Wythoffova hra, aneb od zápalek přes Fibonacciho zápis přirozených čísel až ke zlatému řezu

Ľubomíra Dvořáková

FJFI ČVUT v Praze

Cesty k matematice
19. září 2024

Program

Wythoffova hra

- pochází pravděpodobně z Číny
- 1907 – Willem Abraham Wythoff zveřejnil kompletní analýzu hry

Program

Pravidla hry

Dány 2 množiny (hromádky zápalek, kamenů, žetonů).

- Hráč na tahu musí odebrat alespoň jeden prvek.

Pravidla hry

Dány 2 množiny (hromádky zápalek, kamenů, žetonů).

- Hráč na tahu musí odebrat alespoň jeden prvek.
- Hráči se střídají v tazích.

Pravidla hry

Dány 2 množiny (hromádky zápalek, kamenů, žetonů).

- Hráč na tahu musí odebrat alespoň jeden prvek.
- Hráči se střídají v tazích.
- Hráč může vzít libovolný počet prvků z jedné, nebo z druhé množiny.

Pravidla hry

Dány 2 množiny (hromádky zápalek, kamenů, žetonů).

- Hráč na tahu musí odebrat alespoň jeden prvek.
- Hráči se střídají v tazích.
- Hráč může vzít libovolný počet prvků z jedné, nebo z druhé množiny.
- Hráč může odebrat stejný počet prvků z obou množin najednou.

Pravidla hry

Dány 2 množiny (hromádky zápalek, kamenů, žetonů).

- Hráč na tahu musí odebrat alespoň jeden prvek.
- Hráči se střídají v tazích.
- Hráč může vzít libovolný počet prvků z jedné, nebo z druhé množiny.
- Hráč může odebrat stejný počet prvků z obou množin najednou.

Poražený je ten hráč, který už nemůže táhnout. (Množiny jsou prázdné.)

Pravidla hry

Dány 2 množiny (hromádky zápalek, kamenů, žetonů).

- Hráč na tahu musí odebrat alespoň jeden prvek.
- Hráči se střídají v tazích.
- Hráč může vzít libovolný počet prvků z jedné, nebo z druhé množiny.
- Hráč může odebrat stejný počet prvků z obou množin najednou.

Poražený je ten hráč, který už nemůže táhnout. (Množiny jsou prázdné.)

Program

Prohrávající a vyhrávající pozice

Naším cílem je udržet protihráče v takzvaných prohrávajících pozicích, zatímco my chceme vždy táhnout z pozic vyhrávajících.
Tyto pozice (dvojice nezáporných celých čísel vyjadřující počet žetonů na hromádkách) jsou definovány rekurzivně:

Prohrávající a vyhrávající pozice

Naším cílem je udržet protihráče v takzvaných prohrávajících pozicích, zatímco my chceme vždy táhnout z pozic vyhrávajících. Tyto pozice (dvojice nezáporných celých čísel vyjadřující počet žetonů na hromádkách) jsou definovány rekurzivně:

1. $(0, 0)$ je prohrávající.

Prohrávající a vyhrávající pozice

Naším cílem je udržet protihráče v takzvaných prohrávajících pozicích, zatímco my chceme vždy táhnout z pozic vyhrávajících. Tyto pozice (dvojice nezáporných celých čísel vyjadřující počet žetonů na hromádkách) jsou definovány rekurzivně:

1. $(0, 0)$ je prohrávající.
2. $(x, y) \neq (0, 0)$ je **vyhrávající**, pokud existuje tah do prohrávající pozice.

Prohrávající a vyhrávající pozice

Naším cílem je udržet protihráče v takzvaných prohrávajících pozicích, zatímco my chceme vždy táhnout z pozic vyhrávajících. Tyto pozice (dvojice nezáporných celých čísel vyjadřující počet žetonů na hromádkách) jsou definovány rekurzivně:

1. $(0,0)$ je prohrávající.
2. $(x,y) \neq (0,0)$ je **vyhrávající**, pokud existuje tah do prohrávající pozice.
3. $(x,y) \neq (0,0)$ je **prohrávající**, pokud všechny tahy vedou do vyhrávajících pozic.

