

Mocnost bodu ke kružnici v důkazech planimetrických vět

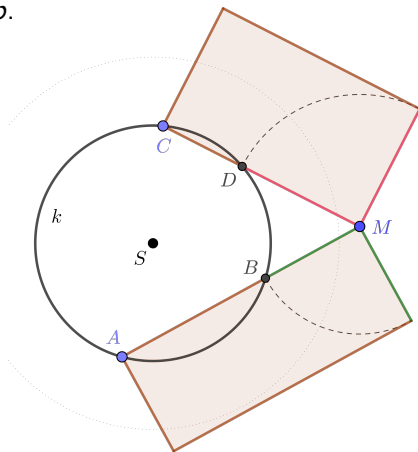
Jana Hromadová

Katedra didaktiky matematiky, MFF UK

20. září 2024

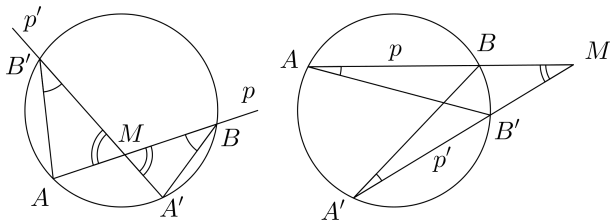
Motivace

- V rovině je dána kružnice k a bod M . Sečna p kružnice k vedená bodem M protíná kružnici k v bodech A, B .
- Hypotéza: Obsah obdélníku, jehož strany mají délky $|MA|$, $|MB|$ nezávisí na volbě polohy sečny p .



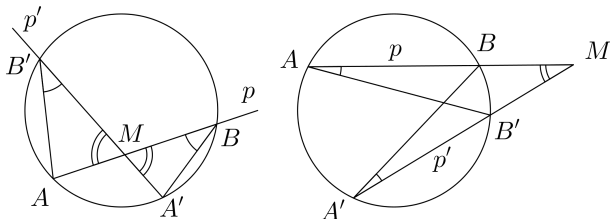
Zavedení pojmu

- Snadno ověříme vyslovenou hypotézu:



Zavedení pojmu

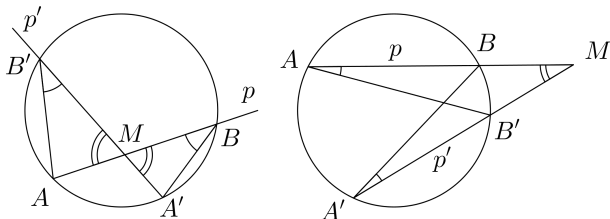
- Snadno ověříme vyslovenou hypotézu:



- $\triangle MAB' \sim \triangle MA'B$

Zavedení pojmu

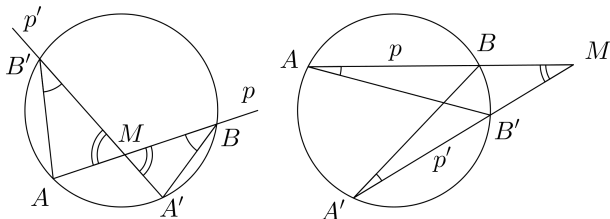
- Snadno ověříme vyslovenou hypotézu:



- $\triangle MAB' \sim \triangle MA'B$
- $\frac{|AM|}{|B'M|} = \frac{|A'M|}{|BM|}$

Zavedení pojmu

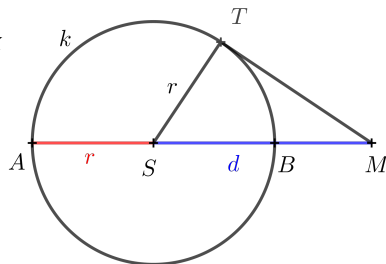
- Snadno ověříme vyslovenou hypotézu:



- $\triangle MAB' \sim \triangle MA'B$
- $\frac{|AM|}{|B'M|} = \frac{|A'M|}{|BM|}$
- $|AM| \cdot |BM| = |A'M| \cdot |B'M|$

