

Cesty k matematice, Praha, 19. 9. 2024

Nejkratší spojnice dvou bodů na kouli řešená sférickou geometrií

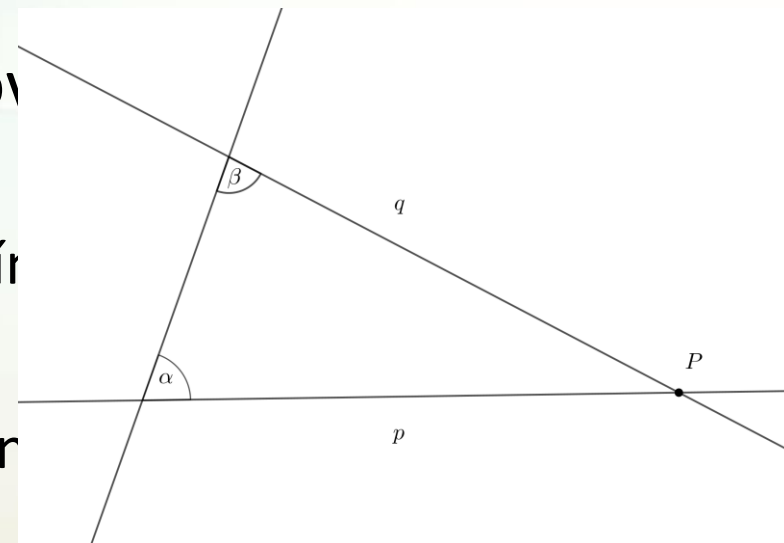
Lenka Juklová

Eukleidovská geometrie v rovině i prostoru

- 5 postulátů – rovinná geometrie a prostorová, popis „plochého světa“
 1. Od kteréhokoli bodu ke kterémukoli lze vést přímku
 2. Přímku omezenou lze neomezeně prodloužit
 3. Z jakéhokoli středu a jakýmkoli poloměrem lze narýsovat kružnici
 4. Všechny pravé úhly jsou si rovny
 5. Když přímka protíná dvě přímky a tvoří na téže straně vnitřní úhly menší, než dva pravé (součet), pak ty dvě přímky, sbíhající se do nekonečna sbíhají se na té straně, kde jsou úhly menší než dva pravé

Eukleidovská geometrie v rovině i prostoru

- 5 postulátů – rovinná geometrie a prostorová geometrie „světa“
 1. Od kteréhokoli bodu ke kterémukoli lze vést přímku
 2. Přímku omezenou lze neomezeně prodloužit
 3. Z jakéhokoli středu a jakýmkoli poloměrem lze nakreslit kružnici
 4. Všechny pravé úhly jsou si rovny
 5. Když přímka protíná dvě přímky a tvoří na téže straně vnitřní úhly menší, než dva pravé (součet), pak ty dvě přímky, sbíhající se do nekonečna sbíhají se na té straně, kde jsou úhly menší než dva pravé

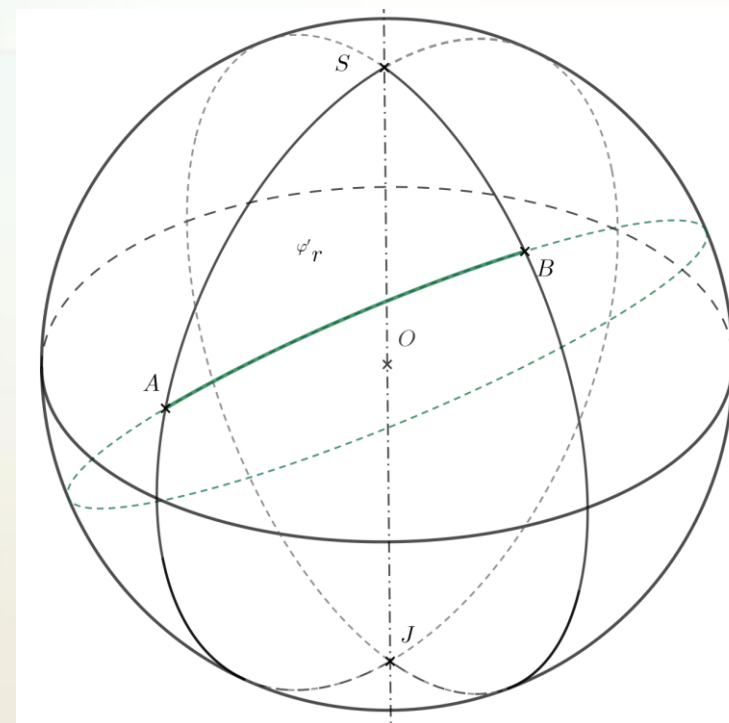


Neeukleidovské geometrie

- spor o 5. postulát – nelze jej odvodit z ostatních tezí v Základech (Lobačevskij, Bolyai, Riemann, ...)
- vznik neeukleidovských geometrií
- sférická geometrie – zabývá se vztahy mezi body a jistými kružnicemi na ploše kulové, ozn. $\kappa = (O, r)$
 - hlavní kružnice kulové plochy, $k = (O, r)$, její rovina prochází středem kulové plochy

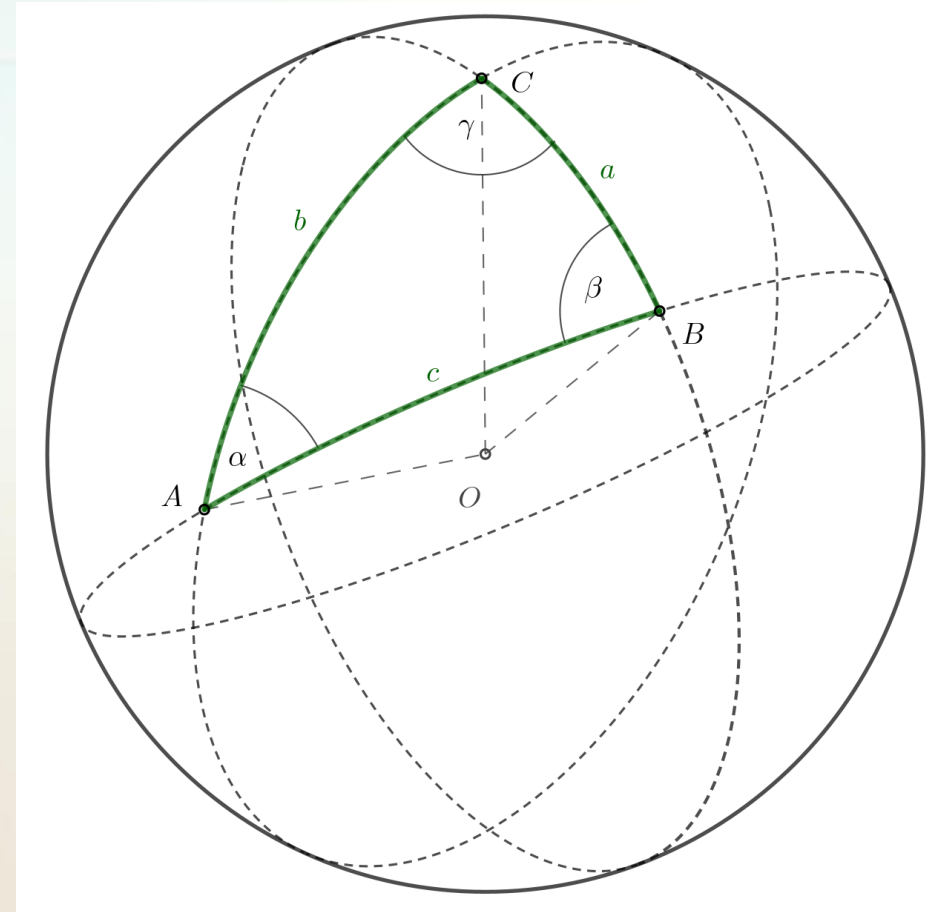
Sférická geometrie

- analogie přímek euklidovské roviny – hlavní kružnice kulové plochy
 - „přímka“ – uzavřená křivka
 - všechny „přímky“ mají stejnou délku, $2\pi r$
- nejkratší spojnice (tzv. ortodroma) 2 bodů kulové plochy je částí hlavní kružnice
- protilehlé body hlavní kružnice – póly
- sférický dvojúhelník – tvořen oblouky hlavních kružnic se stejnými póly



