Pásmo
Surreálná čísla

Martin Rmoutil

Katedra didaktiky matematiky

Malá Strana, 20. září 2024

Osnova

Prolog: Surrealismus (podle Wiki)

Surrealismus (výslovnost syrealizmus) je evropský umělecký směr, ale také životní styl, který usiluje o osvobození mysli, zdůrazňuje podvědomí. Snaží se o zachycení snů, představ, pocitů a myšlenek. První impulsy surrealismus dostal od André Bretona, jeho prudký rozvoj umožnil Salvador Dalí. Surrealismus je stále aktivní směr, ačkoli se od původních myšlenek značně vzdálil.

Termín surrealismus poprvé použil Guillaume Apollinaire ve spojení se svou divadelní hrou Prsy Thirésiovy, jednalo se o jakousi absolutní realitu – surrealitu (francouzská předpona sur – nad).

... Roku 1924 vydal André Breton *Surrealistický manifest*...

Prolog: Surrealismus (podle Wiki)

Surrealismus (výslovnost syrealizmus) je evropský umělecký směr, ale také životní styl, který usiluje o osvobození mysli, zdůrazňuje podvědomí. Snaží se o zachycení snů, představ, pocitů a myšlenek. První impulsy surrealismus dostal od André Bretona, jeho prudký rozvoj umožnil Salvador Dalí. Surrealismus je stále aktivní směr, ačkoli se od původních myšlenek značně vzdálil.

Termín surrealismus poprvé použil Guillaume Apollinaire ve spojení se svou divadelní hrou Prsy Thirésiovy, jednalo se o jakousi absolutní realitu – surrealitu (francouzská předpona sur – nad).

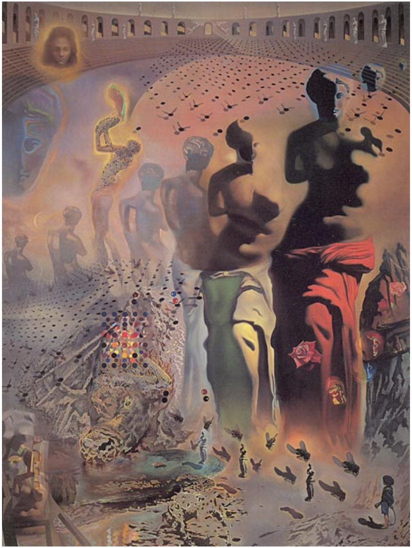
... Roku 1924 vydal André Breton *Surrealistický manifest*...

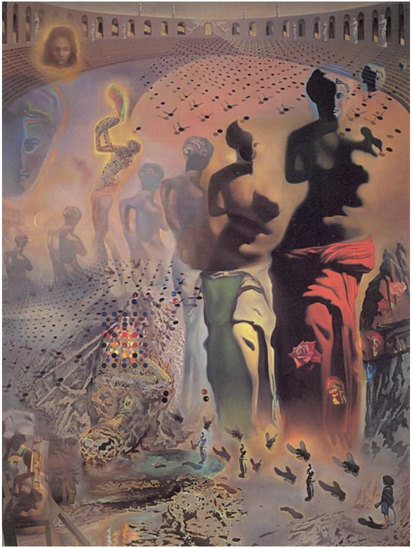
Prolog: Surrealismus (podle Wiki)

Surrealismus (výslovnost syrealizmus) je evropský umělecký směr, ale také životní styl, který usiluje o osvobození mysli, zdůrazňuje podvědomí. Snaží se o zachycení snů, představ, pocitů a myšlenek. První impulsy surrealismus dostal od André Bretona, jeho prudký rozvoj umožnil Salvador Dalí. Surrealismus je stále aktivní směr, ačkoli se od původních myšlenek značně vzdálil.

Termín surrealismus poprvé použil Guillaume Apollinaire ve spojení se svou divadelní hrou Prsy Thirésiovy, jednalo se o jakousi absolutní realitu – surrealitu (francouzská předpona sur – nad).

... Roku 1924 vydal André Breton *Surrealistický manifest*...





Co je 2?

Jan Novák (1930 – 2018)

„Počítač – nevím co to je, ale vím, jak se to používá.“

Reuben Louis Goodstein (1912 – 1985)

„It is surely a very remarkable thing that despite the range, power and success of modern mathematics, the concept of natural number, on which the whole edifice rests, is still something of a **mystery**.“ (1955)

Leopold Kronecker (1823 – 1891)

„Bůh stvořil přirozená čísla, všechno ostatní je lidské dílo.“

Co je 2?

Jan Novák (1930 – 2018)

„Počítač – nevím co to je, ale vím, jak se to používá.“

Reuben Louis Goodstein (1912 – 1985)

„It is surely a very remarkable thing that despite the range, power and success of modern mathematics, the concept of natural number, on which the whole edifice rests, is still something of a **mystery**.“ (1955)

Leopold Kronecker (1823 – 1891)

„Bůh stvořil přirozená čísla, všechno ostatní je lidské dílo.“

Co je 2?

Jan Novák (1930 – 2018)

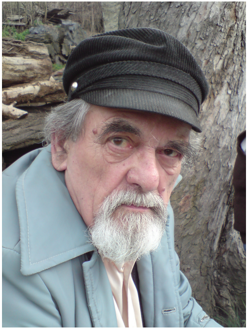
„Počítač – nevím co to je, ale vím, jak se to používá.“

Reuben Louis Goodstein (1912 – 1985)

„It is surely a very remarkable thing that despite the range, power and success of modern mathematics, the concept of natural number, on which the whole edifice rests, is still something of a **mystery**.“ (1955)

Leopold Kronecker (1823 – 1891)

„Bůh stvořil přirozená čísla, všechno ostatní je lidské dílo.“



Novák Goodstein Kronecker

Osnova

2

- znak;
- napsání znaku;
- číslovka;
- napsání číslovky;
- číslo ??

2

- znak;
- napsání znaku;
- číslovka;
- napsání číslovky;
- číslo ??

2

- znak;
- napsání znaku;
- číslovka;
- napsání číslovky;
- číslo ??

2

- znak;
- napsání znaku;
- číslovka;
- napsání číslovky;
- číslo ??

2

- znak;
- napsání znaku;
- číslovka;
- napsání číslovky;
- číslo ??

2

- znak;
- napsání znaku;
- číslovka;
- napsání číslovky;
- číslo ??

2

- znak;
- napsání znaku;
- číslovka;
- napsání číslovky;
- číslo ??

Nevíme co to je, ale víme, jak se to používá.

2

- znak;
- napsání znaku;
- číslovka;
- napsání číslovky;
- číslo ??

Nevíme co to je, ale víme, jak se to používá.

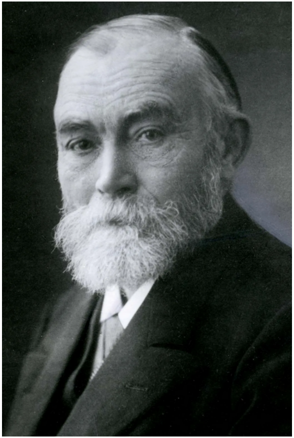
- Možná právě „způsob použití definuje *číslo*. (Šachová figura.)“

2

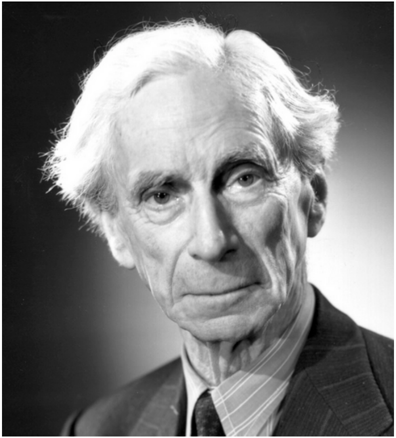
- znak;
- napsání znaku;
- číslovka;
- napsání číslovky;
- číslo ??

Nevíme co to je, ale víme, jak se to používá.

- Možná právě „způsob použití definuje *číslo*. (Šachová figura.)“
- Nebo je 2 třída všech dvouprvkových množin?
  Konec 19. stol.: Gottlob Frege (1848 – 1925);
  o $\sim$20 let později: Bertrand Russell (1872 – 1970)



Frege



Russell

Abstraktní objekt

Možná definice:

Neexistuje v časoprostoru. (Ať už „existuje“ znamená cokoliv.)

Je tedy *kauzálně inertní*:
Nemá schopnost způsobovat účinky ve fyzickém světě.

Jsou různé definice. Všechny jsou diskutabilní.

Jsou *čísla* abstraktní objekty? (Ať už to znamená cokoliv?)

Některé fil. směry odmítají existenci abstraktních objektů.
Tedy i čísel? (nominalismus)

Abstraktní objekt

Možná definice:

Neexistuje v časoprostoru. (Ať už „existuje“ znamená cokoliv.)

Je tedy *kauzálně inertní*:
Nemá schopnost způsobovat účinky ve fyzickém světě.

Jsou různé definice. Všechny jsou diskutabilní.

Jsou *čísla* abstraktní objekty? (Ať už to znamená cokoliv?)

Některé fil. směry odmítají existenci abstraktních objektů.
Tedy i čísel? (nominalismus)

Abstraktní objekt

Možná definice:

Neexistuje v časoprostoru. (Ať už „existuje“ znamená cokoliv.)

Je tedy *kauzálně inertní*:
Nemá schopnost způsobovat účinky ve fyzickém světě.

Jsou různé definice. Všechny jsou diskutabilní.

Jsou *čísla* abstraktní objekty? (Ať už to znamená cokoliv?)

Některé fil. směry odmítají existenci abstraktních objektů.
Tedy i čísel? (nominalismus)

Abstraktní objekt

Možná definice:

Neexistuje v časoprostoru. (Ať už „existuje“ znamená cokoliv.)

Je tedy *kauzálně inertní*:
Nemá schopnost způsobovat účinky ve fyzickém světě.

Jsou různé definice. Všechny jsou diskutabilní.

Jsou *čísla* abstraktní objekty? (Ať už to znamená cokoliv?)

Některé fil. směry odmítají existenci abstraktních objektů.
Tedy i čísel? (nominalismus)

Abstraktní objekt

Možná definice:

Neexistuje v časoprostoru. (Ať už „existuje" znamená cokoliv.)

Je tedy *kauzálně inertní*:
Nemá schopnost způsobovat účinky ve fyzickém světě.

Jsou různé definice. Všechny jsou diskutabilní.

Jsou *čísla* abstraktní objekty? (Ať už to znamená cokoliv?)

Některé fil. směry odmítají existenci abstraktních objektů.
Tedy i čísel? (nominalismus)

Abstraktní objekt

Možná definice:

Neexistuje v časoprostoru. (Ať už „existuje“ znamená cokoliv.)

Je tedy *kauzálně inertní*:
Nemá schopnost způsobovat účinky ve fyzickém světě.

Jsou různé definice. Všechny jsou diskutabilní.

Jsou *čísla* abstraktní objekty? (Ať už to znamená cokoliv?)

Některé fil. směry odmítají existenci abstraktních objektů.
Tedy i čísel? (nominalismus)

Abstraktní objekt

Možná definice:

Neexistuje v časoprostoru. (Ať už „existuje“ znamená cokoliv.)

Je tedy *kauzálně inertní*:
Nemá schopnost způsobovat účinky ve fyzickém světě.