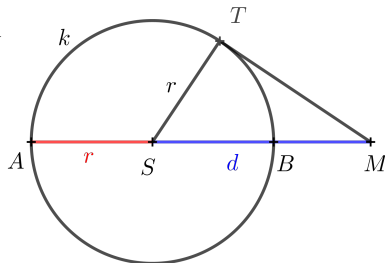
Zavedení pojmu

- sečna vedená středem S kružnice k o poloměru r ; označme $|MS| = d$



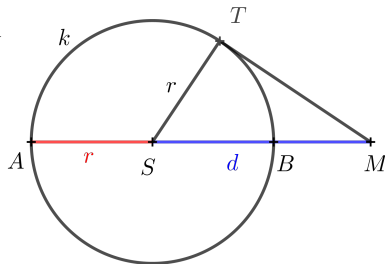
Zavedení pojmu

- sečna vedená středem S kružnice k o poloměru r ; označme $|MS| = d$
- $|MA| = |d + r|$, $|MB| = |d - r|$



Zavedení pojmu

- sečna vedená středem S kružnice k o poloměru r ; označme $|MS| = d$
- $|MA| = |d + r|$, $|MB| = |d - r|$
- $|MA| \cdot |MB| = |d + r| \cdot |d - r|$
 $|MA| \cdot |MB| = |d^2 - r^2|$

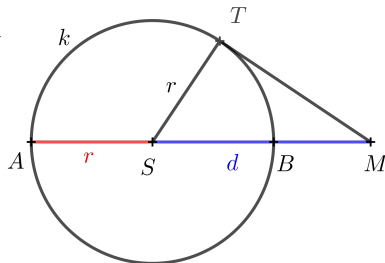


Zavedení pojmu

- sečna vedená středem S kružnice k o poloměru r ; označme $|MS| = d$

- $|MA| = |d + r|$, $|MB| = |d - r|$

- $|MA| \cdot |MB| = |d + r| \cdot |d - r|$
 $|MA| \cdot |MB| = |d^2 - r^2|$



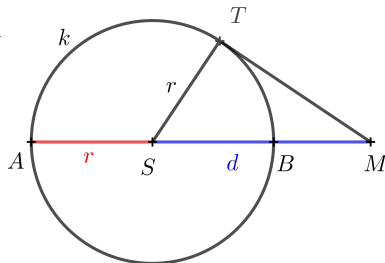
- **Definice:** Je dán bod M a kružnice $k(S, r)$, $|MS| = d$. Číslo $m_k^M = d^2 - r^2$ nazýváme mocností bodu M ke kružnici k .

Zavedení pojmu

- sečna vedená středem S kružnice k o poloměru r ; označme $|MS| = d$

- $|MA| = |d + r|$, $|MB| = |d - r|$

- $|MA| \cdot |MB| = |d + r| \cdot |d - r|$
 $|MA| \cdot |MB| = |d^2 - r^2|$



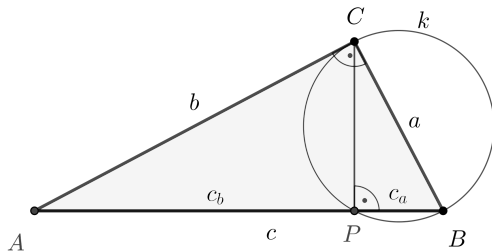
- **Definice:** Je dán bod M a kružnice $k(S, r)$, $|MS| = d$. Číslo $m_k^M = d^2 - r^2$ nazýváme mocností bodu M ke kružnici k .

- tečna kružnice k s bodem dotyku T :
 $|MT|^2 = |MS|^2 - |ST|^2 = d^2 - r^2$

Eukleidova věta o odvěsně

V pravoúhlém trojúhelníku rozdělíme přeponu patou výšky na přeponu na dva úseky. Potom je obsah čtverce nad libovolnou z odvěsen roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s přeponou a úsekem přepony přilehlým k příslušné odvěsně.

- $a^2 = c \cdot c_a$ $b^2 = c \cdot c_b$

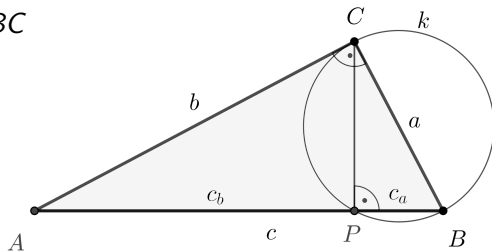


Eukleidova věta o odvěsně

V pravoúhlém trojúhelníku rozdělíme přeponu patou výšky na přeponu na dva úseky. Potom je obsah čtverce nad libovolnou z odvěsen roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s přeponou a úsekem přepony přilehlým k příslušné odvěsně.

