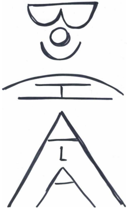
Ř+A+D+Y+...

Jiří Bouchala



VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

19. září 2024, **Cesty k matematice**, MFF UK Praha

Pučící nekonečno

Nekonečno je těžko uchopitelné

Pidlooké nekonečno

- n-karet

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}\right)$,

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}\right)$,

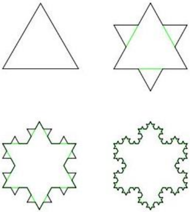
  nekonečně karet

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$,

  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right) = ?$

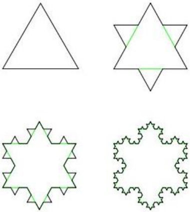
- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$,
  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right) = ?$
- Kochova sněhová vločka

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$,
  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right) = ?$
- Kochova sněhová vločka



- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}\right)$,

  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots\right) = ?$
- Kochova sněhová vločka

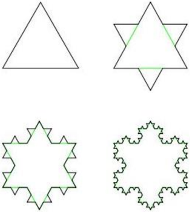


$$\text{obsah}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) = \text{obsah } T_1 + \text{obsah } T_2 + \text{obsah } T_3 + \dots = ?$$

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$,

  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right) = ?$

- Kochova sněhová vločka

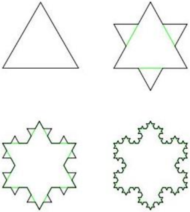


$$\text{obsah } \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) = \text{obsah } T_1 + \text{obsah } T_2 + \text{obsah } T_3 + \ldots = ?$$

- $x \in \mathbb{R}$, $\sin x =$

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$,

  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right) = ?$
- Kochova sněhová vločka

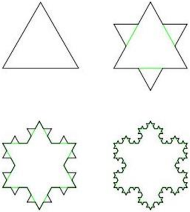


$$\text{obsah}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) = \text{obsah } T_1 + \text{obsah } T_2 + \text{obsah } T_3 + \ldots = ?$$

- $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!} + \ldots$

- n-karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$,

  nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right) = ?$
- Kochova sněhová vločka



$$\text{obsah}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) = \text{obsah } T_1 + \text{obsah } T_2 + \text{obsah } T_3 + \ldots = ?$$

- $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717... = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = {\color{red}?}$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = {\color{red}?}$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,{\color{red}1415}926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,14{\color{red}1592}6\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717... = ?$

  $$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926\ldots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717... = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717...$

  $\pi = 3,1415926...$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926...$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926...$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926...$ počet Krokových dcer

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = {\color{red}?}$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = {\color{red}?}$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3, {\color{red}1415}926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3, 14{\color{red}1592}6\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3, 141{\color{red}5}9{\color{red}26}\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = {\color{red}3}, 1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926\ldots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926\ldots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926\ldots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

  $\pi = 3,1415926\ldots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926\ldots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ stáří Karlovy univerzity v roce 1763,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926\ldots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ stáří Karlovy univerzity v roce 1763,

  $\pi = 3,1415926\ldots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots = ?$

  $\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \ldots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\ldots$

  $\pi = 3,1415926\ldots$ upálení Mistra Jana Husa,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ narození Jana Amose Komenského,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ nástup Habsburků na český trůn,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

  $\pi = 3,1415926\ldots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ stáří Karlovy univerzity v roce 1763,

  $\pi = 3,1415926\ldots$ objevena Amerika, jejíž armáda osvobodila roku 1945 Plzeň

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$$s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

$$s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots$$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$

  $s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots = 1 - 0 - 0 - 0 - \ldots$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$

  $s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots = 1 - 0 - 0 - 0 - \ldots = 1$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$

  $s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1 - 0 - 0 - 0 - \dots = 1$

  $s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

  $s = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$

  $s = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \dots = 1 - 0 - 0 - 0 - \dots = 1$

  $s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - s$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

  $s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$

  $s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1 - 0 - 0 - 0 - \dots = 1$

  $s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - s \;\Rightarrow\; s = \frac{1}{2}$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$$s = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

$$s = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \dots = 1 - 0 - 0 - 0 - \dots = 1$$

$$s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - s \;\Rightarrow\; s = \frac{1}{2}$$

$$s \;= ?$$

Definice.