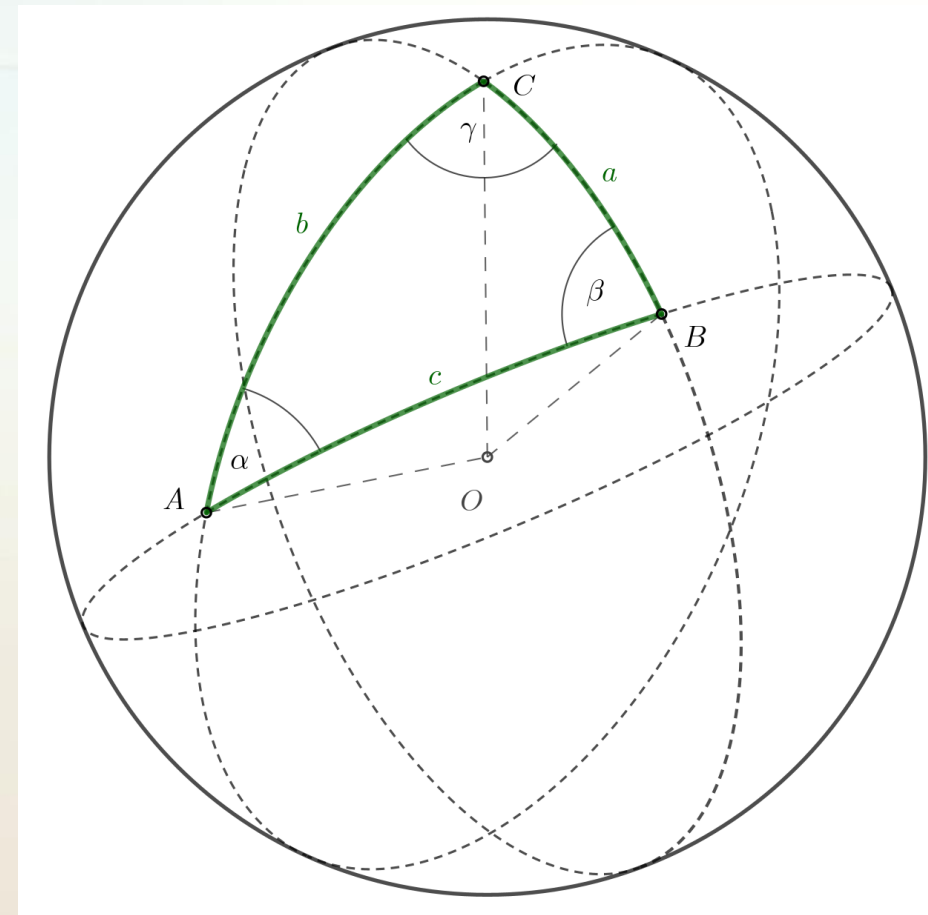
Sférický trojúhelník

- strany sférického trojúhelníku ABC – oblouky hlavních kružnic,
 $a = \widehat{BC}$, $b = \widehat{AC}$, $c = \widehat{AB}$
- vrcholy sférického trojúhelníku ABC – body A, B, C
- sférické délky stran (sférické vzdálenosti) df. – velikost úhlů
 - $a = |\sphericalangle BOC|$ (ozn. také $a = BC$)
 - $b = |\sphericalangle AOC|$ (ozn. také $b = AC$)
 - $c = |\sphericalangle AOB|$ (ozn. také $c = AB$)
- v jednotkové sféře délka $\bar{a}$ oblouku rovna sférické délce, jinak $\bar{a} = r \cdot a$



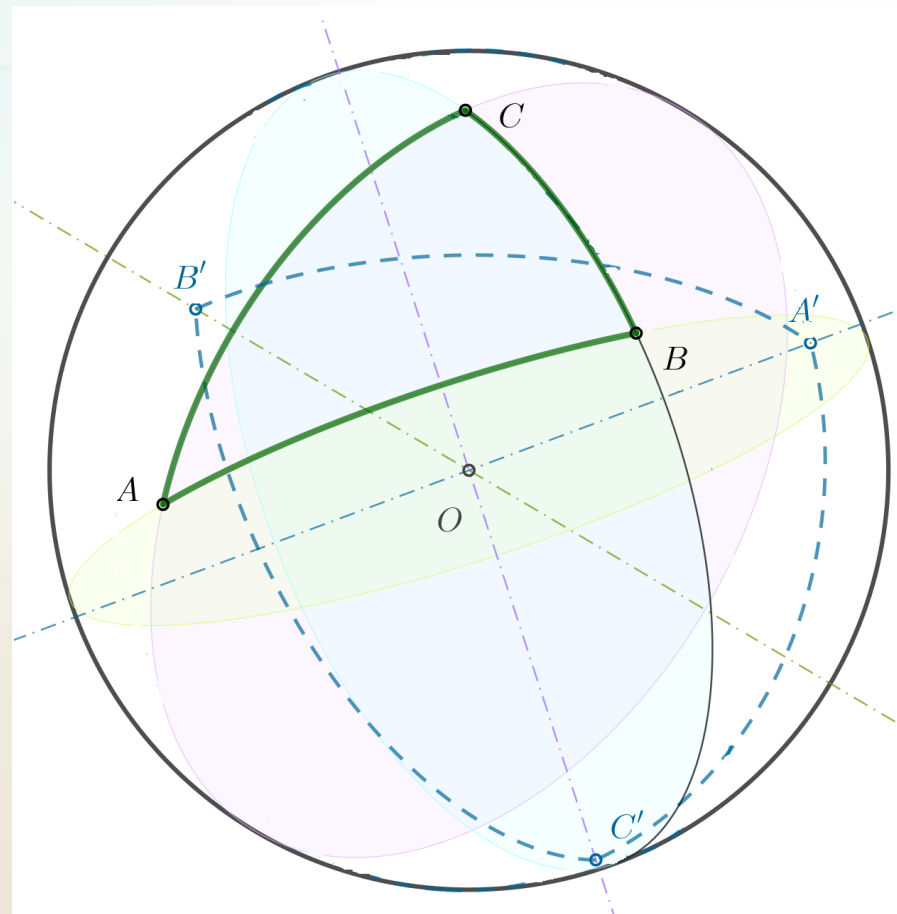
Sférický trojúhelník

- úhly α, β, γ – úhly sevřené rovinami (také tečnami stran ve vrcholech), stejně značíme i jejich velikosti
 - $\alpha \dots (AOB), (AOC)$
 - $\beta \dots (AOB), (BOC)$
 - $\gamma \dots (AOC), (BOC)$
- Eulerův sférický trojúhelník – základní prvky ($a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$) menší než π (všechny strany a úhly konvexní, tj. v intervalu $(0; \pi)$)
- Möbiův („nekonvexní“) – dá se rozložit na Eulerovy



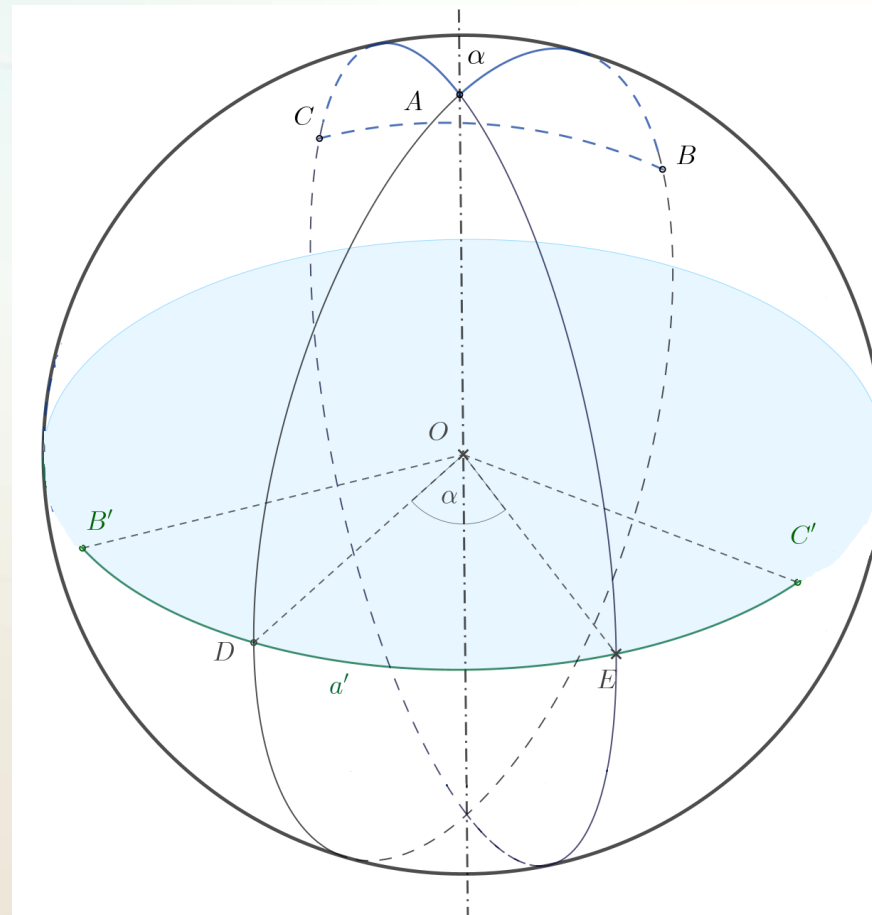
Sférický trojúhelník polárně sdružený

- polárně sdružený sférický trojúhelník se sférickým trojúhelníkem ABC
- rovina (OBC) – rovník
- A' pól vzhledem k tomuto rovníku, který leží na opačné polokouli než bod A
- podobně další vrcholy B', C'
- naopak, je-li rovina rovníku $(B'OC')$, je pólem bod A (na opačné polokouli než A')



