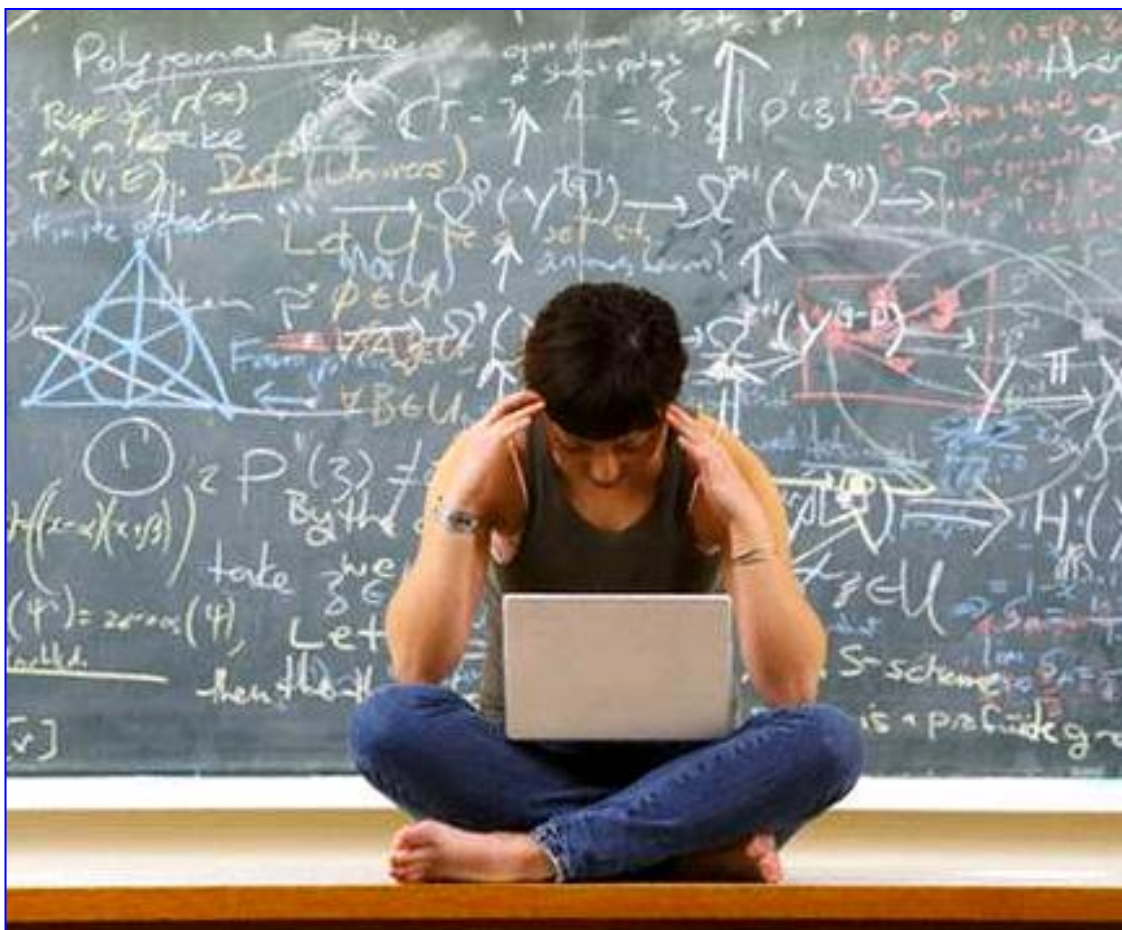


MATEMATIKA

*Medzi prírodou a človekom vybudovali ľudia medzisvet rozumu vo forme matematiky.
(P. Heintel)*



ako medzisvet porozumenia



Matematika je široká nádherná krajina,
otvorená pre všetkých,
ktorým myslenie prináša skutočnú radosť.
(W. Fuchs)



Abstraktný svet myšlienkových štruktúr sa nenásilne zmatematizoval, je zaplavený matematickou logikou a počítačovou informatikou. V základoch zostávajú školské počty a merba. Odborná praktická matematika formuje a dáva moc programovateľným počítačom, ktoré uplatňujú silu matematicko-logických postupov. Informačná éra ľudstva skloňuje zásady optimalizácie, rýchlosti a výkonnosti pamäti moderných počítačových systémov. Spracúvanie obrovského množstva údajov umožňuje simulovať realitu. Algoritmy a štruktúry údajov sú novodobou hudbou informatiky. Hlbšie poznanie myšlienkových postupov, ktoré ponúka jedno z najstarších duchovných umení – matematika, nemôže byť pre žiadneho človeka úplne zbytočné. *Dynamický, vizuálne atraktívny, priateľský a podnecujúci spôsob činnosti počítača, ktorý je kombinovaný s jeho univerzalitou, robí z neho ideálny nástroj na formovanie prebudeneho záujmu o matematiku, o jej krásu, prekvapivosť, schopnosť predpovedať a o magické spojenie so všetkým okolo nás* (A.P. Jeršov). Vo svete abstraktných ideí a spracovania informácií je úžasne veľa matematiky, ale svet nie je iba matematikou. Skúmame, usudzujeme... *Skoro v každom vednom odbore môže byť človek o trochu lepší, ak použije matematiku* (P. Štěpánek, MFF UK Praha).

To, čím sa odlišujeme od ostatných živočíchov, nazývame myslením. Človek – bytosť rozumná, včas vytušil, že svet nemôže byť úplný chaos, lebo v tom by asi nikto neprežil. Za bezprostrednými dojmami a javmi sa skrýva systém, poriadok, súlad. Naše skúmanie je porovnávaním, vyčíslujeme

pozorované pomery a podobnosti. Čísla sa stali základom odhalenia, ktoré chápeme rozmyšľaním. Narábanie s číslami sa stalo symbolickou možnosťou spracúvať dojmy na pojmy prístupné rozumu. Matematika popisovala súvislosti medzi meranými javmi, abstrahovala a zovšeobecňovala. Stala sa tým, čo sa o veciach môžeme naučiť. Zistili sme, že prírodu možno sledovať matematicky, meraním, počítaním a logickým uvažovaním. *Matematika je určitý systematický spôsob objavovania pravidiel a štruktúr, ktoré sa skrývajú za nejakým pozorovaným vzorom alebo pravidelnosťou* (I. Stewart).



Dlhoročná história vývoja matematickej kultúry ponúkala matematiku ako *filozofiu* (Euklid), ako *skutočnosť* (Archimedes), ako *umenie* (Apollonios), ako *písmo* (Diofantos), ako *myšlienkový stroj* (al Chovárizmí), ako *metódu* (Descartes), ako *kozmos* (Leibniz), ako *zovšeobecnenie* (Galois). Matematická kultúra sa ukázala ako všeobecná kategória myslenia, vhodný popis foriem cez algoritmy, účinný nástroj abstrakcie a zovšeobecňovania. Matematika pomáha usporadúvať, utriediť a systemizovať poznatky, so snahou o ucelený, logicky a metodologicky zdôvodnený systém. Veľmi vznešene povedané: matematika môže byť kompasom rozumu, uzdou fantázie, najpravdivejšou vedou, skutočnou harmóniou. Ešte vznešenejšie: matematika ako povolanie a osvietenie na ceste k večnej pravde, k božskému nekonečnu. Skromnejšie: Predmet matematiky je daný myslením, formalizovanou sférou ľudského poznania. *Matematika je jazyk, do ktorého je vstavaná logika prekvapujúco zladená s logikou reality* (J.D. Barrow).

Matematika skúma aj samú seba, zápasí s tým, aby sa oslobodila od rozporov. Matematická kultúra sa dotýka najvšeobecnejších i prakticky najnevyhnutnejších javov. Matematika sa stala metódou, dômyselným nástrojom ľudského umu, ktorý používa pre správne myslenie.

Zaujatie matematikou sa dá porovnať so záujmom o mytológiu, literatúru alebo hudbu. Je to jedna z najvlastnejších oblastí človeka, v nej sa prejavuje ľudská podstata, túžba po intelektuálnej sfére života, ktorá je jedným z prejavov harmónie sveta (H. Weyl).

Steven Weinberg, nositeľ Nobelovej ceny za fyziku (1979), vníma matematiku ako prostriedok, ktorý nám umožňuje vysvetliť jednu skupinu faktov pomocou inej skupiny. *Zdá sa, že vesmír nemožno popísať inak než matematickým jazykom... Matematika je veda poriadku.*

Zdá sa, že matematika objavila svet ideálnych foriem spojených prostredníctvom večných a nevyhnutných vzťahov, ktoré môže sledovať iba inteligentný rozum.

Asi ťažko budeme hľadať vedný odbor, kde by sa nedali uplatniť matematické poznatky. Matematika má do činenia so všetkými ostatnými vedeckými disciplínami. Matematika sa ponúka ako umenie zachytiť a prenášať ľudské myšlienky o abstraktných súvislostiach, ako medzisvet rozumu medzi človekom a prírodou. Zákonitosti nášho sveta sa objavujú z matematického popisu prírody. Matematika sa javí ako úspešný univerzálny jazyk pre účinné premýšľanie a odvodzovanie ďalších súvislostí. Albert Einstein pripustil, že *čisté myslenie môže vystihnúť realitu*. Matematická kultúra je nezaslúženým, ale efektným i efektívnym putom medzi mysliacim človekom a materiálnym svetom, v ktorom žije. *Matematika sprevádza ľudstvo v celej jeho kultúrnej histórii. Prináša závažné objavy, bez ktorých sa nemôže kultúrna civilizácia vôbec zaobiť* (P. Vopěnka).

Známy anglický matematik, filozof a logik A. N. Whitehead (1861–1947) už vo svojej dobe predpovedal: *Vzhľadom k nesmiernosti svojej látky je matematika (i moderná matematika) vedou v plienkach. Ak sa civilizácia bude ďalej rozvíjať, potom v budúcich dvoch tisícročiach bude najväčšou novinkou v ľudskom myslení nadvláda matematického rozumu*. Naznačil aj smerovanie k automatizácii prenosu a spracovania informácií: *Civilizácia postupuje tým, že rozširuje počet dôležitých operácií, ktoré môžeme vykonať bez toho, aby sme na ne museli myslieť*. K tomu nám mohutne pomáha aj matematika, jej algoritmy pre výpočtové postupy, spôsob myslenia i argumentácie. Nevyhnutnosť hlbšieho a širšieho matematického vzdelania nekončí, ale začína.

Dušan JEDINÁK

O duši matematickej

G. H. HARDY (7.2.1877 – 1.12.1947), anglický matematik



*Mohutnosť matematickej pravdy je zrejmá a impozantná...
Žiadny iný odbor nemá také vyhranené a jednoznačné pravidlá
a nezabudnuteľní objavitelia si takmer vždy
zaslúžia úctu.*

*Matematika je zdrojom radosti pre značné množstvo ľudí...
Matematika rovnako ako poézia alebo hudba, môže prebúdať
a udržiavať vznešené rozpoloženie ducha a prispievať tak ku
šťastiu matematikov aj iných ľudí.*

*Človek, ktorý by dokázal presvedčivo popísať matematickú skutočnosť, by vyriešil
veľmi mnoho najobťažnejších problémov metafyziky.*

*Verím, že matematická skutočnosť leží mimo nás, že našou úlohou je objavovať či
pozorovať ju a že vety, ktoré dokazujeme a ktoré nafúknuto označujeme ako svoje
výtvory, sú jednoducho našimi záznamami našich pozorovaní.*

*Šachové úlohy sú hymnickými spevmi matematiky...
šachista môže ako obeť ponúknuť sedliaka alebo figúru, ale matematik ponúka hru.*

*Na svete nie je nič, čo by tak potešilo dokonca i slávnych mužov, ako objavenie alebo
znovuobjavenie pôvodnej matematickej vety.*

*Matematik je tvorcom myšlienkových vzorcov a ich krása a závažnosť sú kritériá,
podľa ktorých treba jeho vzorce posudzovať.*

*Matematika sa vyznačuje najdôkladnejšou a najúžasnejšou technikou a ponúka čisto
odborné, remeselné zručnosti.*

*Matematika je večná, pretože to najlepšie z nej stále hlboko citovo pôsobí na tisíce
ľudí po tisícich rokoch podobne ako literatúra.*

Čistá matematika je ako skala, na ktorej stojí celý idealizmus.