Jsou různé definice. Všechny jsou diskutabilní.

Jsou *čísla* abstraktní objekty? (Ať už to znamená cokoliv?)

Některé fil. směry odmítají existenci abstraktních objektů.
Tedy i čísel? (nominalismus)

Abstraktní objekt

Možná definice:

Neexistuje v časoprostoru. (Ať už „existuje“ znamená cokoliv.)

Je tedy *kauzálně inertní*:
Nemá schopnost způsobovat účinky ve fyzickém světě.

Jsou různé definice. Všechny jsou diskutabilní.

Jsou *čísla* abstraktní objekty? (Ať už to znamená cokoliv?)

Některé fil. směry odmítají existenci abstraktních objektů.
Tedy i čísel? (nominalismus)

Abstraktní objekt

Možná definice:

Neexistuje v časoprostoru. (Ať už „existuje“ znamená cokoliv.)

Je tedy *kauzálně inertní*:
Nemá schopnost způsobovat účinky ve fyzickém světě.

Jsou různé definice. Všechny jsou diskutabilní.

Jsou *čísla* abstraktní objekty? (Ať už to znamená cokoliv?)

Některé fil. směry odmítají existenci abstraktních objektů.
Tedy i čísel? (nominalismus)

Velká čísla

- 5 (Mamutík); 10; 100; 1000;
- myriáda (Řekové: prakticky nekonečno);
- milion, myriáda myriád, miliarda (*lidský život nestačí*), bilion, biliarda, atd.;
- trilion, kvadrilion, kvintilion, ...;
- Archimédés: do vesmíru se vejde cca 10^{63} zrnek písku;
- budlilion $= 10^{80}$ (Izák Rmoutil (*2020)), budliliarda (dtto);
- googol $= 10^{100}$;
- mililion $= 10^{6000}$??; maximusmilion $= 10^{1\,000\,000}$; maximusmiliarda, maximusbilion ...;
- googolplex $= 10^{\text{googol}}$; googolduplex $= 10^{\text{googolplex}}$;

Velká čísla

- 5 (Mamutík); 10; 100; 1000;
- myriáda (Řekové: prakticky nekonečno);
- milion, myriáda myriád, miliarda (*lidský život nestačí*), bilion, biliarda, atd.;
- trilion, kvadrilion, kvintilion, ...;
- Archimédés: do vesmíru se vejde cca 10^{63} zrnek písku;
- budlilion $= 10^{80}$ (Izák Rmoutil (*2020)), budliliarda (dtto);
- googol $= 10^{100}$;
- mililion $= 10^{6000}$??; maximusmilion $= 10^{1\,000\,000}$; maximusmiliarda, maximusbilion ...;
- googolplex $= 10^{\text{googol}}$; googolduplex $= 10^{\text{googolplex}}$;

Velká čísla

- 5 (Mamutík); 10; 100; 1000;
- myriáda (Řekové: prakticky nekonečno);
- milion, myriáda myriád, miliarda (*lidský život nestačí*), bilion, biliarda, atd.;
- trilion, kvadrilion, kvintilion, ...;
- Archimédés: do vesmíru se vejde cca 10^{63} zrnek písku;
- budlilion $= 10^{80}$ (Izák Rmoutil (*2020)), budliliarda (dtto);
- googol $= 10^{100}$;
- mililion $= 10^{6000}$??; maximusmilion $= 10^{1\,000\,000}$; maximusmiliarda, maximusbilion ...;
- googolplex $= 10^{\text{googol}}$; googolduplex $= 10^{\text{googolplex}}$;

Velká čísla

- 5 (Mamutík); 10; 100; 1000;
- myriáda (Řekové: prakticky nekonečno);
- milion, myriáda myriád, miliarda (*lidský život nestačí*), bilion, biliarda, atd.;
- trilion, kvadrilion, kvintilion, ...;
- Archimédés: do vesmíru se vejde cca 10^{63} zrnek písku;
- budlilion $= 10^{80}$ (Izák Rmoutil (*2020)), budliliarda (dtto);
- googol $= 10^{100}$;
- mililion $= 10^{6000}$??; maximusmilion $= 10^{1\,000\,000}$; maximusmiliarda, maximusbilion ...;
- googolplex $= 10^{\text{googol}}$; googolduplex $= 10^{\text{googolplex}}$;

Velká čísla

- 5 (Mamutík); 10; 100; 1000;
- myriáda (Řekové: prakticky nekonečno);
- milion, myriáda myriád, miliarda (*lidský život nestačí*), bilion, biliarda, atd.;
- trilion, kvadrilion, kvintilion, ...;
- Archimédés: do vesmíru se vejde cca 10^{63} zrnek písku;
- budlilion $= 10^{80}$ (Izák Rmoutil (*2020)), budliliarda (dtto);
- googol $= 10^{100}$;
- mililion $= 10^{6000}$??; maximusmilion $= 10^{1\,000\,000}$; maximusmiliarda, maximusbilion ...;
- googolplex $= 10^{\text{googol}}$; googolduplex $= 10^{\text{googolplex}}$;

Velká čísla

- 5 (Mamutík); 10; 100; 1000;
- myriáda (Řekové: prakticky nekonečno);
- milion, myriáda myriád, miliarda (*lidský život nestačí*), bilion, biliarda, atd.;
- trilion, kvadrilion, kvintilion, ...;
- Archimédés: do vesmíru se vejde cca 10^{63} zrnek písku;
- budlilion $= 10^{80}$ (Izák Rmoutil (*2020)), budliliarda (dtto);
- googol $= 10^{100}$;
- mililion $= 10^{6000}$??; maximusmilion $= 10^{1\,000\,000}$; maximusmiliarda, maximusbilion ...;
- googolplex $= 10^{\text{googol}}$; googolduplex $= 10^{\text{googolplex}}$;

Velká čísla

- 5 (Mamutík); 10; 100; 1000;
- myriáda (Řekové: prakticky nekonečno);
- milion, myriáda myriád, miliarda (*lidský život nestačí*), bilion, biliarda, atd.;
- trilion, kvadrilion, kvintilion, ...;
- Archimédés: do vesmíru se vejde cca 10^{63} zrnek písku;
- budlilion $= 10^{80}$ (Izák Rmoutil (*2020)), budliliarda (dtto);
- googol $= 10^{100}$;
- mililion $= 10^{6000}$??; maximusmilion $= 10^{1\,000\,000}$; maximusmiliarda, maximusbilion ...;
- googolplex $= 10^{\text{googol}}$; googolduplex $= 10^{\text{googolplex}}$;

Velká čísla

- 5 (Mamutík); 10; 100; 1000;
- myriáda (Řekové: prakticky nekonečno);
- milion, myriáda myriád, miliarda (*lidský život nestačí*), bilion, biliarda, atd.;
- trilion, kvadrilion, kvintilion, ...;
- Archimédés: do vesmíru se vejde cca 10^{63} zrnek písku;
- budlilion $= 10^{80}$ (Izák Rmoutil (*2020)), budliliarda (dtto);
- googol $= 10^{100}$;
- mililion $= 10^{6000}$??; maximusmilion $= 10^{1\,000\,000}$; maximusmiliarda, maximusbilion ...;
- googolplex $= 10^{\text{googol}}$; googolduplex $= 10^{\text{googolplex}}$;

Velká čísla

- 5 (Mamutík); 10; 100; 1000;
- myriáda (Řekové: prakticky nekonečno);
- milion, myriáda myriád, miliarda (*lidský život nestačí*), bilion, biliarda, atd.;
- trilion, kvadrilion, kvintilion, ...;
- Archimédés: do vesmíru se vejde cca 10^{63} zrnek písku;
- budlilion $= 10^{80}$ (Izák Rmoutil (*2020)), budliliarda (dtto);
- googol $= 10^{100}$;
- mililion $= 10^{6000}$??; maximusmilion $= 10^{1\,000\,000}$; maximusmiliarda, maximusbilion ...;
- googolplex $= 10^{\text{googol}}$; googolduplex $= 10^{\text{googolplex}}$;

Archimédés

Rmoutil

Goodsteinovy číselné **hyperoperace**

násobení $3+3+3+3 = 4 \cdot 3$

mocnění $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 3 \uparrow 4$ (značení: Donald Knuth)

tetrace $3^{3^{3^3}} = {}^4 3 = 3 \uparrow\uparrow 4$

pentace ${}^{{}^{{}^{3}3}3}3 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow 4 =$

hexace $3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow \left(3 \uparrow\uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow\uparrow 3)\right)$

ATD. !!! $\uparrow^5, \uparrow^6, \uparrow^7, \dots, \uparrow^{3^3}, \dots, \uparrow^{3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3}, \dots$

Příklady:

- $2 \uparrow\uparrow 3 = {}^3 2 = 2^{2^2} = 2^4 = 16$;
- $2 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2) = 2 \uparrow\uparrow 2^2 = {}^4 2 = 2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65536$.
- $5 \uparrow\uparrow\uparrow 2 = 5 \uparrow\uparrow 5 = {}^5 5 = 5^{5^{5^{5^5}}}$ má přes $10^{10^{2184}}$ cifer.
- $5 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 5 \uparrow\uparrow (5 \uparrow\uparrow 5) = {}^{{}^5 5}5 = 5^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot^5}}}}$ ... to je jen začátek.

Goodsteinovy číselné **hyperoperace**

násobení $3+3+3+3 = 4\cdot 3$

mocnění $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 3^4 = 3\uparrow 4$ (značení: Donald Knuth)

tetrace $3^{3^{3^3}} = {}^4 3 = 3\uparrow\uparrow 4$

pentace ${}^{{}^{{}^{3}3}3}3 = 3\uparrow\uparrow\uparrow 4 =$

hexace $3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4 = 3\uparrow\uparrow\uparrow\left(3\uparrow\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow\uparrow 3)\right)$

ATD. !!! $\uparrow^5, \uparrow^6, \uparrow^7, \dots, \uparrow^{3^3}, \dots, \uparrow^{3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3}, \dots$

Příklady:

- $2\uparrow\uparrow 3 = {}^3 2 = 2^{2^2} = 2^4 = 16$;
- $2\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 2\uparrow\uparrow(2\uparrow\uparrow 2) = 2\uparrow\uparrow 2^2 = {}^4 2 = 2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65536.$
- $5\uparrow\uparrow\uparrow 2 = 5\uparrow\uparrow 5 = {}^5 5 = 5^{5^{5^{5^5}}}$ má přes $10^{10^{2184}}$ cifer.
- $5\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 5\uparrow\uparrow(5\uparrow\uparrow 5) = {}^{{}^5 5}5 = 5^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{5}}}}}$ … to je jen začátek.

Goodsteinovy číselné **hyperoperace**

násobení $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3$

mocnění $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 3 \uparrow 4$ (značení: Donald Knuth)

tetrace $3^{3^{3^3}} = {}^4 3 = 3 \uparrow\uparrow 4$

pentace ${}^{{}^{{}^{3}3}3}3 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow 4 =$

hexace $3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow \left(3 \uparrow\uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow\uparrow 3)\right)$

ATD. !!! $\uparrow^5, \uparrow^6, \uparrow^7, \ldots, \uparrow^{3^3}, \ldots, \uparrow^{3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3}, \ldots$

Příklady:

- $2 \uparrow\uparrow 3 = {}^3 2 = 2^{2^2} = 2^4 = 16;$
- $2 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2) = 2 \uparrow\uparrow 2^2 = {}^4 2 = 2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65536.$
- $5 \uparrow\uparrow\uparrow 2 = 5 \uparrow\uparrow 5 = {}^5 5 = 5^{5^{5^{5^5}}}$ má přes $10^{10^{2184}}$ cifer.
- $5 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 5 \uparrow\uparrow (5 \uparrow\uparrow 5) = {}^{{}^5 5}5 = 5^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{5}}}}}$ ... to je jen začátek.