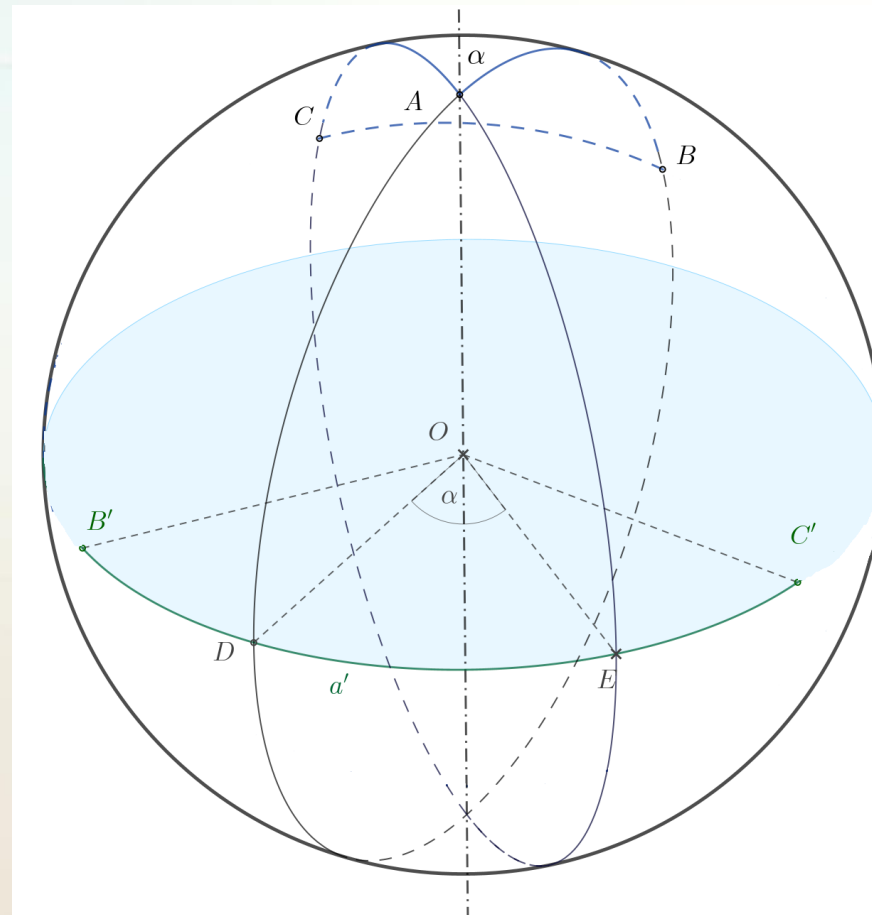
Polárně sdružené trojúhelníky

- A pól pro rovník $B'OC'$
- ozn. $E = (AOC) \cap \widehat{B'C'}$,
- $D = (AOB) \cap \widehat{B'C'}$
- $ED = \alpha$
- B' je pól pro $(AOC) \Rightarrow B'E = \frac{\pi}{2}$
- C' je pól pro $(AOB) \Rightarrow C'D = \frac{\pi}{2}$
- $B'C' < \pi$
- $\alpha' = B'C' = B'E + C'D - ED = \pi - \alpha \Rightarrow \alpha' + \alpha = \pi$



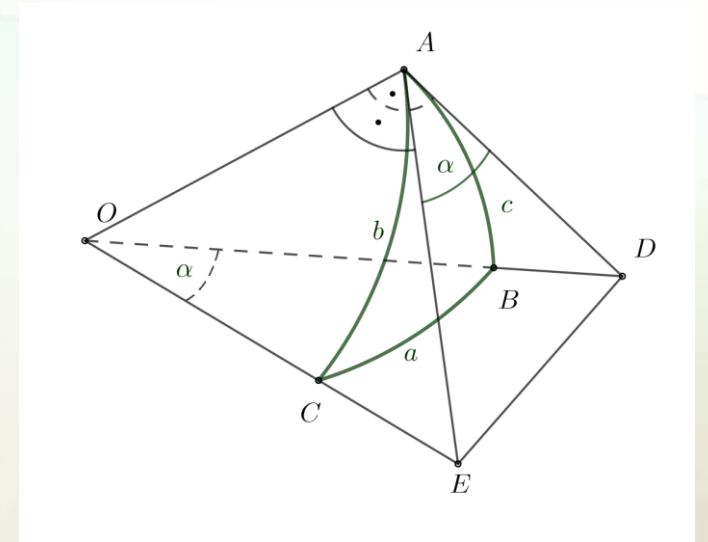
Polárně sdružené trojúhelníky

- podobně
- $b' + \beta = \pi$
- $c' + \gamma = \pi$
- a analogicky
- $a + \alpha' = \pi$
- $b + \beta' = \pi$
- $c + \gamma' = \pi$



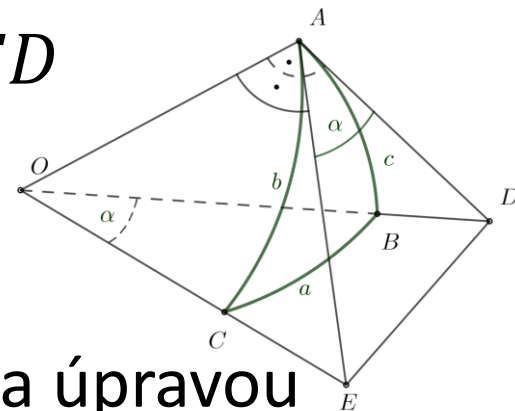
Sférický trojúhelník – vlastnosti

- tečna oblouku AB v bodě A protíná $\overleftrightarrow{OB}$ v bodě $D \Rightarrow$ pravoúhlý $\triangle OAD$
- tečna oblouku AC v bodě A protíná $\overleftrightarrow{OC}$ v bodě $E \Rightarrow$ pravoúhlý $\triangle OAE$
- z Pythagorovy věty pro trojúhelníky OAD, OAE
- $|OD|^2 = |OA|^2 + |AD|^2$
- $|OE|^2 = |OA|^2 + |AE|^2$



Sférický trojúhelník – vlastnosti

- kosinová věta z trojúhelníků AED, OED pro stranu ED
- $|ED|^2 = |AE|^2 + |AD|^2 - |AE||AD| \cos \alpha$
- $|ED|^2 = |OE|^2 + |OD|^2 - |OE||OD| \cos a$
- odečtením obou rovnic, dosazením za $|OE|^2, |OD|^2$ a úpravou
- $0 = 2(|OA|^2 + |AE||AD| \cos \alpha - |OD||OE| \cos a)$
- odtud
- $\cos a = \frac{|OA|}{|OE|} \frac{|OA|}{|OD|} + \frac{|AE|}{|OE|} \frac{|AD|}{|OD|} \cos \alpha$, a tedy
- $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$



Sférický trojúhelník – vlastnosti

- 1. sférická kosinová věta
- $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$ (a cyklické rovnosti)
- věta platí i pro polární sférický trojúhelník, můžeme dosadit
- $a' = \pi - \alpha, b' = \pi - \beta, c' = \pi - \gamma, \alpha' = \pi - a$
- $\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos \alpha'$
- $\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi - \beta) \cos(\pi - \gamma) + \sin(\pi - \beta) \sin(\pi - \gamma) \cos(\pi - a)$
- odtud
- $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$

Sférický trojúhelník – vlastnosti

- 1. sférická kosinová věta
- $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$ (a cyklické rovnosti)
- 2. sférická kosinová věta
- $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$ (a cyklické rovnosti)
- dále z 1. sférické kosinové věty
- $\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$ dosadíme do vztahu $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

Sférický trojúhelník – vlastnosti

- po úpravě (pracujeme v intervalu $(0; \pi)$)
- $\sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c}$ dosadíme
- $\sin^2 b = 1 - \cos^2 b$ a $\sin^2 c = 1 - \cos^2 c$ a další úpravou máme
- $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$
- vztah symetrický v a, b, c
- sférická sinová věta
- $\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$