*Matematik by nemal zabúdať, že matematika, viac ako ktorékoľvek umenie alebo
veda, je záležitosť mladých... Ak má človek nejaký rýdzy talent, mal by byť pripravený
priniest akúkoľvek obeť, aby ho úplne rozvinul.*

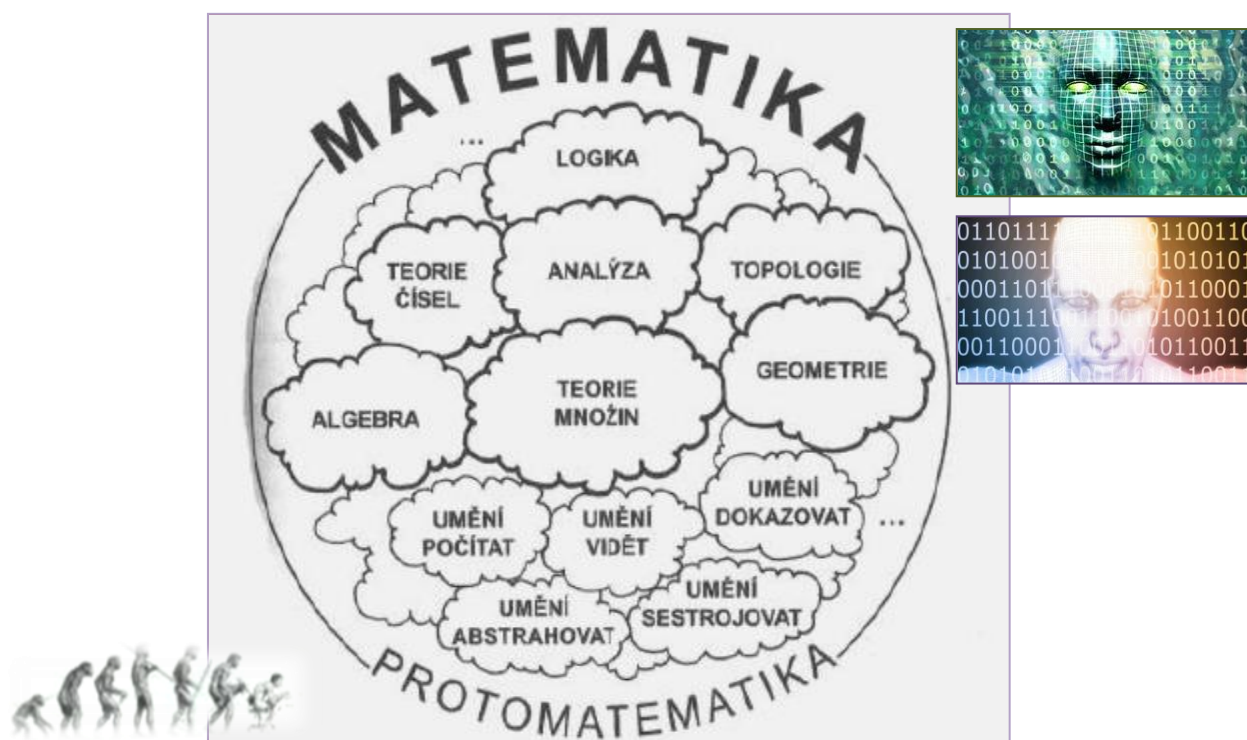
Matematické myšlienky nezomierajú.

*Ked' svet šalie, môže matematik vo svojej vede nájsť
nedostihnuteľne utišujúci prostriedok.*

*Človek niekedy musí hovoriť zložité veci, ale mal by ich hovoriť
čo najjednoduchšie.*



(G. H. Hardy: Obrana matematikova. Praha: Prostor, 1999)



Thales z Milétu (–620 až –546)

Anaximandros (–610 až –546)

Pythagoras ze Samu (–590 až –500)

Anaximenes (–585 až –527)

Herakleitos (–540 až –480)

Anaxagoras z Klazomén (–500 až –428)

Leukippos z Milétu (–490 až –420)

Zenon z Eleje (–490 až –430)

Sokrates (–469 až –399)

Démokritos z Abdér (–460 až –370)

Platon (–427 až –347)

Eudoxos z Knidu (–408 až –355)

Herakleides z Pontu (–388 až –315)

Aristoteles ze Stageiry (–384 až –322)

Eukleides z Alexandrie (–325 až –265)

Aristarchos ze Samu (–310 až –230)

Ktesibios (–300 až –250)

Archimédes ze Sykarus (–287 až –212)

Erastosthenes z Kyrény (–276 až –194)

Apollonius z Pergy (–262 až –190)

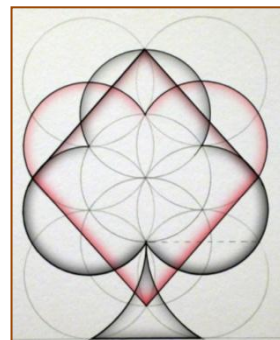
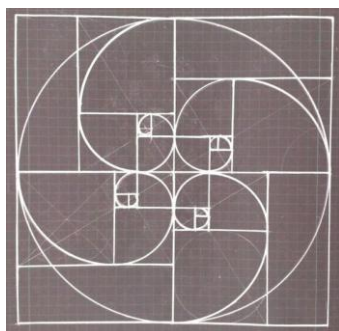
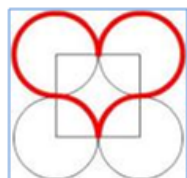
Filon z Byzantia (–200 až –150)

Hipparchos z Nikaie (–190 až –120)

Titus Lucretius Carus (–97 až –55)

Lucius Seneca (–4 až 65)

Heron Alexandrijský (10 až 70)



Většina lidí si nechá uniknout, jak je matematika krásná.
Pro mne je její nejbližší analogií horolezectví, hledání cesty velkou a složitou stěnou,
kde se větví varianty dalšího postupu,
kde potřebujete sílu a šikovnost, ale hlavně musíte umět přechít skálu,
poznat její strukturu, její skryté vzorce.

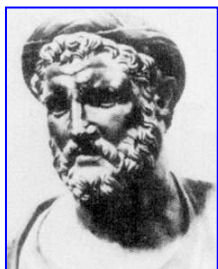
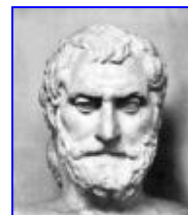
Matematika není věda o číslech, ale o strukturách.

Ing. Petr KOUBSKÝ, CSc.

Výchovný odkaz starovekých matematikov

Významní myslitelia starovekého Grécka, s filozofickým založením a nadaním i pre matematiku, nám zanechali odkazy aj pre výchovné pôsobenie:

Táles (asi 624 – 547 pred n. l.): ***Nerobme to, čo odsudzujeme u druhých... Neber od otca, čo je zlé... Smutná je nečinnosť, škodlivá nemiernosť, obťažná nevzdelanosť... Nebohatni nesprávnym spôsobom... Nestačí mať čisté ruky, treba mať ducha čistého... Najťažšia vec – poznať sám seba. Najľahšia vec – radiť druhým.***



Pytagoras (asi 570 – 496 pred n. l.): ***Boh dal človeku dve ruky, aby ho neobťažoval s každou maličkosťou... Úlohou výchovy je prebudiť v človeku génia... Pravé a dokonalé priateľstvo znamená spojiť veľa vecí a tel v jedno srdce a jediného ducha... Najkratšie odpovede – áno a nie – vyžadujú najdlhšie rozmýšľanie... Z každého poľna Merkura nevyrežeš... Rob veľké veci bez sľubov... Mlč, alebo povedz niečo, čo je lepšie ako mlčať.***

Platón (asi 427 – 347 pred n. l.): ***Aký kto je, také dielo vytvára... Najušľachtilejšia sila našej duše je schopnosť, ktorá sa spolieha na meranie a výpočet... Matematika ponúka skvelý prostriedok pre objavenie pravd, ktoré sú bez účasti rozumu nedostupné... Počty a merba vedú k rozumovému poznávaniu, k pravde a lepšiemu pochopeniu všetkých náuk... Pri lepšom chápaní všetkých ostatných vied bude nesmierne vo výhode ten, kto sa zaoberal geometriou, pred tým, kto to nerobil...***



Tí, ktorí majú vrodené nadanie pre matematiku, prejavujú obvykle vlohy ku všetkým vedám... Preto nesmie byť táto veda obmedzovaná, ale aj ľudia s najušľachtilejšou prirodzenosťou sa ju musia učiť... Dieťaťu radi prepáčime, keď sa bojí tmy. Tragické začne byť, keď sa v mužnom veku bude báť svetla... Pri hre spoznáme človeka za hodinu lepšie než pri rozhovore za celý rok... Mienka nás nech ťa robí čoraz ostražitejším, no nikdy pre ňu nestrácaj rozum... Cnosť a bohatstvo sa k sebe majú tak, ako keby ležali na váhach, na ktorých jedna miska klesá, keď druhá stúpa.



Aristoteles (asi 384 – 322 pred n. l.): ***Všetci ľudia od prirodzenosti túžia po poznaní... Činnosť rozumu je život. Umenie je nejaký tvorivý stav, spojený so správnym úsudkom... Skutočná božská činnosť, ktorá sa vyznačuje najvyššou blaženosťou, je asi teoretická činnosť... Pytagorovci spoznali, že vzťahy a zákony hudobnej harmónie sú založené na číslach a tak i všetky ostatné predmety, ako vyplýva z ich prirodzenosti, sa zrejme číslam zapáčili... Iba málo ľudí vie, že šťastie vyplýva z osobnej dokonalosti.***

Euklides (asi 340 – 287 pred n. l.): ***Ani pre kráľov neexistuje ku geometrii zvláštna cesta... Ak chceš objaviť to, čo nikto nevidí a nevie, musíš klásť múdre otázky...***

Istý žiak sa pri vyučovaní spýtal Euklida: Aký zisk budem mať, ak sa túto poučku naučím? Euklides zavolať otroka a rozkázal: ***Dajte mu tri oboľy (vtedajšie peniaze), lebo tento človek musí zarábať tým, čo sa učí.***



Zušľachťovanie ľudskosti vyučovaním školskej matematiky

Školská matematika ako súčasť kultúry

Asi nikto nepochybuje, že aj pre štúdium školskej matematiky (počtov a merby) je nevyhnutné jasné a prehľadné uvažovanie so schopnosťou odhliadnuť od nepodstatných javov. *Matematika je veda o najzložitejších abstrakciách, k akým môže náš ľudský um dospieť* (A. N. Whitehead). Abstrakcia je v matematike nevyhnutná. *Uvažovanie matematikov sa točí predovšetkým okolo používania podobností, ktoré sú pravým kľúčom od brány ich vedy* (Ch. S. Peirce).

Ak odhaľujeme a zhŕňame všeobecné univerzálne myšlienkové metódy a idey, tak robíme matematiku. *Matematika je súčasťou všeobecnej kultúry. Ak sa snažíte iným ponúkať matematiku, treba im odovzdať porozumenie, motiváciu, myšlienky*, to nám odkazuje M. Atiyah, významný anglický matematik. Niet dôležitejšej pedagogickej podmienky pre vyučovanie ako vzbudenie záujmu, motivácia, odpoveď na otázku *prečo?* Pre štúdium matematiky je nenahraditeľné poznanie ako vzniká a sa upevňuje proces ľudského myslenia, riešenia rôznorodých problémov, orientácia v logických a kvantifikovaných situáciách. Každá matematická téma vo vyučovaní matematiky požaduje aj znalosti vývoja (ontogenézy i fylogenézy) študovaných myšlienok. Uznávaný didaktik matematiky G. Polya odporúčal: *Motivovať nie vynútením, askézou, ale zaujatím a podaním problému zvnútra*. Vyučovanie v škole nesmie byť len systematické, ale aj psychologické, spojené s rozvojom celej osobnosti, intelektu, vôle i citu. *Ľudia si pamätajú, čo ich zaujíma, a chápu tie veci, ktorých pochopenie im robí radosť* (E. E. Moise). Zhrnutím naznačených odkazov pre učiteľskú didakticko-odbornú prácu, sú možno slová P. R. Halmosa: *Najlepší spôsob ako vyučovať druhých, je presvedčiť študentov, aby sa pýtali a tvorili. Nerobte im kážeň - povzbudte ich k činnosti*.



Nadšenie aj pre počty a merbu

Dobre vyučovať matematiku môže iba človek, ktorý je sám ňou nadšený a chápe ju ako živú, rozvíjajúcu sa vedu. Takto vystihol základné predpoklady pre šírenie matematickej kultúry známy ruský matematik A. N. Kolmogorov. Aj on uznával, že iba myslením sa učíme myslieť. Aj vyučovací proces pri štúdiu školskej matematiky má byť kultiváciou myslenia, argumentácie, definovania, odvodzovania a dokazovania. Pedagogicky dobre prepracovaný didaktický systém otázok, úloh a problémov má naznačovať objavné myšlienkové postupy, ponúkať nové pohľady a smery riešenia. Pri tom je potrebné podnecovať individuálny štýl myslenia, jeho spontánnosť, kritickú argumentáciu, hĺbku osvojenia vedomostí. Činnosť s matematickým pojmovým materiálom môže byť hlboký intelektuálny zážitok primeraný mentálnym schopnostiam a rozumovým skúsenostiam s ohľadom na vek i prostredie žiakov. Skvelý vysokoškolský učiteľ Richard P. Feynman, nositeľ Nobelovej ceny za fyziku, charakterizoval okolnosti odovzdávania vedomostí myšlienkou: *Problém výučby možno vyriešiť len vtedy, keď si uvedomíme, že najlepšie vyučovanie je také, v ktorom existuje priamy, osobný vzťah medzi študentom a dobrým učiteľom - vtedy študent posudzuje názory, rozmýšľa o veciach, diskutuje o problémoch*.