Goodsteinovy číselné **hyperoperace**

násobení $3+3+3+3 = 4 \cdot 3$

mocnění $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 3 \uparrow 4$ (značení: Donald Knuth)

tetrace $3^{3^{3^3}} = {}^{4}3 = 3 \uparrow\uparrow 4$

pentace ${}^{{}^{{}^{3}3}3}3 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow 4 =$

hexace $3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow \left(3 \uparrow\uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow\uparrow 3)\right)$

ATD. !!! $\uparrow^5, \uparrow^6, \uparrow^7, \ldots, \uparrow^{3^3}, \ldots, \uparrow^{3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3}, \ldots$

Příklady:

- $2 \uparrow\uparrow 3 = {}^{3}2 = 2^{2^2} = 2^4 = 16$;
- $2 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2) = 2 \uparrow\uparrow 2^2 = {}^{4}2 = 2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65536.$
- $5 \uparrow\uparrow\uparrow 2 = 5 \uparrow\uparrow 5 = {}^{5}5 = 5^{5^{5^{5^5}}}$ má přes $10^{10^{2184}}$ cifer.
- $5 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 5 \uparrow\uparrow (5 \uparrow\uparrow 5) = {}^{{}^{5}5}5 = 5^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{5}}}}}$ … to je jen začátek.

Goodsteinovy číselné **hyperoperace**

násobení $3+3+3+3 = 4\cdot 3$

mocnění $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 3^4 = 3\uparrow 4$ (značení: Donald Knuth)

tetrace $3^{3^{3^3}} = {}^4 3 = 3\uparrow\uparrow 4$

pentace ${}^{{}^{{}^{3}3}3}3 = 3\uparrow\uparrow\uparrow 4 =$

hexace $3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4 = 3\uparrow\uparrow\uparrow\left(3\uparrow\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow\uparrow 3)\right)$

ATD. !!! $\uparrow^5, \uparrow^6, \uparrow^7, \ldots, \uparrow^{3^3}, \ldots, \uparrow^{3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3}, \ldots$

Příklady:

- $2\uparrow\uparrow 3 = {}^3 2 = 2^{2^2} = 2^4 = 16$;
- $2\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 2\uparrow\uparrow(2\uparrow\uparrow 2) = 2\uparrow\uparrow 2^2 = {}^4 2 = 2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65536$.
- $5\uparrow\uparrow\uparrow 2 = 5\uparrow\uparrow 5 = {}^5 5 = 5^{5^{5^{5^5}}}$ má přes $10^{10^{2184}}$ cifer.
- $5\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 5\uparrow\uparrow(5\uparrow\uparrow 5) = {}^{{}^5 5}5 = 5^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot^5}}}}$ … to je jen začátek.

Goodsteinovy číselné **hyperoperace**

násobení $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3$

mocnění $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 3 \uparrow 4$ (značení: Donald Knuth)

tetrace $3^{3^{3^3}} = {}^4 3 = 3 \uparrow\uparrow 4$

pentace ${}^{{}^{{}^{3}3}3}3 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow 4 =$

hexace $3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow \left(3 \uparrow\uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow\uparrow 3)\right)$

ATD. !!! $\uparrow^5, \uparrow^6, \uparrow^7, \ldots, \uparrow^{3^3}, \ldots, \uparrow^{3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3}, \ldots$

Příklady:

- $2 \uparrow\uparrow 3 = {}^3 2 = 2^{2^2} = 2^4 = 16;$
- $2 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2) = 2 \uparrow\uparrow 2^2 = {}^4 2 = 2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65536.$
- $5 \uparrow\uparrow\uparrow 2 = 5 \uparrow\uparrow 5 = {}^5 5 = 5^{5^{5^{5^5}}}$ má přes $10^{10^{2184}}$ cifer.
- $5 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 5 \uparrow\uparrow (5 \uparrow\uparrow 5) = {}^{{}^5 5} 5 = 5^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot^5}}}}$ … to je jen začátek.

Goodsteinovy číselné **hyperoperace**

násobení $3+3+3+3 = 4\cdot 3$

mocnění $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 3^4 = 3\uparrow 4$ (značení: Donald Knuth)

tetrace $3^{3^{3^3}} = {}^4 3 = 3\uparrow\uparrow 4$

pentace ${}^{{}^{{}^{3}3}3}3 = 3\uparrow\uparrow\uparrow 4 =$

hexace $3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4 = 3\uparrow\uparrow\uparrow\left(3\uparrow\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow\uparrow 3)\right)$

ATD. !!! $\uparrow^5, \uparrow^6, \uparrow^7, \ldots, \uparrow^{3^3}, \ldots, \uparrow^{3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3}, \ldots$

Příklady:

- $2\uparrow\uparrow 3 = {}^3 2 = 2^{2^2} = 2^4 = 16;$
- $2\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 2\uparrow\uparrow(2\uparrow\uparrow 2) = 2\uparrow\uparrow 2^2 = {}^4 2 = 2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65536.$
- $5\uparrow\uparrow\uparrow 2 = 5\uparrow\uparrow 5 = {}^5 5 = 5^{5^{5^{5^5}}}$ má přes $10^{10^{2184}}$ cifer.
- $5\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 5\uparrow\uparrow(5\uparrow\uparrow 5) = {}^{{}^5 5}5 = 5^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot^5}}}}$ … to je jen začátek.

Goodsteinovy číselné **hyperoperace**

násobení $3+3+3+3 = 4\cdot 3$

mocnění $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 3^4 = 3\uparrow 4$ (značení: Donald Knuth)

tetrace $3^{3^{3^3}} = {}^4 3 = 3 \uparrow\uparrow 4$

pentace ${}^{{}^{{}^{3}3}3}3 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow 4 =$

hexace $3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow \left(3 \uparrow\uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow\uparrow 3)\right)$

ATD. !!! $\uparrow^5$, $\uparrow^6$, $\uparrow^7$, ..., $\uparrow^{3^3}$, ..., $\uparrow^{3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3}$, ...

Příklady:

- $2 \uparrow\uparrow 3 = {}^3 2 = 2^{2^2} = 2^4 = 16$;
- $2 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2) = 2 \uparrow\uparrow 2^2 = {}^4 2 = 2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65536$.
- $5 \uparrow\uparrow\uparrow 2 = 5 \uparrow\uparrow 5 = {}^5 5 = 5^{5^{5^{5^5}}}$ má přes $10^{10^{2184}}$ cifer.
- $5 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 5 \uparrow\uparrow (5 \uparrow\uparrow 5) = {}^{{}^5 5}5 = 5^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot^5}}}}$ ... to je jen začátek.

Goodsteinovy číselné **hyperoperace**

násobení $3+3+3+3=4\cdot 3$

mocnění $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=3^4=3\uparrow 4$ (značení: Donald Knuth)

tetrace $3^{3^{3^3}}={}^{4}3=3\uparrow\uparrow 4$

pentace ${}^{{}^{{}^{3}3}3}3=3\uparrow\uparrow\uparrow 4=$

hexace $3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4=3\uparrow\uparrow\uparrow\Big(3\uparrow\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow\uparrow 3)\Big)$

ATD. !!! $\uparrow^5,\ \uparrow^6,\ \uparrow^7,\ \ldots,\ \uparrow^{3^3},\ \ldots,\ \uparrow^{3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3},\ \ldots$

Příklady:

- $2\uparrow\uparrow 3={}^{3}2=2^{2^2}=2^4=16$;
- $2\uparrow\uparrow\uparrow 3=2\uparrow\uparrow(2\uparrow\uparrow 2)=2\uparrow\uparrow 2^2={}^{4}2=2^{2^{2^2}}=2^{16}=65536.$
- $5\uparrow\uparrow\uparrow 2=5\uparrow\uparrow 5={}^{5}5=5^{5^{5^{5^5}}}$ má přes $10^{10^{2184}}$ cifer.
- $5\uparrow\uparrow\uparrow 3=5\uparrow\uparrow(5\uparrow\uparrow 5)={}^{{}^{5}5}5=5^{5^{\cdot^{\cdot^{5}}}}$ … to je jen začátek.

Goodsteinovy číselné **hyperoperace**

násobení $3+3+3+3=4\cdot 3$

mocnění $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=3^4=3\uparrow 4$ (značení: Donald Knuth)

tetrace $3^{3^{3^3}}={}^{4}3=3\uparrow\uparrow 4$

pentace ${}^{{}^{{}^{3}3}3}3=3\uparrow\uparrow\uparrow 4=$

hexace $3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4=3\uparrow\uparrow\uparrow\Big(3\uparrow\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow\uparrow 3)\Big)$

ATD. !!! $\uparrow^5,\ \uparrow^6,\ \uparrow^7,\ \dots,\ \uparrow^{3^3},\ \dots,\ \uparrow^{3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3},\ \dots$

Příklady:

- $2\uparrow\uparrow 3={}^{3}2=2^{2^2}=2^4=16$;
- $2\uparrow\uparrow\uparrow 3=2\uparrow\uparrow(2\uparrow\uparrow 2)=2\uparrow\uparrow 2^2={}^{4}2=2^{2^{2^2}}=2^{16}=65536.$
- $5\uparrow\uparrow\uparrow 2=5\uparrow\uparrow 5={}^{5}5=5^{5^{5^{5^5}}}$ má přes $10^{10^{2184}}$ cifer.
- $5\uparrow\uparrow\uparrow 3=5\uparrow\uparrow(5\uparrow\uparrow 5)={}^{{}^{5}5}5=5^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{5}}}}}$ … to je jen začátek.

Goodsteinovy číselné **hyperoperace**

násobení $3+3+3+3 = 4\cdot 3$

mocnění $3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 3^4 = 3\uparrow 4$ (značení: Donald Knuth)

tetrace $3^{3^{3^{3}}} = {}^{4}3 = 3\uparrow\uparrow 4$

pentace ${}^{{}^{{}^{3}3}3}3 = 3\uparrow\uparrow\uparrow 4 =$

hexace $3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4 = 3\uparrow\uparrow\uparrow\left(3\uparrow\uparrow\uparrow(3\uparrow\uparrow\uparrow 3)\right)$

ATD. !!! $\uparrow^5, \uparrow^6, \uparrow^7, \ldots, \uparrow^{3^3}, \ldots, \uparrow^{3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3}, \ldots$

Příklady:

- $2\uparrow\uparrow 3 = {}^{3}2 = 2^{2^{2}} = 2^4 = 16;$
- $2\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 2\uparrow\uparrow(2\uparrow\uparrow 2) = 2\uparrow\uparrow 2^2 = {}^{4}2 = 2^{2^{2^{2}}} = 2^{16} = 65536.$
- $5\uparrow\uparrow\uparrow 2 = 5\uparrow\uparrow 5 = {}^{5}5 = 5^{5^{5^{5^{5}}}}$ má přes $10^{10^{2184}}$ cifer.
- $5\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 5\uparrow\uparrow(5\uparrow\uparrow 5) = {}^{{}^{5}5}5 = 5^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{5}}}}}$ … to je jen začátek.