- $a^2 = c \cdot c_a$ $b^2 = c \cdot c_b$

- kružnice k nad průměrem BC

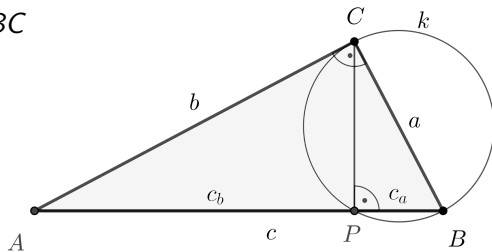


Eukleidova věta o odvěsně

V pravoúhlém trojúhelníku rozdělíme přeponu patou výšky na přeponu na dva úseky. Potom je obsah čtverce nad libovolnou z odvěsen roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s přeponou a úsekem přepony přilehlým k příslušné odvěsně.

- $a^2 = c \cdot c_a$ $b^2 = c \cdot c_b$

- kružnice k nad průměrem BC
- mocnost A vzhledem ke k :

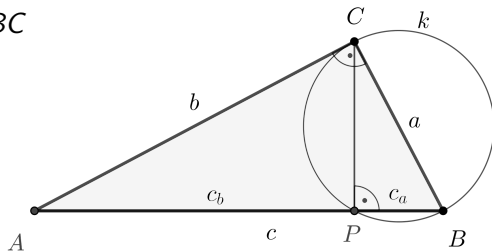


Eukleidova věta o odvěsně

V pravoúhlém trojúhelníku rozdělíme přeponu patou výšky na přeponu na dva úseky. Potom je obsah čtverce nad libovolnou z odvěsen roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s přeponou a úsekem přepony přilehlým k příslušné odvěsně.

- $a^2 = c \cdot c_a$ $b^2 = c \cdot c_b$

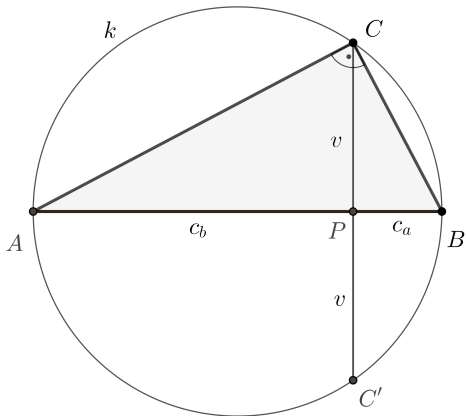
- kružnice k nad průměrem BC
- mocnost A vzhledem ke k :
- $m_k^A = b^2 = c \cdot c_b$



Eukleidova věta o výšce

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad výškou na přeponu roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s úseky přepony, na něž je přepona rozdělena patou výšky.

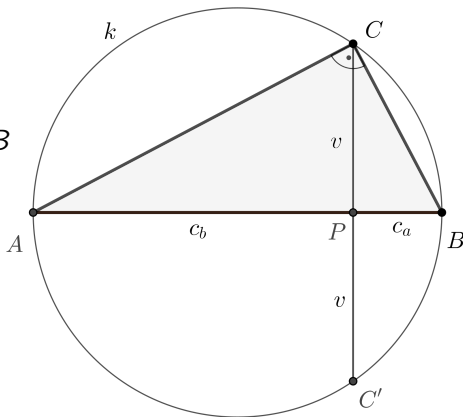
- $v^2 = c_a \cdot c_b$



Eukleidova věta o výšce

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad výškou na přeponu roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s úseky přepony, na něž je přepona rozdělena patou výšky.