Už od základov – krása i úžitok

Dúfam, že každý učiteľ matematiky vníma matematickú obratnosť ako podstatnú a nenahraditeľnú zložku všeobecnej kultúry, ako možnosť zušľachtovať myšlienkové procesy a duchovné hodnoty ľudských bytostí. Svojimi špecifickými prostriedkami môže už aj školská matematika prispievať k rozvoju osobnosti každého človeka, ktorý chce užitočne uvažovať, logicky myslieť, úspešne tvoriť. Rozvíjanie zmyslu pre úplnú argumentáciu, zdôvodňovanie faktov, nápaditá činnosť pri definovaní nových pojmov, hľadanie účinných dôkazov, uplatnenie vyváženého podielu intuície a dedukcie, obsažné a stručné, hospodárne a presné, jednoznačné a trvalé matematické úvahy a symbolika sú plnohodnotným argumentom pre každé plodné myslenie. Vznešene a filozoficky povedané: matematický rozum je prirodzeným putom medzi človekom a prírodou. Už **R. Bacon**, anglický stredoveký učenec, vedel: *Kto podceňuje výsledky matematiky, škodí celej vede, lebo ten kto neovláda matematiku, nemôže poznať ostatné exaktné vedy a nemôže pochopiť svet.* Pripomínam slová významného didaktika **H. Freudenthala**: *Ak neuspejeme o vyučovaní matematiky tak, aby bola užitočná, rozhodnú sa užívatelia matematiky, že matematika je príliš dôležitý vyučovací predmet, než aby mohla byť vyučovaná učiteľmi matematiky. To by bol však koniec matematického vyučovania.* Dúfam, že dokážeme stále lepšie pedagogicko-metodicky pripraviť a ukazovať krásu i úžitok základných matematických poznatkov nielen v školskom prostredí, ale aj v civilizačnom úsilí celej matematickej kultúry, ktorá zušľachtila spôsoby ľudského premýšľania, argumentácie, objavovania i dokazovania.

Mnohé projekty, ktoré si pred seba ľudstvo postavilo, sa nedajú uskutočniť bez modernej matematiky, informatiky a výpočtovej techniky. Matematický spôsob myslenia nekončí, ale začína. *Vzhľadom k nesmiernosti svojej látky je matematika (i moderná matematika) vedou v plienkach. Ak sa civilizácia bude ďalej rozvíjať, potom v budúcich dvoch tisícročiach bude najväčšou novinkou v ľudskom myslení nadvláda matematického rozumu* (A. N. Whitehead).



Vzdelávať i vychovávať

Pripomienkou prof. **M. Hejného**: *Analýzou v histórii matematiky možno získať užitočné predstavy o genéze myslenia a tieto potom aplikovať pri vyučovaní*, upozorňujem na povinnosť všetkých učiteľov pripravovať a ponúkať zážitky matematickej kultúry, hlbšieho rozvoja myslenia, presvedčivej argumentácie a všeobecnej kultivovanosti človeka. Ak podporu ideovej a logickej dôslednosti matematických myšlienkových postupov ukotvíme aj mravnou zásadovosťou a príkladným osobným životom, naše výchovno-vzdelávacie pôsobenie sa asi bude limitne blížiť k dokonalosti. Koncentrovaným odkazom nech sú slová **G. Piraniana**: *Ako učitelia máme mimoriadne dôležitú úlohu, aby sme mládeži odovzdávali niektoré z intelektuálnych hodnôt civilizovaného ľudstva. Našou úlohou je inšpirovať študentov, aby na základe svojich schopností dosiahli čo najvyššiu odbornú i ľudskú úroveň.* Dôsledným zmysluplným vyučovaním matematiky, už od prvých ročníkov ZŠ, môžeme trvalo prispievať k zušľachtovaniu ľudskosti matematickou kultúrou.

Dušan JEDINÁK, emeritný učiteľ počtov a merby



Viera i matematika

Viera nie je niečo, čo vytvoríme, ale niečo, čo sa v nás prebudí vďaka skutočnosti, ktorou Boh je. (Mary Guy)

Matematika je veda, ktorá dáva najlepšiu príležitosť pozorovať proces myslenia a má tú prednosť, že pri jej pestovaní nadobúdame cvik v metóde rozumového uvažovania, ktoré môže byť potom používané na štúdium ktoréhokoľvek predmetu. (G. Polya)

Viera (náboženská) je matkou každej svetskej energie. (G.K. Chesterton)

Matematika je prvá z vied, bez ktorej nemožno popísať ostatné vedy. (R. Grosseteste)

Viera v nás uvoľňuje silu, ktorá je mimo nás. (A. Nolan)

Matematika je akoby sila ľudského ducha povolaná nahradiť nám nedokonalosť našich zmyslov i krátky čas nášho života. (J. Fourier)

Viera neodhaľuje ani tak silu chápania, ale kvalitu pohľadu. (P. Mollat)
Matematika je gymnastika rozumu a príprava na filozofiu. (Isokrates)

Viera je overovanie božských kvalít v sebe samom vnútornou skúsenosťou. (E. Fromm)
Matematika je nástroj pre usudzovanie. V nej sú sústredené výsledky exaktného myslenia mnohých ľudí. (R. Feynman)

Viera je dôvera, že náš život nie je postupnosť náhod... je to dôvera, že každá životná situácia má zmysel. Živá viera je odvahou pre pravdu. (T. Halík)
Matematiku môžeme chápať ako pátranie po štruktúrach a pravidelnostiach, ktoré usporadúvajú a zjednodušujú svet. (P.H. Griffiths)

Viera znamená vedomie existencie vo vzťahu k transcencii. (K. Jaspers)
Matematika je skúmanie najvšeobecnejších možných štruktúr, nech sú už dané priestorovo, časovo alebo dokonca len čisto pojmové. (C.F. Weizsäcker)

Viera je škola, v ktorej je zapustený svojimi základmi charakter. (O.S. Marden)
Matematika je, v najširšom zmysle, rozvíjanie všetkých druhov formálnych, pre myslenie nevyhnutných deduktívnych spôsobov usudzovania. (A.N. Whitehead)



Vzdelaným ľuďom treba ukázať, že človek môže byť veriaci nie proti rozumu, ale vďaka dobrému a správne použitiu rozumu. (J. Guitton)

Vedou i náboženstvom, matematikou a každým umením, túžbou po pravde a spravodlivosti, pomstou i zmúdením, láskou i zradou hľadáme nedosiahnuteľné jeho neustálym dosahovaním ...
dmj

Idealizovali naše predstavy (aj v matematike)

*Nevstupuj, keď neovládaš geometriu.
Najušľachtilejšia sila našej duše je schopnosť, ktoré sa spolieha
na meranie a výpočet. Matematika ponúka skvelý prostriedok
pre objavenie právd, ktoré sú bez účasti rozumu nedostupné...
Počty a merba vedú k rozumovému poznávaniu, k pravde
a lepšiemu pochopeniu všetkých náuk...*



Boh používa geometrické metódy neustále.



- *Pri lepšom chápaní všetkých ostatných vied bude nesmierne vo výhode ten, kto sa zaoberal geometriou, pred tým, kto to nerobil.*
- *Tí, ktorí majú vrodené nadanie pre matematiku, prejavujú obvykle vlohy ku všetkým vedám... Preto nesmie byť táto veda obmedzovaná, ale aj ľudia s najušľachtilejšou prirodzenosťou sa ju musia učiť.*
- *Ak je človek skromný a nenáročný, nebude pre neho ani staroba veľkou záťažou. Ak taký nie je, aj mladosť mu bude spôsobovať veľa ťažkostí.*
- *Najvyšší stupeň nespravodlivosti je predstieraná spravodlivosť.*
- *Dieťaťu radi prepáčime, keď sa bojí tmy. Tragické začne byť, keď sa v mužnom veku bude báť svetla.*
- *Pri hre spoznáme človeka za hodinu lepšie než pri rozhovore za celý rok.*
- *Mienka nás nech ťa robí čoraz ostražitejším, no nikdy pre ňu nestrácaj rozum.*
- *Cnostnému človeku stačí, keď sa mu sníva o tom, čo zlý človek naozaj prežije.*
- *Cnosť a bohatstvo sa k sebe majú tak, ako keby ležali na váhach, na ktorých jedna miska klesá, keď druhá stúpa.*
- *Múdri ľudia, ktorí sa vyhýbajú politike, sú potrestaní tým, že im vládnu hlupáci.*

PLATÓN (asi 427 – 347 pred n. l.), grécky filozof a aténsky aristokrat

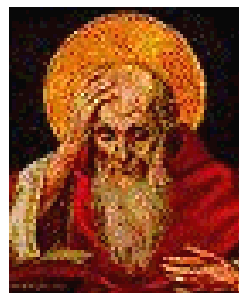
*Čísla sú formou Božskej múdrosti prítomnej vo svete...
Všetko má tvar, pretože všetko má čísla. Odober im čísla
a budú ničím... Všetko je na svojom mieste vďaka číslam.*

Všetko sa deje v pravý čas vďaka číslam.

Krása je v číselných pomeroch...

Hudba aj architektúra sú sestry, obe sú deťmi matematiky.

V hudbe sa večná harmónia ozýva, v architektúre zrkadlí.



Aurelius AUGUSTINUS (13.11.354 – 28.8.430)



- *Pokiaľ to dokážeš, spájaj vieru s rozumom.*
- *Všetko čo poznávame, nie je chápané podľa svojej prirodzenosti, ale skôr podľa schopností poznávajúcich.*
- *Číslo bolo v mysli Stvoriteľa bezpochyby prvotným vzorom stvorených vecí.*
- *Všetka náuka o pravde je zahrnutá v mnohosti a veľkosti.*
- *Nemôže dosiahnuť poznanie božských vecí ten, kto nie je vôbec zbehlý v matematike.*

Anicius Manlius Severinus BOETHIUS (okolo 480 – 524)

Impulzy zo stredoveku

ISIDORO DE SEVILLA (asi 560/70 – 636):

Matematika je teoretická veda, ktorá má za svoj predmet abstraktné množstvo. Abstraktné množstvo je to, o ktorom pojednávame iba uvažovaním, oddeľujúc ho rozumom od látky... Skrz číslo sa učíme nedať sa zmiatnuť. Ak odstrániš zo všetkého číslo, všetko zanikne. Odober ľudstvu počítanie a všetko zachváti slepá nevedomosť a nebude možné odlíšiť človeka od ostatných živočíchov.

Robert GROSSETESTE (okolo 1168 – 1253):

- *Matematika je prvou vedou, bez ktorej sa nedajú popísať ďalšie vedy.*
 - *Geometrické tvary a vzťahy pôsobia v celom univerze a vo všetkých jeho častiach.*

Roger BACON (asi 1214 – 1294):

- *Bez skúsenosti nemožno nič dostatočne poznať... Iba skúsenosť dáva istotu, a nie logický dôkaz.*
- *Filozofia rozvíja božskú múdrosť pomocou vedy a umenia.*
- *Kto podceňuje výsledky matematiky, škodí celej vede, lebo ten, kto nepozná matematiku, nemôže poznať exaktné vedy a nemôže pochopiť svet.*
- *Chcel by som vysloviť predpoveď, že čím viac základ prírody rozširujeme, tým viac odvetví matematiky budeme nútení používať.*
- *Máme dva spôsoby poznávania: špekuláciu (teóriu) a experiment.*
- *Matematika je najbližšia prirodzenému poznaniu spomedzi všetkých vied, ktoré pochádzajú zo skúsenostného objavovania a vzdelávania...*
- *Všetko poznanie závisí od teoretickej sily matematiky.*



Mikuláš KUZÁNSKY (1401 – 1464):

- *K poznaniu božských vecí je nám otvorená iba cesta prostredníctvom symbolov...*
 - *Všetko skúmanie je porovnávaním, lebo používa pomer ako prostriedok...*
 - *Počet (číslo) znamená pomer. Pomer je myšlienková konštrukcia...*
 - *Číslo je základ všetkých vecí chápaných myslením...*
 - *Číslo ako spôsob pochopenia je niečím, bez čoho nemožno nič chápať... Keby neexistovalo číslo, nebolo by ani pripodobnenie, ani pojem, ani rozlíšenie, ani meranie. Bez čísla nechápeme, že veci sú rôzne a od seba oddelené... Číslo je výrazom jednoty...*
 - *Číslo je hlavnou stopou vedúcou k múdrosti...*
 - *Matematika nám najviac pomáha pri pochopení rozličných božských vecí.*

Luca PACIOLI (asi 1445 – 1514): *Zlato sa skúša ohňom a talent matematikou.*

Leonardo da Vinci (1452 – 1519): *Najväčšiu radosť telu dáva svetlo slnka, najväčšiu radosť duchu – jas matematickej pravdy.*

Matematika je myslenie pohybujúce sa vo sfére úplného abstrahovania od každého jednotlivého prípadu toho, o čom práve vypovedá... Najväčšie abstrakcie sú tými pravými nástrojmi, ktorými kontrolujeme svoje uvažovanie o konkrétnych faktoch... Originalita matematiky spočíva v tom, že v matematickej vede sú vyjadrené vzťahy medzi vecami, ktoré sa bez sprostredkovania ľudským rozumom nedajú vôbec postihnúť...