Řadou (reálných čísel) rozumíme výraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{R}$.

Definice.

Řadou (reálných čísel) rozumíme výraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{R}$.
Číslo a_n nazýváme n-tým členem řady (1),

Definice.

Řadou (reálných čísel) rozumíme výraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{R}$.
Číslo a_n nazýváme n-tým členem řady (1), posloupnost (s_n) definovanou předpisem

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

nazýváme posloupností částečných součtů řady (1).

Existuje-li

$$\lim s_n =: s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},$$

nazýváme ji <u>součtem řady</u> (1) a píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s;$$

Existuje-li

$$\lim s_n =: s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},$$

nazýváme ji <u>součtem řady</u> (1) a píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s;$$

je-li navíc $s \in \mathbb{R}$, říkáme, že řada (1) <u>konverguje</u>.

- Buď $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

- Buď $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

platí, že

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

- Buď $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

platí, že

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \to \frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q},$$

- Buď $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

platí, že

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \to \frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q},$$

a proto

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1 - q}.$$

- Buď $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

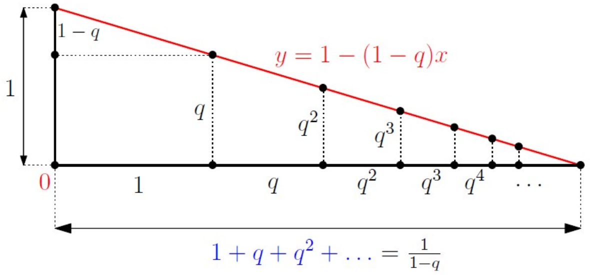
$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

platí, že

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \to \frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q},$$

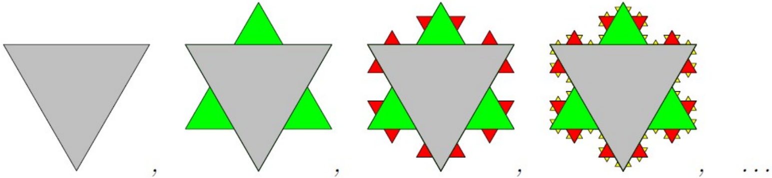
a proto

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}.$$

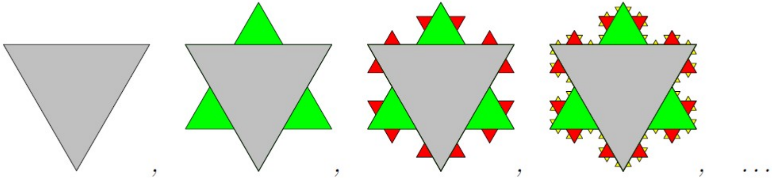


- Obsah Kochovy sněhové vločky.

- Obsah Kochovy sněhové vločky.



- Obsah Kochovy sněhové vločky.



$$
\begin{aligned}
\mathit{obsah}\ K &= \mathit{obsah}\ T_1 + (\mathit{obsah}\ T_2 + \mathit{obsah}\ T_3 + \mathit{obsah}\ T_4 + \ \dots\ ) = \\
&= 1 + \left(3 \cdot \frac{1}{9} + 12 \cdot \frac{1}{9^2} + 48 \cdot \frac{1}{9^3} + \ \dots\ \right) = \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = 1 + \frac{\frac{3}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{8}{5}.
\end{aligned}
$$

- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

- Uvažujme řadu

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n) = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

nemá limitu,

- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n)=1,0,1,0,1,0,\ldots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n)=1,0,1,0,1,0,\ldots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1+2+3+4+\ldots+n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}n$$

- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n)=1,0,1,0,1,0,\ldots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1+2+3+4+\ldots+n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}n$$

platí

$$s_n=1+2+3+4+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

- Uvažujme řadu

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n) = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

platí

$$s_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n+1) \to \infty,$$

- Uvažujme řadu

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n)=1,0,1,0,1,0,\ldots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1+2+3+4+\ldots+n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}n$$

platí

$$s_n=1+2+3+4+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\to\infty,$$

a proto

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}n=\infty.$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\frac{1}{2^k+3}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \frac{1}{2^k + 3} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}} \left(2^{k+1} - 2^k\right) = \frac{1}{2},$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \frac{1}{2^k+3} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}} \left(2^{k+1} - 2^k\right) = \frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \frac{1}{2^k + 3} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}} \left(2^{k+1} - 2^k\right) = \frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \ldots = \infty.$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \frac{1}{2^k+3} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}} \left(2^{k+1} - 2^k\right) = \frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \ldots = \infty.$$

Jinak. Předpokládejme sporem, že

$$s_n \to s \in \mathbb{R}$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k\in\mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\frac{1}{2^k+3}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}\geq\frac{1}{2^{k+1}}\left(2^{k+1}-2^k\right)=\frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{\geq\frac{1}{2}}+\ldots=\infty.$$

Jinak. Předpokládejme sporem, že

$$s_n\to s\in\mathbb{R}\;\Rightarrow\;s_{2n}-s_n\to s-s=0.$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\frac{1}{2^k+3}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}}\left(2^{k+1}-2^k\right)=\frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{\geq\frac{1}{2}}+\ldots=\infty.$$

Jinak. Předpokládejme sporem, že

$$s_n \to s \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; s_{2n}-s_n \to s-s=0.$$

Současně ale

$$s_{2n}-s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

- Uvažujme řadu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\frac{1}{2^k+3}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}}\left(2^{k+1}-2^k\right)=\frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{\geq\frac{1}{2}}+\ldots=\infty.$$

Jinak. Předpokládejme sporem, že

$$s_n \to s \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; s_{2n}-s_n \to s-s=0.$$

Současně ale

$$s_{2n}-s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}(2n-n)=\frac{1}{2},$$

a to je spor.

- Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \ .$$

- Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \ .$$

Všimněme si, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, je

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}$$

- Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \ .$$

Všimněme si, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, je

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

- Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \ .$$

Všimněme si, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, je

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

a proto pro posloupnost částečných součtů (s_n) a každé $n \geq 2$ platí

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

- Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \ .$$

Všimněme si, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, je

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

a proto pro posloupnost částečných součtů (s_n) a každé $n \geq 2$ platí

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Odtud již snadno vyplývá, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} s_n \leq 2.$$

Dá se ukázat (L. Euler 1735), že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Dá se ukázat (L. Euler 1735), že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1,6449340668482264364\ldots \ .$$

(Neměli bychom tajit, že důkaz tohoto tvrzení – na rozdíl od výše uvedeného důkazu konvergence – je opravdu těžký.)

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \doteq 1{,}644934068,$

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \doteq 1,644934068$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \doteq 1,202056903$ (přesnou hodnotu `nikdo nezná!`),

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \doteq 1,644934068$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \doteq 1,202056903$ (přesnou hodnotu `nikdo nezná!`),
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \doteq 1,082323234$,

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \doteq 1,644934068$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \doteq 1,202056903$ (přesnou hodnotu `nikdo nezná!`),
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \doteq 1,082323234$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \doteq 1,036927755$ (přesnou hodnotu `nikdo nezná!`),

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \doteq 1,644934068$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \doteq 1,202056903$ (přesnou hodnotu nikdo nezná!),
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \doteq 1,082323234$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \doteq 1,036927755$ (přesnou hodnotu nikdo nezná!),
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \doteq 1,017343063$,

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \doteq 1,644934068$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \doteq 1,202056903$ (přesnou hodnotu `nikdo nezná!`),
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \doteq 1,082323234$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \doteq 1,036927755$ (přesnou hodnotu `nikdo nezná!`),
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \doteq 1,017343063$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7} \doteq 1,008349277$ (přesnou hodnotu `nikdo nezná!`),

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \doteq 1,644934068$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \doteq 1,202056903$ (přesnou hodnotu `nikdo nezná!`),
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \doteq 1,082323234$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \doteq 1,036927755$ (přesnou hodnotu `nikdo nezná!`),
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \doteq 1,017343063$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7} \doteq 1,008349277$ (přesnou hodnotu `nikdo nezná!`),
- ... .