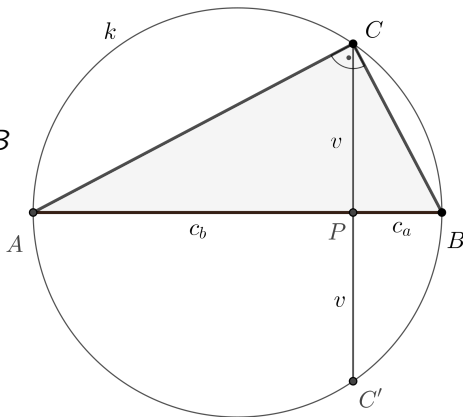
- $v^2 = c_a \cdot c_b$
- kružnice k nad průměrem AB



Eukleidova věta o výšce

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad výškou na přeponu roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s úseky přepony, na něž je přepona rozdělena patou výšky.

- $v^2 = c_a \cdot c_b$
- kružnice k nad průměrem AB
- průsečík C' přímky CP s k

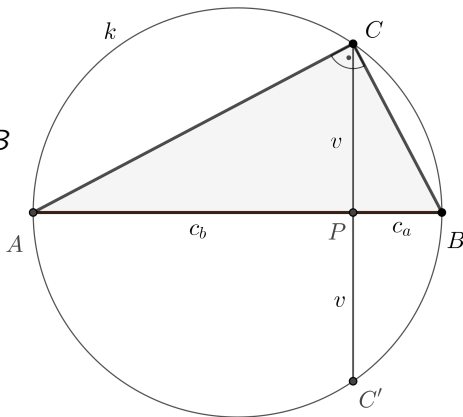


Eukleidova věta o výšce

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad výškou na přeponu roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s úseky přepony, na něž je přepona rozdělena patou výšky.

- $v^2 = c_a \cdot c_b$

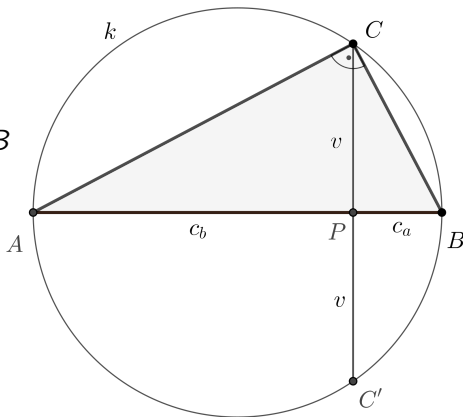
- kružnice k nad průměrem AB
- průsečík C' přímky CP s k
- mocnost P vzhledem ke k :



Eukleidova věta o výšce

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad výškou na přeponu roven obsahu obdélníku, jehož strany jsou shodné s úseky přepony, na něž je přepona rozdělena patou výšky.

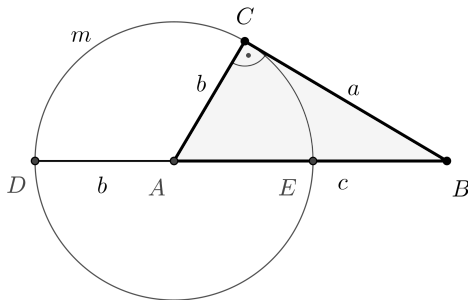
- $v^2 = c_a \cdot c_b$
- kružnice k nad průměrem AB
- průsečík C' přímky CP s k
- mocnost P vzhledem ke k :
• $m_k^P = v \cdot v = c_a \cdot c_b$



Pýthagorova věta

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad přeponou roven součtu obsahů čtverců nad odvěsnami.

- $c^2 = a^2 + b^2$

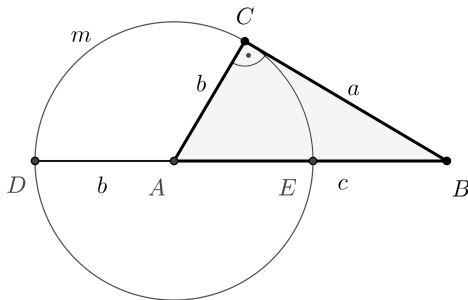


Pýthagorova věta

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad přeponou roven součtu obsahů čtverců nad odvěsnami.

- $c^2 = a^2 + b^2$

- kružnice $m(A, b)$



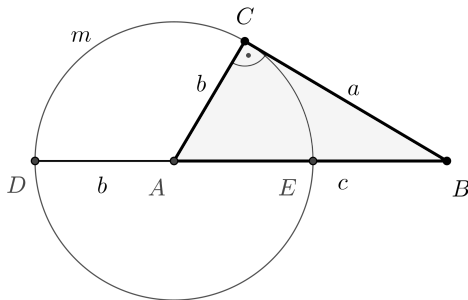
Pýthagorova věta

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad přeponou roven součtu obsahů čtverců nad odvěsnami.

