

Soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

Zdeněk Halas

KDM MFF UK

20. září 2024

Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo – obecné řešení soustavy

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

$$a_{11}a_{21}x + a_{12}a_{21}y = b_1a_{21}$$

$$a_{11}a_{21}x + a_{11}a_{22}y = a_{11}b_2$$

$$a_{11}a_{21}x + a_{12}a_{21}y = b_1a_{21}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = (a_{11}b_2 - b_1a_{21})$$

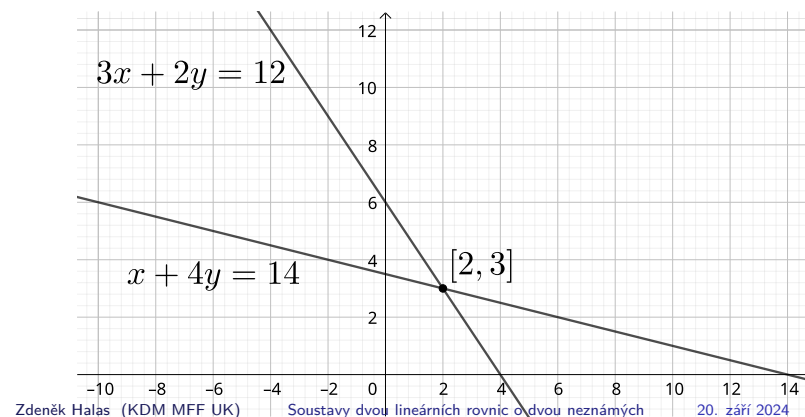
$$y = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Průsečík dvou přímek

$$3x + 2y = 12$$

$$x + 4y = 14$$

řešení: $x = 2, y = 3$ 

Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo – obecné řešení soustavy

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

$$x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

schéma:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

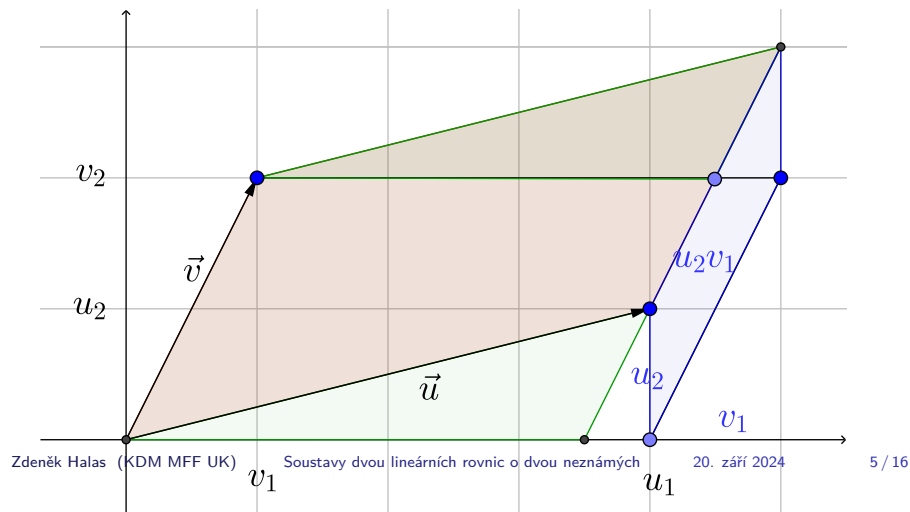
► historická poznámka

► poměry obsahů

Cramerovo pravidlo – obecné řešení soustavy

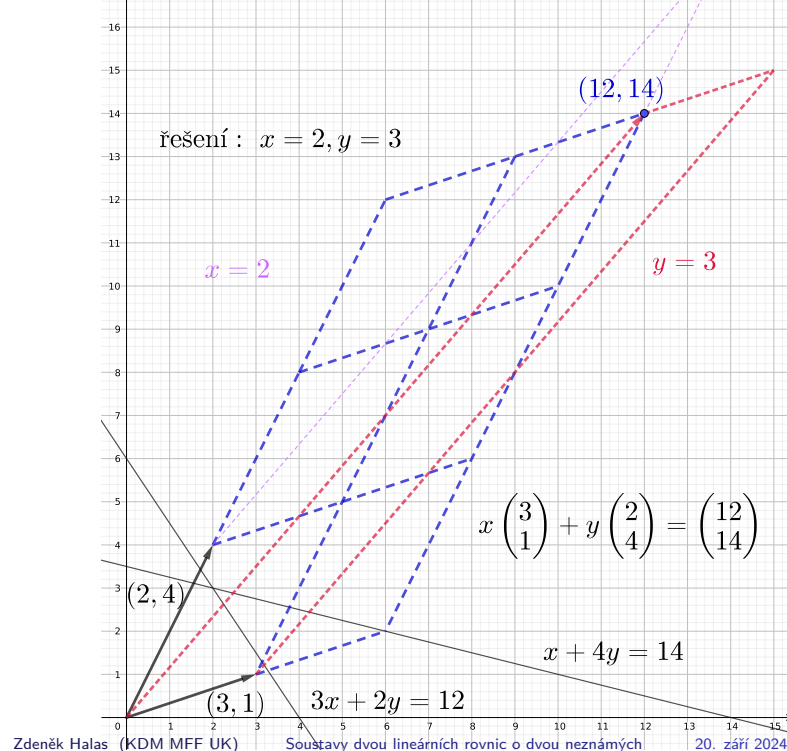
determinant jako orientovaný obsah rovnoběžníku (KSS)

