{r}{s-a} = \frac{r'}{s}$$
$$\triangle ICF \sim \triangle CI'H \Rightarrow \frac{FI}{FC} = \frac{CH}{HI'} \Rightarrow \frac{r}{s-c} = \frac{s-b}{r'}$$
$$\Bigg\} \quad \frac{r^2}{(s-a)(s-c)} = \frac{s-b}{s}$$

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \quad \Rightarrow \quad S = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

# Newtonův důkaz (1)



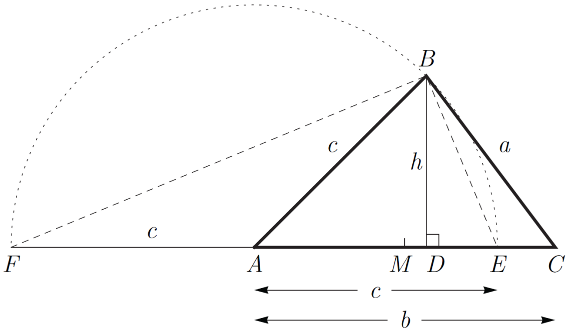

Nechť $AC$ je nejdelší strana, $M$ její střed, $AF = c$, $AE = c$.
Kružnice se středem $A$ a poloměrem $c$ prochází body $B$, $E$, $F$.

$$c^2 - AD^2 = a^2 - DC^2 \Rightarrow c^2 - a^2 = AD^2 - DC^2 = (AD + DC)(AD - DC) = b(AD - DC)$$

$$MD = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{b}{2} + MD\right) - \left(\frac{b}{2} - MD\right)\right) = \frac{1}{2}(AD - DC) = \frac{c^2 - a^2}{2b}$$

$$DE = AE - AM - MD = c - \frac{b}{2} - \frac{c^2 - a^2}{2b}$$

# Newtonův důkaz (2)




$$h^2 = DE(2c - DE) = \left(c - \frac{b}{2} - \frac{c^2 - a^2}{2b}\right)\left(c + \frac{b}{2} + \frac{c^2 - a^2}{2b}\right) =$$

$$= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2b} \cdot \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2b} =$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2b} \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{2b} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a)}{4b^2}$$

$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a)}$$

# Shrnutí

Základní strategie:

1. $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, vypočti $\sin\gamma$
2. $S = \frac{1}{2}ah_a$, vypočti $h_a$
3. $S = rs$, vypočti $r$

Konkrétní důkazy:

1. Kosinová věta
2. Pýthagorova věta
3. Důkaz beze slov
4. Důkaz pomocí kružnice vepsané a připsané
5. Newtonův důkaz
6. Mocnost bodu ke kružnici (bude v přednášce J. H.)

# Příbuzná tvrzení

- Heronův vzorec je limitním případem Brahmaguptova vzorce pro obsah tětivového čtyřúhelníku:

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

kde $s = (a+b+c+d)/2$.

- Brahmaguptův vzorec je speciální případ Bretschneiderova vzorce pro obsah obecného čtyřúhelníku:

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)},$$

kde $\alpha$, $\gamma$ jsou velikosti úhlů u vrcholů $A$, $C$

- Existuje (složitá) varianta vzorce pro objem čtyřstěnu
- Existuje varianta pro trojúhelníky ve sférické a hyperbolické geometrii

# Literatura


- Y. Id, E. S. Kennedy, *A Medieval Proof of Heron's Formula*, Mathematics Teacher 62 (1969), 585–587
- C. H. Raifaizen, *A Simpler Proof of Heron's Formula*, Mathematics Magazine 44 (1971), 27–28
- R. C. Alperin, *Heron's Area Formula*, College Mathematics Journal 18 (1987), 137–138
- S. H. Kung, *Another Elementary Proof of Heron's Formula*, Mathematics Magazine 65 (1992), 337–338
- R. B. Nelsen, *Heron's Formula via Proofs Without Words*, College Mathematics Journal 32 (2001), 290–292
- T. Maekawa, *Two Intuitive Proofs of Heron's Formula*, Mathematical Gazette 88 (2004), 546–548
- V. Pratt, *Factoring Heron*, College Mathematics Journal 40 (2009), 15–16
- W. Dunham, *Newton's Proof of Heron's Formula*, Math Horizons 19 (2011), 5–8,
- S. Zheng, *Another Simple Proof of Heron's Formula*, Mathematics Magazine 97 (2024), 165–166

---

- F. Kuřina, *Heronův důkaz Heronova vzorce*, Učitel matematiky 6 (1998), 234–237
- J. Blažek, *Čtyři důkazy Heronova vzorce*, Matematika – fyzika – informatika 30 (2021), 18–26