- $c^2 = a^2 + b^2$

- kružnice $m(A, b)$

- D, E - průsečíky přímky AB s kružnicí m



Pýthagorova věta

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad přeponou roven součtu obsahů čtverců nad odvěsnami.

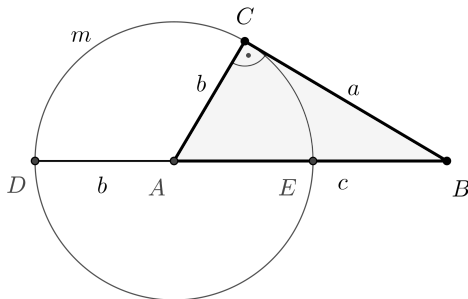
- $c^2 = a^2 + b^2$

- kružnice $m(A, b)$

- D, E - průsečíky přímky AB s kružnicí m

- $|DA| = |AE| = |AC| = b$

- $|DB| = c + b \quad |EB| = c - b$



Pýthagorova věta

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad přeponou roven součtu obsahů čtverců nad odvěsnami.

- $c^2 = a^2 + b^2$

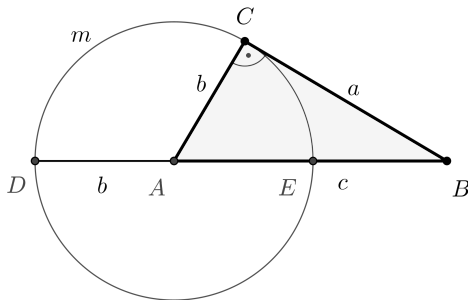
- kružnice $m(A, b)$

- D, E - průsečíky přímky AB s kružnicí m

- $|DA| = |AE| = |AC| = b$

- $|DB| = c + b \quad |EB| = c - b$

- mocnost bodu B vzhledem k m :



Pýthagorova věta

V pravoúhlém trojúhelníku je obsah čtverce nad přeponou roven součtu obsahů čtverců nad odvěsnami.

- $c^2 = a^2 + b^2$

- kružnice $m(A, b)$

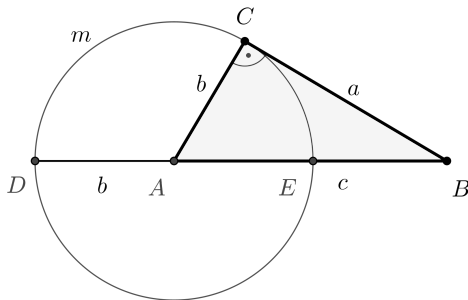
- D, E - průsečíky přímky AB s kružnicí m

- $|DA| = |AE| = |AC| = b$

- $|DB| = c + b \quad |EB| = c - b$

- mocnost bodu B vzhledem k m :

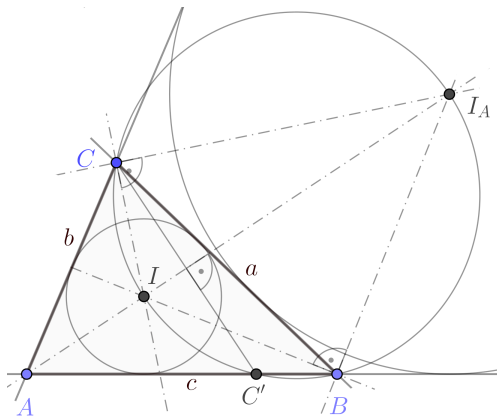
- $m_m^B = a^2 = (c - b) \cdot (c + b) = c^2 - b^2$



Heronův vzorec

Pro obsah S trojúhelníku ABC platí $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde a, b, c jsou délky jeho stran a s je poloviční obvod.