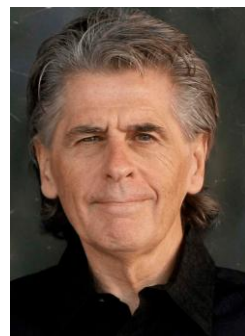
Matematika je štúdiom vzorov...

Matematika je veda o najzložitejších abstrakciách, k akým môže ľudský um dospieť. Všeobecnosť matematiky je najúplnejšou všeobecnosťou, zhodnou so spoločenstvom udalostí, ktoré konštituuje našu metafyzickú situáciu.
(A. N. WHITEHEAD, 1861 – 1947).

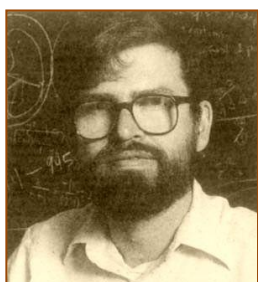


Matematika je veda, ktorá dáva najlepšiu príležitosť pozorovať proces myslenia a má tú prednosť, že pri jej pestovaní nadobudneme cvik v metóde rozumového uvažovania, ktoré môže byť potom používané na štúdium ktoréhokoľvek predmetu... Matematika je vtedy zaujímavá, ak živí našu vynachádzavosť a zdatnosť usudzovania. (G. POLYA, 1887 – 1985)

*Matematika je najpresnejším nástrojom ľudského rozumu na popis abstraktných štruktúr... Matematikou sa skúmajú abstraktné numerické štruktúry, štruktúry tvarov a topologické vlastnosti, zákony pohybu a zmeny, princípy rozhodovacích procesov a komunikácie, vlastnosti symetrie a pravidelnosti, podstata pravdepodobnosti a pod. Matematika je spôsobom myslenia a vnímania, ktorý nám umožňuje prenikať ku koreňom sveta okolo nás... Matematika žije a dýcha v myšliach ako akási **abstraktná symfónia**.*



(K. J. DEVLIN, *1947)



Matematika je jedným z odborov prinášajúcich najväčšie intelektuálne uspokojenie...

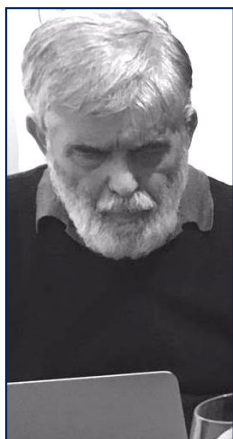
Zaoberať sa matematikou je skutočné potešenie spočívajúce v nachádzaní spôsobov myslenia, ktoré vysvetľujú, organizujú a zjednodušujú.
(W. P. THURSTON, 1946 – 2012)

Milujem matematiku nielen preto, že je možné jej použitie v technike, ale aj preto, že je krásna, že do nej človek vložil svoju rozkoš z hry a že matematika je schopná aj tej najvyššej hry a umožňuje nám zmocňovať sa nekonečna. Má čo povedať o nekonečne a o ideách.

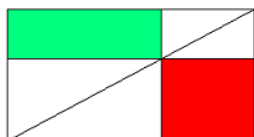


Má neuzavretú povahu ľudského tvorenia. (R. PÉTEROVÁ, 1905 – 1977)

Matematika prepožičiava kráse systém a štruktúre krásu...



*Rovnako ako v žiari Slnka blednú všetky hviezdy,
tak aj učenec môže v spoločnosti zatieniť slávu iných,
keď predloží – ale aj keď vyrieši – matematické problémy.*
(indický matematik Brahmagupta, asi v roku 628)



Stanovte a zdôvodnite, ktorý z vyfarbených štvoruholníkov v danom obdĺžniku má väčší obsah.

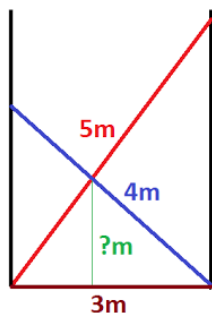
Stanovte, ktoré číslo (z tabuľky na obrázku) si myslím, ak o ňom z výrokov **A**: je v prvom riadku; **B**: nie je v druhom stĺpci; **C**: je párne; **D**: je väčšie ako 3; je pravdivý iba jeden.

1	2	3
9	5	6
7	4	8

Osol a mulica niesli rôzny počet rovnako ťažkých vriec. Mulica hovorí: *Keby si mi dal jedno vrece, niesla by som dvakrát toľko ako ty.* Osol jej na to odpovedal: *Keby som ti jedno vrece zobral, niesli by sme obaja rovnako.* Stanovte koľko vriec niesol osol a koľko mulica.

Vo vrecku je presne 30 guliek. Ak náhodne vyberieme 12 guliek, vždy bude medzi nimi aspoň jedna biela. Ak náhodne vyberieme 20 guliek, vždy bude medzi nimi aspoň jedna, ktorá nie je biela. Stanovte, presný počet bielych guliek vo vrecku.

Určte trojicu najmenších po sebe idúcich prirodzených čísel, ktorých súčet je druhou a zároveň aj tretou mocninou nejakých prirodzených čísel.



Do "dvojrozmernej studne" s vodorovným dnom a zvislými stenami vzdialenými od seba 3 metre sme hodili dve rovné palice dĺžok 4 a 5 metrov, ktoré sa ustálili v pozícii zaznačenej na obrázku. Stanovte ako vysoko od dna leží bod, v ktorom sa tieto palice "pretínajú".

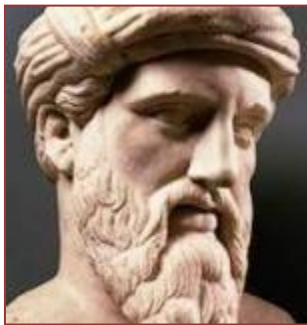
Stanovte, koľko rôznych priebehov (sled gólov pre obe družstvá) mohol mať hokejový zápas, v ktorom bol po prvej tretine stav 2:1, po druhej tretine 3:3 a skončil výsledkom 4:5.

V roku 2007 súčet prvého dvojčíslia a posledného dvojčíslia roku môjho narodenia vyjadril môj vek. V ktorom roku 20. storočia som sa narodil?

Ťažko možno nájsť inú činnosť, ktorá by svojimi, niekoľkými tisíckami rokov preverenými skúsenosťami, mohla byť účinnejšou pre rozvíjanie myslenia, abstrakcie, predstavivosti a schopností riešiť problémy, ako je pestovanie matematiky.

(český matematik P. Vopěnka; 1935 – 2015)

Dokonalé čísla a Pytagorove vety



Pythagoras zo Sámu (asi 570 – 496 pred n. l.) pochopil svet prirodzených čísel ako riadiaci princíp celého vesmíru. Fascinovala ho harmónia čísel, vytvoril zaujímavé číselné pojmy a odhalil ich vlastnosti. Napríklad *dokonalé čísla* – sú také prirodzené čísla, ktoré sa rovnajú súčtu svojich vlastných deliteľov. Napríklad $6 = 1 + 2 + 3$, alebo $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Aj čísla 496 a 8128 sú *dokonalé*. A kedy sú dve čísla *spriaznené*? Ak sa navzájom rovnajú súčtu vlastných deliteľov toho druhého.



Napríklad 220 a 284. Overte si to!



Prvých desať dokonalých čísel: 6

28

496

8 128

33 550 336

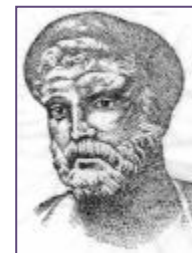
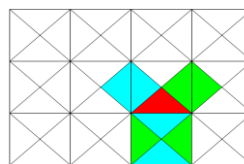
8 589 869 056

137 438 691 328

2 305 843 008 139 952 128

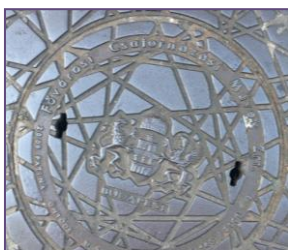
2 658 455 991 569 831 744 654 692 615 953 842 176

191 561 942 608 236 107 294 793 378 084 303 638 130 997 321 548 169 216



Aj toto sú Pytagorove vety:

- ♣ *Najkratšie odpovede ÁNO a NIE vyžadujú najdlhšie rozmýšľanie.*
- ♣ *Bohovia dali človeku dve ruky, aby ich neobťažoval s každou maličkosťou.*
- ♣ *Otužuj telo! Nepodávaj mu viac potravy ako treba. Nepožívaj omamujúce nápoje! Otupujú jemnosť a ochromujú dušu.*
- ♣ *Pravé a dokonalé priateľstvo znamená spojiť veľa vecí a tiel do jedného srdca a jediného ducha.*
- ♣ *Nikdy si v modlitbe nežiadať nič priamo pre seba. Ako môžeš vedieť, čo je pre teba dobré?*
- ♣ *Buď mlč alebo povedz niečo, čo je lepšie ako mlčanie.*



Všetko má svoj čas ...
Je čas rodenia aj čas zomierania,
je čas zabíjania, aj čas liečenia,
je čas milovať, aj čas nenávidieť,
je čas zápasu a je čas pokoja ...

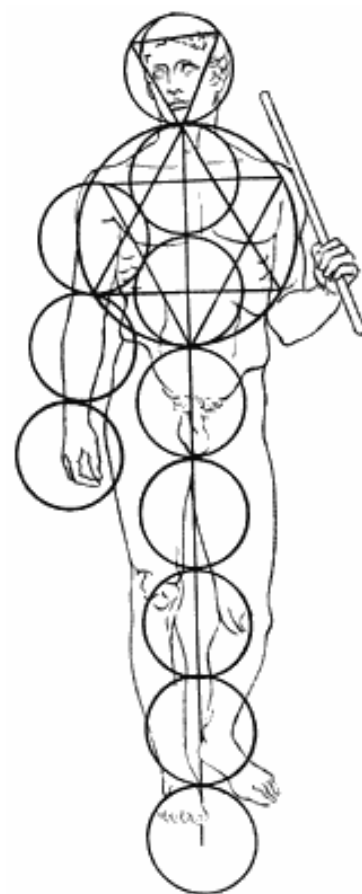


...

Ďalšie „bubliny“ nájdete aj na [webstránke www.era.topindex.sk](http://www.era.topindex.sk)

Odkaz občanom, ktorým nevadí ani školská M

- Číslo je vodcom a pánom ľudského myslenia. Bez jeho sily by všetko ostalo tajuplným a nejasným (Filolaos).
- Celá ľudská dôstojnosť spočíva v myslení. Snažme sa preto, aby sme mysleli správne; v tom je princíp mravnosti (B. Pascal).
- Kto podceňuje výsledky matematiky, škodí celej vede, lebo ten, kto nepozná matematiku, nemôže poznať ostatné exaktné vedy a nemôže pochopiť svet (R. Bacon).
- Ak vás zaujíma úplný obraz sveta, jediná cesta ako ho pochopiť, je pomocou matematického popisu... Nepoznať matematiku je výrazným obmedzením na ceste k pochopeniu sveta. Matematika je nástroj pre usudzovanie. V nej sú sústredené výsledky exaktného myslenia mnohých ľudí (R. P. Feynman).
- Matematika sa podobá určitému druhu spoločného jazyka, usporiadanému na vyjadrovanie vzťahov, ktoré buď nie je možné alebo je zložité objasňovať slovami (N. Bohr).
- Matematika je symbolický univerzálny jazyk, umožňujúci popis rôzneho obsahu, vyjadrujúci presné a jasné myslenie, smerujúce k riešeniu najrozličnejších problémov (Ž. Krygovská).
- Matematika je napínavé a krásne dobrodružstvo ľudského umu. Do svojich tajomstiev dovoľuje nazrieť iba tým, ktorí sa k nej približujú nadšením jej krásou a naplnením čistou túžbou po poznaní... Matematika je mapa skutočného sveta. Zaoberať sa matematikou vlastne znamená, v zrkadle nášho myslenia pozorovať a študovať svet v ktorom žijeme (A. Rényi).
- Matematika je veda o nekonečne. Jej cieľom je, aby človek, ktorý je konečný, vystihol nekonečno pomocou znakov (H. Weyl).
- Matematika je univerzálny symbolický jazyk, ktorý sa nezaobera opisom vecí, ale všeobecným vyjadrovaním vzťahov... Matematika je sprostredkujúca sféra medzi zmyslovým a nadzmyslovým svetom (E. Cassirer).
- Matematika je všeobecná reč: jazyk symbolov, technických definícií, výpočtov a logiky... Matematika je potešenie spočívajúce v nachádzaní spôsobov myslenia, ktoré vysvetľujú, organizujú, zjednodušujú (W.P. Thurston).



