

Cesty k matematice, Praha, 19. 9. 2024

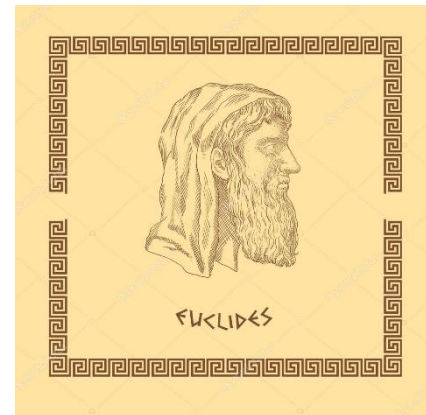
Spojnice dvou bodů aneb od úsečky po šroubovici

Josef Molnár, Lenka Juklová

π

Eukleidés: Základy

- › Bod je to, co nemá části.
- › Čára je délka bez šířky.
- › Kraje čáry jsou body.
- › Přímka je čára, která má vzhledem na body na ní ležící rovnou polohu.
- › Od libovolného bodu k libovolnému bodu lze vést přímku.
- › Ohraničenou přímku lze po přímce spojitě prodlužovat.



Čára

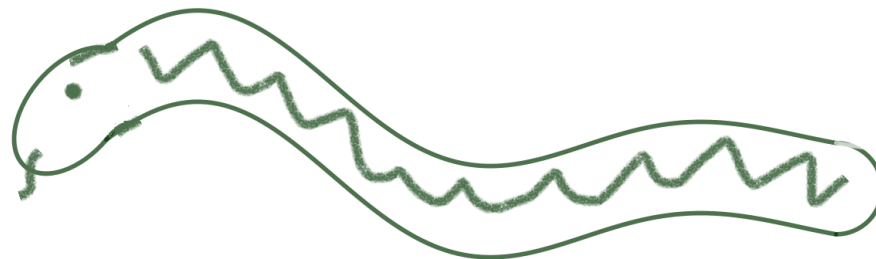
- › Čára je stopa pohybujícího se bodu.



π

Čára

› Čára je stopa pohybujícího se bodu.



Čára

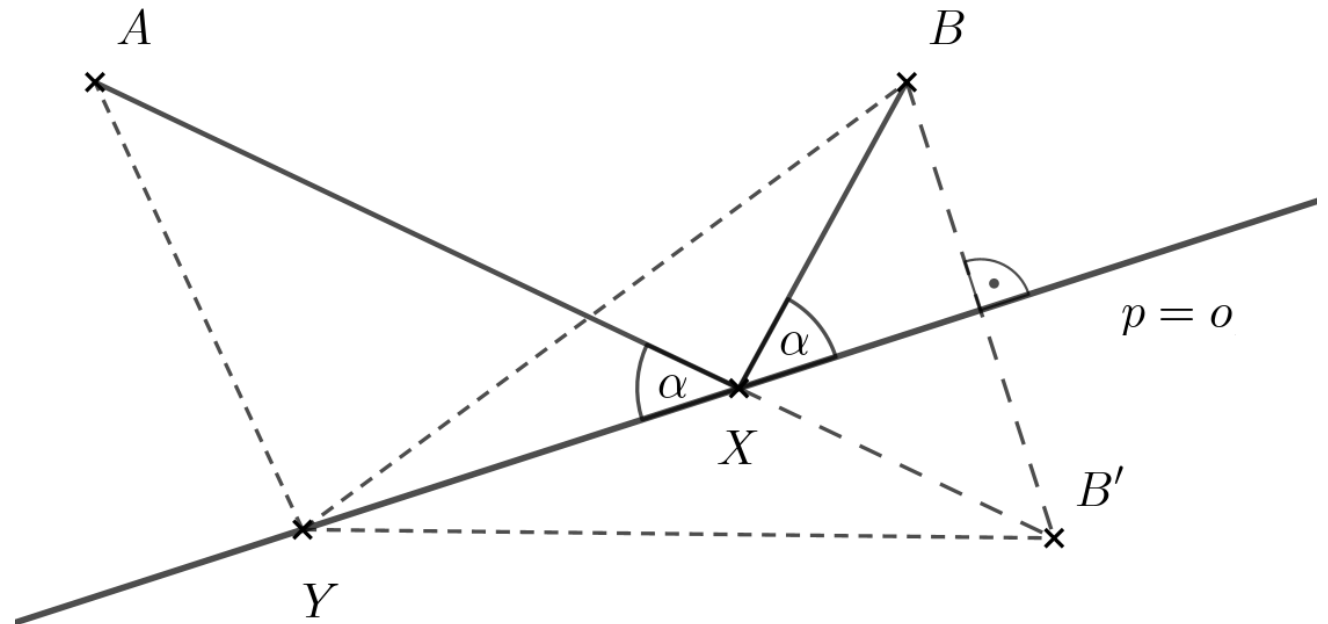
- › Nejkratší čarou spojující dva body v rovině a v prostoru je úsečka.



NEJKRATŠÍ LOMENÉ ČÁRY

Příklad 1

Body A, B leží v téže polorovině s hraniční přímkou p . Najděte na přímce p bod X tak, aby součet $|AX| + |BX|$ byl minimální.



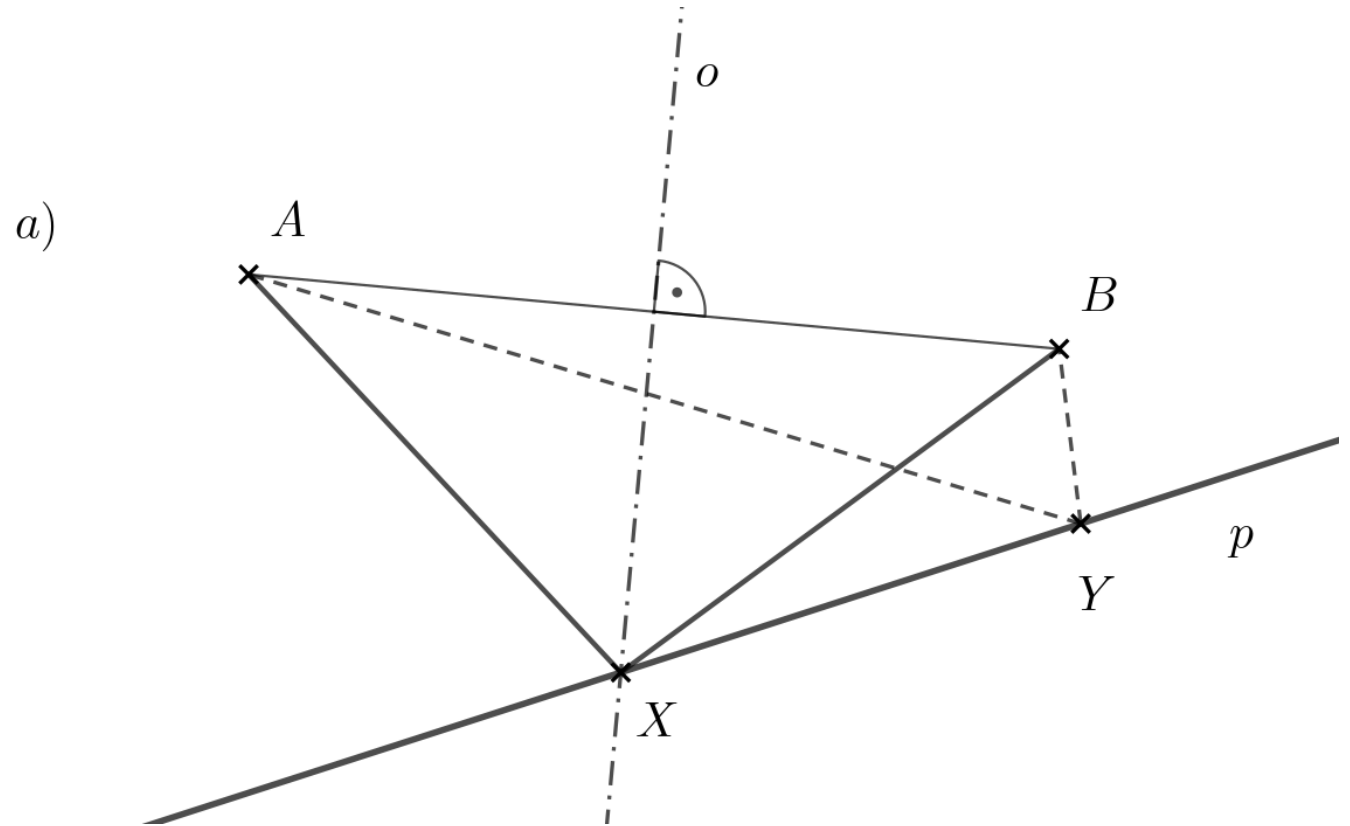
NEJKRATŠÍ LOMENÉ ČÁRY

Příklad 2

V rovině jsou dány body A, B a přímka p . Najděte na přímce p bod X tak, aby $||AX| - |BX||$ byl

a) minimální,

b) maximální.