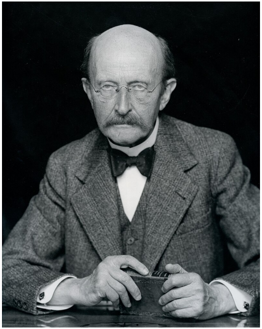
Supervelká čísla – jeden příklad (zdaleka ne největší)

Grahamovo číslo g_{64}: Ramseyova teorie. Rekurzivní **definice:**

$$G = \left.\begin{matrix} 3\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\uparrow}_{}3 \\ 3\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\cdots\cdots\cdots\uparrow}_{}3 \\ \underbrace{\quad\vdots\quad}_{} \\ 3\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\cdots\uparrow}_{}3 \\ 3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 \end{matrix}\right\}\text{64 layers}$$

Knuth

Graham



Planck

Mají supervelká čísla nárok na „existenci“?

Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 – 1947)

Jak velké je g_{64}:
Uvažujme Planckův objem: $\ell_{\mathrm{P}}^3 \doteq 4,2217 \cdot 10^{-105}$ m^3.
Nechť V je objem Pozorovatelného Vesmíru.
Položme $N = \frac{V}{\ell_{\mathrm{P}}^3}$. Prostor PV se skládá z N „buněk“.

D.Ú. Laskavý posluchač si sám provede řádový odhad N.

Fakta:

- $\mathrm{cifry}(g_{64}) > N$;
- $\mathrm{cifry}^2(g_{64}) = \mathrm{cifry}(\mathrm{cifry}(g_{64})) > N$;
- $\mathrm{cifry}^3(g_{64}) = \mathrm{cifry}(\mathrm{cifry}(\mathrm{cifry}(g_{64}))) > N$;
- ...
- $\mathrm{cifry}^N(g_{64}) > N$; atd. (ne až do nekonečna, ale *hodně* dlouho).

Mají supervelká čísla nárok na „existenci“?

Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 – 1947)

Jak velké je g_{64}:

Uvažujme Planckův objem: $\ell_P^3 \doteq 4,2217 \cdot 10^{-105}$ m^3.
Nechť V je objem Pozorovatelného Vesmíru.
Položme $N = \frac{V}{\ell_P^3}$. Prostor PV se skládá z N „buněk“.

D.Ú. Laskavý posluchač si sám provede řádový odhad N.

Fakta:

- cifry$(g_{64}) > N$;
- cifry$^2(g_{64})$ = cifry(cifry$(g_{64})) > N$;
- cifry$^3(g_{64})$ = cifry(cifry(cifry$(g_{64}))) > N$;
- ...
- cifry$^N(g_{64}) > N$; atd. (ne až do nekonečna, ale *hodně* dlouho).

Mají supervelká čísla nárok na „existenci“?

Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 – 1947)

Jak velké je g_{64}:
Uvažujme Planckův objem: $\ell_P^3 \doteq 4,2217 \cdot 10^{-105}$ m^3.
Nechť V je objem Pozorovatelného Vesmíru.
Položme $N = \frac{V}{\ell_P^3}$. Prostor PV se skládá z N „buněk“.

D.Ú. Laskavý posluchač si sám provede řádový odhad N.

Fakta:

- cifry$(g_{64}) > N$;
- cifry$^2(g_{64})$ = cifry(cifry$(g_{64})) > N$;
- cifry$^3(g_{64})$ = cifry(cifry(cifry$(g_{64}))) > N$;
- ...
- cifry$^N(g_{64}) > N$; atd. (ne až do nekonečna, ale *hodně* dlouho).

Mají supervelká čísla nárok na „existenci“?

Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 – 1947)

Jak velké je g_{64}:

Uvažujme Planckův objem: $\ell_{\mathrm{P}}^3 \doteq 4,2217 \cdot 10^{-105}\ \mathrm{m}^3$.

Nechť V je objem Pozorovatelného Vesmíru.

Položme $N = \frac{V}{\ell_{\mathrm{P}}^3}$. Prostor PV se skládá z N „buněk“.

D.Ú. Laskavý posluchač si sám provede řádový odhad N.

Fakta:

- $\mathrm{cifry}(g_{64}) > N$;
- $\mathrm{cifry}^2(g_{64}) = \mathrm{cifry}(\mathrm{cifry}(g_{64})) > N$;
- $\mathrm{cifry}^3(g_{64}) = \mathrm{cifry}(\mathrm{cifry}(\mathrm{cifry}(g_{64}))) > N$;
- ...
- $\mathrm{cifry}^N(g_{64}) > N$; atd. (ne až do nekonečna, ale *hodně* dlouho).

Mají supervelká čísla nárok na „existenci“?

Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 – 1947)

Jak velké je g_{64}:
Uvažujme Planckův objem: $\ell_P^3 \doteq 4,2217 \cdot 10^{-105}$ m^3.
Nechť V je objem Pozorovatelného Vesmíru.
Položme $N = \frac{V}{\ell_P^3}$. Prostor PV se skládá z N „buněk“.

D.Ú. Laskavý posluchač si sám provede řádový odhad N.

Fakta:

- $\text{cifry}(g_{64}) > N$;
- $\text{cifry}^2(g_{64}) = \text{cifry}(\text{cifry}(g_{64})) > N$;
- $\text{cifry}^3(g_{64}) = \text{cifry}(\text{cifry}(\text{cifry}(g_{64}))) > N$;
- ...
- $\text{cifry}^N(g_{64}) > N$; atd. (ne až do nekonečna, ale *hodně* dlouho).

Mají supervelká čísla nárok na „existenci“?

Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 – 1947)

Jak velké je g_{64}:
Uvažujme Planckův objem: $\ell_{\mathrm{P}}^3 \doteq 4,2217 \cdot 10^{-105}$ m^3.
Nechť V je objem Pozorovatelného Vesmíru.
Položme $N = \frac{V}{\ell_{\mathrm{P}}^3}$. Prostor PV se skládá z N „buněk“.

D.Ú. Laskavý posluchač si sám provede řádový odhad N.

Fakta:

- cifry$(g_{64}) > N$;
- cifry$^2(g_{64})$ = cifry(cifry$(g_{64})) > N$;
- cifry$^3(g_{64})$ = cifry(cifry(cifry$(g_{64}))) > N$;
- ...
- cifry$^N(g_{64}) > N$; atd. (ne až do nekonečna, ale *hodně* dlouho).

Mají supervelká čísla nárok na „existenci“?

Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 – 1947)

Jak velké je g_{64}:
Uvažujme Planckův objem: $\ell_{\mathrm{P}}^3 \doteq 4,2217 \cdot 10^{-105}\ \mathrm{m}^3$.
Nechť V je objem Pozorovatelného Vesmíru.
Položme $N = \frac{V}{\ell_{\mathrm{P}}^3}$. Prostor PV se skládá z N „buněk“.

D.Ú. Laskavý posluchač si sám provede řádový odhad N.

Fakta:

- $\mathrm{cifry}(g_{64}) > N$;
- $\mathrm{cifry}^2(g_{64}) = \mathrm{cifry}(\mathrm{cifry}(g_{64})) > N$;
- $\mathrm{cifry}^3(g_{64}) = \mathrm{cifry}(\mathrm{cifry}(\mathrm{cifry}(g_{64}))) > N$;
- ...
- $\mathrm{cifry}^N(g_{64}) > N$; atd. (ne až do nekonečna, ale *hodně* dlouho).

Mají supervelká čísla nárok na „existenci“?

Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 – 1947)

Jak velké je g_{64}:
Uvažujme Planckův objem: $\ell_P^3 \doteq 4,2217 \cdot 10^{-105}$ m^3.
Nechť V je objem Pozorovatelného Vesmíru.
Položme $N = \frac{V}{\ell_P^3}$. Prostor PV se skládá z N „buněk“.

D.Ú. Laskavý posluchač si sám provede řádový odhad N.

Fakta:

- $\text{cifry}(g_{64}) > N$;
- $\text{cifry}^2(g_{64}) = \text{cifry}(\text{cifry}(g_{64})) > N$;
- $\text{cifry}^3(g_{64}) = \text{cifry}(\text{cifry}(\text{cifry}(g_{64}))) > N$;
- ...
- $\text{cifry}^N(g_{64}) > N$; atd. (ne až do nekonečna, ale *hodně* dlouho).

Mají supervelká čísla nárok na „existenci“?

Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 – 1947)

Jak velké je g_{64}:
Uvažujme Planckův objem: $\ell_{\mathrm{P}}^3 \doteq 4,2217 \cdot 10^{-105}\ \mathrm{m}^3$.
Nechť V je objem Pozorovatelného Vesmíru.
Položme $N = \frac{V}{\ell_{\mathrm{P}}^3}$. Prostor PV se skládá z N „buněk“.

D.Ú. Laskavý posluchač si sám provede řádový odhad N.

Fakta:

- $\mathrm{cifry}(g_{64}) > N$;
- $\mathrm{cifry}^2(g_{64}) = \mathrm{cifry}(\mathrm{cifry}(g_{64})) > N$;
- $\mathrm{cifry}^3(g_{64}) = \mathrm{cifry}(\mathrm{cifry}(\mathrm{cifry}(g_{64}))) > N$;
- ...
- $\mathrm{cifry}^N(g_{64}) > N$; atd. (ne až do nekonečna, ale *hodně* dlouho).

Mají supervelká čísla nárok na „existenci“?

Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 – 1947)

Jak velké je g_{64}:
Uvažujme Planckův objem: $\ell_P^3 \doteq 4,2217 \cdot 10^{-105}$ m^3.
Nechť V je objem Pozorovatelného Vesmíru.
Položme $N = \frac{V}{\ell_P^3}$. Prostor PV se skládá z N „buněk“.

D.Ú. Laskavý posluchač si sám provede řádový odhad N.

Fakta:

- $\text{cifry}(g_{64}) > N$;
- $\text{cifry}^2(g_{64}) = \text{cifry}(\text{cifry}(g_{64})) > N$;
- $\text{cifry}^3(g_{64}) = \text{cifry}(\text{cifry}(\text{cifry}(g_{64}))) > N$;
- ...
- $\text{cifry}^N(g_{64}) > N$; atd. (ne až do nekonečna, ale *hodně* dlouho).

Mají supervelká čísla nárok na „existenci“?

Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 – 1947)

Jak velké je g_{64}:
Uvažujme Planckův objem: $\ell_{\mathrm{P}}^3 \doteq 4,2217 \cdot 10^{-105}\ \mathrm{m}^3$.
Nechť V je objem Pozorovatelného Vesmíru.
Položme $N = \frac{V}{\ell_{\mathrm{P}}^3}$. Prostor PV se skládá z N „buněk“.

D.Ú. Laskavý posluchač si sám provede řádový odhad N.

Fakta:

- $\mathrm{cifry}(g_{64}) > N$;
- $\mathrm{cifry}^2(g_{64}) = \mathrm{cifry}(\mathrm{cifry}(g_{64})) > N$;
- $\mathrm{cifry}^3(g_{64}) = \mathrm{cifry}(\mathrm{cifry}(\mathrm{cifry}(g_{64}))) > N$;
- ...
- $\mathrm{cifry}^N(g_{64}) > N$; atd. (ne až do nekonečna, ale *hodně* dlouho).