- Uvažujme řadu

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{„}3 \notin n\text{“}}}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

- Uvažujme řadu

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{„}3 \notin n\text{“}}}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak

$$s = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{„}3 \notin n\text{“}}}^{\infty} \frac{1}{n} \leq 8 \cdot 1 + 8 \cdot 9 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot 9^2 \cdot \frac{1}{100} + 8 \cdot 9^3 \cdot \frac{1}{1000} \ldots =$$

- Uvažujme řadu

$$\sum_{\substack{n=1 \\ „3 \notin n“}}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

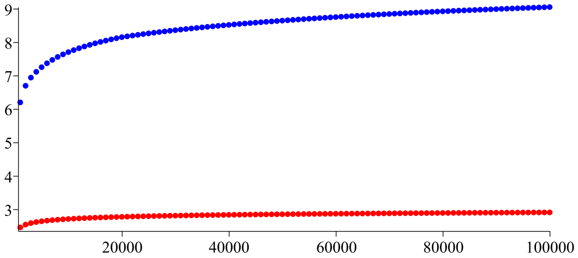
Pak

$$s = \sum_{\substack{n=1 \\ „3 \notin n“}}^{\infty} \frac{1}{n} \leq 8 \cdot 1 + 8 \cdot 9 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot 9^2 \cdot \frac{1}{100} + 8 \cdot 9^3 \cdot \frac{1}{1000} \ldots =$$

$$= 8 \cdot \left(1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \ldots\right) = 8 \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = 80.$$

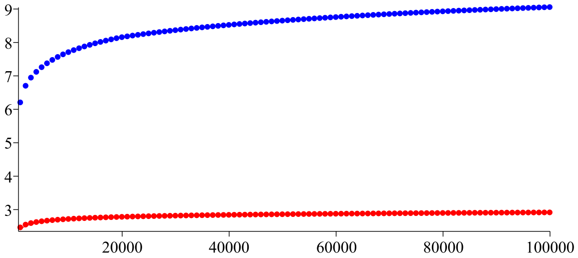
Následující obrázek ukazuje, že nemůžeme dělat závěry jen na základě numerických experimentů. Jsou na něm znázorněny částečné součty řad

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{„}3 \notin n\text{“}}}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{pro } n \in \{1000, 2000, 3000, \dots, 100000\}.$$



Následující obrázek ukazuje, že nemůžeme dělat závěry jen na základě numerických experimentů. Jsou na něm znázorněny částečné součty řad

$$\sum_{\substack{n=1\\ \text{„}3 \notin n\text{“}}}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{pro } n \in \{1000, 2000, 3000, \dots, 100000\}.$$

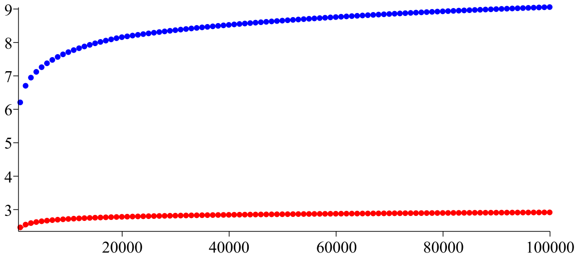


Obrázek nás svádí k domněnce, že

$$\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum_{\substack{n=1\\ \text{„}3 \notin n\text{“}}}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Následující obrázek ukazuje, že nemůžeme dělat závěry jen na základě numerických experimentů. Jsou na něm znázorněny částečné součty řad

$$\sum_{\substack{n=1\\ „3 \notin n“}}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{pro } n \in \{1000, 2000, 3000, \dots, 100000\}.$$

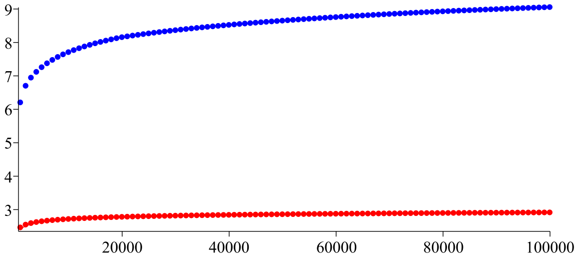


Obrázek nás svádí k domněnce, že

$$\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum_{\substack{n=1\\ „3 \notin n“}}^{\infty} \frac{1}{n} \leq 80.$$