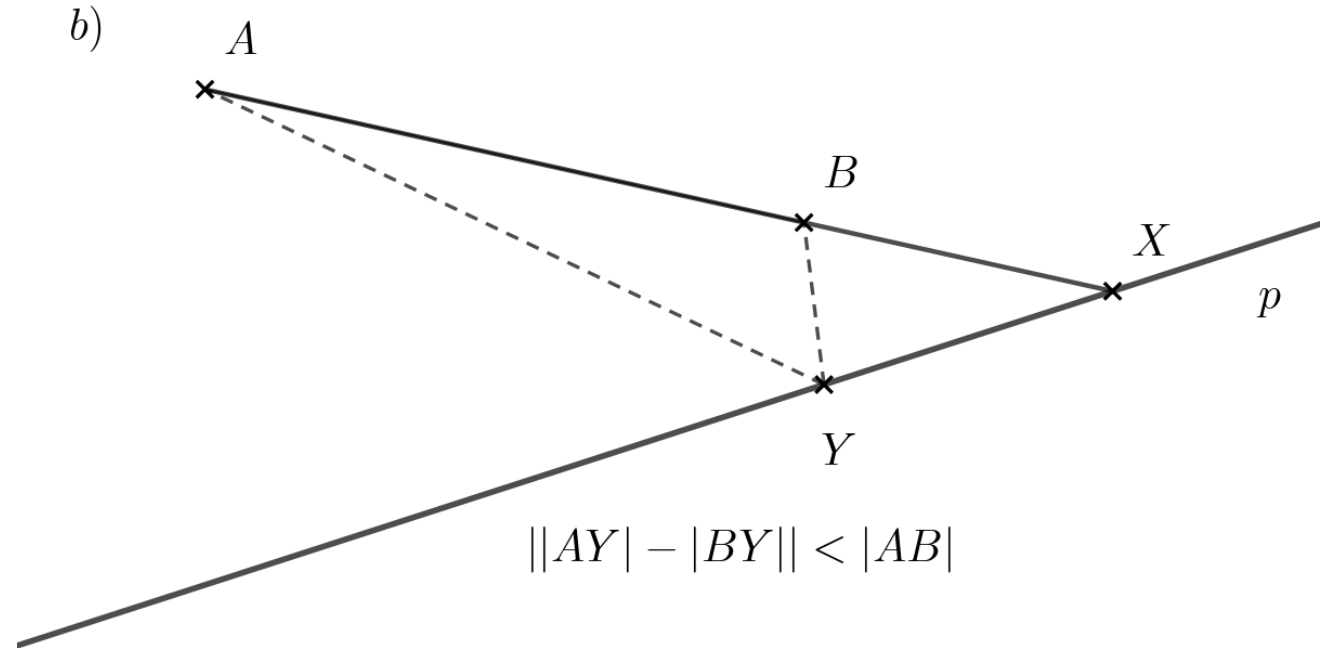
NEJKRATŠÍ LOMENÉ ČÁRY

Příklad 2

V rovině jsou dány body A, B a přímka p . Najděte na přímce p bod X tak, aby $||AX| - |BX||$ byl

a) minimální,

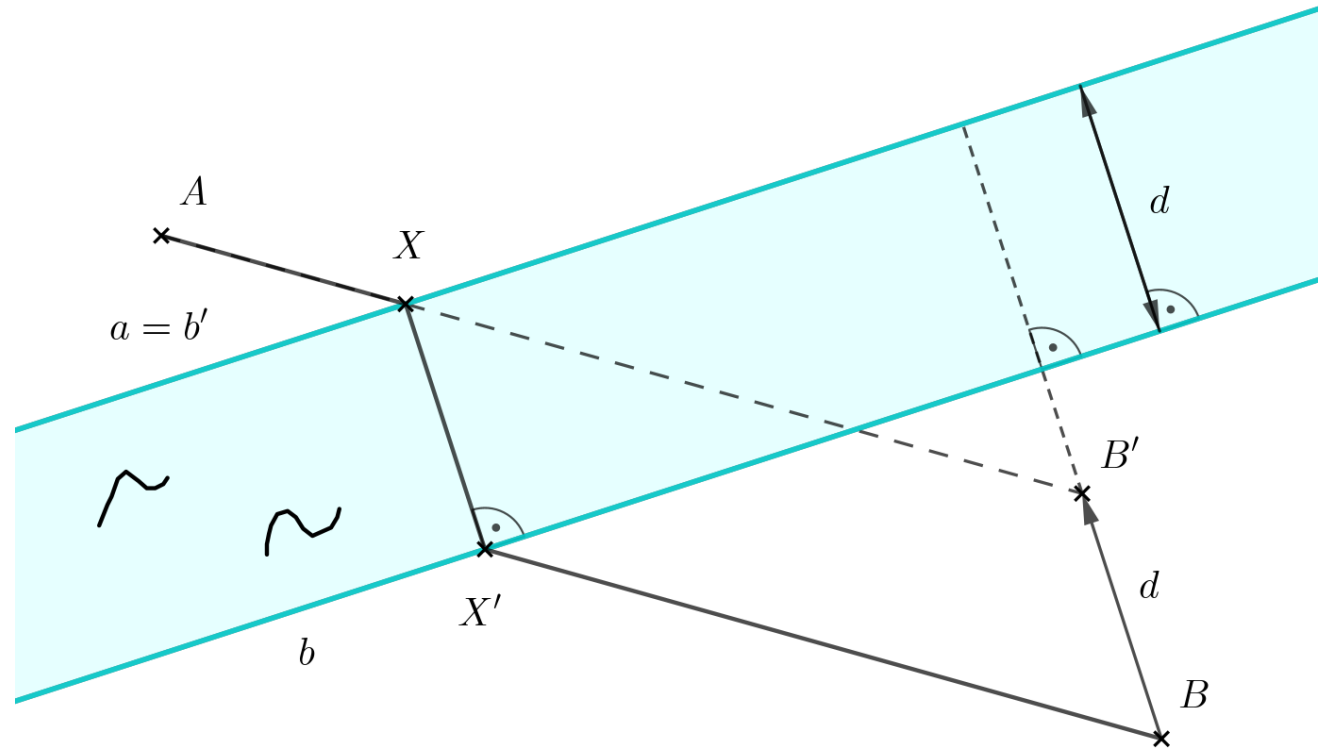
b) maximální.



NEJKRATŠÍ LOMENÉ ČÁRY

Příklad 3

Osady A, B leží na opačných březích přímého toku řeky. Určete místo, kde je potřeba postavit most, aby plánovaná silnice byla co nejkratší.