Osnova

Co jsme schopni o číslech říci?

Collatzův problém: $C(1) \in \mathbb{N}$ zvolíme pevné. Definujeme:

$$C(n) := \begin{cases} 3n+1, & \text{pokud } n \text{ je liché,} \\ n/2, & \text{pokud } n \text{ je sudé.} \end{cases}$$

Jestlipak $\forall C(1)\ \exists n\colon\ C(n) = 1$?

Ani Paul Erdős (1913 – 1996) to nezjistil, stále to nevíme.

Další otevřené problémy:

- Kolik je prvočíselných dvojčat? Atd... Ale také:
- Je Eulerova konstanta racionální?
- $\pi + e, \pi^e \in \mathbb{Q}$?

Nevíme.

Co jsme schopni o číslech říci?

Collatzův problém: $C(1) \in \mathbb{N}$ zvolíme pevné. Definujeme:

$$C(n) := \begin{cases} 3n + 1, & \text{pokud } n \text{ je liché,} \\ n/2, & \text{pokud } n \text{ je sudé.} \end{cases}$$

Jestlipak $\forall C(1)\ \exists n\colon\ C(n) = 1$?
Ani Paul Erdős (1913 – 1996) to nezjistil, stále to nevíme.

Další otevřené problémy:

- Kolik je prvočíselných dvojčat? Atd... Ale také:
- Je Eulerova konstanta racionální?
- $\pi + e, \pi^e \in \mathbb{Q}$?

Nevíme.

Co jsme schopni o číslech říci?

Collatzův problém: $C(1) \in \mathbb{N}$ zvolíme pevné. Definujeme:

$$C(n) := \begin{cases} 3n+1, & \text{pokud } n \text{ je liché,} \\ n/2, & \text{pokud } n \text{ je sudé.} \end{cases}$$

Jestlipak $\forall C(1)\ \exists n\colon\ C(n) = 1$?
Ani Paul Erdős (1913 – 1996) to nezjistil, stále to nevíme.

Další otevřené problémy:

- Kolik je prvočíselných dvojčat? Atd... Ale také:
- Je Eulerova konstanta racionální?
- $\pi + e, \pi^e \in \mathbb{Q}$?

Nevíme.

Co jsme schopni o číslech říci?

Collatzův problém: $C(1) \in \mathbb{N}$ zvolíme pevné. Definujeme:

$$C(n) := \begin{cases} 3n+1, & \text{pokud } n \text{ je liché,} \\ n/2, & \text{pokud } n \text{ je sudé.} \end{cases}$$

Jestlipak $\forall C(1)\ \exists n\colon\ C(n) = 1$?
Ani Paul Erdős (1913 – 1996) to nezjistil, stále to nevíme.

Další otevřené problémy:

- Kolik je prvočíselných dvojčat? Atd... Ale také:
- Je Eulerova konstanta racionální?
- $\pi + e, \pi^e \in \mathbb{Q}$?

Nevíme.

Co jsme schopni o číslech říci?

Collatzův problém: $C(1) \in \mathbb{N}$ zvolíme pevné. Definujeme:

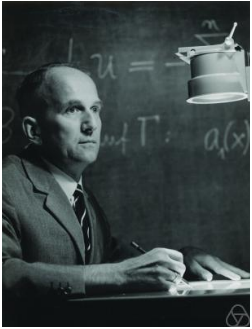
$$C(n) := \begin{cases} 3n+1, & \text{pokud } n \text{ je liché,} \\ n/2, & \text{pokud } n \text{ je sudé.} \end{cases}$$

Jestlipak $\forall C(1)\ \exists n\colon\ C(n) = 1$?
Ani Paul Erdős (1913 – 1996) to nezjistil, stále to nevíme.

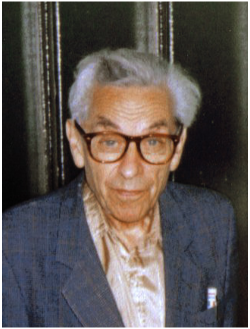
Další otevřené problémy:

- Kolik je prvočíselných dvojčat? Atd... Ale také:
- Je Eulerova konstanta racionální?
- $\pi + e, \pi^e \in \mathbb{Q}$?

Nevíme.



Collatz



Erdős

Euler

Goodsteinova posloupnost m_n

Dáno $m_0 \in \mathbb{N}$. Vyjádříme v základu 2, exponenty taktéž atd.

$$29 =: m_0 = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2^2 + 1.$$

Číslo m_1 spočteme nahrazením „$2 \mapsto 3$“ a odečtením 1:

$$m_1 = 3^{3^3} + 3^{3+1} + 3^3.$$

Číslo m_2 spočteme nahrazením „$3 \mapsto 4$“ a odečtením 1:
$m_2 = 4^{4^4} + 4^{4+1} + 4^4 - 1.$, kde vyjádříme
$4^4 - 1 = 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3$, tedy

$$m_2 = 4^{4^4} + 4^{4+1} + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3.$$

Číslo m_3 spočteme nahrazením „$4 \mapsto 5$“ a odečtením 1:

$$m_3 = 5^{5^5} + 5^{5+1} + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2.$$

Goodsteinova posloupnost m_n

Dáno $m_0 \in \mathbb{N}$. Vyjádříme v základu 2, exponenty taktéž atd.

$$29 =: m_0 = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2^2 + 1.$$

Číslo m_1 spočteme nahrazením „$2 \mapsto 3$“ a odečtením 1:

$$m_1 = 3^{3^3} + 3^{3+1} + 3^3.$$

Číslo m_2 spočteme nahrazením „$3 \mapsto 4$“ a odečtením 1:
$m_2 = 4^{4^4} + 4^{4+1} + 4^4 - 1.$, kde vyjádříme
$4^4 - 1 = 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3$, tedy

$$m_2 = 4^{4^4} + 4^{4+1} + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3.$$

Číslo m_3 spočteme nahrazením „$4 \mapsto 5$“ a odečtením 1:

$$m_3 = 5^{5^5} + 5^{5+1} + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2.$$

Goodsteinova posloupnost m_n

Dáno $m_0 \in \mathbb{N}$. Vyjádříme v základu 2, exponenty taktéž atd.

$$29 =: m_0 = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2^2 + 1.$$

Číslo m_1 spočteme nahrazením „$2 \mapsto 3$“ a odečtením 1:

$$m_1 = 3^{3^3} + 3^{3+1} + 3^3.$$

Číslo m_2 spočteme nahrazením „$3 \mapsto 4$“ a odečtením 1:
$m_2 = 4^{4^4} + 4^{4+1} + 4^4 - 1.$, kde vyjádříme
$4^4 - 1 = 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3$, tedy

$$m_2 = 4^{4^4} + 4^{4+1} + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3.$$

Číslo m_3 spočteme nahrazením „$4 \mapsto 5$“ a odečtením 1:

$$m_3 = 5^{5^5} + 5^{5+1} + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2.$$

Goodsteinova posloupnost m_n

Dáno $m_0 \in \mathbb{N}$. Vyjádříme v základu 2, exponenty taktéž atd.

$$29 =: m_0 = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2^2 + 1.$$

Číslo m_1 spočteme nahrazením „$2 \mapsto 3$“ a odečtením 1:

$$m_1 = 3^{3^3} + 3^{3+1} + 3^3.$$

Číslo m_2 spočteme nahrazením „$3 \mapsto 4$“ a odečtením 1:
$m_2 = 4^{4^4} + 4^{4+1} + 4^4 - 1.$, kde vyjádříme
$4^4 - 1 = 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3$, tedy

$$m_2 = 4^{4^4} + 4^{4+1} + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3.$$

Číslo m_3 spočteme nahrazením „$4 \mapsto 5$“ a odečtením 1:

$$m_3 = 5^{5^5} + 5^{5+1} + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2.$$

Goodsteinova posloupnost m_n

Dáno $m_0 \in \mathbb{N}$. Vyjádříme v základu 2, exponenty taktéž atd.

$$29 =: m_0 = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2^2 + 1.$$

Číslo m_1 spočteme nahrazením „$2 \mapsto 3$" a odečtením 1:

$$m_1 = 3^{3^3} + 3^{3+1} + 3^3.$$

Číslo m_2 spočteme nahrazením „$3 \mapsto 4$" a odečtením 1:
$m_2 = 4^{4^4} + 4^{4+1} + 4^4 - 1.$, kde vyjádříme
$4^4 - 1 = 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3$, tedy

$$m_2 = 4^{4^4} + 4^{4+1} + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3.$$

Číslo m_3 spočteme nahrazením „$4 \mapsto 5$" a odečtením 1:

$$m_3 = 5^{5^5} + 5^{5+1} + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2.$$

Goodsteinova posloupnost m_n pro $m_0 = 29$

$$m_0 = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2^2 + 1$$
$$m_1 = 3^{3^3} + 3^{3+1} + 3^3$$
$$m_2 = 4^{4^4} + 4^{4+1} + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3$$
$$m_3 = 5^{5^5} + 5^{5+1} + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2$$
$$m_4 = 6^{6^6} + 6^{6+1} + 3 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 1$$
$$m_5 = 7^{7^7} + 7^{7+1} + 3 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7$$

atd.

Špekulujme o této posloupnosti. Kdo o ní něco *zajímavého* ví?

Goodsteinova posloupnost m_n pro $m_0 = 29$

$$m_0 = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2^2 + 1$$

$$m_1 = 3^{3^3} + 3^{3+1} + 3^3$$

$$m_2 = 4^{4^4} + 4^{4+1} + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3$$

$$m_3 = 5^{5^5} + 5^{5+1} + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2$$

$$m_4 = 6^{6^6} + 6^{6+1} + 3 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 1$$

$$m_5 = 7^{7^7} + 7^{7+1} + 3 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7$$

atd.

Špekulujme o této posloupnosti. Kdo o ní něco *zajímavého* ví?

Goodsteinova posloupnost m_n pro $m_0 = 29$

$$m_0 = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2^2 + 1$$

$$m_1 = 3^{3^3} + 3^{3+1} + 3^3$$

$$m_2 = 4^{4^4} + 4^{4+1} + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3$$

$$m_3 = 5^{5^5} + 5^{5+1} + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2$$

$$m_4 = 6^{6^6} + 6^{6+1} + 3 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 1$$

$$m_5 = 7^{7^7} + 7^{7+1} + 3 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7$$

atd.

Špekulujme o této posloupnosti. Kdo o ní něco *zajímavého* ví?

Goodsteinova posloupnost m_n pro $m_0 = 29$

$$m_0 = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2^2 + 1$$
$$m_1 = 3^{3^3} + 3^{3+1} + 3^3$$
$$m_2 = 4^{4^4} + 4^{4+1} + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3$$
$$m_3 = 5^{5^5} + 5^{5+1} + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2$$
$$m_4 = 6^{6^6} + 6^{6+1} + 3 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 1$$
$$m_5 = 7^{7^7} + 7^{7+1} + 3 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7$$

atd.

Špekulujme o této posloupnosti. Kdo o ní něco *zajímavého* ví?