Sférický trojúhelník – vlastnosti

- 1. sférická kosinová věta
 - $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$ (a cyklické vztahy)
- 2. sférická kosinová věta
 - $\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a$ (a cyklické vztahy)
- sférická sinová věta
 - $\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$

Sférický trojúhelník – vlastnosti

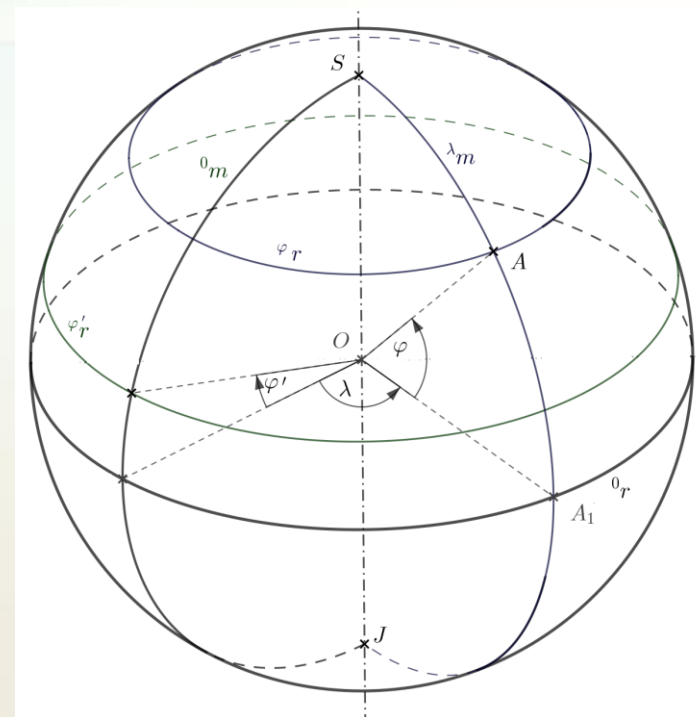
- Při řešení příkladů využijeme i následující věty
- Věta 1: *Proti větší straně sférického trojúhelníku leží větší úhel, proti shodným stranám leží shodné úhly.*
- Odchylka strany (úhlu) od pravého úhlu (df.) ... $\left| \frac{\pi}{2} - a \right|$ ($\left| \frac{\pi}{2} - \alpha \right|$)
- Věta 2: *Ve sférickém trojúhelníku proti straně s větší (menší) odchylkou leží úhel s větší (menší) odchylkou, proti stranám se stejnými odchylkami leží úhly se stejnými odchylkami a obráceně.*

Sférický trojúhelník – vlastnosti

- Věta 3: a) Jestliže ve sférickém trojúhelníku ABC platí $\left| \frac{\pi}{2} - a \right| \geq \left| \frac{\pi}{2} - b \right|$, pak strana a a protější úhel α patří do téhož kvadrantu, tj. jsou buď oba ostré, nebo oba tupé.
- b) Ve sférickém trojúhelníku se maximálně jeden úhel může lišit kvadrantem od protější strany, a to ten, který leží proti straně s nejmenší odchylkou

Zeměpisné souřadnice

- zeměpisná šířka φ , $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
 - rovnoběžky v navzájem rovnoběžných rovinách kolmých k zemské ose, hlavní kružnicí je pouze rovník
- zeměpisná délka λ , $\lambda \in (-\pi, \pi)$
 - poledníky, části hlavních kružnic, půlkružnice nad póly
- zeměpisné souřadnice bodu sféry různého od zeměpisných pólů $A = (\varphi, \lambda)$
- póly prochází všechny poledníky, zemská osa – spojnice pólů
- kurs – velikost úhlu, pod kterým protíná hlavní kružnice poledníky



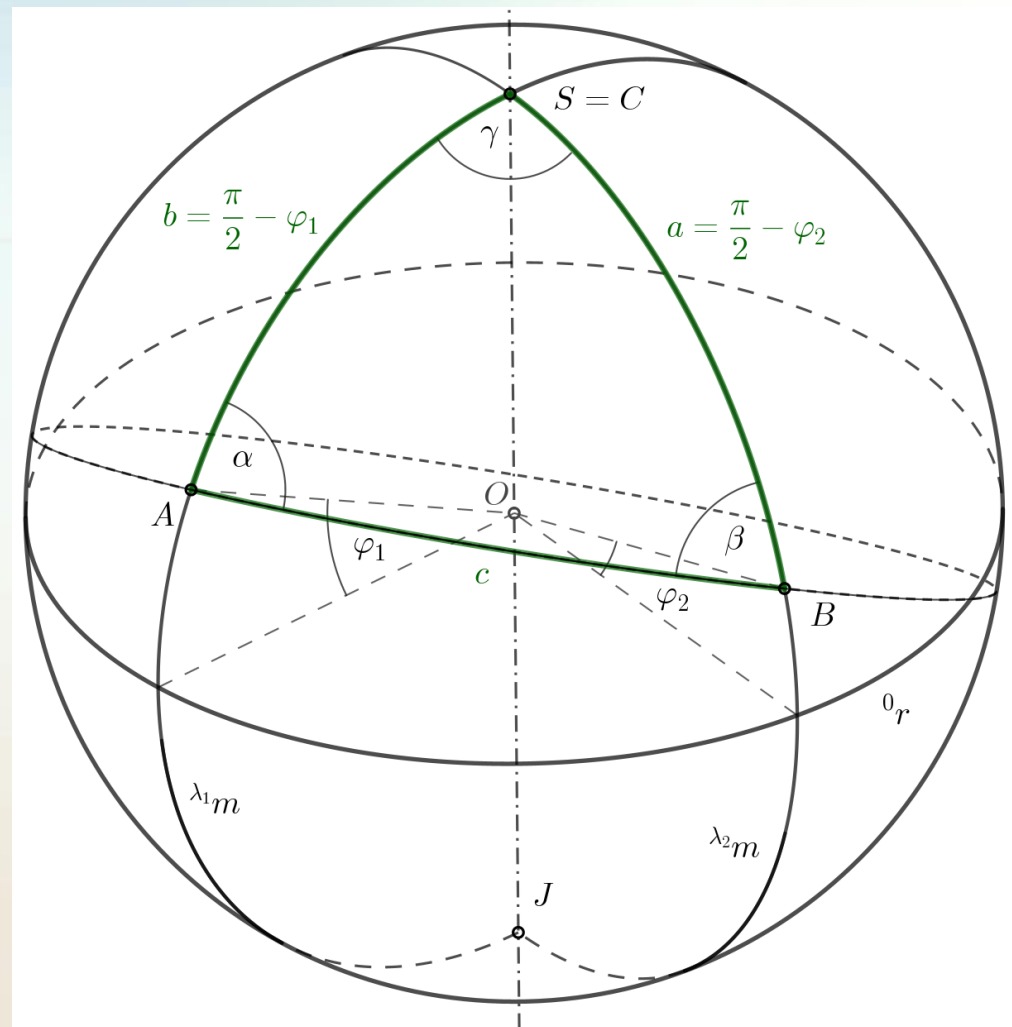
Příklad 1

Určete nejkratší vzdálenost dvou míst A, B na zemském povrchu, znáte-li jejich zeměpisné souřadnice. Určete v jakém kursu je třeba startovat z místa A (resp. B), abychom po hlavní kružnici dospěli do místa B (resp. A)

Např.