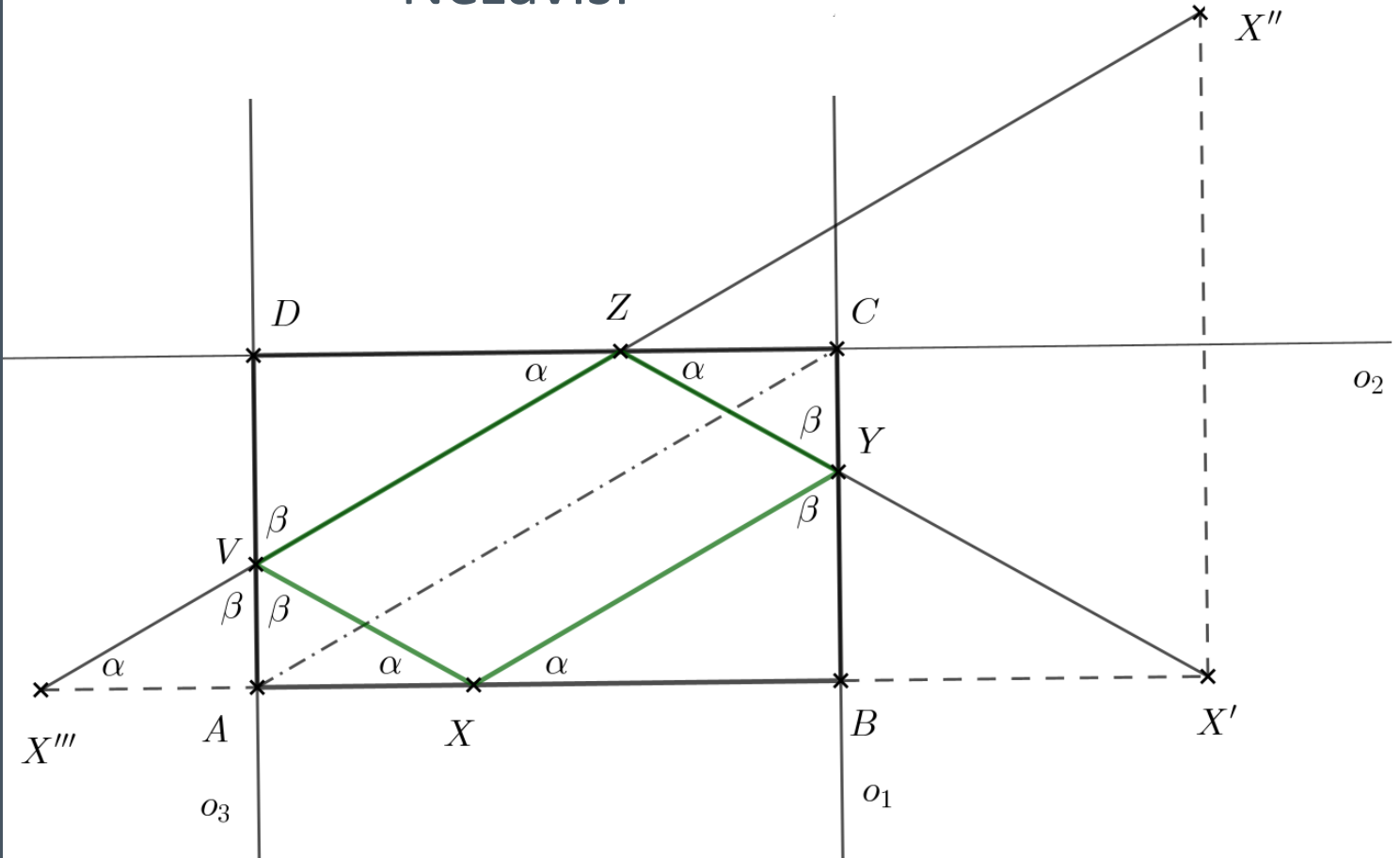


NEJKRATŠÍ LOMENÉ ČÁRY

Příklad 4

Bod X je vnitřním bodem strany AB daného obdélníku $ABCD$. Najděte body Y, Z, V postupně na stranách BC, CD, AD tak, aby délka uzavřené lomené čáry $XYZVX$ byla minimální. Závisí její délka na poloze bodu X ?

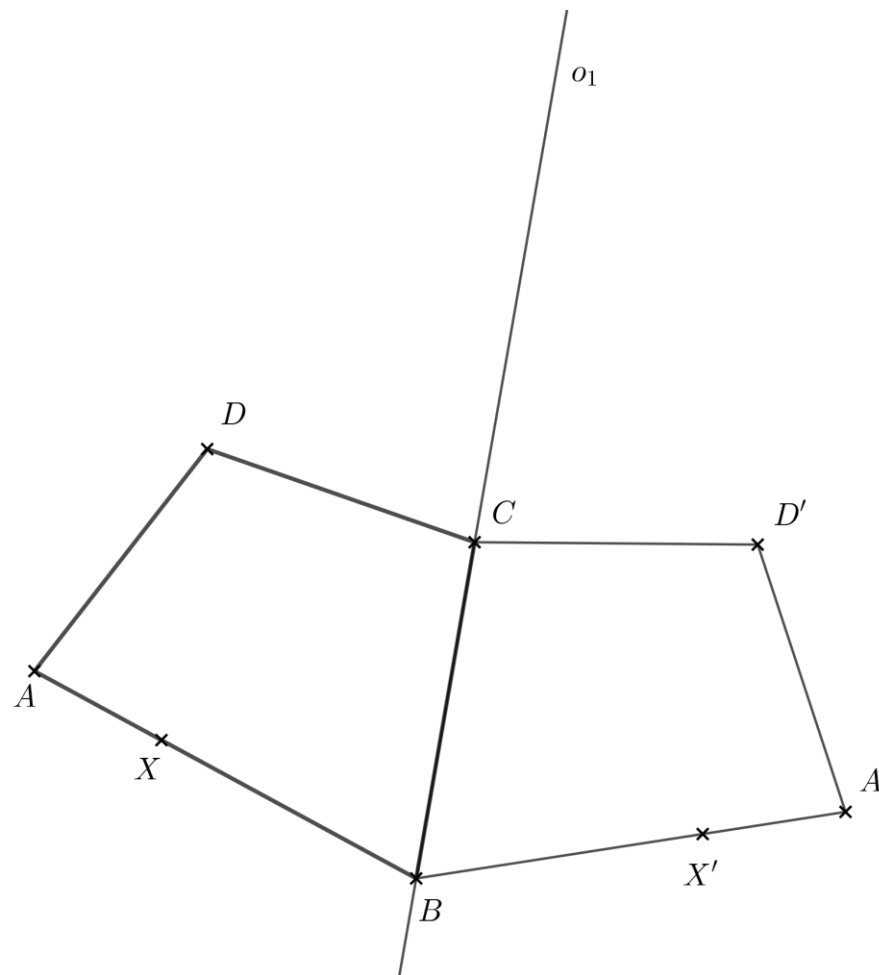
Nezávisí



NEJKRATŠÍ LOMENÉ ČÁRY

Příklad 5

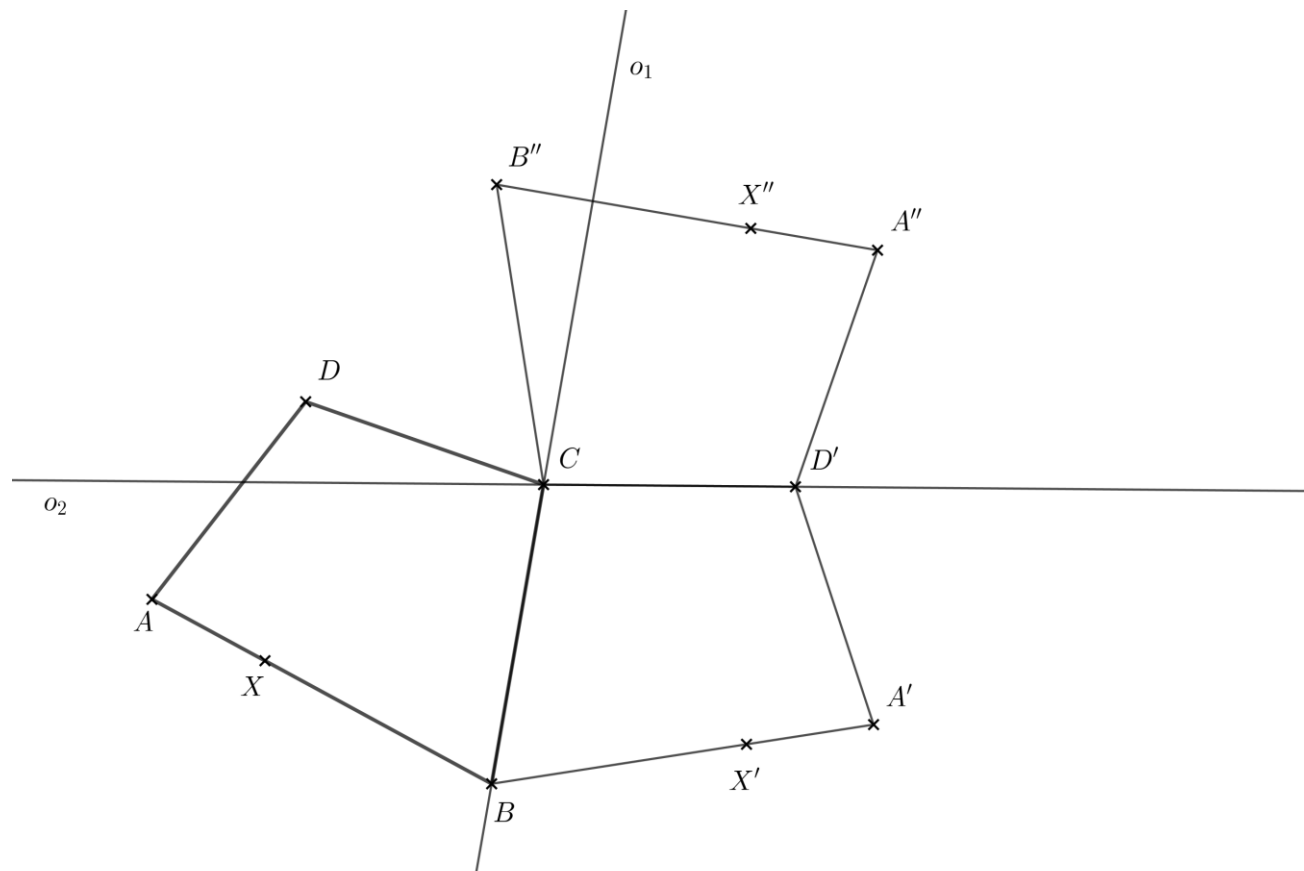
Zobecněte předchozí
úlohu pro obecný
konvexní čtyřúhelník.