Goodsteinova posloupnost m_n pro $m_0 = 29$

$$m_0 = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2^2 + 1$$
$$m_1 = 3^{3^3} + 3^{3+1} + 3^3$$
$$m_2 = 4^{4^4} + 4^{4+1} + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3$$
$$m_3 = 5^{5^5} + 5^{5+1} + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2$$
$$m_4 = 6^{6^6} + 6^{6+1} + 3 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 1$$
$$m_5 = 7^{7^7} + 7^{7+1} + 3 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7$$

atd.

Špekulujme o této posloupnosti. Kdo o ní něco *zajímavého* ví?

Fakt 1: Pro jisté $n \in \mathbb{N}$ je $m_n = 0$. Podobně pro libovolné $m_0 \in \mathbb{N}$.

Goodsteinova posloupnost m_n pro $m_0 = 29$

$$m_0 = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2^2 + 1$$
$$m_1 = 3^{3^3} + 3^{3+1} + 3^3$$
$$m_2 = 4^{4^4} + 4^{4+1} + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3$$
$$m_3 = 5^{5^5} + 5^{5+1} + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2$$
$$m_4 = 6^{6^6} + 6^{6+1} + 3 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 1$$
$$m_5 = 7^{7^7} + 7^{7+1} + 3 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7$$

atd.

Špekulujme o této posloupnosti. Kdo o ní něco *zajímavého* ví?

Fakt 1: Pro jisté $n \in \mathbb{N}$ je $m_n = 0$. Podobně pro libovolné $m_0 \in \mathbb{N}$.
Fakt 2: Toto nelze dokázat v Peanově aritmetice. Snadno v **ZF**.

Nevyhnutelná neúplnost

Kurt Gödel (1906 – 1978): 1. Věta o neúplnosti (1931)

Nechť T je *rozumná axiomatická* teorie aritmetiky.
Pak existuje aritmetická pravda, která není v T formálně dokazatelná (ani vyvratitelná).

Vždy tedy existují aritmetické pravdy, které v naší (rozumné) teorii nejsou dokazatelné.

Pomocí tzv. Gödelových čísel „přeložil“ metamatematická tvrzení (např. „Existuje důkaz formule φ.“) do aritmetických formulí. Potom zkonstruoval formuli, která sama o sobě říká, že je *formálně* nedokazatelná. Kdyby tedy byla formálně dokazatelná, byl by to spor. Proto není formálně dokazatelná, a je tedy pravdivá (toto je metamatematický důkaz).

Nevyhnutelná neúplnost

Kurt Gödel (1906 – 1978): 1. Věta o neúplnosti (1931)

Nechť T je *rozumná axiomatická* teorie aritmetiky.
Pak existuje aritmetická pravda, která není v T formálně dokazatelná (ani vyvratitelná).

Vždy tedy existují aritmetické pravdy, které v naší (rozumné) teorii nejsou dokazatelné.

Pomocí tzv. Gödelových čísel „přeložil“ metamatematická tvrzení (např. „Existuje důkaz formule φ.“) do aritmetických formulí. Potom zkonstruoval formuli, která sama o sobě říká, že je *formálně* nedokazatelná. Kdyby tedy byla formálně dokazatelná, byl by to spor. Proto není formálně dokazatelná, a je tedy pravdivá (toto je metamatematický důkaz).

Nevyhnutelná neúplnost

Kurt Gödel (1906 – 1978): 1. Věta o neúplnosti (1931)

Nechť T je *rozumná axiomatická* teorie aritmetiky.
Pak existuje aritmetická pravda, která není v T formálně dokazatelná (ani vyvratitelná).

Vždy tedy existují aritmetické pravdy, které v naší (rozumné) teorii nejsou dokazatelné.

Pomocí tzv. Gödelových čísel „přeložil“ metamatematická tvrzení (např. „Existuje důkaz formule φ.“) do aritmetických formulí.
Potom zkonstruoval formuli, která sama o sobě říká, že je *formálně* nedokazatelná. Kdyby tedy byla formálně dokazatelná, byl by to spor. Proto není formálně dokazatelná, a je tedy pravdivá (toto je metamatematický důkaz).

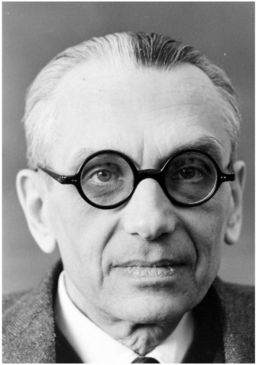
Nevyhnutelná neúplnost

Kurt Gödel (1906 – 1978): 1. Věta o neúplnosti (1931)

Nechť T je *rozumná axiomatická* teorie aritmetiky.
Pak existuje aritmetická pravda, která není v T formálně dokazatelná (ani vyvratitelná).

Vždy tedy existují aritmetické pravdy, které v naší (rozumné) teorii nejsou dokazatelné.

Pomocí tzv. Gödelových čísel „přeložil“ metamatematická tvrzení (např. „Existuje důkaz formule φ.“) do aritmetických formulí. Potom zkonstruoval formuli, která sama o sobě říká, že je *formálně* nedokazatelná. Kdyby tedy byla formálně dokazatelná, byl by to spor. Proto není formálně dokazatelná, a je tedy pravdivá (toto je metamatematický důkaz).



Gödel

Pekařská 5, Brno

Osnova

Peano; von Neumann

Jedna z prvních axiomatizací $\mathbb{N}$ je připisována Giuseppe Peanovi (1858 – 1932). Navazoval na práci Richarda Dedekinda (1831 – 1916) a dalších.

PA má dvě verze (1. řádu – více modelů; 2. řádu – kategorická) Teorie množin (TM) je od počátku 20. stol. základní.

ZF obsahuje model **PA** 2. řádu (jedinečný, až na izomorfismus).

Von Neumannova přirozená čísla v teorii množin:
$0 := \emptyset; \quad 1 := \{0\}; \quad 2 := \{0,1\}; \quad 3 := \{0,1,2\}; \quad \dots$
Obecně $n := \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Pozn.: Platí $n + 1 = n \cup \{n\}$. (funkce následníka)

Peano; von Neumann

Jedna z prvních axiomatizací $\mathbb{N}$ je připisována Giuseppe Peanovi (1858 – 1932). Navazoval na práci Richarda Dedekinda (1831 – 1916) a dalších.

PA má dvě verze (1. řádu – více modelů; 2. řádu – kategorická) Teorie množin (TM) je od počátku 20. stol. základní.

ZF obsahuje model **PA** 2. řádu (jedinečný, až na izomorfismus).

Von Neumannova přirozená čísla v teorii množin:
$0 := \emptyset; \quad 1 := \{0\}; \quad 2 := \{0, 1\}; \quad 3 := \{0, 1, 2\}; \quad \dots$
Obecně $n := \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Pozn.: Platí $n + 1 = n \cup \{n\}$. (funkce následníka)

Peano; von Neumann

Jedna z prvních axiomatizací $\mathbb{N}$ je připisována Giuseppe Peanovi (1858 – 1932). Navazoval na práci Richarda Dedekinda (1831 – 1916) a dalších.

PA má dvě verze (1. řádu – více modelů; 2. řádu – kategorická) Teorie množin (TM) je od počátku 20. stol. základní.

ZF obsahuje model **PA** 2. řádu (jedinečný, až na izomorfismus).

Von Neumannova přirozená čísla v teorii množin:
$0 := \emptyset; \quad 1 := \{0\}; \quad 2 := \{0, 1\}; \quad 3 := \{0, 1, 2\}; \quad \ldots$
Obecně $n := \{0, 1, \ldots, n - 1\}$.

Pozn.: Platí $n + 1 = n \cup \{n\}$. (funkce následníka)

Peano; von Neumann

Jedna z prvních axiomatizací $\mathbb{N}$ je připisována Giuseppe Peanovi (1858 – 1932). Navazoval na práci Richarda Dedekinda (1831 – 1916) a dalších.

PA má dvě verze (1. řádu – více modelů; 2. řádu – kategorická) Teorie množin (TM) je od počátku 20. stol. základní.

ZF obsahuje model **PA** 2. řádu (jedinečný, až na izomorfismus).

Von Neumannova přirozená čísla v teorii množin:
$0 := \emptyset; \quad 1 := \{0\}; \quad 2 := \{0,1\}; \quad 3 := \{0,1,2\}; \quad \ldots$
Obecně $n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Pozn.: Platí $n + 1 = n \cup \{n\}$. (funkce následníka)

Peano; von Neumann

Jedna z prvních axiomatizací $\mathbb{N}$ je připisována Giuseppe Peanovi (1858 – 1932). Navazoval na práci Richarda Dedekinda (1831 – 1916) a dalších.

PA má dvě verze (1. řádu – více modelů; 2. řádu – kategorická) Teorie množin (TM) je od počátku 20. stol. základní.

ZF obsahuje model **PA** 2. řádu (jedinečný, až na izomorfismus).

Von Neumannova přirozená čísla v teorii množin:
$0 := \emptyset; \quad 1 := \{0\}; \quad 2 := \{0, 1\}; \quad 3 := \{0, 1, 2\}; \quad \ldots$
Obecně $n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Pozn.: Platí $n + 1 = n \cup \{n\}$. (funkce následníka)

Peano; von Neumann

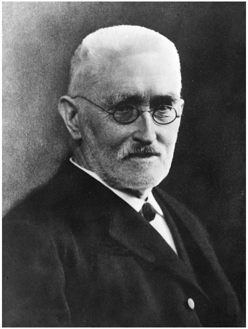
Jedna z prvních axiomatizací $\mathbb{N}$ je připisována Giuseppe Peanovi (1858 – 1932). Navazoval na práci Richarda Dedekinda (1831 – 1916) a dalších.

PA má dvě verze (1. řádu – více modelů; 2. řádu – kategorická)
Teorie množin (TM) je od počátku 20. stol. základní.

ZF obsahuje model **PA** 2. řádu (jedinečný, až na izomorfismus).

Von Neumannova přirozená čísla v teorii množin:
$0 := \emptyset; \quad 1 := \{0\}; \quad 2 := \{0, 1\}; \quad 3 := \{0, 1, 2\}; \quad \ldots$
Obecně $n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Pozn.: Platí $n + 1 = n \cup \{n\}$. (funkce následníka)



Dedekind

Peano

Neumann

Další číselné obory v **ZFC**

- $\mathbb{N}$: $\emptyset, \quad \{0\}, \quad \{0,1\}, \quad \{0,1,2\}, \quad \{0,1,2,3\}, \quad \dots$
- $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a,b)\colon\ a,b \in \mathbb{N}\}.$ „$(a,b) \equiv a - b$"

Další číselné obory v **ZFC**

- $\mathbb{N}$: $\emptyset$, $\{0\}$, $\{0,1\}$, $\{0,1,2\}$, $\{0,1,2,3\}$, ...
- $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a,b)\colon\ a,b \in \mathbb{N}\}$. „$(a,b) \equiv a - b$“

Definujeme relace a operace (pro libovolná čísla $a,b,c,d \in \mathbb{N}$):

$$(a,b) = (c,d) \iff a + d = c + b, \quad \text{podobně pro } <, >.$$

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d), \quad (a,b) - (c,d) = (a+d, c+b),$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac + bd, ad + bc).$$

Přesněji: lze brát třídy ekvivalence (pak místo „$=$“ píšeme „$\sim$“).

Pozn: jsou další (jednodušší, ale méně elegantní) způsoby.