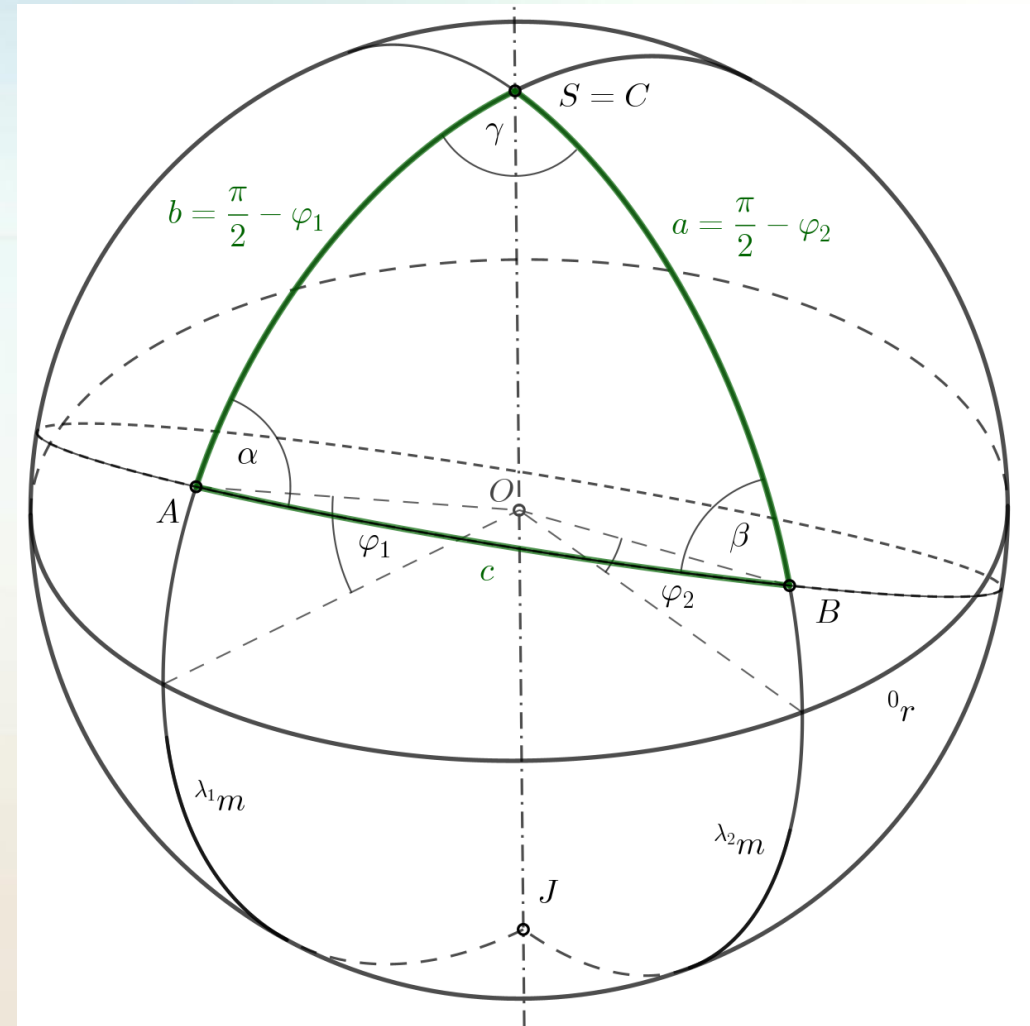
Vídeň letiště ($48^{\circ}7'12''$, $16^{\circ}34'12''$),

Tokio letiště
($35^{\circ}33'36''$, $139^{\circ}46'12''$)



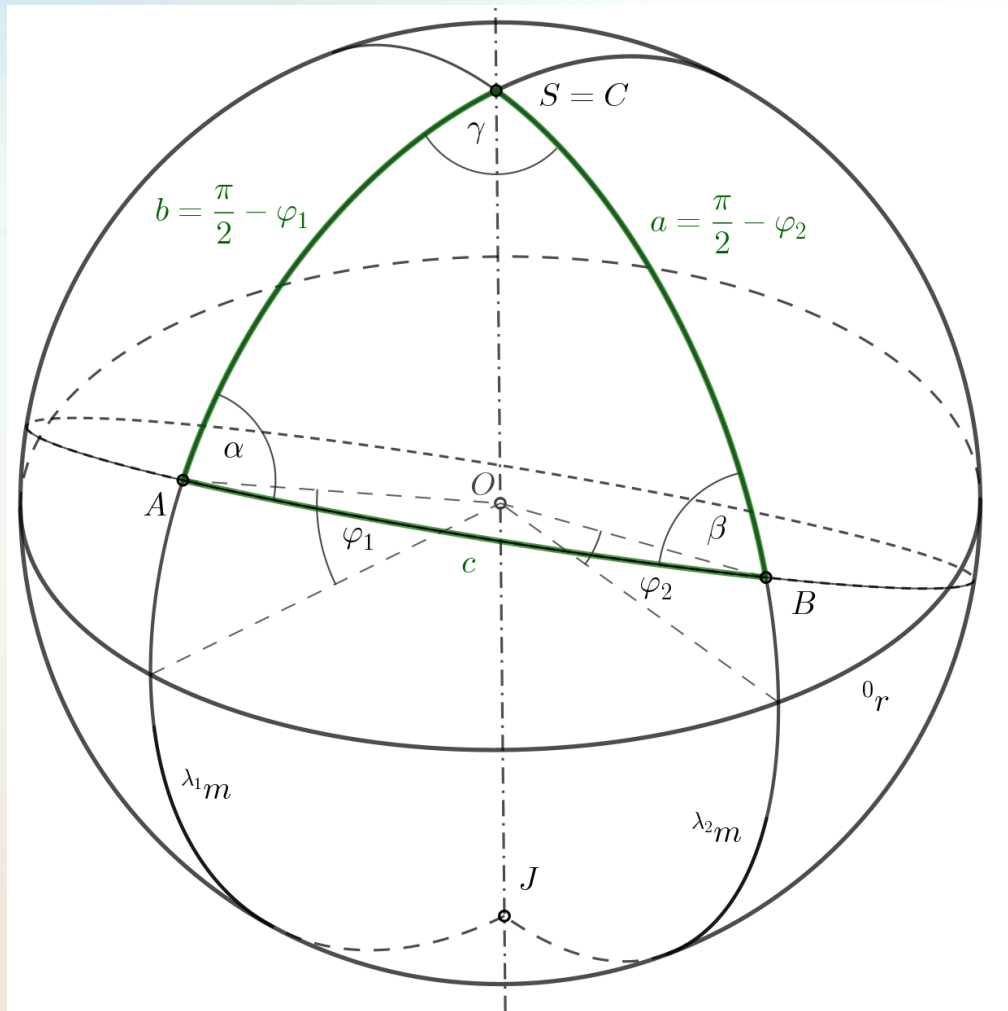
Příklad 1

- Sférický trojúhelník ABC
- A – Vídeň, souřadnice (φ_1, λ_1)
- B – Tokio, souřadnice (φ_2, λ_2)
- C – severní pól
- $\gamma = |\lambda_1 - \lambda_2|$ pro $|\lambda_1 - \lambda_2| < \pi$
(resp. $\gamma = \pi - |\lambda_1 - \lambda_2|$ pro $|\lambda_1 - \lambda_2| > \pi$)
- $a = \frac{\pi}{2} - \varphi_2$
- $b = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$
- počítáme c nejkratší vzdálenost, α kurs z Vídně, β kurs z Tokia



Příklad 1

- 1. sférická kosinová věta
- $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$
- $c = \arccos c$, přičemž c je sférická vzdálenost, tj. velikost úhlu, pro určení vzdálenosti $\bar{c} = c \cdot r$, kde r poloměr Země (plus průměrná výška letu)
- v praxi – ortodroma aproximovaná úseky loxodrom
 - loxodroma – křivka, která protíná poledníky pod konstantním úhlem (kursem)
- kursy – sférická sinová věta
- $\sin \alpha = \frac{\sin \gamma}{\sin c} \sin a$
- $\sin \beta = \frac{\sin \gamma}{\sin c} \sin b$



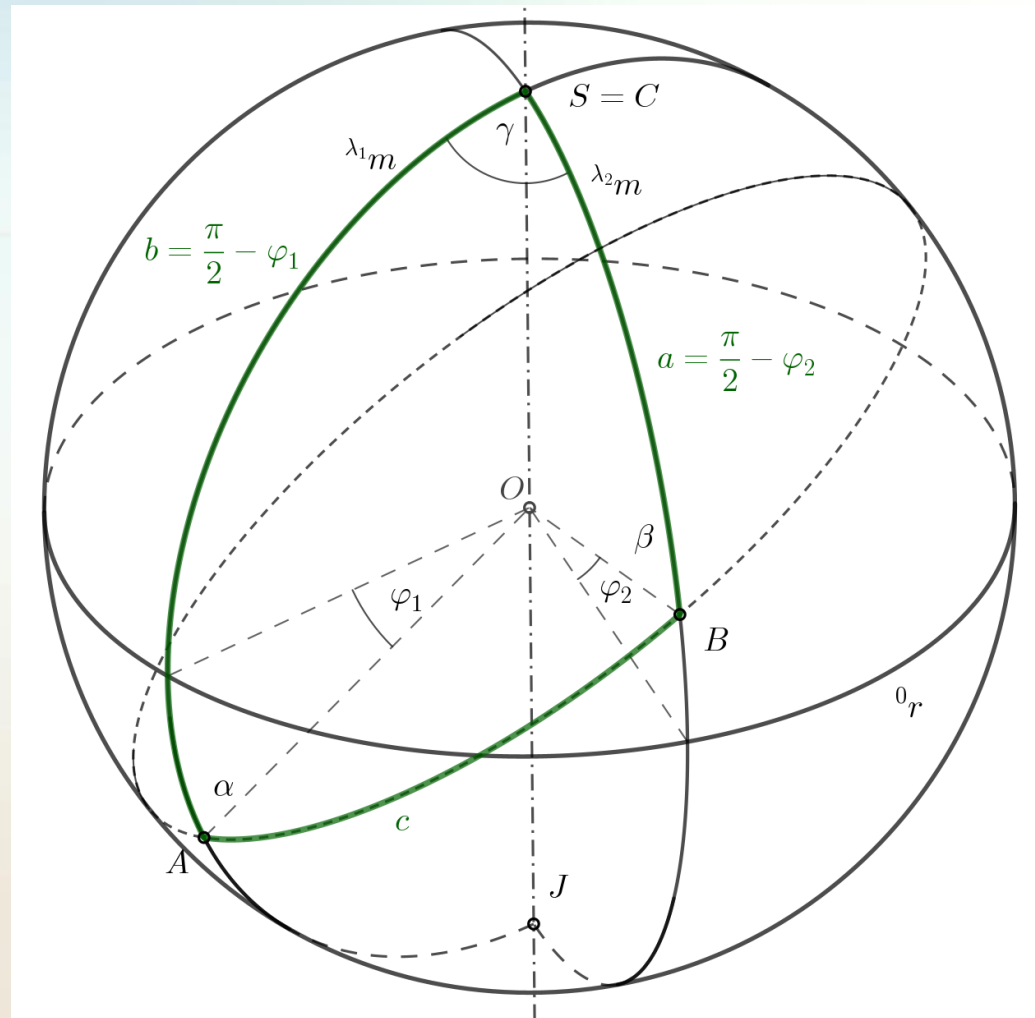
[illegible]