NEJKRATŠÍ LOMENÉ ČÁRY

Příklad 5

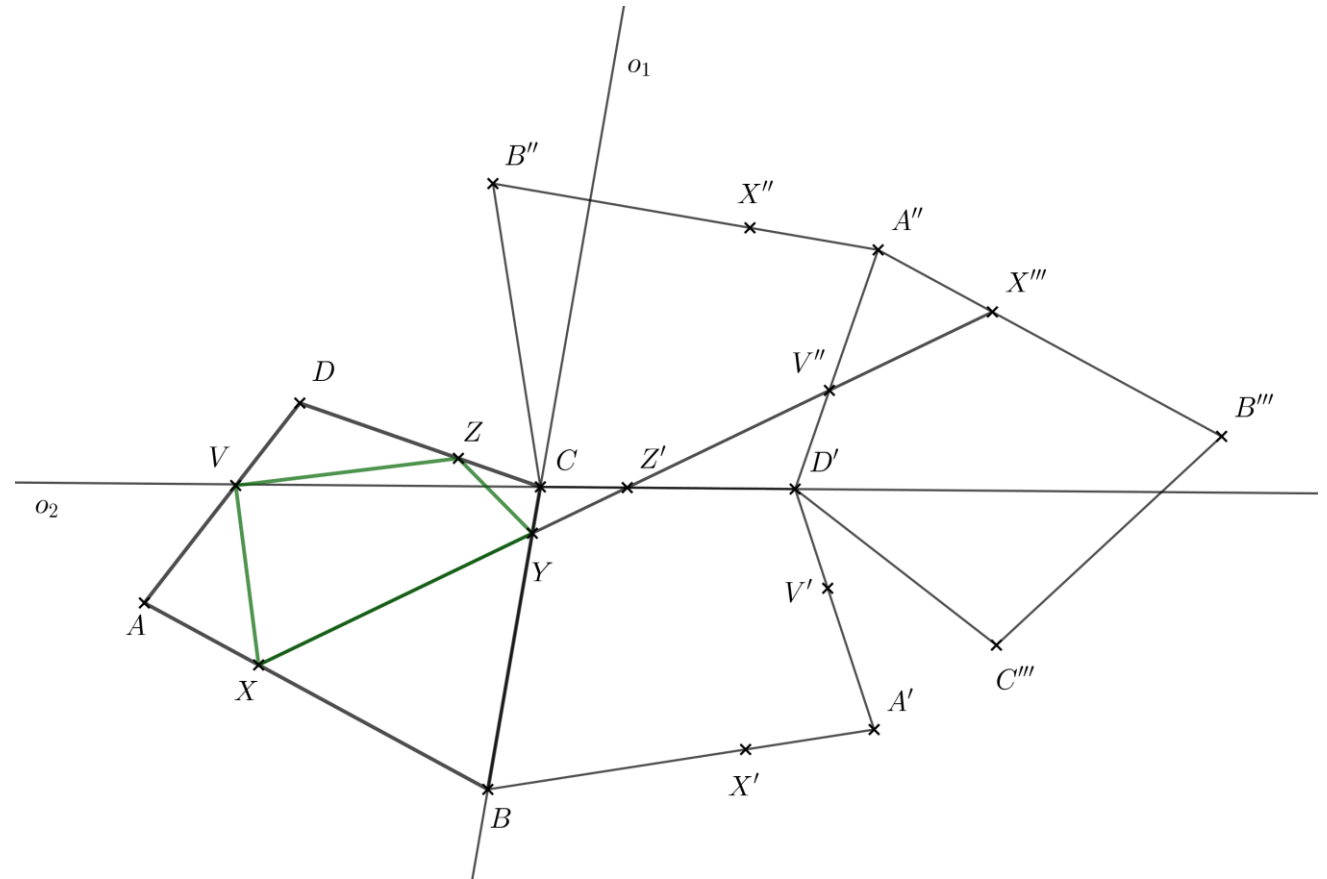
Zobecněte předchozí
úlohu pro obecný
konvexní čtyřúhelník.



NEJKRATŠÍ LOMENÉ ČÁRY

Příklad 5

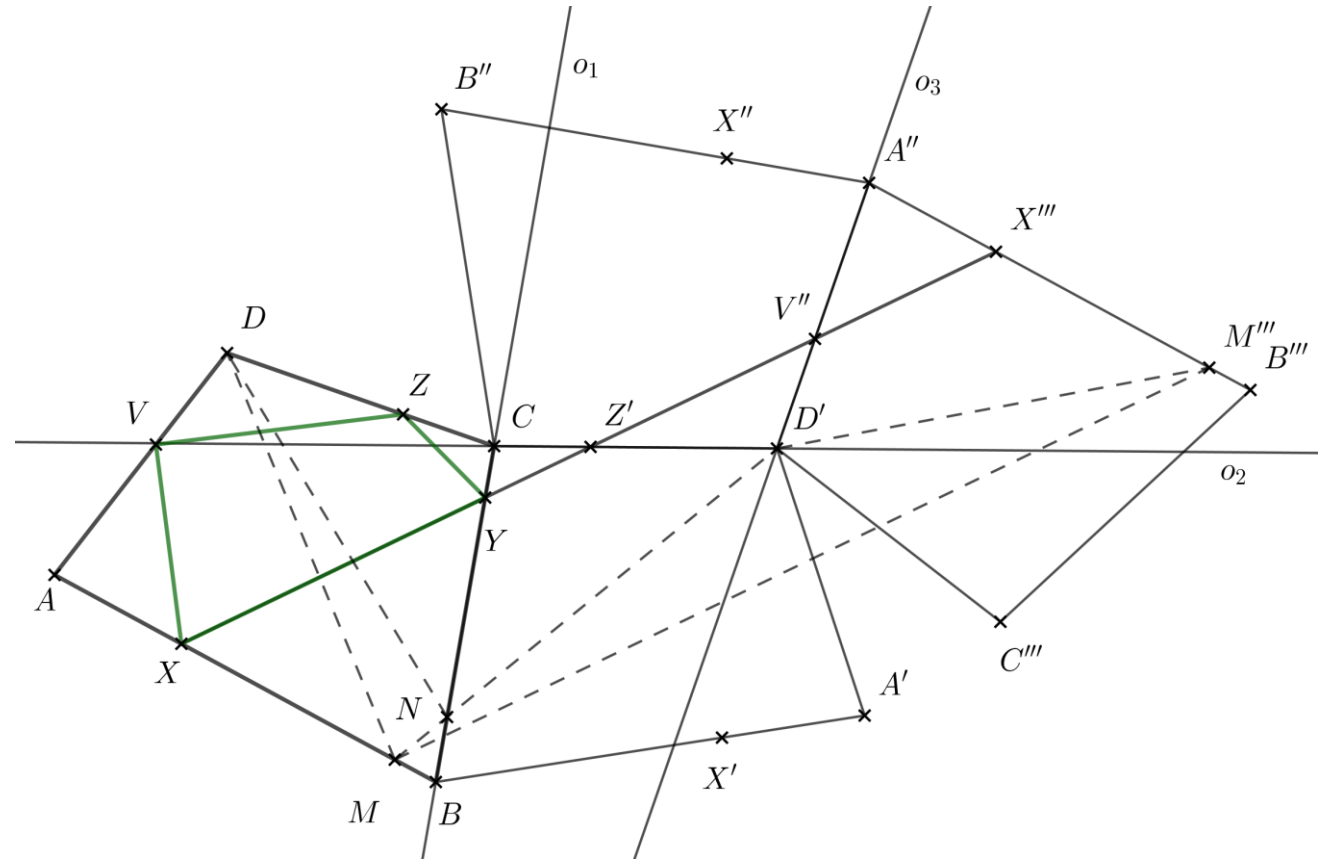
Zobecněte předchozí
úlohu pro obecný
konvexní čtyřúhelník.