Další číselné obory v **ZFC**

- $\mathbb{N}$: $\emptyset, \quad \{0\}, \quad \{0,1\}, \quad \{0,1,2\}, \quad \{0,1,2,3\}, \quad \dots$
- $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a,b)\colon\ a,b \in \mathbb{N}\}.$ „$(a,b) \equiv a-b$“
- $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \mathbb{N}.$ „$(a,b) \equiv \frac{a}{b}$“

$$(a,b) = (c,d) \iff ad = bc,$$

$$(a,b)+(c,d) = (ad+bc, bd), (a,b)\cdot(c,d) = (ac, bd).$$

Další číselné obory v **ZFC**

- $\mathbb{N}$: $\emptyset$, $\{0\}$, $\{0,1\}$, $\{0,1,2\}$, $\{0,1,2,3\}$, $\dots$
- $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a,b)\colon\ a,b \in \mathbb{N}\}$. „$(a,b) \equiv a-b$“
- $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. „$(a,b) \equiv \frac{a}{b}$“

$$(a,b) = (c,d) \iff ad = bc,$$

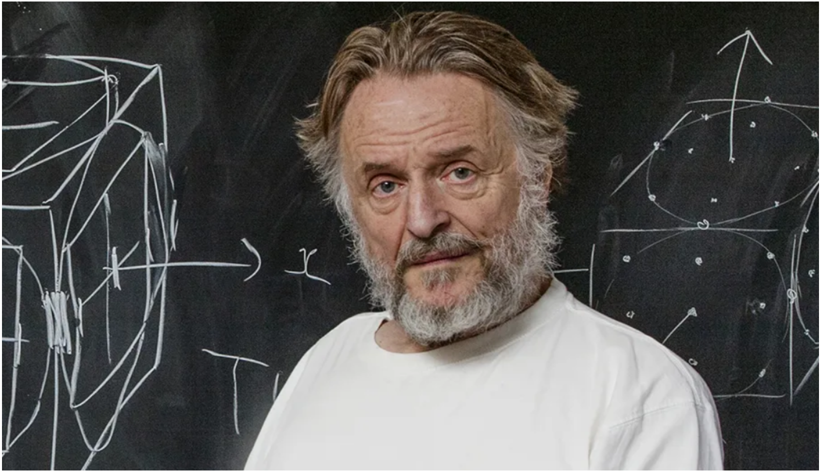
$$(a,b) + (c,d) = (ad+bc, bd), (a,b)\cdot(c,d) = (ac, bd).$$

- $\mathbb{R}$: Dedekindovy řezy:

$$\mathbb{R} := \Big\{(L,R)\colon\ L,R \subseteq \mathbb{Q} \ \wedge\ L \cup R = \mathbb{Q} \ \wedge\ \forall x \in L\ \forall y \in R\colon x < y\Big\}.$$

Nyní je potřeba zavést uspořádání a operace.
Dále je třeba dokázat axiomy uspořádaného tělesa a úplnost.

John Horton Conway (1937 – 2020)



Surreálná čísla – neformální konstrukce

- Čísla jsou tvaru $(L|R)$, kde L, R jsou množiny čísel.
- $(L|R)$ je číslo, jestliže $\forall x^L \in L \, \forall x^R \in R \colon x^L \not\geqslant x^R$.
- $x \leqslant y \stackrel{\text{def.}}{\iff}$ žádné $y^R \leqslant x \quad \wedge \quad y \leqslant$ žádné x^L
- $x + y := \{x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R\}$ (všechny možnosti!)
- $-x := \{-x^R \mid -x^L\}$
- $x \cdot y := \{x^L y + x y^L - x^L y^L, x^R y + x y^R - x^R y^R \mid x^L y + x y^R - x^L y^R, x^R y + x y^L - x^R y^L\}$

0. den Conway stvořil: $0 := (\emptyset \mid \emptyset) = \{\ \mid\ \}$.
1. den Conway stvořil: $-1 := (\emptyset \mid 0) = \{|0\}$, $1 := (0 \mid \emptyset) = \{0|\}$.
2. den Conway stvořil: $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$.
3. den Conway stvořil: atd.

Surreálná čísla – neformální konstrukce

- Čísla jsou tvaru $(L|R)$, kde L, R jsou množiny čísel.
- $(L|R)$ je číslo, jestliže $\forall x^L \in L\, \forall x^R \in R\colon x^L \not\geqslant x^R$.
- $x \leqslant y \overset{\text{def.}}{\iff}$ žádné $y^R \leqslant x \quad \wedge \quad y \leqslant$ žádné x^L
- $x + y := \{x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R\}$ (všechny možnosti!)
- $-x := \{-x^R \mid -x^L\}$
- $x \cdot y := \{x^L y + x y^L - x^L y^L, x^R y + x y^R - x^R y^R \mid x^L y + x y^R - x^L y^R, x^R y + x y^L - x^R y^L\}$

0. den Conway stvořil: $0 := (\emptyset \mid \emptyset) = \{\ \mid\ \}$.
1. den Conway stvořil: $-1 := (\emptyset \mid 0) = \{|0\}$, $1 := (0 \mid \emptyset) = \{0|\}$.
2. den Conway stvořil: $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$.
3. den Conway stvořil: atd.

Surreálná čísla – neformální konstrukce

- Čísla jsou tvaru $(L|R)$, kde L, R jsou množiny čísel.
- $(L|R)$ je číslo, jestliže $\forall x^L \in L\, \forall x^R \in R\colon x^L \not\geqslant x^R$.
- $x \leqslant y \overset{\text{def.}}{\iff}$ žádné $y^R \leqslant x \quad \wedge \quad y \leqslant$ žádné x^L
- $x + y := \{x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R\}$ (všechny možnosti!)
- $-x := \{-x^R \mid -x^L\}$
- $x \cdot y := \{x^L y + x y^L - x^L y^L, x^R y + x y^R - x^R y^R \mid x^L y + x y^R - x^L y^R, x^R y + x y^L - x^R y^L\}$

0. den Conway stvořil: $0 := (\emptyset \mid \emptyset) = \{\ |\ \}$.
1. den Conway stvořil: $-1 := (\emptyset \mid 0) = \{|0\}$, $1 := (0 \mid \emptyset) = \{0|\}$.
2. den Conway stvořil: $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$.
3. den Conway stvořil: atd.

Surreálná čísla – neformální konstrukce

- Čísla jsou tvaru $(L|R)$, kde L, R jsou množiny čísel.
- $(L|R)$ je číslo, jestliže $\forall x^L \in L \, \forall x^R \in R\colon x^L \not\geqslant x^R$.
- $x \leqslant y \overset{\text{def.}}{\iff}$ žádné $y^R \leqslant x \quad \wedge \quad y \leqslant$ žádné x^L
- $x + y := \{x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R\}$ (všechny možnosti!)
- $-x := \{-x^R \mid -x^L\}$
- $x \cdot y := \{x^L y + x y^L - x^L y^L, x^R y + x y^R - x^R y^R \mid x^L y + x y^R - x^L y^R, x^R y + x y^L - x^R y^L\}$

0. den Conway stvořil: $0 := (\emptyset \mid \emptyset) = \{\ \mid\ \}$.
1. den Conway stvořil: $-1 := (\emptyset \mid 0) = \{|0\}$, $1 := (0 \mid \emptyset) = \{0|\}$.
2. den Conway stvořil: $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$.
3. den Conway stvořil: atd.

Surreálná čísla – neformální konstrukce

- Čísla jsou tvaru $(L|R)$, kde L, R jsou množiny čísel.
- $(L|R)$ je číslo, jestliže $\forall x^L \in L\, \forall x^R \in R\colon x^L \not\geqslant x^R$.
- $x \leqslant y \overset{\text{def.}}{\iff}$ žádné $y^R \leqslant x \quad \wedge \quad y \leqslant$ žádné x^L
- $x + y := \{x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R\}$ (všechny možnosti!)
- $-x := \{-x^R \mid -x^L\}$
- $x \cdot y := \{x^L y + x y^L - x^L y^L, x^R y + x y^R - x^R y^R \mid x^L y + x y^R - x^L y^R, x^R y + x y^L - x^R y^L\}$

0. den Conway stvořil: $0 := (\emptyset \mid \emptyset) = \{\ \mid\ \}$.
1. den Conway stvořil: $-1 := (\emptyset \mid 0) = \{|0\}$, $1 := (0 \mid \emptyset) = \{0|\}$.
2. den Conway stvořil: $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$.
3. den Conway stvořil: atd.

Surreálná čísla – neformální konstrukce

- Čísla jsou tvaru $(L|R)$, kde L, R jsou množiny čísel.
- $(L|R)$ je číslo, jestliže $\forall x^L \in L\ \forall x^R \in R\colon x^L \ngeqslant x^R$.
- $x \leqslant y \overset{\text{def.}}{\iff}$ žádné $y^R \leqslant x \quad \wedge \quad y \leqslant$ žádné x^L
- $x+y := \{x^L+y, x+y^L \mid x^R+y, x+y^R\}$ (všechny možnosti!)
- $-x := \{-x^R \mid -x^L\}$
- $x \cdot y := \{x^L y + xy^L - x^L y^L, x^R y + xy^R - x^R y^R \mid x^L y + xy^R - x^L y^R, x^R y + xy^L - x^R y^L\}$

0. den Conway stvořil: $0 := (\emptyset \mid \emptyset) = \{ \mid \}$.

1. den Conway stvořil: $-1 := (\emptyset \mid 0) = \{|0\}$, $1 := (0 \mid \emptyset) = \{0|\}$.

2. den Conway stvořil: $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$.

3. den Conway stvořil: atd.

Surreálná čísla – neformální konstrukce

- Čísla jsou tvaru $(L|R)$, kde L, R jsou množiny čísel.
- $(L|R)$ je číslo, jestliže $\forall x^L \in L\, \forall x^R \in R\colon x^L \not\geqslant x^R$.
- $x \leqslant y \overset{\text{def.}}{\iff}$ žádné $y^R \leqslant x \quad \wedge \quad y \leqslant$ žádné x^L
- $x + y := \{x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R\}$ (všechny možnosti!)
- $-x := \{-x^R \mid -x^L\}$
- $x \cdot y := \{x^L y + x y^L - x^L y^L, x^R y + x y^R - x^R y^R \mid x^L y + x y^R - x^L y^R, x^R y + x y^L - x^R y^L\}$

0. den Conway stvořil: $0 := (\emptyset \mid \emptyset) = \{\ \mid\ \}$.

1. den Conway stvořil: $-1 := (\emptyset \mid 0) = \{|0\}$, $1 := (0 \mid \emptyset) = \{0|\}$.

2. den Conway stvořil: $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$.

3. den Conway stvořil: atd.

Surreálná čísla – neformální konstrukce

- Čísla jsou tvaru $(L|R)$, kde L, R jsou množiny čísel.
- $(L|R)$ je číslo, jestliže $\forall x^L \in L\, \forall x^R \in R\colon x^L \not\geqslant x^R$.
- $x \leqslant y \overset{\text{def.}}{\iff}$ žádné $y^R \leqslant x \quad \wedge \quad y \leqslant$ žádné x^L
- $x + y := \{x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R\}$ (všechny možnosti!)
- $-x := \{-x^R \mid -x^L\}$
- $x \cdot y := \{x^L y + x y^L - x^L y^L, x^R y + x y^R - x^R y^R \mid x^L y + x y^R - x^L y^R, x^R y + x y^L - x^R y^L\}$

0. den Conway stvořil: $0 := (\emptyset \mid \emptyset) = \{\ \mid\ \}$.