Prohrávající a vyhrávající pozice

Naším cílem je udržet protihráče v takzvaných prohrávajících pozicích, zatímco my chceme vždy táhnout z pozic vyhrávajících. Tyto pozice (dvojice nezáporných celých čísel vyjadřující počet žetonů na hromádkách) jsou definovány rekurzivně:

1. $(0, 0)$ je prohrávající.
2. $(x, y) \neq (0, 0)$ je **vyhrávající**, pokud existuje tah do prohrávající pozice.
3. $(x, y) \neq (0, 0)$ je **prohrávající**, pokud všechny tahy vedou do vyhrávajících pozic.

Množinu prohrávajících pozic označíme P, vyhrávajících pozic V.

Prohrávající a vyhrávající pozice

Naším cílem je udržet protihráče v takzvaných prohrávajících pozicích, zatímco my chceme vždy táhnout z pozic vyhrávajících. Tyto pozice (dvojice nezáporných celých čísel vyjadřující počet žetonů na hromádkách) jsou definovány rekurzivně:

1. $(0, 0)$ je prohrávající.
2. $(x, y) \neq (0, 0)$ je **vyhrávající**, pokud existuje tah do prohrávající pozice.
3. $(x, y) \neq (0, 0)$ je **prohrávající**, pokud všechny tahy vedou do vyhrávajících pozic.

Množinu prohrávajících pozic označíme P, vyhrávajících pozic V.
Platí: $P \cup V = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

Prohrávající a vyhrávající pozice

Naším cílem je udržet protihráče v takzvaných prohrávajících pozicích, zatímco my chceme vždy táhnout z pozic vyhrávajících. Tyto pozice (dvojice nezáporných celých čísel vyjadřující počet žetonů na hromádkách) jsou definovány rekurzivně:

1. $(0, 0)$ je prohrávající.
2. $(x, y) \neq (0, 0)$ je **vyhrávající**, pokud existuje tah do prohrávající pozice.
3. $(x, y) \neq (0, 0)$ je **prohrávající**, pokud všechny tahy vedou do vyhrávajících pozic.

Množinu prohrávajících pozic označíme P, vyhrávajících pozic V.
Platí: $P \cup V = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ a $P \cap V = \emptyset$

Prohrávající a vyhrávající pozice

Naším cílem je udržet protihráče v takzvaných prohrávajících pozicích, zatímco my chceme vždy táhnout z pozic vyhrávajících. Tyto pozice (dvojice nezáporných celých čísel vyjadřující počet žetonů na hromádkách) jsou definovány rekurzivně:

1. $(0,0)$ je prohrávající.
2. $(x,y) \neq (0,0)$ je **vyhrávající**, pokud existuje tah do prohrávající pozice.
3. $(x,y) \neq (0,0)$ je **prohrávající**, pokud všechny tahy vedou do vyhrávajících pozic.

Množinu prohrávajících pozic označíme P, vyhrávajících pozic V. Platí: $P \cup V = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ a $P \cap V = \emptyset$ a $(x,y) \in P \Leftrightarrow (y,x) \in P$.

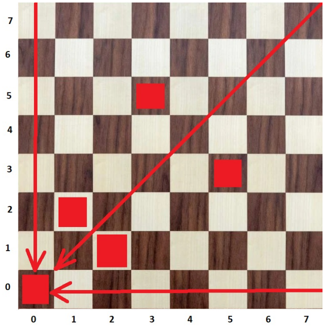
Prohrávající a vyhrávající pozice

Naším cílem je udržet protihráče v takzvaných prohrávajících pozicích, zatímco my chceme vždy táhnout z pozic vyhrávajících. Tyto pozice (dvojice nezáporných celých čísel vyjadřující počet žetonů na hromádkách) jsou definovány rekurzivně:

1. $(0, 0)$ je prohrávající.
2. $(x, y) \neq (0, 0)$ je **vyhrávající**, pokud existuje tah do prohrávající pozice.
3. $(x, y) \neq (0, 0)$ je **prohrávající**, pokud všechny tahy vedou do vyhrávajících pozic.