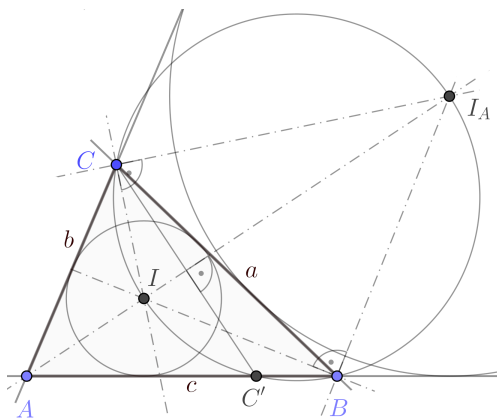
- Označme I , resp. I_A, I_B, I_C středy kružnice vepsané, resp. připsaných ke stranám a, b, c .



Heronův vzorec

Pro obsah S trojúhelníku ABC platí $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde a, b, c jsou délky jeho stran a s je poloviční obvod.

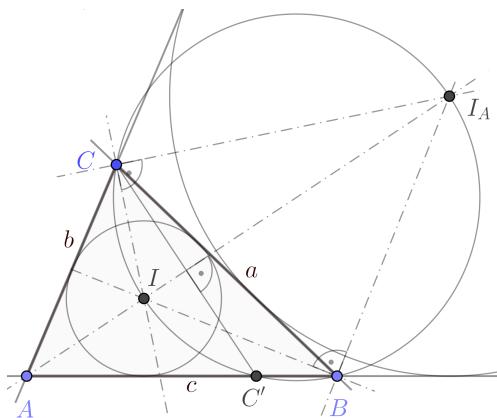
- Označme I , resp. I_A, I_B, I_C středy kružnice vepsané, resp. připsaných ke stranám a, b, c .
- nejprve odvodíme:
 $|AB| \cdot |AC| = |AI| \cdot |AI_A|$



Heronův vzorec

Pro obsah S trojúhelníku ABC platí $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde a, b, c jsou délky jeho stran a s je poloviční obvod.

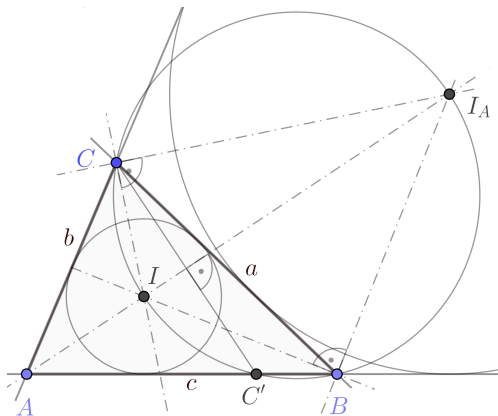
- Označme I , resp. I_A, I_B, I_C středy kružnice vepsané, resp. připsaných ke stranám a, b, c .
- nejprve odvodíme:
 $|AB| \cdot |AC| = |AI| \cdot |AI_A|$
- čtyřúhelník $CIBI_A$ je tětiový



Heronův vzorec

Pro obsah S trojúhelníku ABC platí $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde a, b, c jsou délky jeho stran a s je poloviční obvod.

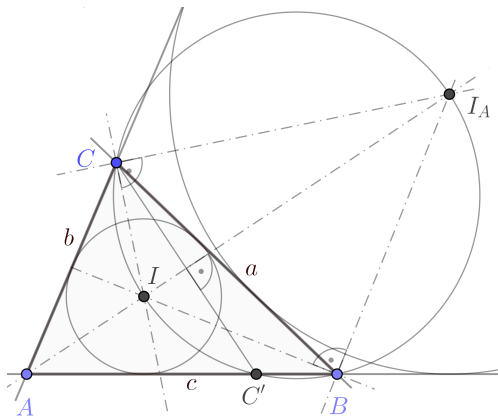
- Označme I , resp. I_A, I_B, I_C středy kružnice vepsané, resp. připsaných ke stranám a, b, c .
- nejprve odvodíme:
 $|AB| \cdot |AC| = |AI| \cdot |AI_A|$
- čtyřúhelník $CIBI_A$ je tětiový
- $O(I_A I) : C \rightarrow C'$



Heronův vzorec

Pro obsah S trojúhelníku ABC platí $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde a, b, c jsou délky jeho stran a s je poloviční obvod.