Následující obrázek ukazuje, že nemůžeme dělat závěry jen na základě numerických experimentů. Jsou na něm znázorněny částečné součty řad

$$\sum_{\substack{n=1\\ „3 \notin n“}}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{pro } n \in \{1000, 2000, 3000, \dots, 100000\}.$$



Obrázek nás svádí k domněnce, že

$$\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum_{\substack{n=1\\ „3 \notin n“}}^{\infty} \frac{1}{n} \leq 80. \quad \textbf{NENÍ TO PRAVDA!}$$

- $$\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p}$$

- $$\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots$$

- $$\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \ldots = \infty.$$

- $$\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \ldots = \infty.$$

- $$\sum_{\substack{p_1,\, p_2 \\ p_1,\, p_2 \text{ jsou „prvočíselná dvojčata“}}} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right)$$

- $$\sum_{\substack{p=1\\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\ldots = \infty.$$

- $$\sum_{\substack{p_1,\,p_2\\ p_1,\,p_2 \text{ jsou „prvočíselná dvojčata"}}} \left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\right) =$$

- $$\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots = \infty.$$

- $$\sum_{\substack{p_1,\, p_2 \\ p_1,\, p_2 \text{ jsou „prvočíselná dvojčata“}}} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19}\right) + \dots$$

- $$\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \ldots = \infty.$$

- $$\sum_{\substack{p_1,\, p_2 \\ p_1,\, p_2 \text{ jsou „prvočíselná dvojčata“}}} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19}\right) + \ldots < \infty.$$

- Nyní dokažme, že $$\boxed{\sum_{\substack{p=1\\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p} = \infty.}$$

- Nyní dokažme, že

$$\boxed{\sum_{\substack{p=1\\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p} = \infty.}$$

Buď n libovolné přirozené číslo a buď $p_1, p_2, \ldots, p_k$ právě všechna prvočísla menší nebo rovna n. Pak zřejmě existuje $\alpha \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \ldots + \frac{1}{p_1^{\alpha}}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \ldots + \frac{1}{p_2^{\alpha}}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \ldots + \frac{1}{p_k^{\alpha}}\right) \leq$$

- Nyní dokažme, že

$$\boxed{\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p} = \infty.}$$

Buď n libovolné přirozené číslo a buď $p_1, p_2, \ldots, p_k$ právě všechna prvočísla menší nebo rovna n. Pak zřejmě existuje $\alpha \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \ldots + \frac{1}{p_1^\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \ldots + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \cdots$$

$$\cdots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \ldots + \frac{1}{p_k^\alpha}\right) \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \ldots\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \ldots\right) \leq$$

- Nyní dokažme, že $$\boxed{\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p} = \infty.}$$

Buď n libovolné přirozené číslo a buď $p_1, p_2, \ldots, p_k$ právě všechna prvočísla menší nebo rovna n. Pak zřejmě existuje $\alpha \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \ldots + \frac{1}{p_1^\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \ldots + \frac{1}{p_2^\alpha}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \ldots + \frac{1}{p_k^\alpha}\right) \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \ldots\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \ldots\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

- Nyní dokažme, že

$$\boxed{\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p} = \infty.}$$

Buď n libovolné přirozené číslo a buď $p_1, p_2, \dots, p_k$ právě všechna prvočísla menší nebo rovna n. Pak zřejmě existuje $\alpha \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\color{red}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \le} \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots + \frac{1}{p_1^\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_2^\alpha}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots + \frac{1}{p_k^\alpha}\right) \le$$

$$\le \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots\right) \le$$

$$\le \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{p_j}{p_j - 1}\right)$$

- Nyní dokažme, že

$$\boxed{\sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ je prvočíslo}}}^{\infty} \frac{1}{p} = \infty.}$$