$$S_{or} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - v_1 u_2$$



Cramerovo pravidlo

Průsečík dvou přímek



Homogenizace a průsečík dvou přímek

Homogenizace a průsečík dvou přímek

řešme soustavu:

$$p_1 x + p_2 y + p_3 = 0$$

$$q_1 x + q_2 y + q_3 = 0$$

homogenizace:

$$p_1 x + p_2 y + p_3 z = 0$$

$$q_1 x + q_2 y + q_3 z = 0$$

cesta zpět: $z = 1$

interpretace soustavy (výhoda homogenizace):

$$(p_1, p_2, p_3) \cdot (x, y, z) = 0$$

$$(q_1, q_2, q_3) \cdot (x, y, z) = 0$$

tj. hledáme vektory (x, y, z) kolmé na normálové vektory:

$$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3), \quad \vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$$

Vektorový součin

hledáme vektory (x, y, z) kolmé na normálové vektory:

$$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3), \quad \vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$$

ty určují směr průsečnice obou vektorových rovin

řešením (x, y, z) je vektorový podprostor generovaný vektorem:

$$\boxed{\vec{p} \times \vec{q}}$$

Jakmile „přeškálujeme“ na $z = 1$, dostaneme řešení původní soustavy.

Takže: **průsečík dvou přímek** je bod, jehož souřadnice jsou určeny pomocí **vektorového součinu**.

Neboli: řešení soustavy najdeme pomocí vektorového součinu.

Konkrétní příklad

$$3x + 2y - 12 = 0$$

$$x + 4y - 14 = 0$$

$$3x + 2y - 12z = 0$$

$$x + 4y - 14z = 0$$

$$\vec{p} \times \vec{q} = (3, 2, -12) \times (1, 4, -14) = (-28 + 48, -12 + 42, 12 - 2) = (20, 30, 10)$$

$$\text{tj. } (2, 3, 1)$$

Řešení soustavy:

$$p \cap q = [2, 3]$$

Průsečík dvou přímek a vektorový součin – stručně

- řešíme soustavu – hledíme průsečík dvou přímek:

$$p_1x + p_2y + p_3 = 0$$

$$q_1x + q_2y + q_3 = 0$$

řešení:

$$x = \frac{p_2q_3 - p_3q_2}{p_1q_2 - p_2q_1}, \quad y = \frac{p_3q_1 - p_1q_3}{p_1q_2 - p_2q_1}$$

- homogenizace:

$$p_1x + p_2y + p_3z = 0$$

$$q_1x + q_2y + q_3z = 0$$

řešení:

$$\vec{p} \times \vec{q} = (p_2q_3 - p_3q_2, p_3q_1 - p_1q_3, p_1q_2 - p_2q_1)$$

$$\text{chceme } z = 1 \implies \left(\frac{p_2q_3 - p_3q_2}{p_1q_2 - p_2q_1}, \frac{p_3q_1 - p_1q_3}{p_1q_2 - p_2q_1}, 1 \right)$$

Přímka procházející dvěma body

Přímka procházející dvěma body

Najděme obecnou rovnici přímky AB .

$$A = [a_1, a_2], \quad B = [b_1, b_2]$$

souřadnice těchto bodů musí vyhovovat rovnici přímky

$$ax + by + c = 0$$

(až na nenulový násobek)

tj. hledáme a, b, c :

$$aa_1 + ba_2 + c = 0$$

$$ab_1 + bb_2 + c = 0$$

řešení umíme:

$$(a_1, a_2, 1) \times (b_1, b_2, 1)$$

(koeficient u c je 1, poslední souřadnice je tedy vždy obsazena jedničkou)

Přímka procházející dvěma body

Najděme obecnou rovnici přímky AB .

$$A = [-3, 2], \quad B = [4, -1]$$

- ▶ doplníme obligátní jedničku:

$$(-3, 2, 1), \quad (4, -1, 1)$$

- ▶ vypočteme vektorový součin:

$$(-3, 2, 1) \times (4, -1, 1) = (3, 7, -5)$$

- ▶ obecná rovnice přímky procházející body $A = [-3, 2]$, $B = [4, -1]$:

$$3x + 7y - 5 = 0$$

Shrnutí

- ▶ průsečík dvou přímek ($z = 1$):

$$\vec{p} \times \vec{q}$$

- ▶ koeficienty obecné rovnice přímky procházející dvěma body $[a_1, a_2]$, $[b_1, b_2]$:

$$(a_1, a_2, 1) \times (b_1, b_2, 1)$$

- ▶ Cramerovo pravidlo: poměry obsahů