"Kto zažije potešenie z matematiky, porozumie jej a zatúži sa naučiť viac."

Theoni Pappasová

Ukážka zaujímavých podnetných didakticko-motivačných úloh

1. Zapamätajte si číslo π na 30 desatinných miest:

$\pi = 3,141592653589793238462643383279\dots$

Mám, ó bože, ó dobrý, zapamätať si takýto čísel rad. Veľký slovutný Archimedes, pomáhaj trápenému, daj mu moc naspamäť znať krásne aj slávne síce, ale tak protivné nám, ach, číslice Ludolfove. (počet písmen v jednotlivých slovách je príslušná číslica v desatinnom vyjadrení π)

2. Nečakané vyjadrenie – rovnica srdca:

Znázornite v ortonormálnej sústave súradníc binárnu reláciu



$$y = \frac{2}{3} \left\{ \frac{x^2 + |x| - 6}{x^2 + |x| + 2} \pm \sqrt{36 - x^2} \right\}$$



3. Rozdelenie koristi – spravodliví zbojníci:

Ako si traja zbojníci rozdelia rôznorodú korisť, ak si navzájom nedôverujú a každý z nich je presvedčený, že dokáže korisť rozdeliť na rovnocenné časti.

4. Rozhovor dvoch matematikov:

A: Súčin veku mojich troch synov je 36.

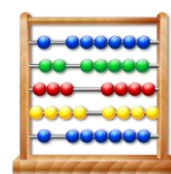
B: Táto informácia nestačí na určenie veku každého z nich.

A: Súčet veku synov je rovnaký ako počet okien na dome, ktorý vidíme pred sebou.

B: Ani teraz sa nedá určiť vek tvojich synov.

A: Najstarší z mojich synov má čierne vlasy.

B: Ďakujem, to mi stačí. Už poznám vek tvojich synov.



Koľko rokov má každý z matematikových synov
a koľko okien bolo na budove, ktorú videli pred sebou?

5. Štvorec iba kružidlom:

Zostrojte všetky vrcholy štvorca ABCD, ale iba kružidlom, ak sú dané vrcholy A, B.

6. Nežný cit a pravdepodobnosť:

Desať ľudí si náhodne sadne okolo okrúhleho stola.

Stanovte, pravdepodobnosť, že určití dvaja ľudia budú sedieť vedľa seba.

7. Výhodnejšie pre zamestnancov:

Máte rozhodnúť, buď znížiť ceny výrobkov o 10 % a nemeniť platy zamestnancov, alebo nemeniť ceny výrobkov a zvýšiť o 10 % platy.

Zdôvodnite, čo je výhodnejšie pre zamestnancov.

8. Taký trojuholník neexistuje:

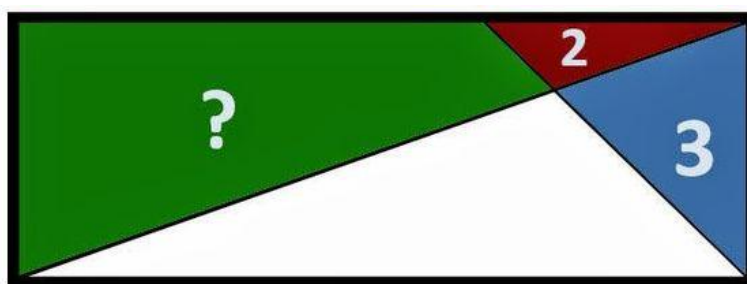
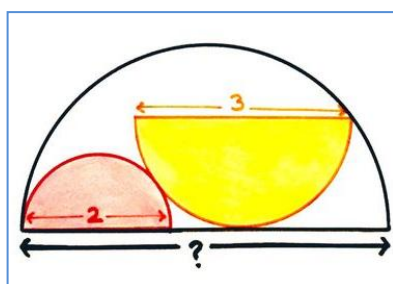
Ukážte, že neexistuje trojuholník, ktorého výšky by mali veľkosť 1, 2, 3 (dĺžkových jednotiek).

9. Aj taký existuje:

Dokážte, že v rovine existuje trojuholník, ktorého všetky výšky sú menšie než 1 cm a obsah trojuholníka je väčší ako milión cm^2 .

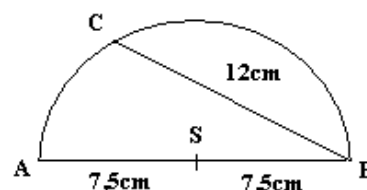
10. Záhada dvanástich dukátov:

Medzi dvanástimi dukátmi je jeden falošný (nemá rovnakú hmotnosť ako ostatné). Stanovte postup, akým nájdete tento falošný dukát najviac tromi váženiami na rovnoramenných váhach.

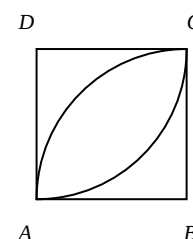


20 úloh pre výkonový štandard z matematiky ZŠ

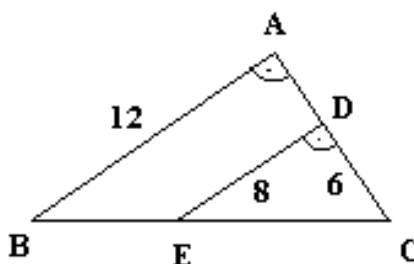
1. Usporiadajte podľa veľkosti: $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{9}$.
2. Vydeľte na dve desatinné miesta a stanovte aj zvyšok: $5,263 : 0,52$.
3. Koľko rôznych desatinných čísel možno zostaviť len pomocou čísiel 0, 3, 5, ak každú z týchto čísiel použijeme v čísle práve raz?
4. Usporiadajte čísla 2^{100} , 3^{75} , 5^{50} vzostupne a uveďte dôvody pre svoje tvrdenie.
5. Traja kamaráti si rozdelili guľôčky v pomere 6 : 5 : 4. Niektorí dvaja z nich dostali spolu 126 guľôčok. Koľko mali kamaráti všetkých guľôčok spolu?
6. Bazén na kúpalisku je dlhý 50 m a široký 12,5 m. Na pláne mesta je znázornený ako obdĺžnik s obsahom 1 cm^2 . V akej mierke je plán?
7. Spomedzi všetkých druhov húb je 70 % nejedlých. Spomedzi všetkých nejedlých druhov húb je 15% smrteľne jedovatých. Koľko % zo všetkých druhov húb sú smrteľne jedovaté?
8. Vyriešte v R: $\frac{1}{3x-6} = \frac{1}{2-x}$.
9. Stanovte polomer r kruhu, ak pre obsah S kruhu platí $S = \pi \cdot r^2$.
10. Stanovte súčet dvoch čísel, ak ich rozdiel je 37 a pri vydelení väčšieho menším dostaneme podiel 3 a zvyšok 3.
11. Aká je priemerná rýchlosť vozidla, ktoré prejde trať rýchlosťou 60 km/h a vracia sa späť po rovnakej trase rýchlosťou 40 km/h.
12. Akú veľkosť má vnútorný uhol pravidelného desaťuholníka?
13. Ak $\cos \alpha = \sin 27^\circ$, čomu sa rovná α ($0 \leq \alpha \leq 90^\circ$)?
14. Akú vlastnosť má trojuholník KLM , ak pre bod P z niektorej jeho strany platí $|KP| = |PL| = |PM|$?
15. Stanovte obsah trojuholníka ABC z údajov na obrázku:



16. V rovnobežníku $ABCD$ platí: $|AB| = 10 \text{ cm}$, $|AC| = 15 \text{ cm}$ a vzdialenosť bodu D od priamky AC je 2 cm. Stanovte vzdialenosť bodu D od priamky AB .
17. Stanovte obsah "oka" vo štvorci $ABCD$ so stranou 4 dm, ak oblúky AC sú časti kružníc so stredmi v B a v D .

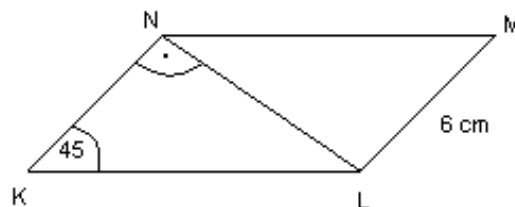


18. Tri steny určitého kvádra majú obsah 6 cm^2 , 10 cm^2 a 15 cm^2 . Stanovte veľkosť objemu tohto kvádra.
19. V rovine je daná úsečka AB s veľkosťou 4 cm. Stanovte množinu všetkých vrcholov C v rovine, pre ktoré je obsah trojuholníkov ABC 4 cm^2 ?
20. Stanovte veľkosť úsečky BC , ak údaje o veľkostiach daných úsečiek v centimetroch sú uvedené na obrázku.

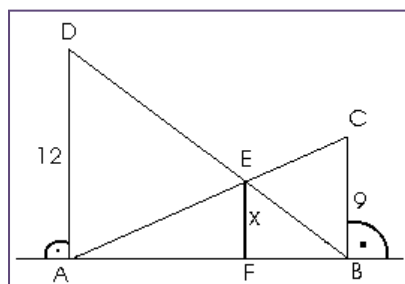


Šestnásť úloh pre Terezkú...

1. Povedzte, čo sa stalo, ak sa ukázalo, že tvrdenie *Ak je dnes utorok, tak sme v Belgicku*, nebolo pravdivé. *(Bol utorok a nie sme v Belgicku.)*
2. My dvaja spolu sme našli 70 húb. Medzi mojimi je presne $\frac{5}{9}$ dubákov. Medzi tvojimi je presne $\frac{2}{17}$ šampiňónov. Koľko húb som našiel? (36)
3. Žiak prečítal knihu za 12 dní. Ak by prečítal každý deň o 5 strán viac, prečítal by ju o 4 dni skôr. Stanovte, koľko strán má táto kniha. (120)
4. Stanovte, koľko prirodzených čísel menších ako 1000 možno napísať len pomocou číier 1, 5, 7 (cifry sa môžu opakovať). (39)
5. Podstava nádrže tvaru kvádra má rozmery 6 m a 9 m. Napustením 405 hl vody sa naplnila nádrž na 15 % svojho objemu. Určte hĺbku nádrže. (5m)
6. Päť robotníkov vyrobí za 6 dní 70 výrobkov. Vypočítajte, koľko výrobkov vyrobí deväť rovnako výkonných robotníkov za 10 dní. (210)
7. Cena vstupeniek vzrástla o 40 %, za vstupenky sa vybralo len o 26 % viac. Určte o koľko percent klesla návštevnosť predstavenia. (o 10%)
8. Stanovte obsah kosodĺžnika $KLMN$ (pozri obrázok): (36 cm²)



9. V našom meste je $\frac{3}{5}$ žien vydatých za $\frac{2}{3}$ mužov. Určte aká časť obyvateľstva je slobodná (nežije v manželstve). (7/19)
10. Stanovte, koľko rokov mal matematik A. MORGAN (1806–1871), keď prehlásil: *V roku x^2 som mal x rokov.* (43)
11. V pravouhlom trojuholníku ABC sú odvesny dlhé 6 cm a 8 cm. Stanovte dĺžku polomeru kružnice opísanej trojuholníku ABC . (5 cm)
12. Čerstvé huby obsahujú 88 % vody, sušené iba 14 % vody. Koľko kg čerstvých húb treba nazbierať, aby sme získali 3 kg sušených? (21,5 kg)
13. Stanovte súčet prirodzených čísel $p + q$, ak viete, že $p \cdot q = 10000$ a žiadne z čísel p, q nie je deliteľné desiatimi. ($16 \cdot 625 = 641$)
14. Knižka má očíslovaných 972 strán (prirodzené čísla od 1 do 972 vrátane). Určte, koľkokrát sa na očíslovaných stránkach vyskytuje číslica 7. (290)
15. Stanovte, akú časť zmiešaného lesa chcú lesníci vyrúbať, ak ich vedúci nevinne vyhlásil: *Budeme rúbať iba sosny, ktorých je v našom zmiešanom lese 99 %. Po výrube budú sosny tvoriť 98 % všetkých ponechaných stromov.* (1/2)
16. Vypočítajte veľkosť x (údaje sú na obrázku):