1. den Conway stvořil: $-1 := (\emptyset \mid 0) = \{|0\}$, $1 := (0 \mid \emptyset) = \{0|\}$.

2. den Conway stvořil: $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$.

3. den Conway stvořil: atd.

Surreálná čísla – neformální konstrukce

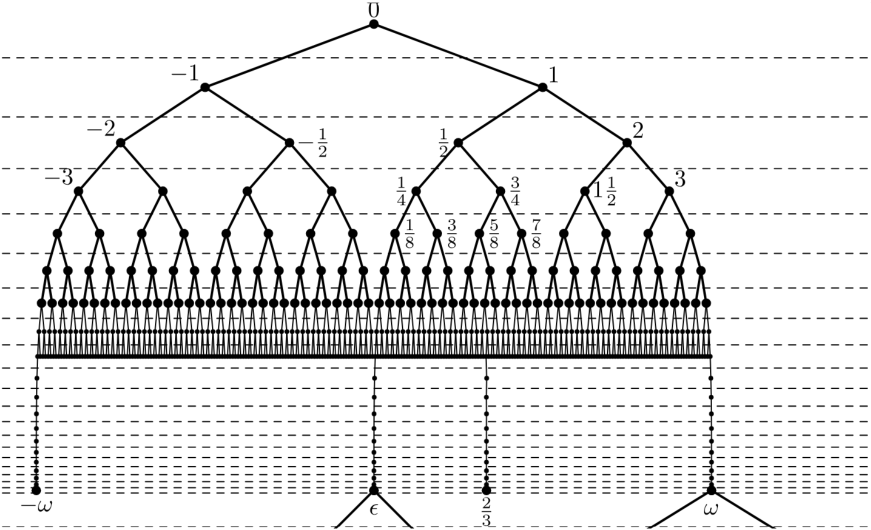
- Čísla jsou tvaru $(L|R)$, kde L, R jsou množiny čísel.
- $(L|R)$ je číslo, jestliže $\forall x^L \in L\, \forall x^R \in R\colon x^L \not\geqslant x^R$.
- $x \leqslant y \overset{\text{def.}}{\iff}$ žádné $y^R \leqslant x \quad \wedge \quad y \leqslant$ žádné x^L
- $x + y := \{x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R\}$ (všechny možnosti!)
- $-x := \{-x^R \mid -x^L\}$
- $x \cdot y := \{x^L y + x y^L - x^L y^L, x^R y + x y^R - x^R y^R \mid x^L y + x y^R - x^L y^R, x^R y + x y^L - x^R y^L\}$

0. den Conway stvořil: $0 := (\emptyset \mid \emptyset) = \{\ \mid\ \}$.
1. den Conway stvořil: $-1 := (\emptyset \mid 0) = \{|0\}$, $1 := (0 \mid \emptyset) = \{0|\}$.
2. den Conway stvořil: $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$.
3. den Conway stvořil: atd.

Surreálná čísla – neformální konstrukce

- Čísla jsou tvaru $(L|R)$, kde L, R jsou množiny čísel.
- $(L|R)$ je číslo, jestliže $\forall x^L \in L\ \forall x^R \in R\colon x^L \not\geqslant x^R$.
- $x \leqslant y \overset{\text{def.}}{\iff}$ žádné $y^R \leqslant x \quad \wedge \quad y \leqslant$ žádné x^L
- $x + y := \{x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R\}$ (všechny možnosti!)
- $-x := \{-x^R \mid -x^L\}$
- $x \cdot y := \{x^L y + x y^L - x^L y^L, x^R y + x y^R - x^R y^R \mid x^L y + x y^R - x^L y^R, x^R y + x y^L - x^R y^L\}$

0. den Conway stvořil: $0 := (\emptyset \mid \emptyset) = \{\ \mid\ \}$.
1. den Conway stvořil: $-1 := (\emptyset \mid 0) = \{|0\}$, $1 := (0 \mid \emptyset) = \{0|\}$.
2. den Conway stvořil: $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$.
3. den Conway stvořil: atd.


0
−1
1
−2
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
2
−3
$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{4}$
$1\frac{1}{2}$
3
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{5}{8}$
$\frac{7}{8}$
$-\omega$
ϵ
$\frac{2}{3}$
ω

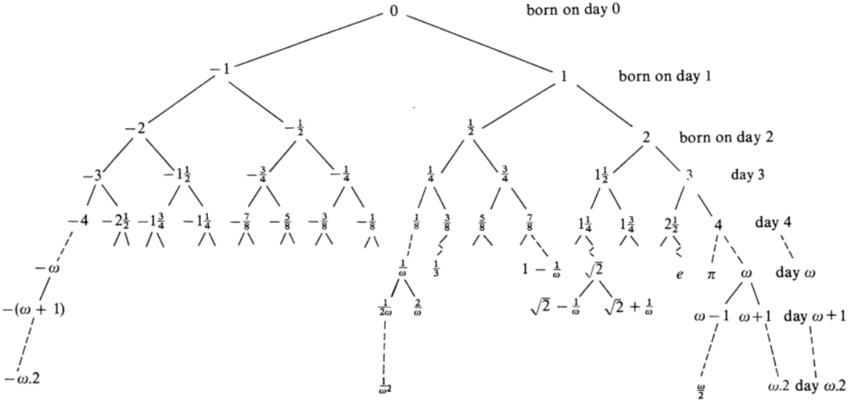
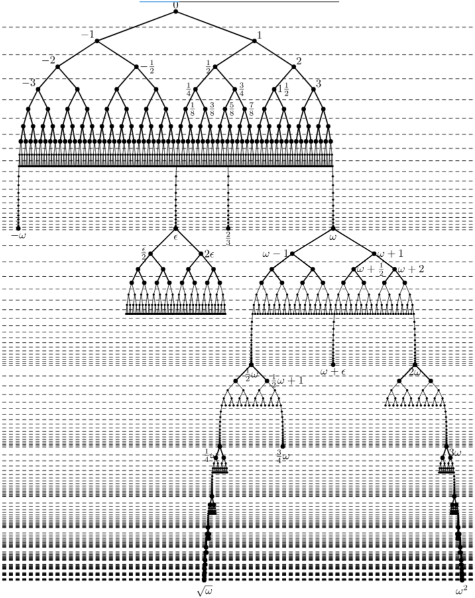
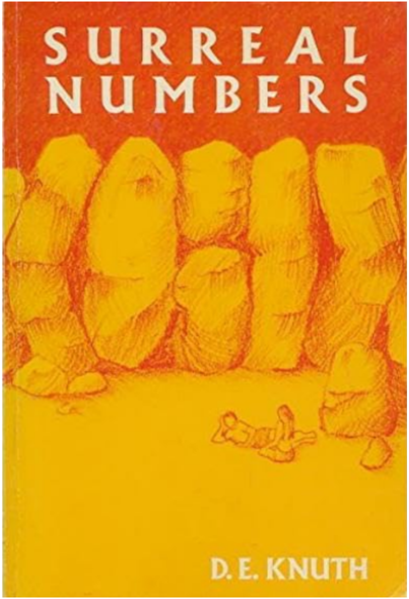


FIG. 0. When the first few numbers were born.


0
−1
1
−2
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
2
−3
$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{4}$
$1\frac{1}{2}$
3
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{5}{8}$
$\frac{7}{8}$
$-\omega$
ϵ
$\frac{2}{3}$
ω
$\frac{\epsilon}{2}$
2ϵ
$\omega-1$
$\omega+1$
$\omega+\frac{1}{2}$
$\omega+2$
$\omega+\epsilon$
$\frac{1}{2}\omega$
$\frac{1}{2}\omega+1$
2ω
$\frac{1}{4}\omega$
$\frac{3}{4}\omega$
3ω
$\sqrt{\omega}$
ω^2


SURREAL
NUMBERS
D. E. KNUTH

Vlastnosti a příklady surreálných čísel

- **No** . . . (vlastní!) třída všech surreálných čísel.
- **No** je lineárně uspořádané třídové těleso.
- $\mathbb{R}$, **On** $\subseteq$ **No**. Tedy také:
- $\frac{1}{\omega}$, $\omega - 1$, $\sqrt[3]{\omega_1 - 1} - \frac{\pi}{\omega}$ atp.
- Platí například $\{0, 1, 2, 3, \dots \mid \omega, \omega/2, \omega/4, \omega/8, \dots\} = \sqrt{\omega}$.

Vlastnosti a příklady surreálných čísel

- **No** . . . (vlastní!) třída všech surreálných čísel.
- **No** je lineárně uspořádané třídové těleso.
- $\mathbb{R}$, **On** $\subseteq$ **No**. Tedy také:
- $\frac{1}{\omega}$, $\omega - 1$, $\sqrt[3]{\omega_1 - 1} - \frac{\pi}{\omega}$ atp.
- Platí například $\{0, 1, 2, 3, \dots \mid \omega, \omega/2, \omega/4, \omega/8, \dots\} = \sqrt{\omega}$.

Vlastnosti a příklady surreálných čísel

- **No** . . . (vlastní!) třída všech surreálných čísel.
- **No** je lineárně uspořádané třídové těleso.
- $\mathbb{R}$, **On** $\subseteq$ **No**. Tedy také:
- $\frac{1}{\omega}$, $\omega - 1$, $\sqrt[3]{\omega_1 - 1} - \frac{\pi}{\omega}$ atp.
- Platí například $\{0, 1, 2, 3, \ldots \mid \omega, \omega/2, \omega/4, \omega/8, \ldots\} = \sqrt{\omega}$.

Vlastnosti a příklady surreálných čísel

- **No** . . . (vlastní!) třída všech surreálných čísel.
- **No** je lineárně uspořádané třídové těleso.
- $\mathbb{R}, \mathbf{On} \subseteq \mathbf{No}$. Tedy také:
- $\frac{1}{\omega}$, $\omega - 1$, $\sqrt[3]{\omega_1 - 1} - \frac{\pi}{\omega}$ atp.
- Platí například $\{0, 1, 2, 3, \ldots \mid \omega, \omega/2, \omega/4, \omega/8, \ldots\} = \sqrt{\omega}$.

Vlastnosti a příklady surreálných čísel

- **No** . . . (vlastní!) třída všech surreálných čísel.
- **No** je lineárně uspořádané třídové těleso.
- $\mathbb{R}$, **On** $\subseteq$ **No**. Tedy také:
- $\frac{1}{\omega}$, $\omega - 1$, $\sqrt[3]{\omega_1 - 1} - \frac{\pi}{\omega}$ atp.
- Platí například $\{0, 1, 2, 3, \dots \mid \omega, \omega/2, \omega/4, \omega/8, \dots\} = \sqrt{\omega}$.

Vlastnosti a příklady surreálných čísel

- **No** . . . (vlastní!) třída všech surreálných čísel.
- **No** je lineárně uspořádané třídové těleso.
- $\mathbb{R}$, **On** $\subseteq$ **No**. Tedy také:
- $\frac{1}{\omega}$, $\omega - 1$, $\sqrt[3]{\omega_1 - 1} - \frac{\pi}{\omega}$ atp.
- Platí například $\{0, 1, 2, 3, \dots \mid \omega, \omega/2, \omega/4, \omega/8, \dots\} = \sqrt{\omega}$.

Děkuji za pozornost!