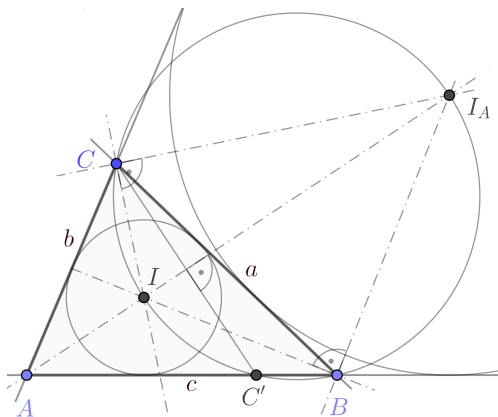
- Označme I , resp. I_A, I_B, I_C středy kružnice vepsané, resp. připsaných ke stranám a, b, c .
- nejprve odvodíme:
 $|AB| \cdot |AC| = |AI| \cdot |AI_A|$
- čtyřúhelník $CIBI_A$ je tětiový
- $O(I_A I) : C \rightarrow C'$
- $|AC| = |AC'|$



Heronův vzorec

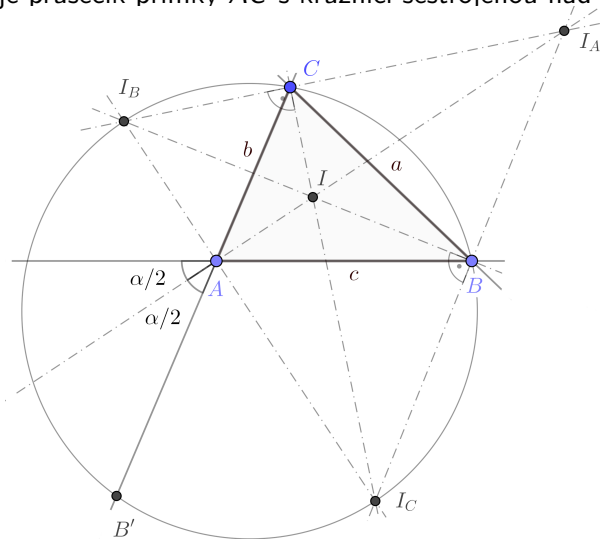
Pro obsah S trojúhelníku ABC platí $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde a, b, c jsou délky jeho stran a s je poloviční obvod.

- Označme I , resp. I_A, I_B, I_C středy kružnice vepsané, resp. připsaných ke stranám a, b, c .
- nejprve odvodíme:
 $|AB| \cdot |AC| = |AI| \cdot |AI_A|$
- čtyřúhelník $CIBI_A$ je tětiový
- $O(I_A I) : C \rightarrow C'$
- $|AC| = |AC'|$
- mocnost bodu A ke kružnici nad průměrem $I_A I$

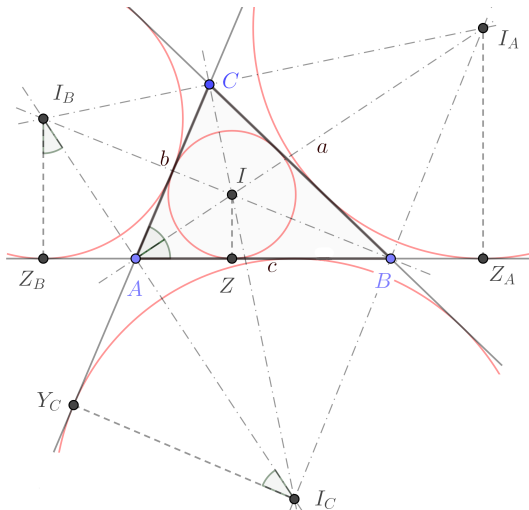


Heronův vzorec

- Obdobně pak dokážeme: $|AB| \cdot |AC| = |AB'| \cdot |AC| = |AI_B| \cdot |AI_C|$, kde B' je průsečík přímky AC s kružnicí sestavenou nad průměrem $I_B I_C$.