*Matematika nie je ilustrovaný časopis, ktorý možno začať čítať na ktorejkoľvek strane...
Matematika učí vytvárať presnými logickými úvahami platné závery.*
(profesor Š. SCHWARZ)

(36/7)



Dôkazy z M (pre gymnaziálnych seminaristov)



*Jediný spôsob na zachovanie toho,
čo sme študentov naozaj naučili, je vymenovať úlohy,
ktoré po takejto výučbe musia vedieť riešiť.*
(ruský matematik V.I. ARNOLD, 1937 – 2010)

Dokážte:

- Prvočísel nie je konečne veľa.
- Druhá odmocnina z dvoch nie je racionálne číslo.
- Aspoň jeden prvočíselný deliteľ d zloženého čísla $n \in \mathbb{N}$ vyhovuje vzťahu $d \leq \sqrt{n}$.
- Ak je ciferný súčet prirodzeného čísla deliteľný tromi, tak číslo je deliteľné tromi.

$$\forall a, b \in \mathbb{N}; 0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+; \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; 3 \nmid (n^3 + 2n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; 6 \nmid (n^3 - n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; 5 \nmid (n^2 + 1) \Rightarrow n \text{ nie je deliteľné piatimi}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; 16 \nmid (n^2 + 4n) \Rightarrow 2 \nmid n$$



- Existuje práve jedno prvočíslo p , pre ktoré je $(p^2 + 1)$ tiež prvočíslo.
- Neexistujú celé čísla x, y , aby platilo $x^3 + y^3 = 13 \cdot x \cdot y + 2$
- Neexistujú prirodzené čísla x, y , pre ktoré by platilo $x^2 - 5y + 8 = 0$
- Pre každé $n \in \mathbb{N}$ číslo $p_n = (2^n \cdot 5^{n+1} + 1)$ nie je prvočíslo.
- Pre každé prvočíslo $p > 3$ je číslo $(p^2 - 1)$ deliteľné číslom 24.
- Súčet vnútorných uhlov v každom trojuholníku je uhol priamy.
- Všetky obvodové uhly nad priemerom kružnice sú pravé (Tálesova veta).
- Euklidove vety o výške a odvesne pravouhlého trojuholníka.
- Súčet obsahov štvorcov nad oboma odvesnami... (Pytagorova veta).
- Výšky každého ostrouhlého trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.
- Ťažnice každého trojuholníka sa pretínajú v jednom bode, ktorý ich rozdeľuje v pomere 1 : 2.
- Každý trojuholník je ťažnicami rozdelený na šesť častí s rovnakým obsahom.
- V ľubovoľnom trojuholníku rozdelí os vnútorného uhla protiľahlú stranu v pomere strán priľahlých.
- Existuje trojuholník s výškami menšími ako 1 cm a obsahom väčším ako 10^6 cm^2 .
- Neexistuje trojuholník s výškami veľkostí 1, 2, 3.
- V každom pravouhlom trojuholníku je súčet dĺžok odvesien rovný súčtu dĺžok priemerov kružníc trojuholníku opísanej a vpísanej.

*Neuvádzam dôkazy svojich tvrdení,
aby každý mohol pocítiť radosť a uspokojenie
z ich vlastného objavovania.*
(ARCHIMEDES, asi 287 – 212 pred n. l.)



Úloha: Rozložte číslo 2 na súčet štyroch rôznych zlomkov tvaru $\frac{1}{n}$, kde $n \in N$.

Riešenie: Je potrebné vyriešiť rovnicu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 2$, aby x, y, z, t boli rôzne prirodzené

čísla. Pretože zlomky majú byť rôzne, musí pre aspoň jeden z nich, napr. $\frac{1}{x}$, platiť $\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 1$,

t.j. $2 > x > \frac{1}{2}$. Teda pre $x \in N$ z toho vyplýva, že $x = 1$. Potom $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 1$ a tiež treba,

aby $\frac{1}{3} < \frac{1}{y} < 1$, t.j. $3 > y > 1$, teda pre $y \in N$ je $y = 2$. Tým potrebujeme, aby $\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2}$; teda bude

znovu potrebné, aby $\frac{1}{4} < \frac{1}{z} < \frac{1}{2}$ t.j. $4 > z > 2$ v N , z toho vyplýva, že $z = 3$. Potom už vyhovuje iba $t = 6$.

$$\text{Platí: } \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{6+3+2+1}{6} = 2$$

Voda vo víne

Máme dve rovnaké nádoby tak, že v jednej je víno a v druhej voda, vždy do rovnakej výšky, ale nie až po okraj (rovnaké objemy vína a vody). Zoberieme lyžicu vína a prelejeme ju do nádoby s vodou a premiešame. Potom zoberieme lyžicu tejto zmesi a nalejeme do nádoby s vodou. Stanovte, čoho je po tomto úkone viac, vína v nádobe s vodou alebo vody v nádobe s vínom.

Riešenie: *Chcete hádať? Rozmýšľajte, spočítajte si to pre konkrétne hodnoty.*

Nech sú objemy vody i vína po jednom litre. Nech lyžica má objem 0,1 litra. Po prvom preliatí je v nádobe s vodou 1liter vody a 0,1litra vína. Potom na druhé preliatie pripadá do 0,1litrovej lyžice $[(0,1 \cdot 10) : 11]$ vody a $[(0,1 \cdot 1) : 11]$ vína. Teda v nádobe s vodou zostalo $[(0,1 \cdot 10) : 11]$ vína. A do nádoby s vínom sa dostalo druhým preliatím tiež $[(0,1 \cdot 10) : 11]$ vody. Vína v nádobe s vodou je rovnako ako vody v nádobe s vínom.

Skúsme úlohu vyriešiť abstraktnou úvahou.

Tekutina je v nádobe s vínom po spomínanom úkone v rovnakej výške, čiže nezmenený objem. V nádobe síce odbudlo vína (to sa dostalo do nádoby s vodou), ale pribudlo vody. Keby bol úbytok väčší (alebo menší) ako prírastok, tak by tekutiny v nádobe bolo buď menej (alebo viac) než na začiatku. Teda v nádobe s vínom je úbytok vína, ktoré je teraz v nádobe s vodou, rovnako veľký ako prírastok vody, ktorý sa dostal do nádoby s vínom. V nádobe s vínom je práve toľko vody ako vína v nádobe s vodou.

Vyberte si, ktorý postup vás presvedčil.

Dcéry na vydaj

Úloha: Otec má päť dcér. Stanovte, koľko má možností vydať ich za osem ženíchov, ak každý ženich môže dostať za ženu najviac jednu dcéru.

Riešenie:

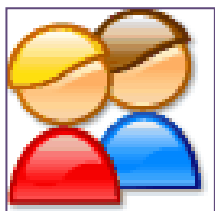
A. Predstavme si ženíchov takto: □□□□□□□□. Ak niektorému ženichovi je priradené nevesta, označíme tento stav číslom 1, ak nie, tak 0. Napr. 1 1 0 0 1 1 0 1. Je zrejmé, že sa jedná o permutácie s opakovaním z 8 prvkov, ktoré sú dvoch druhov (jednotiek je 5 a nuly sú 3). Počet týchto permutácií je $P'_{5,3}(8) = \frac{8!}{5!3!}$.

Ale dcéry sú rôzne, tak možností je 5! krát viac. Teda otec má $5! \cdot \frac{8!}{5!3!}$ možností, t.j. **6720** možností ako za daných podmienok vydať svojich päť dcér za osem možných ženíchov.

B. Predstavme si dcéry takto: ◇◇◇◇◇ a ku každej z nich priradíme postupne ženíchov. Prvej dcére máme 8 možností priradiť ženicha, potom druhej 7 možností, tretej 6 možností atď. Pretože ku každému výberu pre prvú dcéru existujú ďalšie výbery pre ďalšie dcéry, tak všetkých možných výberov je **8·7·6·5·4 = 6720**.

C. Vyberieme päťicu z 8 ženíchov. Ak nám nezáleží na poradí, tak možností je $C_5(8)$. Ale pred nich nastúpeným dcéram na poradí záleží, tak možností je 5! krát viac. Spolu je priaznivých možností **5! · $C_5(8)$ = 6720**.

D. Môžeme si hneď predstaviť, že na vybraných päťiciach ženíchov dcéram záleží aj na ich poradí a takých možností je **$V_5(8)$ = 6720**.



Jablká pre deti

Úloha:

Stanovte, koľko je rôznych možností pre rozdelenie 8 jabĺk trom deťom, ak záleží len na počte jabĺk pre jednotlivé deti.

Riešenie:

A. rozpíšme systematicky jednotlivé možnosti pre jednotlivé deti A, B, C :

	A	B	C	
počet	0	0 – 8	čo zostane	9 možností
	1	0 – 7	čo zostane	8 možností
	2	0 – 6	čo zostane	7 možností
	.	.		.
	.	.		.
	.	.		.
	8	0	0	1 možnosť

sčítaním všetkých možností dostávame počet 45.

B. Ak si označíme každé jablko menom dieťaťa, ktorému ho chceme dať, tak dostaneme napr. $A A B B C C C C$, teda jednotlivé kombinácie ôsmej triedy z troch

prvkov s opakovaním. Ich počet je $C_8'(3) = \binom{10}{8} = \binom{10}{2} = 45$.

C. Osem jabĺk môžeme oddeliť dvomi značkami na tri skupiny (pre A, B, C), napr. $\bigcirc \bigcirc \Delta \bigcirc \bigcirc \Delta \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc$, takých možností je toľko, ako keď rozmiestnime dve značky na 10 polí, t.j. $C_2(10) = 45$.

D. Predchádzajúci počet možností môžeme určiť aj ako počet možností rozdeliť dva druhy prvkov s počtom 8 a 2 do 10 políčok, t.j. ako počet permutácií 10 prvkov s opakovaním z dvoch druhov s počtom 8 a 2 prvky: $P_{8,2}'(10) = 45$.

E. Rozpis s pochopením:

A	B	C	
8	0	0	3 možnosti
7	1	0	6 možností
6	2	0	6 možností
5	3	0	6 možností
4	4	0	3 možnosti
6	1	1	3 možnosti
5	2	1	6 možností
4	3	1	6 možností
4	2	2	3 možnosti
3	3	2	3 možnosti



spolu 45 možností.

Štvorec protikladov

Carihradský mních a filozof Michael Sello, žijúci v 11. storočí, navrhol (pred ním podobnú schému používal aj vzdelaný rímsky rečník L.A. Apuleius v 2. storočí) usporiadať

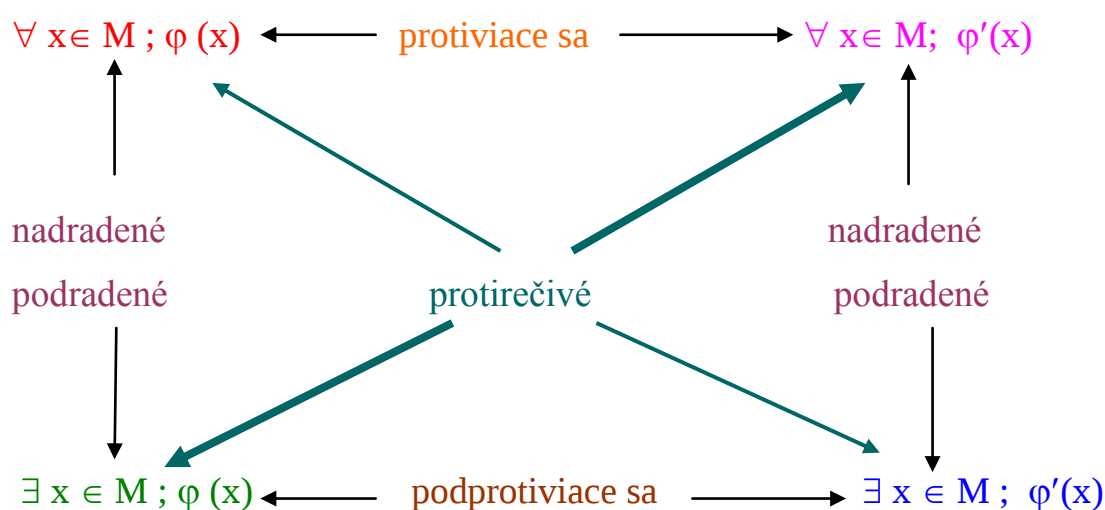
všeobecný kladný výrok $[\forall x \in M ; \varphi(x)]$,

všeobecný záporný výrok $[\forall x \in M ; \varphi'(x)]$,

čiastočný kladný výrok $[\exists x \in M ; \varphi(x)]$,

a čiastočný záporný výrok $[\exists x \in M ; \varphi'(x)]$

do štvorcovej schémy a vyznačiť ich logické vzťahy:



protirečivé (logicky protikladné, **sporné**, kontradiktórne, **negácia**, opak;

jeden je pravdivý – druhý nepravdivý)

protiviacie sa (kontrárne; nemôžu byť obidva pravdivé,

ale môžu byť obidva nepravdivé)

podprotiviacie sa (subkontrárne; môžu byť obidva pravdivé,

nemôžu byť obidva nepravdivé)