Buď n libovolné přirozené číslo a buď $p_1, p_2, \ldots, p_k$ právě všechna prvočísla menší nebo rovna n. Pak zřejmě existuje $\alpha \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \ldots + \frac{1}{p_1^\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \ldots + \frac{1}{p_2^\alpha}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \ldots + \frac{1}{p_k^\alpha}\right) \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \ldots\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \ldots\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{p_j}{p_j - 1}\right) = \prod_{j=1}^{k}\left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \le \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \;\le\; \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \;\le\; \ln\left(\prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)\right)$$

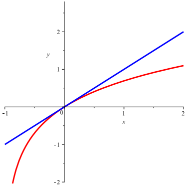
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \;\leq\; \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \;\leq\; \ln\left(\prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)\right) = \sum_{j=1}^{k} \ln\left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \le \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \le \ln\left(\prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)\right) = \sum_{j=1}^{k} \ln\left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

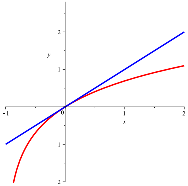
Nyní si všimněme, že pro každé $x > -1$ je $\ln(1 + x) \le x$,



$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \leq \ln\left(\prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)\right) = \sum_{j=1}^{k} \ln\left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

Nyní si všimněme, že pro každé $x > -1$ je $\ln(1 + x) \leq x$,

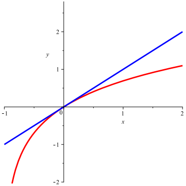


a proto $$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j - 1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \leq \ln\left(\prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)\right) = \sum_{j=1}^{k} \ln\left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

Nyní si všimněme, že pro každé $x > -1$ je $\ln(1 + x) \leq x$,

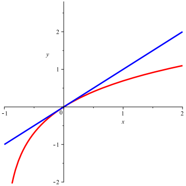


a proto $$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j - 1} \leq 2\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \leq \ln\left(\prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)\right) = \sum_{j=1}^{k} \ln\left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

Nyní si všimněme, že pro každé $x > -1$ je $\ln(1+x) \leq x$,



a proto $$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j - 1} \leq 2\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j}.$$

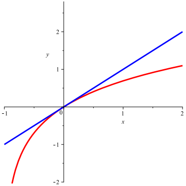
Odtud již snadno plyne

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} \geq \lim \left[\frac{1}{2} \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right)\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \le \prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{p_j-1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right) \le \ln\left(\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{p_j-1}\right)\right) = \sum_{j=1}^{k}\ln\left(1+\frac{1}{p_j-1}\right)$$

Nyní si všimněme, že pro každé $x > -1$ je $\ln(1+x) \le x$,



a proto $$\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right) \le \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{p_j-1} \le 2\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{p_j}.$$

Odtud již snadno plyne

$$\sum_{\substack{p\in\mathbb{N}\\ p \text{ je prvočíslo}}}\frac{1}{p} \ge \lim\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)\right] = \infty.$$

Věta.

Posloupnost

$$c_n := \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}\right) - \ln n$$

je konvergentní,

Věta.

Posloupnost

$$c_n := \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}\right) - \ln n$$

je konvergentní, tzn. že existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim c_n = c$.

Věta.

Posloupnost

$$c_n := \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}\right) - \ln n$$

je konvergentní, tzn. že existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim c_n = c$.

$$\left(\begin{array}{c} c \doteq 0,5772156649015328606065120900824024310421593359399 2\ldots \\ \text{... Eulerova konstanta} \end{array} \right)$$

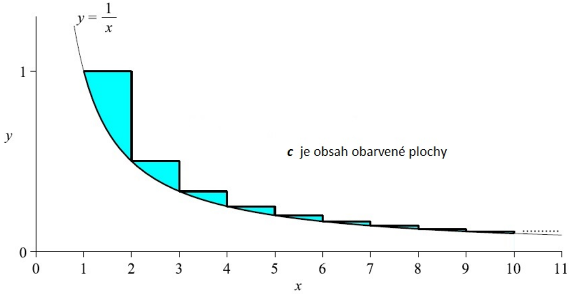
Věta.