NEJKRATŠÍ LOMENÉ ČÁRY

Příklad 5

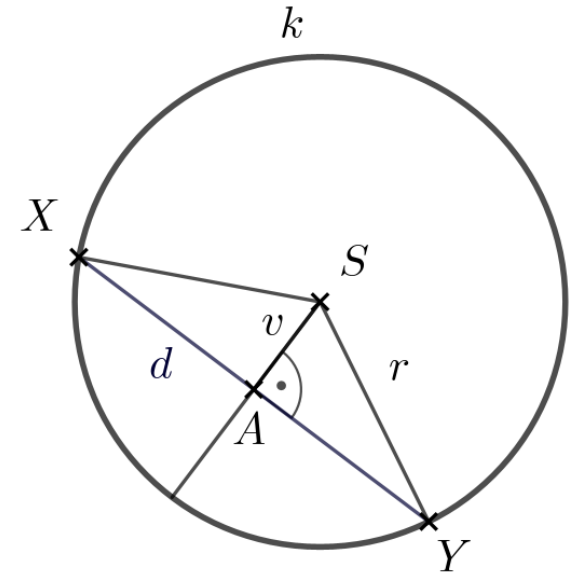
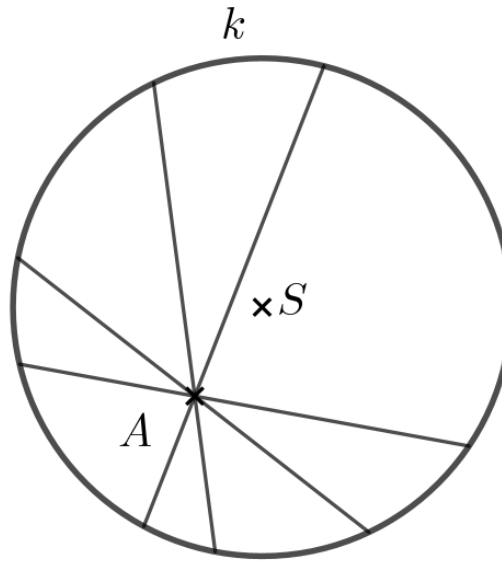
Zobecněte předchozí
úlohu pro obecný
konvexní čtyřúhelník.



JINÉ EXTREMÁLNÍ ÚLOHY V ROVINĚ

Příklad 6

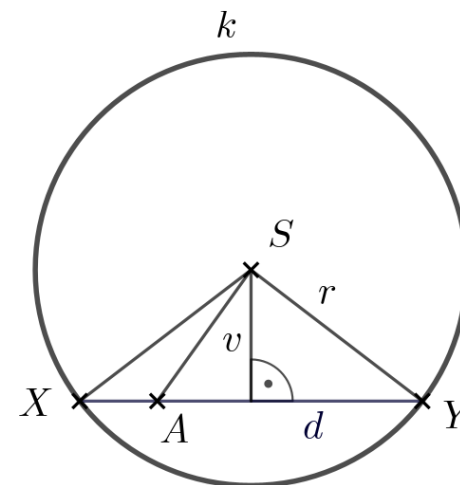
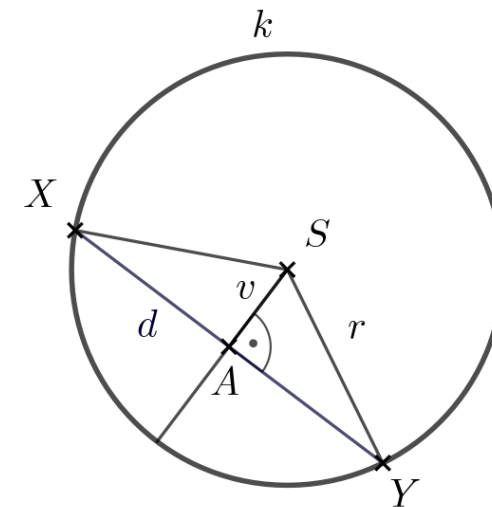
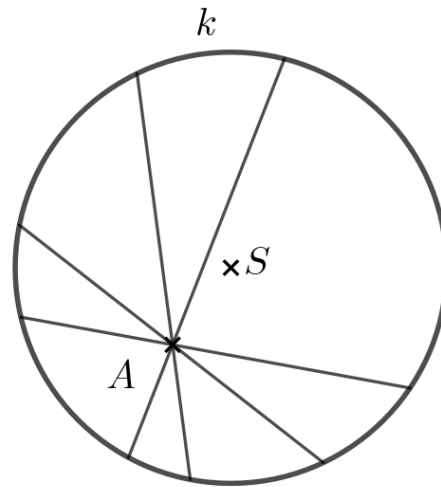
Bod A je vnitřním
bodem kruhu s
hraniční kružnicí
 $k(S, r)$. Najděte
nejkratší tětivu XY
této kružnice
procházející bodem
 A .



JINÉ EXTREMÁLNÍ ÚLOHY V ROVINĚ

Příklad 6

Bod A je vnitřním bodem kruhu s hraniční kružnicí $k(S, r)$. Najděte nejkratší tětivu XY této kružnice procházející bodem A .