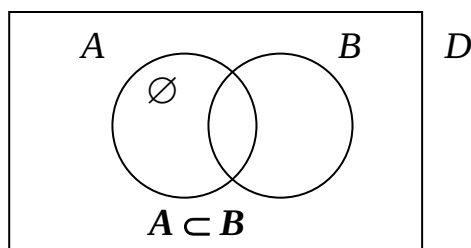
podradenosť, nadradenosť vzhľadom na pravdivosť

(subsumcia; pre **neprázdnu** M z pravdivosti nadradeného výroku vyplýva pravdivosť podradeného výroku, z nepravdivosti podradeného výroku vyplýva nepravdivosť nadradeného výroku)

Podmienky nevyhnutné a postačujúce v matematickej vete $\forall x \in D; A(x) \Rightarrow B(x)$:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B' \Rightarrow A'$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

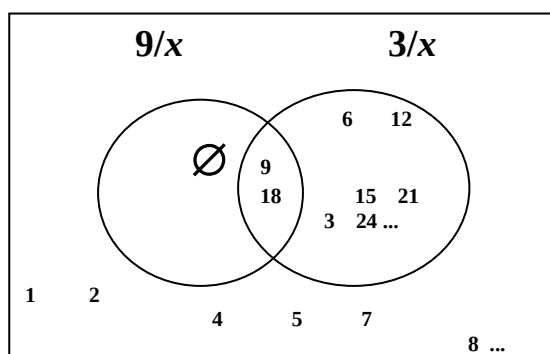
A implikuje B
 z A vyplýva B
 ak A , tak B
 ak platí A , tak platí B
 A má dôsledok B
 (B je dôsledkom A)



$$\forall x \in D; A(x) \Rightarrow B(x)$$

Platnosť A je postačujúcou podmienkou pre platnosť B .
 Platnosť B je nevyhnutnou podmienkou pre platnosť A .

Napríklad: $\forall x \in N; 9/x \Rightarrow 3/x$
 (deliteľnosť deviatimi je postačujúca pre deliteľnosť tromi,
 ale nie je to podmienka nevyhnutná;
 deliteľnosť tromi je nevyhnutná pre deliteľnosť deviatimi,
 ale nie je to postačujúca podmienka)



N



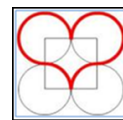
Zrejme platí pre každé celé čísla x, y : $(x > 2 \wedge y > 2) \Rightarrow x \cdot y > 4$
 $A \Rightarrow B$

teda platnosť A : $(x > 2 \wedge y > 2)$ je **postačujúcou podmienkou** pre platnosť B : $x \cdot y > 4$,
 ale nie nevyhnutnou;

platnosť B : $x \cdot y > 4$ je **nevyhnutnou podmienkou** pre platnosť A : $(x > 2 \wedge y > 2)$,
 ale nie postačujúcou.



K srdcu učiteľa školskej matematiky



- *Vyučovanie v škole musí byť, aby som sa vyjadril heslom, psychologické a nie systematické. Učiteľ musí byť trochu diplomatom, aby mohol zachytiť záujem chlapca, musí brať ohľad na jeho duševné predpoklady a podarí sa mu to len tak, keď bude podávať učivo názorne a zreteľne. Až v najvyšších triedach možno podávať učivo aj abstraktne.*
F. Klein
- *Treba viesť žiakov tak, aby sa riadili pravidlom: Mnoho toho neviem, ale to, čo viem, viem dobre.*
E. Čech
- *Bolo by pekné, keby bolo možné naučiť žiakov všetko, čo je užitočné, aj všetko, čo ozdobuje človeka, ale umenie je dlhé a čas krátky. Preto je potrebné, aby žiaci študovali to, čo je pravdepodobne najužitočnejšie a najozdobnejšie.*
B. Franklin
- *Úspešnosť našej práce závisí predovšetkým od toho, či poznáme zákonitosti, ako vzniká a rastie proces „učenia sa myslieť“, či poznáme spôsoby, ako takýto proces môžeme u žiakov navodiť. Učiteľ matematiky potrebuje poznať zákonitosti, ktorými sa riadi genéza matematického myslenia, potrebuje vedieť ako tento proces v žiakoch navodiť. Pri vyučovaní matematiky sa nestačí opierať o štruktúru matematickú. Vyučovanie každej témy je potrebné oprieť o znalosti genézy (ontogenézy i fylogenézy) myšlienok, ktoré sú témou reprezentované. Kostrou tejto genézy je schéma piatich etáp: stimulácia, etapa jednotlivých skúseností – modelov, etapa univerzálnych skúseností – modelov, abstrakčný zdvih, kryštalizácia poznatku v poznatkovej štruktúre.*
M. Hejný
- *Pri vyučovaní dávajte prednosť najobecnejším metódam. Prinúťte sa k tomu, aby ste ich vysvetlili čo najjednoduchším spôsobom a hneď uvidíte, že sú skoro vždy najľahšie.*
P. S. Laplace
- *Chcem požiadať matematickú verejnosť, aby zvýšila svoje pedagogické úsilie, nie vytváraním nových komisií expertov, ale zvýšením osobného úsilia. Nech si každý zoberie zodpovednosť za to, aby vyučoval s väčšou vitalitou. Ako učitelia máme mimoriadne dôležitú úlohu, aby sme odovzdali mládeži niektoré z intelektuálnych hodnôt civilizovaného ľudstva. Našou úlohou je inšpirovať študentov, aby na základe svojich schopností dosiahli čo najvyššej odbornej i ľudskej úrovne.*
G. Piranian
- *Skutočnosť má byť soľou školského učenia matematiky. Ak musia byť matematické poznatky abstraktné, nech sú naozaj abstrahované zo skutočnosti a naviac, nech sú abstrahované samotným žiakom. Týmto spôsobom žiak pozná, ako tieto poznatky chutia, a začne pociťovať radosť z matematickej činnosti.*
W. Okoň
- *Každý učiteľ by sa mal zaoberať výskumom a mal by v tom mať prax, aby mohol učiť iných v bádateľskom prístupe. Hovorím, že každý, kto učí, dokonca i keď učí len stredoškolskú algebru, by bol lepším učiteľom, keby premýšľal o dôsledkoch, ktoré má jeho predmet mimo tento predmet, keby čítal o súvislostiach svojho predmetu s inými predmetmi, keby sa snažil vytvoriť úlohy, ktoré takéto dôsledky a súvislosti naznačujú – keby, inými slovami, sa zaoberal výskumom v stredoškolskej algebre a okolo nej. To je jediná cesta, ako si sám v sebe udržať pri živote bádateľský prístup človeka, ktorý kladie otázky a tým byť aj schopným ich odovzdávať ďalším. Najlepší spôsob ako vyučovať druhých, je prinútiť študentov, aby sa pýtali a tvorili. Nerobte im kázeň – povzbudte ich k činnosti.*
P. R. Halmos
- *Najdôležitejšia je vlastná aktivita žiakov. Človek sa nenaučí robiť matematiku počúvaním precíznych výkladov na vyučovacích hodinách, ale samostatnou prácou s matematickými pojmami.*
G. Choquet
- *Nepýtajte sa nikdy, koľko matematiky sa môže dieťa naučiť. Pýtajte sa radšej, v akej miere môže matematika vo vzdelaní dieťaťa prispieť k jeho ľudskej dôstojnosti.*
H. Freudenthal

(vybral a zostavil D. J.)

Vysokoškolský profesor matematiky **György PÓLYA** (1887 – 1985):

Tri základné princípy štúdia:

Princíp najlepšej motivácie. Princíp aktívneho učenia. Princíp postupnosti fáz – činnosť a vnímanie, osvojenie si pojmov, aplikácia a zovšeobecnenie.

Desatoro pre učiteľov:



1. *Učebný premet by vás mal veľmi zaujímať.*
2. *Svoj vyučovací predmet musíte veľmi dobre poznať.*
3. *Vy i vaši žiaci sa najlepšie naučíte, ak sami objavíte niečo nové.*
4. *Z tváří svojich žiakov vyčítajte, čo od vás očakávajú; predstavte si seba samých na ich mieste.*
5. *Odovzdávajte žiakom aj spôsob myslenia; naznačujte im uplatnenie vedomostí.*
6. *Naučte žiakov správne predvídať, odhaliť podstatné.*
7. *Ukazujte im argumenty, dôkazy.*
8. *Z jednotlivých prípadov odhaľujte všeobecne platné zásady.*
9. *Nechajte svojich žiakov postupne odhaľovať tajomstvá.*
10. *Len ponúkajte, nenapchávajte.*

- *Matematika je veda, ktorá dáva najlepšiu príležitosť pozorovať proces myslenia a má tú prednosť, že pri jej pestovaní nadobúdame cvik v metóde rozumového uvažovania, ktorú môže byť potom používaná na štúdium ktoréhokoľvek predmetu.*
- *Matematika je vtedy zaujímavá, ak živí našu vynachádzavosť a zdatnosť usudzovania.*
 - *Krása matematiky je v tom, nachádzať pravdu bez ťažkostí.*
- *Čo to znamená ovládať matematiku? Riešiť úlohy a to nielen štandardné, ale aj také, ktoré vyžadujú určitú nezávislosť myslenia, tvorivý rozum, originálnosť, vynaliezavosť.*
- *Radosť z objavy je najlepším podnetom pre ďalšiu prácu.*
 - *Najlepšia cesta ako sa niečo naučiť je, objaviť to.*
- *Učenie začína činnosťou a jednaním, postupuje k slovám a predstavám a malo by končiť žiadanými algoritmami rozumového uvažovania.*
 - *Čo je to dobre učiť? Dávať študujúcemu príležitosť, aby objavoval veci sám, z vlastnej iniciatívy.*
- *Nechajte svojich študentov klásť otázky alebo sa pýtajte tak, ako sa oni môžu pýtať. Nechajte svojich študentov odpovedať alebo dávajte odpovede, ktoré oni môžu dávať. Vyhýbajte sa odpovediam na otázky, na ktoré sa nik nepýtal, ani vy sami.*
- *Vyučovanie má žiaka pripraviť pre objavy alebo vo väčšej miere dať niektoré predstavy o objavoch.*
- *Veľký objav rieši veľký problém, ale zrnko objavy je v každom probléme.*
- *Ak sa chcete naučiť plávať, smelo vojdite do vody; ak sa chcete naučiť riešiť úlohy, riešte ich. Matematika je riešenie problémov. Učte žiakov rozmýšľať. Pre dômyselnosť a dôvtip musí byť v matematike miesto.*
- *Štúdium umenia riešiť úlohy je výchovou vôle.*
- *Treba motivovať nie vynútením, askézou, ale zaujatím a podaním problému zvnútra.*



*Vyučovanie nie je veda; to je umenie.
Ak by vyučovanie bola veda, tak bude obsahovať
najlepší spôsob vyučovania
a každý človek by sa musel učiť tým spôsobom.
Vyučovanie nie je veda,
je tam veľa možností pre osobné rozdiely...*