Příklad 2

Lod' pluje ze Sydney
($-33^{\circ}54'34''$, $151^{\circ}16'48''$) do
San Franciska
($37^{\circ}46'48''$, $-122^{\circ}23'24''$)
nejkratší cestou.

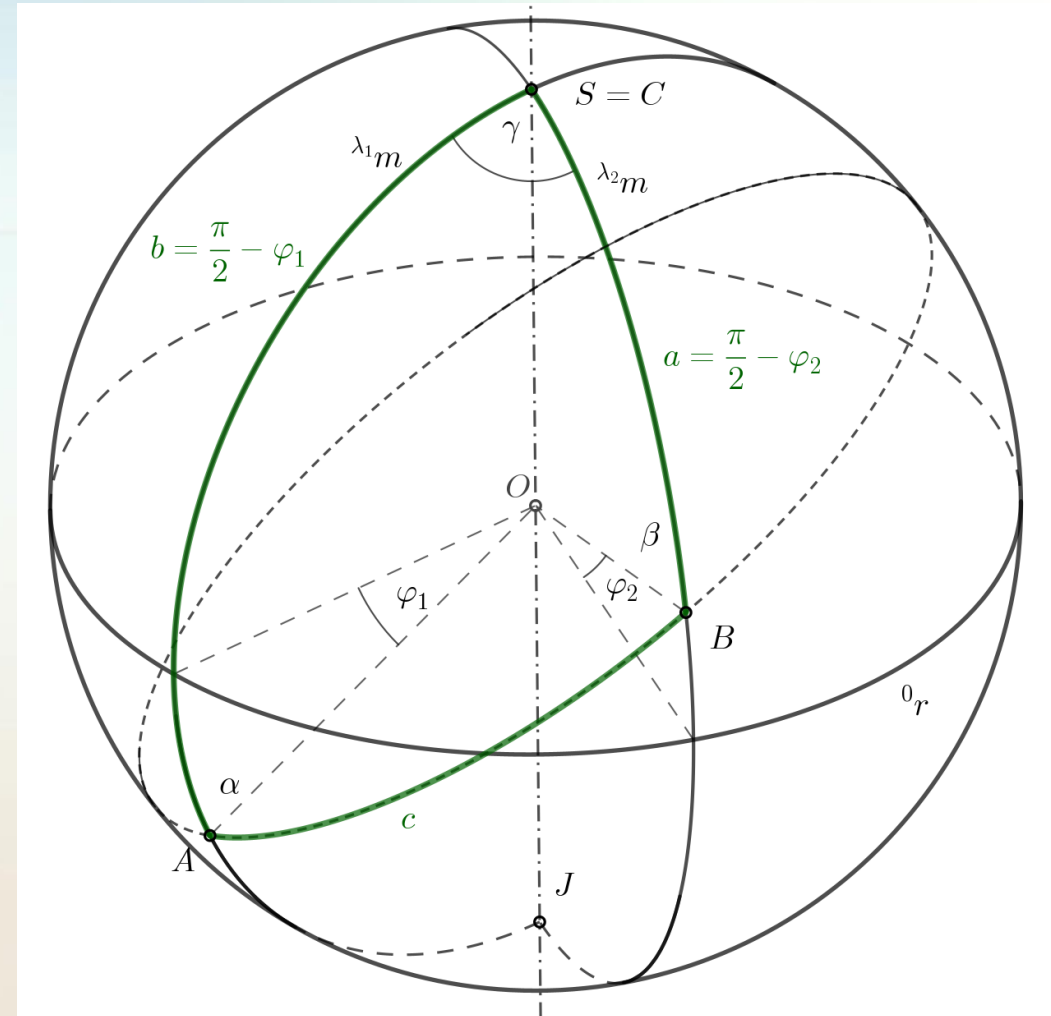
a) Jak dlouho potrvá plavba, pluje-li loď průměrnou rychlostí 15 námořních mil za hodinu? V jakém kursu vyplula a v jakém připlula?

b) Na kterém místě (zeměpisné souřadnice) a jak daleko od místa vyplutí přepluje rovník?



Příklad 2

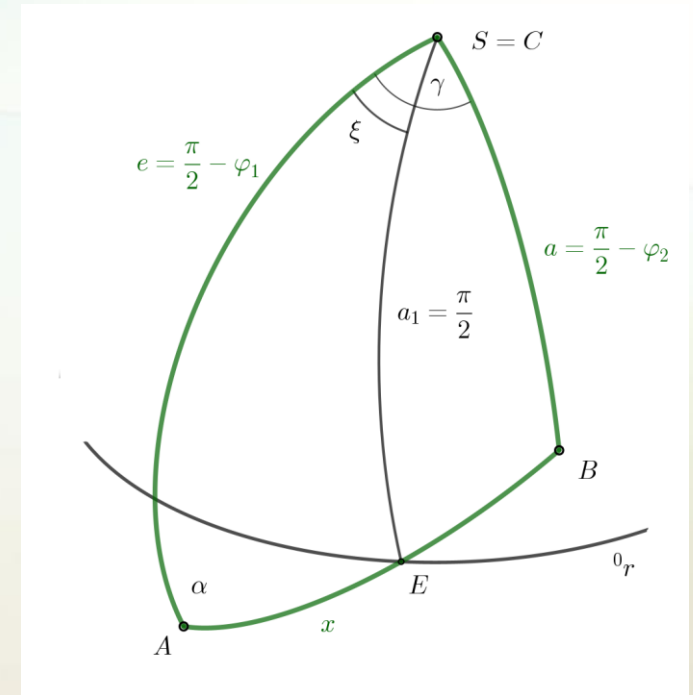
- příklad a) – vzdálenost míst vyřešíme podle příkladu 1, r poloměr Země
- námořní míle – definovaná 1852 m (dříve vzdálenost odpovídající 1' poledníku)
- čas plavby ve dnech a hodinách (zaokrouhlený)
- pro výpočet kursů přihlédnout k větám 2, 3



[illegible]

Příklad 2

- příklad b) – označme E místo, kde loď přepluje rovník
- sférický trojúhelník CEA – přeplutí rovníku – sférická vzdálenost $AE = x$
- 1. sférická kosinová věta
- $\cos \frac{\pi}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) \cos x + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) \sin x \cos \alpha$
- $\operatorname{tg} x = - \frac{\cos b}{\sin b \cos \alpha}$
- sférická vzdálenost $\arctg x$ – dopočítat vzdálenost $\bar{x}$
- zeměpisné souřadnice místa $E, E = (0^\circ, \lambda_E)$, kde $\lambda_E = \lambda_1 + \xi$ (pozor na datovou hranici)
- sférická sinová věta
- $\sin \xi = \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\pi}{2}} \sin x$



Příklad 3

Nechť a, α jsou konvexní úhly. Existuje-li pravoúhlý sférický trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C , odvěsnou a a protějším úhlem α , určete jeho další základní prvky.