Množinu prohrávajících pozic označíme P, vyhrávajících pozic V. Platí: $P \cup V = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ a $P \cap V = \emptyset$ a $(x, y) \in P \Leftrightarrow (y, x) \in P$.

Prohrávající a vyhrávající pozice a zraněná dáma



x	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27
y	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44

Program

Rekurentní posloupnost a prohrávající pozice

Věta

$P = \{(a_n, b_n), (b_n, a_n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, kde

- *$a_0 = b_0 = 0$,*
- *a_n pro $n \geq 1$ je nejmenší ještě nepoužité přirozené číslo (tj. nevyskytuje se mezi čísly a_k, b_k pro $k < n$),*
- *$b_n = a_n + n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a_n	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27
b_n	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44

Tabulka: Hodnoty a_n a b_n pro $n \leq 17$

Program

Zápis ve Fibonacciho soustavě

Fibonacciho čísla $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pro $n \geq 2$, $\quad f_0 = 1$ a $f_1 = 2$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Věta

Každé $N \in \mathbb{N}$ lze zapsat ve Fibonacciho soustavě pomocí cifer $0, 1$:

$$N = a_n f_n + a_{n-1} f_{n-1} + \cdots + a_1 f_1 + a_0 f_0\,,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \{0, 1\}$ a $a_n = 1$.

Platnost věty zaručuje hladový rozvoj. Například

$$66 = 55 + 11 = 55 + 8 + 3 = f_8 + f_4 + f_2.$$

Píšeme $66_F = (100010100)$.

Hladový rozvoj a prohrávající pozice

Věta

Označme jako s_n n-té přirozené číslo (řazeno podle velikosti), jehož hladový rozvoj ve Fibonacciho soustavě končí sudým počtem nul, a jako ℓ_n n-té přirozené číslo, jehož hladový rozvoj ve Fibonacciho soustavě končí lichým počtem nul. Pro posloupnosti (a_n) a (b_n) platí, že $a_n = s_n$ a $b_n = \ell_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

n	1	2	3	4
s_n	1: $(1) = 1_F$	3: $(100) = 3_F$	4: $(101) = 4_F$	6: $(1001) = 6_F$
ℓ_n	2: $(10) = 2_F$	5: $(1000) = 5_F$	7: $(1010) = 7_F$	10: $(10010) = 10_F$

Tabulka: Hodnoty s_n a ℓ_n pro $n \leq 4$

Program

Zlatý řez a prohrávající pozice

Zlatý řez $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1,618$ splňuje $\tau^2 = \tau + 1$.

Věta

Pro posloupnosti (a_n) a (b_n) platí, že $a_n = \lfloor n\tau \rfloor$ a $b_n = \lfloor n\tau^2 \rfloor$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, kde dolní celá část $\lfloor x \rfloor$ z reálného čísla x je největší celé číslo $\leq x$.

Závěr

- Wythoffova hra je zábavná, a jistě o to více, když zná hráč výherní strategii.
- Ale navíc je u ní velmi zajímavé, jak úzce souvisí s Fibonacciho soustavou a se zlatým řezem.

Závěr

- Wythoffova hra je zábavná, a jistě o to více, když zná hráč výherní strategii.
- Ale navíc je u ní velmi zajímavé, jak úzce souvisí s Fibonacciho soustavou a se zlatým řezem.
- Detailnější informace:
  Ľ. Dvořáková, M. Svobodová et al., *Wythoffova hra a zraněná dáma*, připraveno pro **Rozhledy matematicko-fyzikální**

Závěr

- Wythoffova hra je zábavná, a jistě o to více, když zná hráč výherní strategii.
- Ale navíc je u ní velmi zajímavé, jak úzce souvisí s Fibonacciho soustavou a se zlatým řezem.
- Detailnější informace:
  Ľ. Dvořáková, M. Svobodová et al., *Wythoffova hra a zraněná dáma*, připraveno pro **Rozhledy matematicko-fyzikální**

Děkuji za pozornost

rozhledy.jcmf.cz