Heronův vzorec



$$|AZ| = |AI| \cdot \cos(\alpha/2) = s - a$$

$$|AZ_B| = |AI_B| \cdot \sin(\alpha/2) = s - c$$

$$|AZ_A| = |AI_A| \cdot \cos(\alpha/2) = s$$

$$|AY_C| = |AI_C| \cdot \sin(\alpha/2) = s - b$$

Heronův vzorec

Heronův vzorec postupně odvodíme z jiného vztahu pro výpočet obsahu trojúhelníku:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \alpha$$

$$S = |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$S = \sqrt{(|AB| \cdot |AC|)^2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$S = \sqrt{|A| \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot |A|_A \cdot \cos \frac{\alpha}{2} |A|_B \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot |A|_C \sin \frac{\alpha}{2}}$$

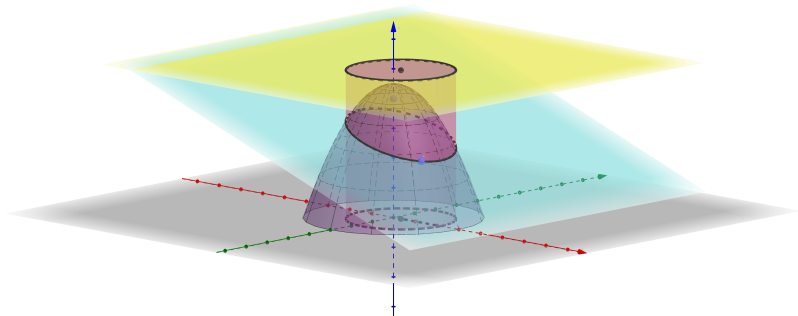
$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Možnosti rozšíření pojmu

- Mocnost bodu ke kulové ploše
 - Mějme sféru $\kappa(S, r)$ a bod M , který neleží na sféře κ . Tímto bodem vedme dvě přímky tak, aby sféru κ protly v bodech A, B respektive A', B' . Pak platí: $|MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'|$.
- Darbouxův součin
 - Nechť jsou dány dvě nesoustředné kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$. Darbouxovým součinem těchto dvou kružnic, značíme $k_1 * k_2$, budeme rozumět hodnotu výrazu: $k_1 * k_2 = d^2 - r_1^2 - r_2^2$, kde d je délka úsečky S_1S_2 .
- Mocnost bodu ke křivce

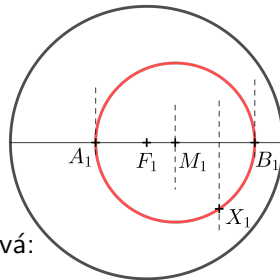
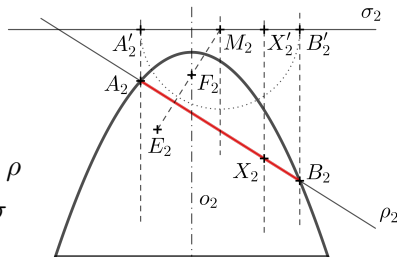
Rovinný řez rotačního paraboloidu

Rotační paraboloid je prořat rovinou, která je různoběžná s osou rotace v elipse. Pravoúhlým průmětem této elipsy do roviny kolmé k ose rotace je kružnice.



Rovinný řez rotačního paraboloidu

- ρ - rovina řezu
- σ - řídící rovina paraboloidu
- F - ohnisko paraboloidu
- E - bod souměrně sdružený s F dle ρ
- M - průsečík přímky EF s rovinou σ
- X - bod průnikové elipsy
- X' - průmět bodu X do roviny σ



Kulová plocha κ o středu X , procházející ohniskem F prochází též bodem E a dotýká se roviny σ v bodě X' .

Z mocnosti bodu M ke kulové ploše κ vyplývá:
 $|ME| \cdot |MF| = |MX'|^2 = \text{konst.}$

Literatura

- Blažek, J. (2021). Čtyři důkazy Heronova vzorce. Matematika–Fyzika–Informatika, 30(1), 18–26.
https://mfi.upol.cz/files/30/3001/mfi_3001_018_026.pdf
- Drábek, K. Harant, F. Setzer, O. (1979). Deskriptivní geometrie II, SNTL, Praha, 288 stran.
- Moravcová, V. Hromadová, J. (2021). Základy planimetrie pro učitelské studium. Matfyzpress, Praha, 247 stran, ISBN: 978-80-7378-456-0. https://karlin.mff.cuni.cz/~morava/Zaklady_planimetrie.pdf
- Půlpán, M. (2024). Mocnost bodu ke kružnici, bakalářská práce.

jole@karlin.mff.cuni.cz