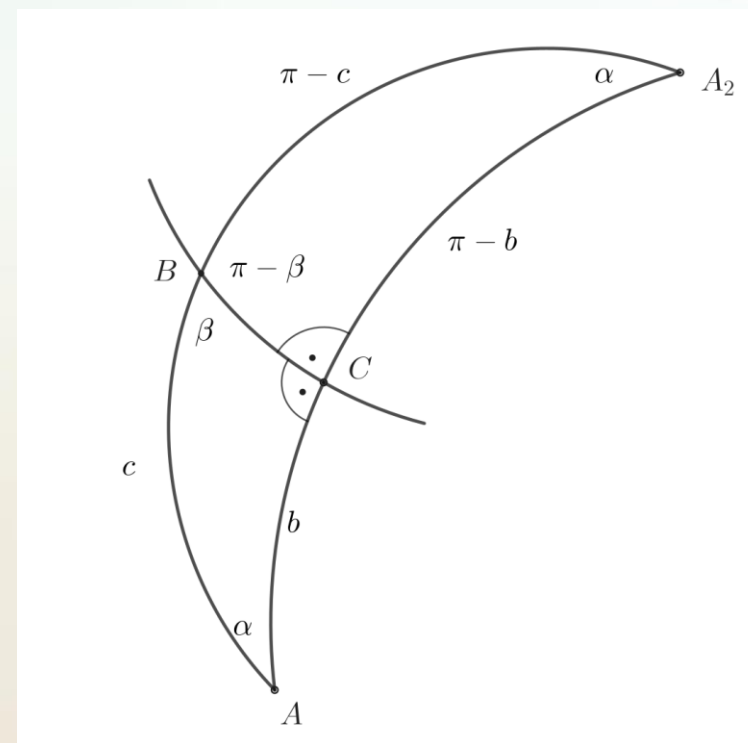
- předpokládáme, že existuje, známe $a, \alpha, \gamma = \frac{\pi}{2}$,
- hledáme c, b, β – v intervalu $(0; \pi)$
- sférická sinová věta $\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{\sin a}$ (1)
- 2. sférická kosinová věta
- $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \frac{\pi}{2} + \sin \beta \sin \frac{\pi}{2} \cos a \Rightarrow$
- $\Rightarrow \sin \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos a}$ (2) (pro $a \neq \frac{\pi}{2}$)

- sférická sinová věta
- $\sin b = \frac{\sin a}{\sin \alpha} \sin \beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} \alpha}$ (3) (pro $a \neq \frac{\pi}{2}$)
- hledáme řešení rovnic (1), (2), (3) v intervalu $(0; \pi)$, tj.
- $0 < \frac{\sin \alpha}{\sin a} \leq 1$
- $0 < \frac{\cos \alpha}{\cos a} \leq 1$
- $0 < \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} \alpha} \leq 1$

Příklad 3

- a) $\frac{\sin \alpha}{\sin a} = 1 \Rightarrow a = \alpha$ nebo $a = \pi - \alpha$, druhá možnost nevyhovuje rovnicím (2), (3)
- Pro $a = \alpha \neq \frac{\pi}{2}$ jediné řešení $c = b = \beta = \frac{\pi}{2}$ (např. sférický trojúhelník tvořený oblouky poledníků s rozdílem zeměpisných délek α a obloukem rovníku)
 - $a = \alpha = \frac{\pi}{2}$, rovnice (2), (3) nedávají smysl, přímo z kosinových vět $b = \beta$, pak jako i., kde β libovolné
- b) $\frac{\sin \alpha}{\sin a} < 1 \Rightarrow \sin a < \sin \alpha \Rightarrow \left(a < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right) \vee \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < a\right)$ (a obráceně)

- pak pro c, b, β dvě řešení, 1 ostrý a jeden tupý úhel, přičemž b, β současně oba ostré, nebo současně oba tupé
- spolu tvoří dvojúhelník

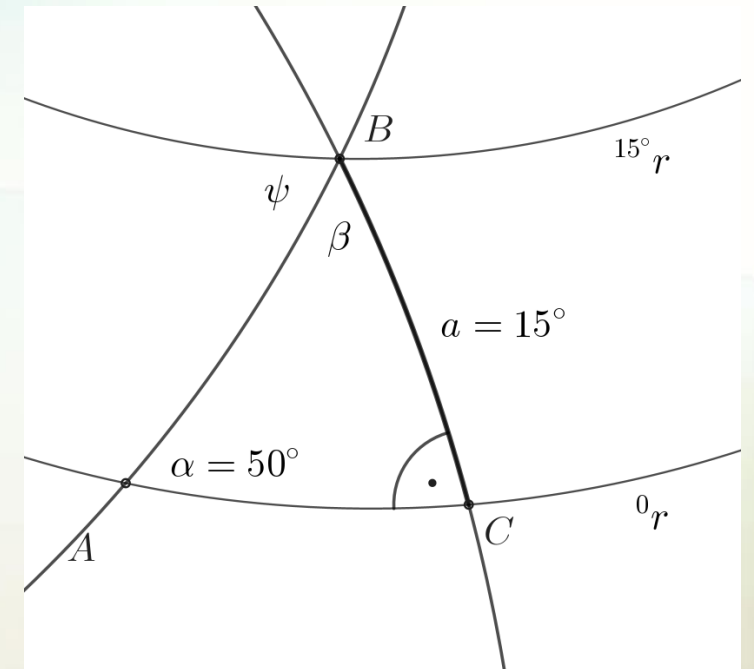


Příklad 4

Letadlo letící stále po hlavní kružnici protíná rovník pod úhlem $\alpha = 50^\circ$.

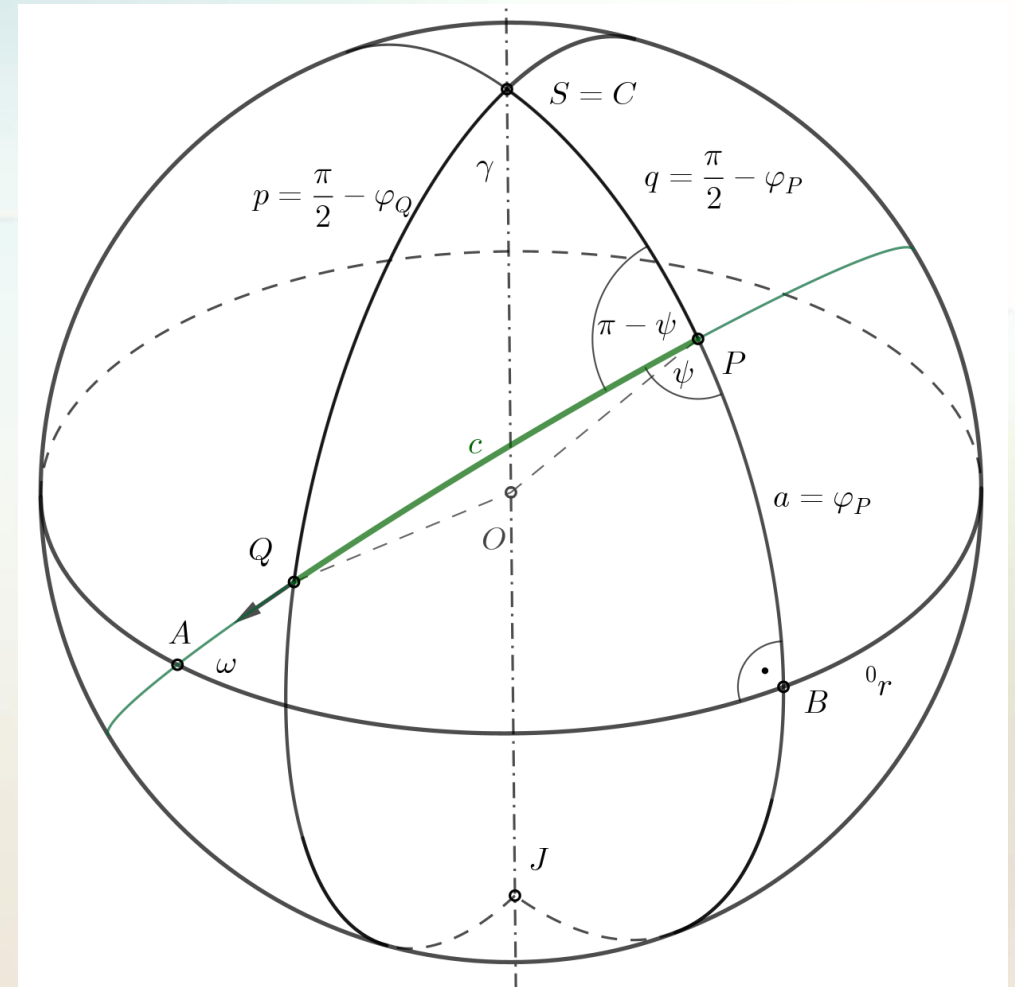
Určete úhel $\psi \leq \frac{\pi}{2}$, ve kterém protíná rovnoběžku zeměpisné šířky $\varphi = 15^\circ$.