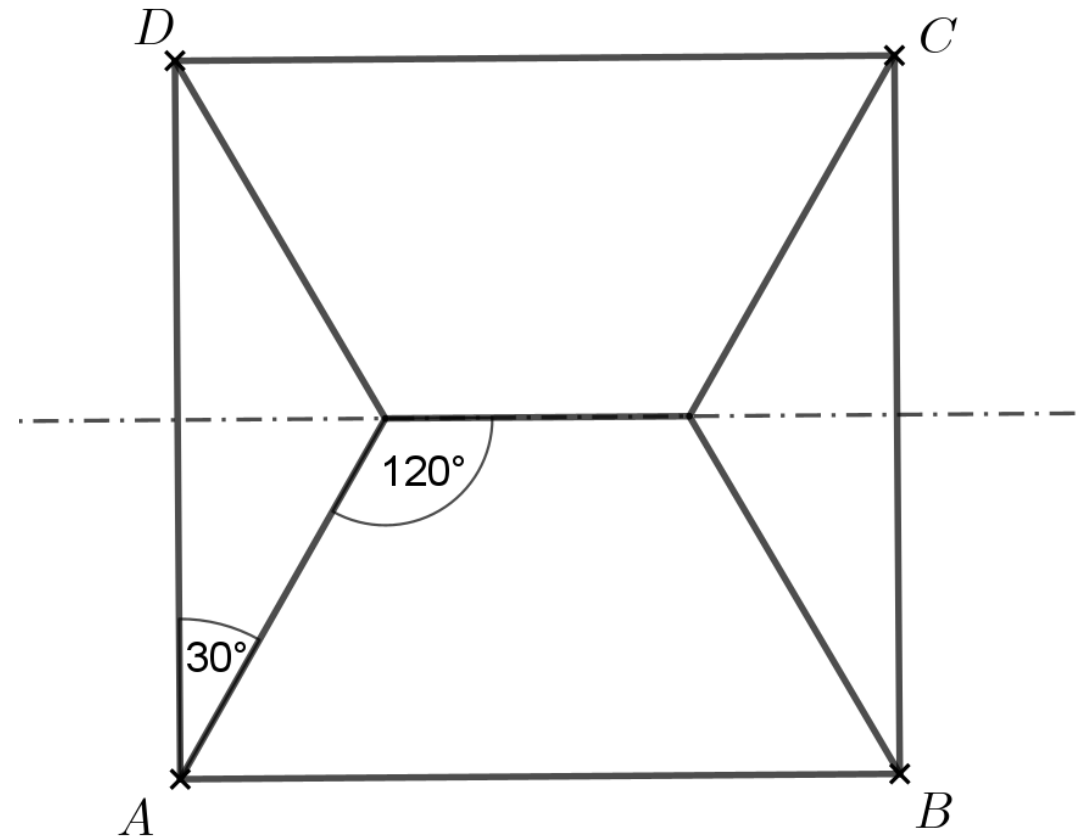
$$d = 2\sqrt{r^2 - v^2}$$

v je největší pro $XY \perp SA$

JINÉ EXTREMÁLNÍ ÚLOHY V ROVINĚ

Příklad 7

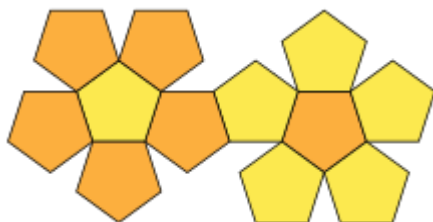
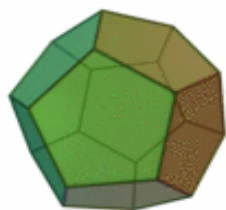
Park má tvar čtverce o straně délky 2 km , vchody do parku jsou ve všech vrcholech čtverce. Navrhněte trasy chodníků v parku tak, aby bylo možné přejít z jednoho vrcholu do kteréhokoli jiného a celková trasa chodníků byla co nejkratší.



Minimální délka $d = 4/\cos 30^\circ + 2(1 - \tan 30^\circ) \doteq 5,464$

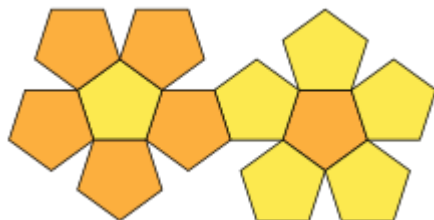
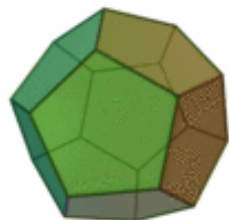
Nejkratší spojnice na hranicích hranatých těles

- › Příklad 8
- › Kolik různých sítí má a) pravidelný čtyřstěn, b) krychle?
- › Odhadněte pro pravidelný dvanáctistěn.
- › Projděte po hranách všemi vrcholy dvanáctistěnu, přičemž každým vrcholem projdete právě jednou.



Nejkratší spojnice na hranicích hranatých těles

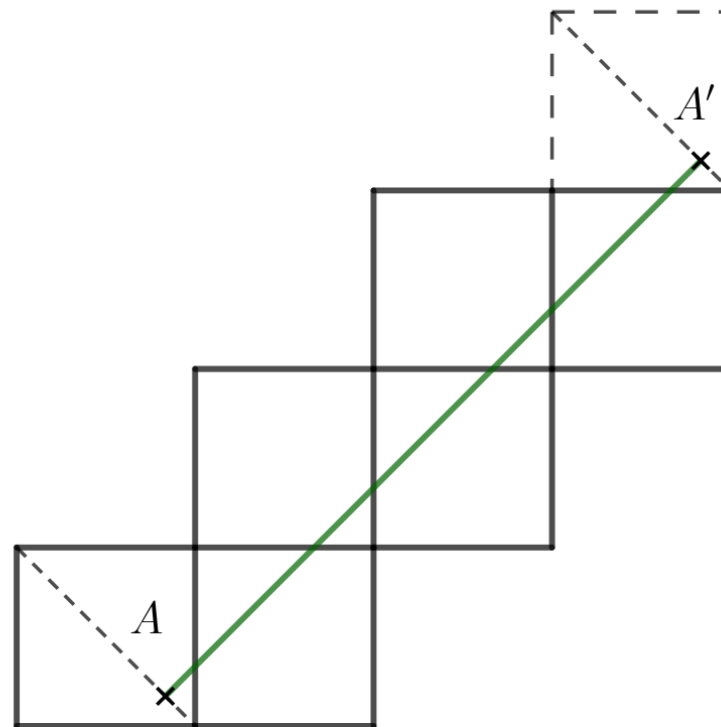
- › Příklad 8
- › Kolik různých sítí má a) pravidelný čtyřstěn, b) krychle? **(2, 11)**
- › Odhadněte pro pravidelný dvanáctistěn. **(43 380)**
- › Projděte po hranách všemi vrcholy dvanáctistěnu, přičemž každým vrcholem projdete právě jednou.



NEJKRATŠÍ SPOJNICE NA HRANICÍCH HRANATÝCH TĚLES

Příklad 9

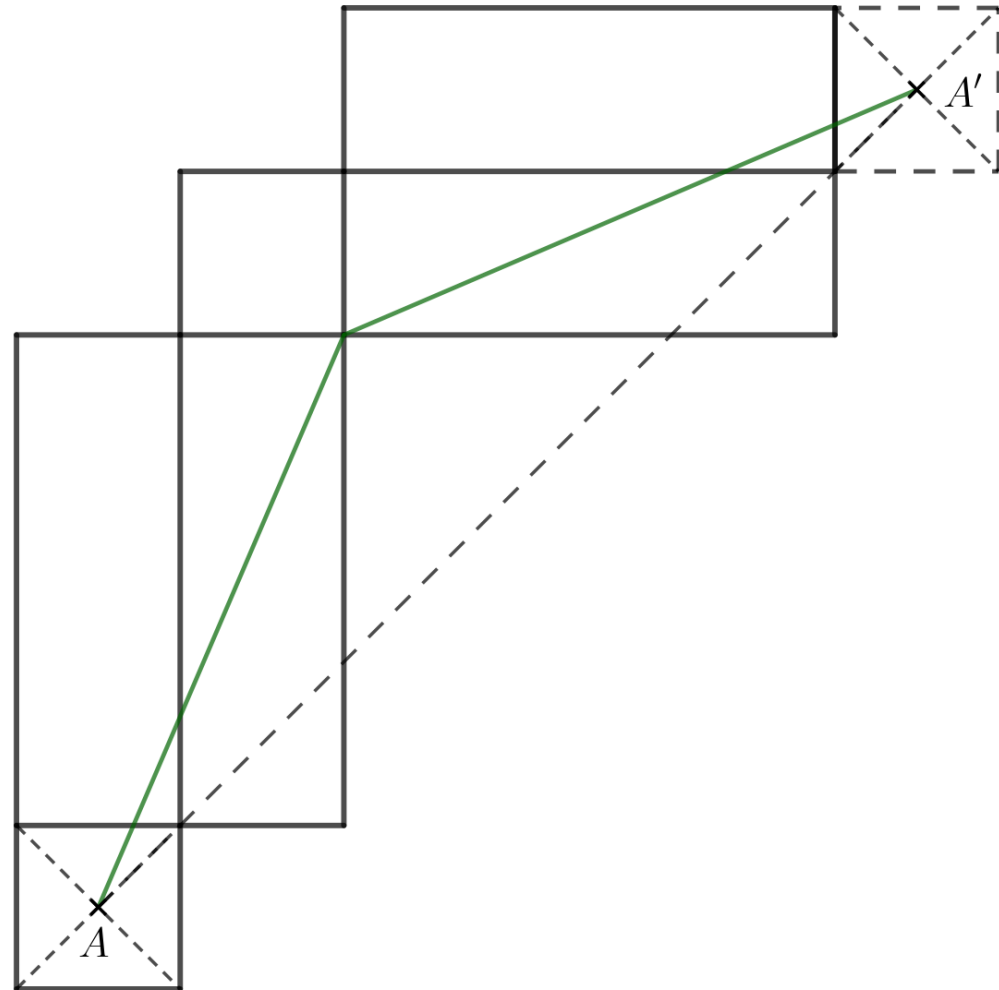
Bod A leží na hranici krychle. Najděte nejkratší uzavřenou lomenou čáru, která celá leží na hranici krychle, prochází bodem A a s každou stěnou má společný vnitřní bod. (Ukažte, že podobná úloha pro hranol nemusí mít řešení.)