Z aforizmov profesora matematiky

- ❖ *Chciet' nájsť pravdu je zásluha, aj keď cestou blúdime.*
- ❖ *Najnebezpečnejšie sú pravdy mierne prekrútené.*
- ❖ *Lepšie je učiť ľudí ako majú myslieť a nie čo majú myslieť.*
Tým sa vyhneme mnohým nedorozumeniam.
- ❖ *Niektorí ľudia si myslia, že je rozumné všetko, čo sa robí s vážnou tvárou.*
- ❖ *Všetci robíme chyby bez rozdielu, len každý robí chyby inak.*
- ❖ *Je mnoho ľudí, ktorí iba čítajú, aby nemuseli myslieť.*
- ❖ *Nič nemôže prispieť pre klud duše viac, ako keď nemáme vôbec žiadnu mienku.*
- ❖ *Dobrá pamäť je dobrom, ale schopnosť zabúdať,*
je často ešte lepším darom od Pána Boha.
- ❖ *Človek je tak zdokonaliteľný a skazitelný, že sa môže stať bláznom z rozumu.*
- ❖ *Som presvedčený, že človek sa v iných ľudoch nielen miluje, ale aj nenávidí.*
- ❖ *Ten človek bol tak inteligentný, že sa na nič na svete nehodil.*
 - ❖ *Existujú ľudia, ktorí majú tak málo odvahy niečo tvrdiť, že sa neodvážujú povedať,*
že vanie chladný vietor, nech ho akokoľvek pociťujú, pokiaľ predtým nepočuli,
že to povedali iní ľudia.
 - ❖ *Dať prednosť veľkému duchu v malom tele znamená uvažovať,*
ale pre to sa povznesie pramálo ľudí. Na trhu s dobytkom sa upierajú oči
na najväčšieho a najtučnejšieho vola.
- ❖ *Bolo by treba sa naučiť rozoznávať medzi tým, čo človek sám vymyslel a tým,*
čo niekde odpíše.
- ❖ *Ženské oči sú pre mňa tak dôležitou vecou, dívam sa do nich často, myslím si*
pri tom toho toľko, že keby som bol iba hlavou, dievčatá by pre mňa mohli byť
iba očami.
- ❖ *Keď nehanebník chce, môže vyzerat' skromne, ale žiadny skromný človek*
nemôže vyzerat' nehanebne.
- ❖ *Všetko, čo skutočne múdry človek môže urobiť, je viesť všetko k dobrému cieľu*
a predsa brať ľudí takých, akí sú.
- ❖ *Zlaté pravidlo: neposudzovať ľudí podľa ich názoru, ale podľa toho,*
čo z nich tieto názory urobili.
- ❖ *Najväčšie šťastie na svete, o ktoré denne úpenlivo žiadam nebesá je:*
Aby ma v sile a vo vedomostiach prekonal iba rozumní a cnostní ľudia.
- ❖ *Aký je človek úbohý, keď má vykonať všetko sám.*
- ❖ *Ak chceš žiť, zvykni si na mizerné počasie a nespravodlivosť ľudí.*
- ❖ *Je to, čo človek môže poznať, práve to, čo poznať má?*
- ❖ *Zapochybuj o všetkom aspoň raz, aj keby to bola veta: Dvakrát dva sú štyri.*
 - ❖ *Vždy je o jedného hlupáka viac než si myslíme.*



Georg Christoph LICHTENBERG (1. 7. 1742 – 24. 2. 1799), profesor matematiky, fyziky a astronómie v Göttingene, jeden z najznámejších nemeckých satirických spisovateľov, o ktorom sa Albert Einstein vyjadril: *Čudák so záchvatmi skutočnej originality, ktorá vyústila v nesmrteľných básnických výlevoch.*



Matematická kultúra a ľudské myslenie

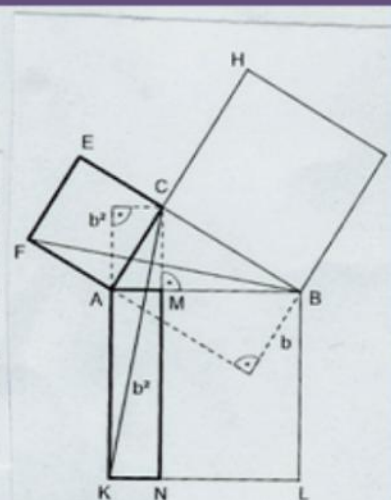
- ✚ Najuniverzálnejší antický mysliteľ Aristoteles zo Stageiry (384–322 pred n. l.) poznal, že *na človeku je najpozoruhodnejšia jeho schopnosť myslieť*.
- ✚ Kresťanský neoplatonik Boethius (okolo 480–524) odkázal, že *všetka náuka o pravde je zahrnutá v mnohosti a veľkosti*. Uznal, že *nemôže dosiahnuť poznanie božských vecí ten, kto nie je vôbec zbehlý v matematike*.
- ✚ Františkánsky mních R. Bacon (asi 1214–1294) vytušil že *čím viac základ prírody rozširujeme, tým viac odvetví matematiky budeme nútení používať... Všetko poznanie závisí od teoretickej sily matematiky*. Odvtedy platia jeho slová: *Kto podceňuje výsledky matematiky, škodí celej vede, lebo ten, kto nepozná matematiku, nemôže poznať ostatné exaktné vedy a nemôže pochopiť svet*.
- ✚ René Descartes (1596–1650), ktorý považoval ľudský rozum za rozhodujúci zdroj poznania, sa vyjadril: *Porovnával som tajomstvá prírody so zákonmi matematiky. Bol som a som presvedčený, že ten istý kľúč otvára dvere k pochopeniu jedného aj druhého*.
- ✚ V 17. storočí francúzsky matematik, fyzik i filozof Blaise Pascal (1623–1662) k tomu dodal: *Myšlienka tvorí veľkosť človeka... Človek je zjavne stvorený pre to, aby myslel... Celá ľudská dôstojnosť spočíva v myslení. Snažme sa preto, aby sme mysleli správne; v tom je princíp mravnosti*.
- ✚ Matematik i poet J.J. Sylvester (1814–1897) predvídavo uznal: *Matematika je najistejšia pôda pre ľudstvo. Zostane nedotknuteľná až kým sa plán univerza, ktorý sa rozprestiera pod našimi nohami ako mapa, nestane súčasťou ľudskej mysle... Matematika zvyšuje ľudské schopnosti postupnými krokmi od začiatku k stále vyšším stupňom intelektuálnej existencie*.
- ✚ Americký učenec i filozof, matematik a logik, zakladateľ pragmatizmu aj modernej semiotiky Ch. S. Peirce (1839–1914) vnímal to, že *Matematika je štúdium ideálnych konštrukcií a odhaľovanie predtým neznámych vzťahov medzi časťami týchto konštrukcií... Matematika skúma čo je a čo nie je logicky možné, bez toho, aby zodpovedala za jeho aktuálnu existenciu*.
- ✚ Anglický filozof, matematik a logik A. N. Whitehead (1861–1947) chápal matematiku ako najoriginálnejší výtvor ľudského ducha: *Matematika je myslenie pohybujúce sa vo sfére úplného abstrahovania od každého jednotlivého prípadu toho, o čom práve vypovedá... Najväčšie abstrakcie sú tými pravými nástrojmi, ktorými kontrolujeme svoje uvažovanie o konkrétnych faktoch... Originalita matematiky spočíva v tom, že v matematickej vede sú vyjadrené vzťahy medzi vecami, ktoré sa bez sprostredkovania ľudským rozumom nedajú vôbec postihnúť*.
- ✚ Nemecký filozof a historik vedy E. Cassirer (1874–1945) už vedel, že *Matematika je univerzálny symbolický jazyk, ktorý sa nezaobrá opisom vecí, ale všeobecným vyjadrovaním vzťahov... Matematika je sprostredkujúca sféra medzi zmyslovým a nadzmyslovým svetom*.
- ✚ G. Bachelard (1884–1962), francúzsky filozof, pochopil: *V samej matematike sa realita prejavuje vo svojej podstatnej funkcii: podnecovať myslenie*.
- ✚ Vysokoškolský profesor G. Pólya (1887–1985) konštatoval, že *Matematika je veda, ktorá dáva najlepšiu príležitosť poznávať proces myslenia a má tú prednosť, že pri jej pestovaní nadobúdame cvik v metóde rozumového uvažovania, ktoré môže byť potom používané na štúdium ktoréhokoľvek predmetu*.
- ✚ Poľský dominikán, logik a filozof, Józef M. Bocheński (1902–1995) vyučoval: *Človek je aj tým, kto poznáva ideálne skutočnosti.. Myslieť znamená tvoriť pojmy... Za významné výsledky našej vedy vďačíme ďaleko viac mysleniu než pozorovaniu*.
- ✚ Zaoberať sa matematikou je skutočné potešenie spočívajúce v nachádzaní spôsobov myslenia, ktoré vysvetľujú, organizujú a zjednodušujú (W. P. Thurston, *1946).
- ✚ Matematika je spôsobom myslenia a vnímania, ktorý nám umožňuje prenikať ku koreňom sveta okolo nás... Matematika žije a dýcha v myšliach ako akási abstraktná symfónia.

(K. Devlin, *1947)

3. důkaz (Euklides, 3. st. př. Kristem)

V označení podle obr. 23 má trojúhelník FAB obsah $\frac{1}{2}b^2$ (základna $|FA| = b$, výška k této základně je rovněž b). Protože jsou trojúhel-

níky FAB a CAK shodné (shodují se ve stranách $|FA| = |CA| = b$, $|BA| = |AK| = c$ a úhlech FAB a CAK), má i trojúhelník CAK obsah $\frac{1}{2}b^2$. To je ovšem polovina obsahu obdélníku $AKNM$ (neboť $|AK| = c$ je základna tohoto obdélníku i trojúhelníku AKC a výška tohoto trojúhelníku je rovna velikosti úsečky AM). Obdélník $AKNM$ má tedy obsah b^2 . Podobně lze dokázat, že obdélník $BLNM$ má obsah a^2 . ($\frac{1}{2}a^2$ je obsah trojúhelníku GAB i s ním shodného trojúhelníku CBL .) Je tedy $c^2 = a^2 + b^2$.



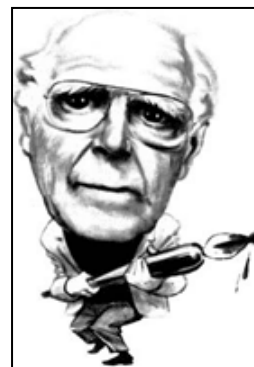
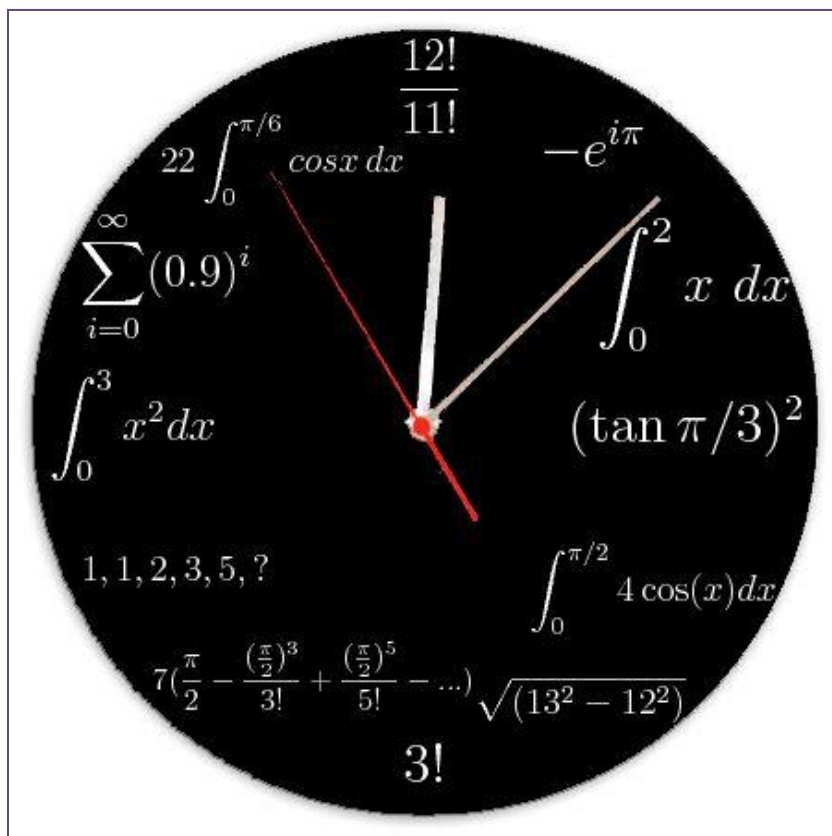
Obr. 23

Spomínam si na rozprávko vo štylizovanú, motivačne podnetnú, v iných obmenách pomerne známú, úlohu (*Kráľ a jeho tri dcéry*):

Inteligentný odsúdenec sa mohol zachrániť, ak by určil vek troch kráľových dcér. Kráľ mu stroho oznámil: Mám tri dcéry. Ak vynásobíš prirodzené čísla dané ich vekom, dostaneš číslo 72. Ak sčítaš tie čísla dané ich vekom, dostaneš aj tebe známy počet miestností v mojom kaštieli. Odsúdenec sa zamyslel a uviedol: Ani tieto kráľovské informácie nie sú postačujúce na jednoznačné určenie veku dcér. Kráľ poznamenal:

Nech o tvojom prepustení rozhodne moja najstaršia dcéra. Potom skromný odsúdenec stroho oznámil vek spomínaných troch dcér.

Poznáte ich vek už aj vy? Koľko bolo miestností v kráľovskom kaštieli?



*Možno anjel Pána prehliadol
nekonečné more chaosu
a jemne ho zvrátil svojim prstom.
A v tomto drobučkem
a krátkom víre rovníc
dostal náš vesmír
konečnú podobu.*

M. Gardner (1914 - 2010)

©
dj2024