- podle př. 3 existuje pravoúhlý sférický trojúhelník ABC s danými a, α a pravým úhlem u vrcholu C .
- $a = 15^\circ, \alpha = 50^\circ$
- 2. sférická kosinová věta (př. 3)
- $\sin \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos a} = \frac{\cos 50^\circ}{\cos 15^\circ}$
- $\psi = \pi - \beta$



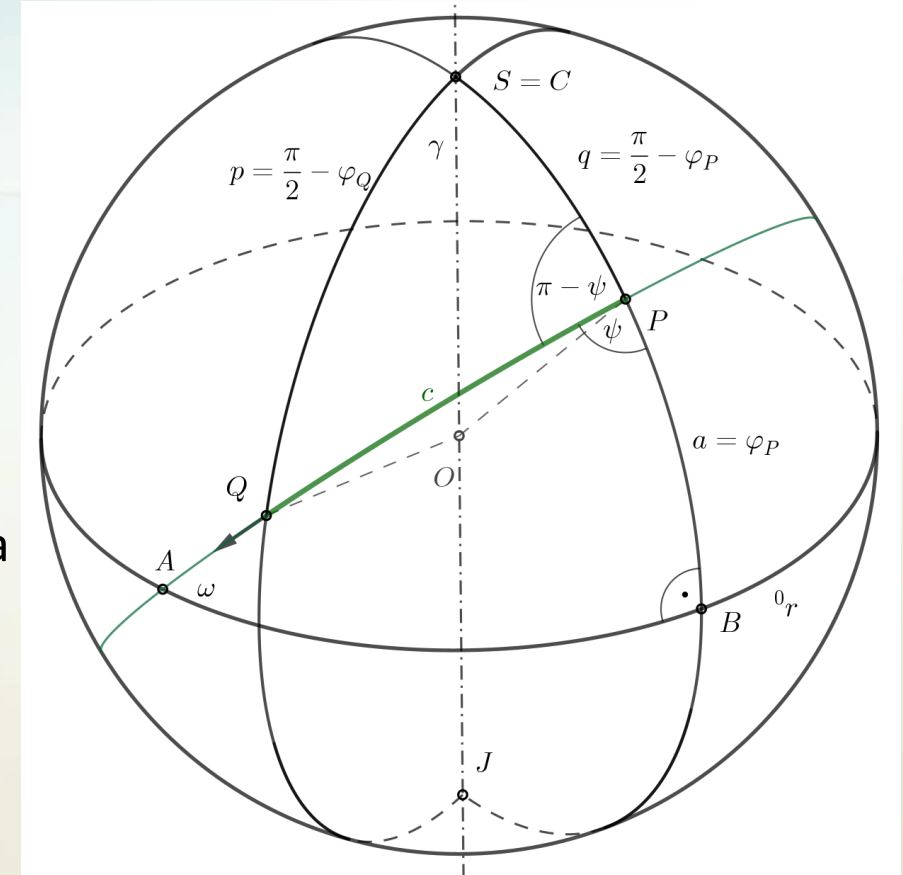
Příklad 5

Umělá družice obíhá kolem Země v kruhové dráze, která je hlavní kružnicí, jejíž rovina je od rovníku odchýlená o úhel $\omega = 65^\circ$. Oběžná doba družice je $t_1 = 96 \text{ min}$. Družice se pohybuje jihozápadním směrem a byla zaznamenána nad Prahou v místě se zeměpisnou polohou $P = (50^\circ 6' 36'', 14^\circ 25' 48'')$. Určete zeměpisnou polohu místa $Q = (\varphi_Q, \lambda_Q)$, nad kterým byla za dalších $t_2 = 10 \text{ min}$.



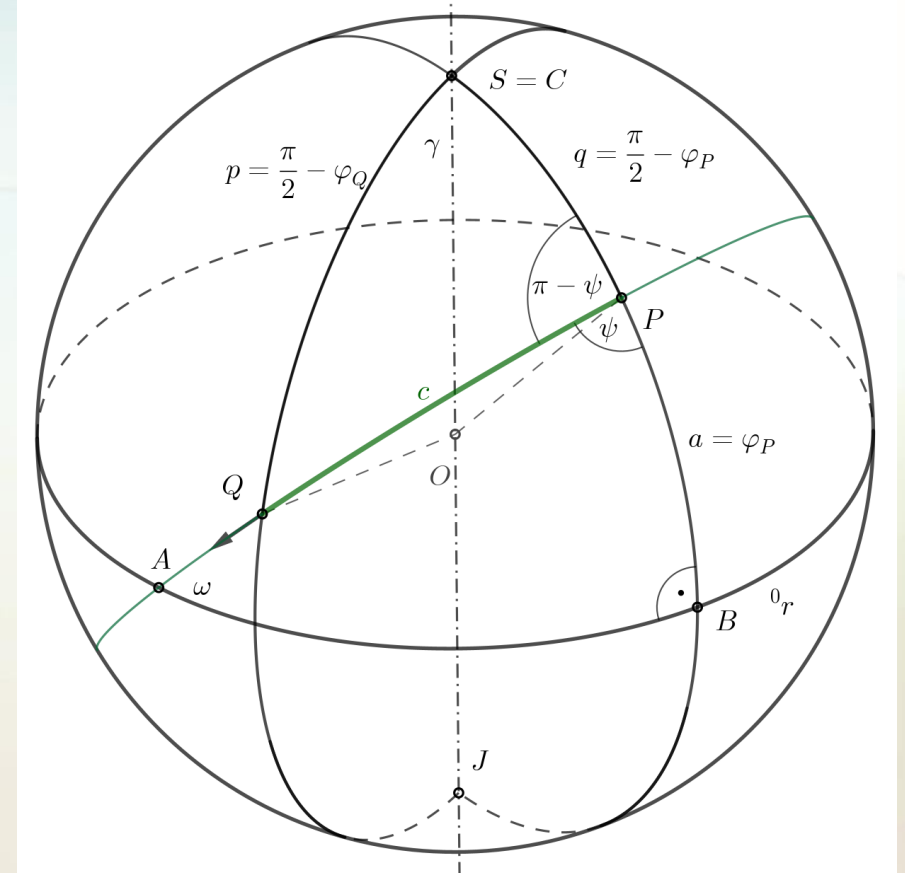
Příklad 5

- A průsečík dráhy letu s rovníkem
- dráha družice a poledník Prahy a rovník – pravoúhlý sférický trojúhelník ABP , pravý úhel u vrcholu B
- $\alpha = \omega = 65^\circ, a = \varphi_P = 50^\circ 6' 36''$
- sférická vzdálenost $x = AP, x < \frac{\pi}{2}$
- zadané $\omega < \frac{\pi}{2}$, použitím vět na sférický pravoúhlý trojúhelník – je-li přepona ostrý úhel a jeden z přilehlých úhlů rovněž ostrý, je ostrý i druhý jí přilehlý
- $\cos \omega = -\cos \psi \cos \frac{\pi}{2} + \sin \psi \sin \frac{\pi}{2} \cos a$
- $\sin \psi = \frac{\cos \omega}{\cos \varphi_P}$



Příklad 5

- kdyby se Země neotáčela, za čas t družice v místě Q' – sférický trojúhelník SQP určí zeměpisnou šířku
- $QP = c = \frac{360}{t_1} t_2$
- 1. sférická kosinová věta
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_Q\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_P\right) \cos c + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_Q\right) \sin c \cos(\pi - \psi)$
- $\sin \gamma = \frac{\sin(\pi - \psi)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_Q\right)} \sin c$
- za dobu t_2 se Země pootočí vstříc družici o úhel $\tau = \frac{360}{24 \cdot 60} \cdot 10 \Rightarrow \lambda_Q = \lambda_P - \gamma - \tau$



	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	vrcholy	zeměpisná šířka	stupně	minuty	vteřiny		
3	P	Praha	50	6	36		
4	Q	přelet	34	20	31		
5	B		0	0	0		
6	S	severní pól	90	0	0		
7							
8							
9		zeměpisná délka	stupně	minuty	vteřiny		
10	P	Praha	14	25	48		
11	Q	přelet	-17	8	9		
12	B		14	25	48		
13							
14			stupně	minuty	vteřiny		
15	oblouk	strany					
16	QP	c	37	30	0		
17							
18	u vrcholu	úhly					
19	A	ω	65	0	0		
20	B	ψ	41	13	21		
21	S	γ	29	4	7		
22							
23		čas					
24		t1	96 min				
25		t2	10 min				
26							

Literatura

- J. Kůst: Sférická trigonometrie, SPN, Praha 1964
- P. Kůrka: Prostory a geometrie. Od Eukleida k Einsteinovi, Karolinum, 2023
- [odkaz na excel s výpočty](#)