NEJKRATŠÍ SPOJNICE NA HRANICÍCH HRANATÝCH TĚLES

Příklad 9

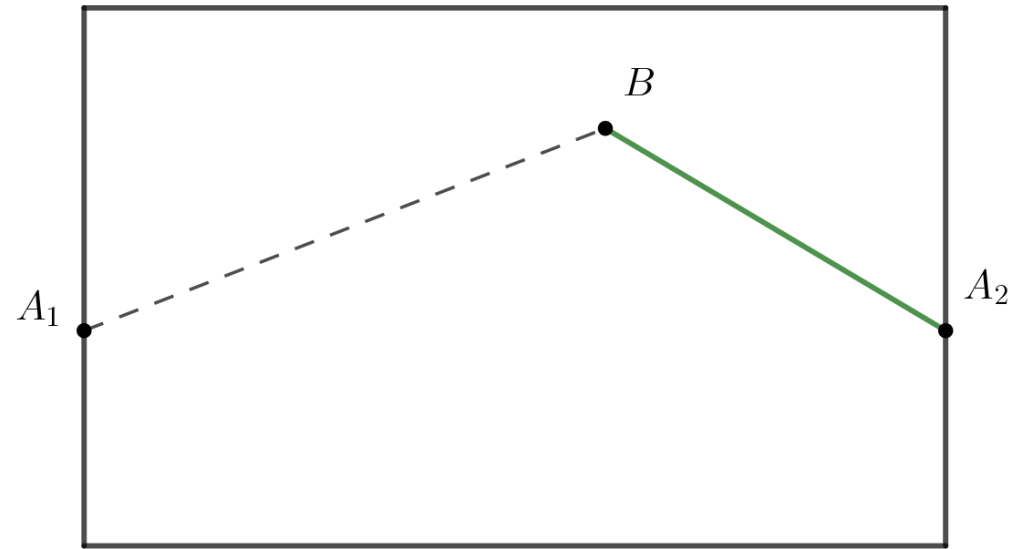
Bod A leží na hranici krychle. Najděte nejkratší uzavřenou lomenou čáru, která celá leží na hranici krychle, prochází bodem A a s každou stěnou má společný vnitřní bod. (Ukažte, že podobná úloha pro hranol nemusí mít řešení.)



ŠROUBOVICE

Příklad 10

Najděte nejkratší spojnici dvou bodů na rotační válcové ploše.

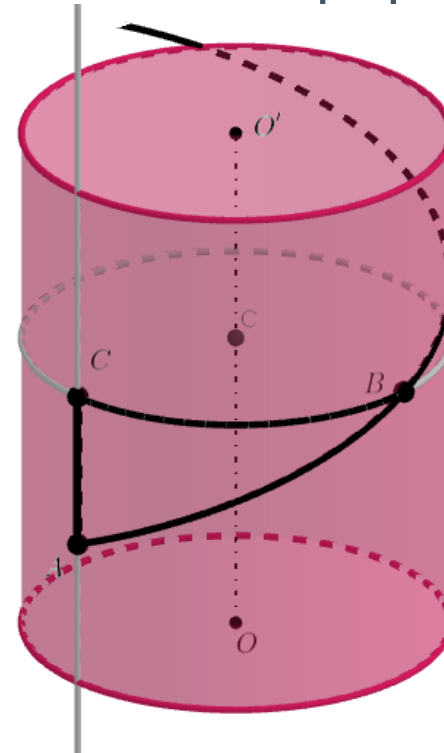


ŠROUBOVICE

Příklad 10

Najděte nejkratší spojnici dvou bodů na rotační válcové ploše.

- › Nejkratší spojnice dvou bodů na rotační válcové ploše je
 - úsečka, leží-li body na téže povrchové přímce
 - oblouk kružnice, leží-li body v téže rovině kolmé k ose plochy
 - šroubovice v ostatních případech



Šroubovice

- › vzniká složením rovnoměrného otáčivého pohybu kolem pevné přímky (**osy šroubového pohybu**) a rovnoměrného posuvného pohybu v jejím směru

Šroubový pohyb

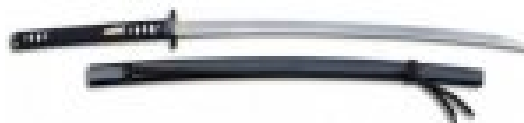
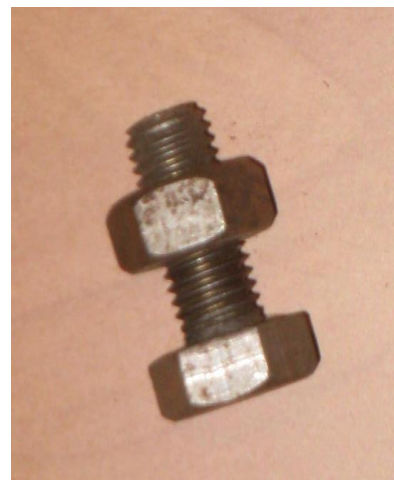
- › je dráha (trajektorie) bodu při šroubovém pohybu
- › osa šroubového pohybu se nazývá **osa šroubovice**

Šroubovice (helix)

- › je křivka, kterou opíše bod P při rovnoměrném pohybu po kružnici k a současném rovnoměrném posuvu kružnice k ve směru její prostorové osy o jdoucí středem kružnice kolmo k její rovině
- › leží na rotační válcové ploše
- › za speciální případy šroubovice lze považovat přímku o , případně též kružnici k

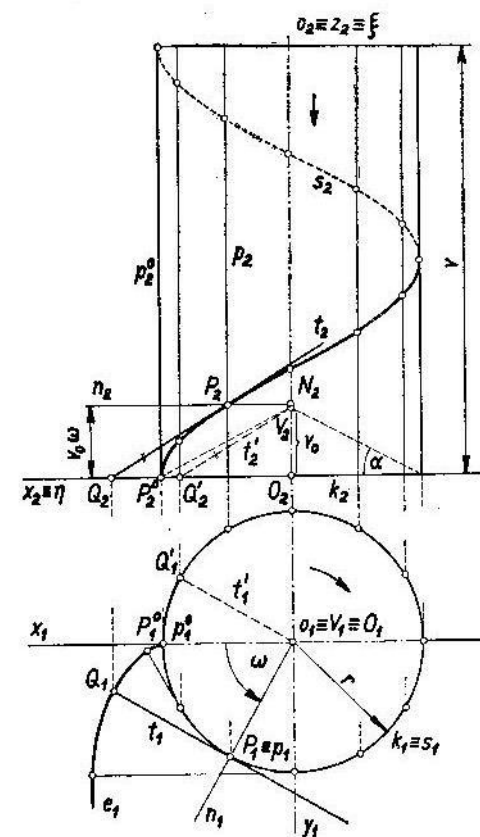
π

Přímka, kružnice a šroubovice jsou jediné tzv. **po sobě pošinovatelné křivky**.



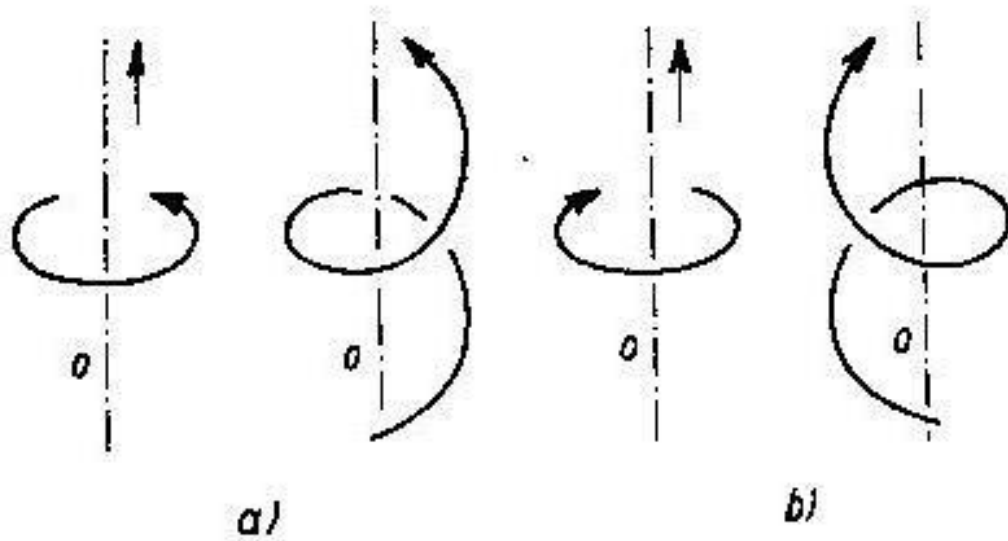
Závit šroubovice

- › je stopou bodu šroubovice při otočení o plný úhel.
- › velikost odpovídajícího posunutí se nazývá **výška závitu**.
- › šroubovice je jednoznačně určena:
 - poloměrem kružnice k
 - výškou závitu v
 - točivostí (orientací)



π

Pravotočivá nebo levotočivá ?



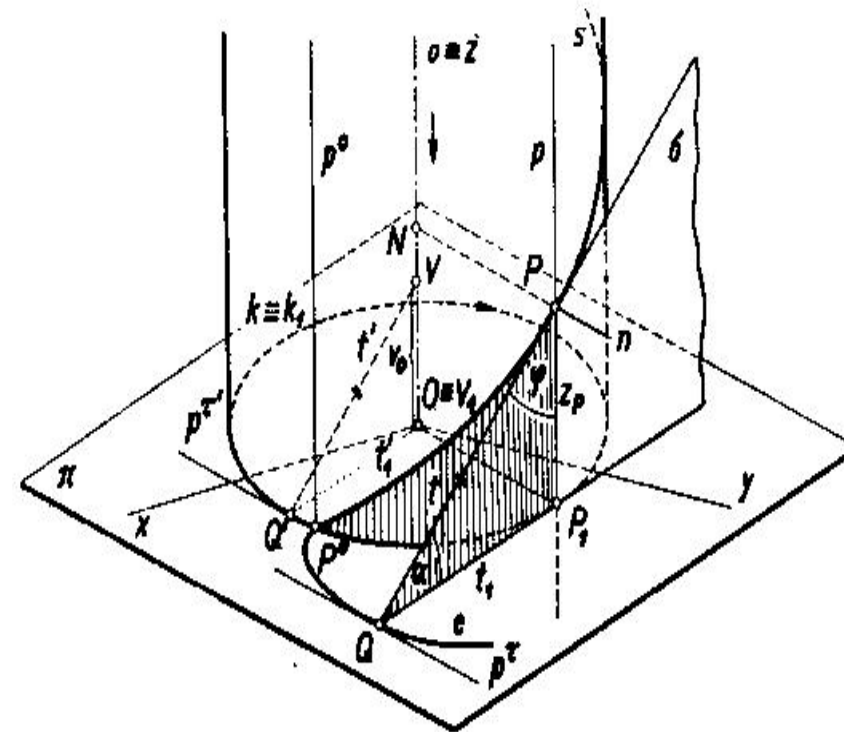
a) pravotočivá

b) levotočivá



Tečny šroubovice

- › tečny šroubovice svírají s její osou konstantní úhel
- › tj. šroubovice je křivka konstantního spádu.



π

Průměty šroubovice

- › kružnice
- › sinusoida
- › cykloida
 - prostá
 - prodloužená
 - zkrácená
- › spirála



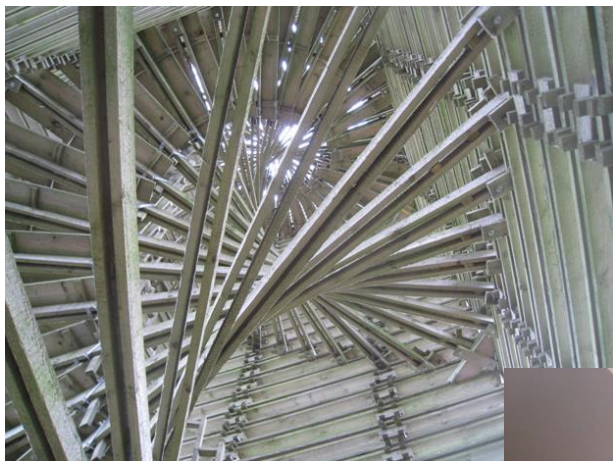
π

Šroubovice v architektuře – dříve



π

Šroubovice v architektuře – nyní



π

Šroubovice v přírodě – flóra



Šroubovice v přírodě – fauna



π

Šroubovice v technice



π

Obecné šroubovice

... V PŘÍRODĚ



... V TECHNICE



π

... v designu



π

... v lidovém umění



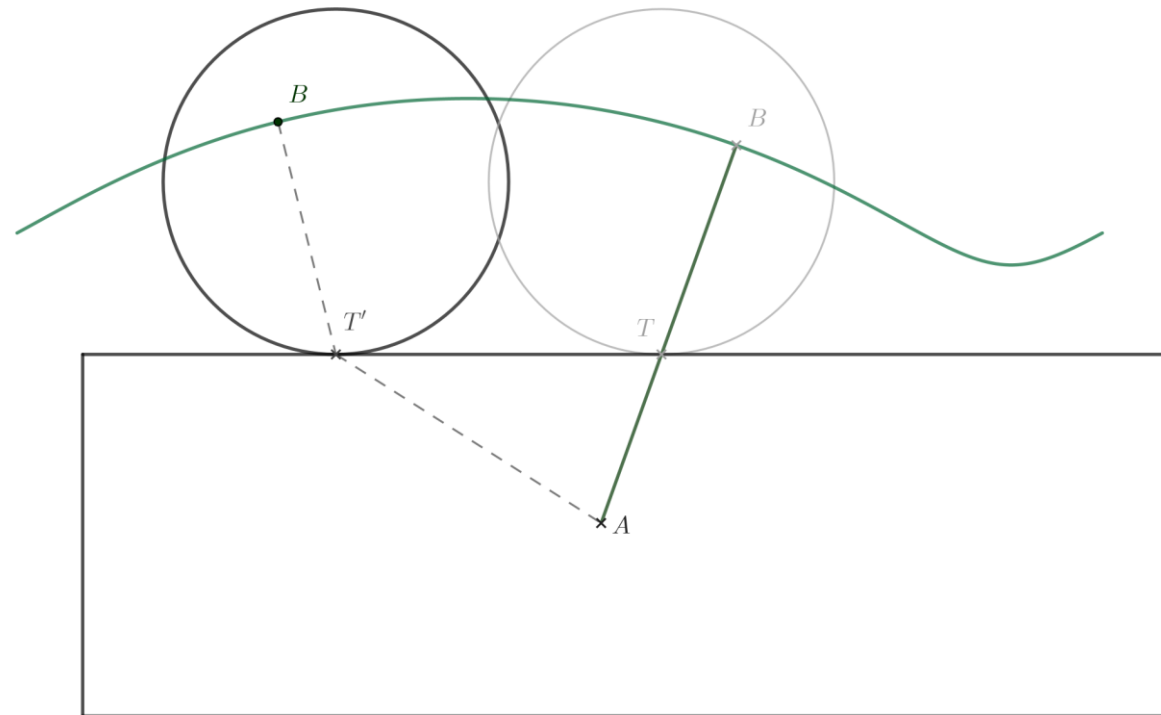
Šroubovice v chemii

- › sekundární struktura DNA
dvoušroubovice (dihelix)



NEJKRATŠÍ SPOJNICE NA HRANICI ROTAČNÍHO VÁLCE

Na hranici rotačního válce sestrojte nejkratší spojnici bodů A , B , když bod A je vnitřním bodem podstavy a bod B vnitřním bodem pláště.



Literatura

- › Josef Molnár, Jiří Kobza: *Extremální a kombinatorické úlohy z geometrie*. SPN, Praha, 1990

Metoda drobných dárků

„Z každé přednášky si má posluchač něco odnést. „

aneb

„Šroubovice do každé lavice.“