Posloupnost

$$c_n := \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}\right) - \ln n$$

je konvergentní, tzn. že existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim c_n = c$.

$$\left(\begin{array}{c} c \doteq 0,57721566490153286060651209008240243104215933593992\dots \\ \dots \text{ Eulerova konstanta} \end{array} \right)$$



- Určeme součet (`konvergentní`) řady

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

- Určeme součet (`konvergentní`) řady

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$s_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

- Určeme součet (`konvergentní`) řady

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$s_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

- Určeme součet (`konvergentní`) řady

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$s_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

- Určeme součet (`konvergentní`) řady

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$s_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=$$

$$c_n:=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\ln n$$

- Určeme součet (`konvergentní`) řady

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$s_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=(c_{2n}+\ln(2n))-(c_n+\ln n)$$

- Určeme součet (`konvergentní`) řady

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$s_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=(c_{2n}+\ln(2n))-(c_n+\ln n)=c_{2n}-c_n+\ln 2,$$

- Určeme součet (`konvergentní`) řady

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$\begin{aligned}
s_{2n} &= \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)= \\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)= \\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)= \\
&= (c_{2n}+\ln(2n))-(c_n+\ln n)=c_{2n}-c_n+\ln 2,
\end{aligned}$$

a proto ($c_n \to c \in \mathbb{R}$):

$$s_{2n} \to c - c + \ln 2 = \ln 2$$

- Určeme součet (`konvergentní`) řady

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$\begin{aligned}
s_{2n} &= \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)= \\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)= \\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)= \\
&= (c_{2n}+\ln(2n))-(c_n+\ln n)=c_{2n}-c_n+\ln 2,
\end{aligned}$$

a proto ($c_n \to c \in \mathbb{R}$):

$$s_{2n} \to c-c+\ln 2=\ln 2$$

$$s_{2n+1}=s_{2n}+\frac{1}{2n+1} \to \ln 2+0=\ln 2$$

- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$s_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=$$
$$=(c_{2n}+\ln(2n))-(c_n+\ln n)=c_{2n}-c_n+\ln 2,$$

a proto ($c_n\to c\in\mathbb{R}$):

$$\left.\begin{aligned} s_{2n}&\to c-c+\ln 2=\ln 2\\ s_{2n+1}&=s_{2n}+\frac{1}{2n+1}\to\ln 2+0=\ln 2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ s_n\to\ln 2$$

- Určeme součet (`konvergentní`) řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$s_{2n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= (c_{2n} + \ln(2n)) - (c_n + \ln n) = c_{2n} - c_n + \ln 2,$$

a proto ($c_n \to c \in \mathbb{R}$):

$$\left.\begin{aligned} s_{2n} &\to c - c + \ln 2 = \ln 2 \\ s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1} &\to \ln 2 + 0 = \ln 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; s_n \to \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

- Zjistili jsme, že

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\ln 2 \doteq 0,6931471806.$$

- Zjistili jsme, že

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\ln 2 \doteq 0,6931471806.$$

- Podobnou technikou lze dokázat, že

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots$$

- Zjistili jsme, že

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\ln 2 \doteq 0,6931471806.$$

- Podobnou technikou lze dokázat, že

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots=\frac{3}{2}\ln 2 \doteq 1.039720771.$$

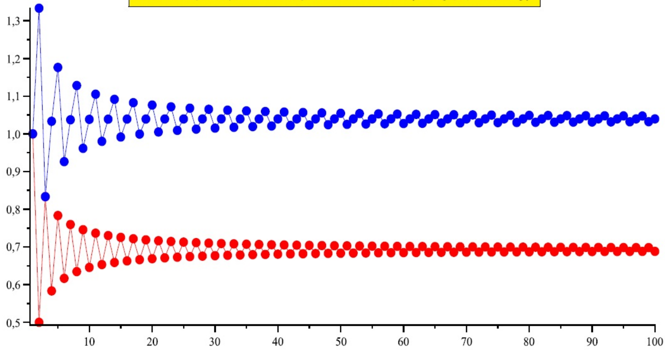
- Zjistili jsme, že

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\ln 2 \doteq 0,6931471806.$$

- Podobnou technikou lze dokázat, že

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots=\frac{3}{2}\ln 2 \doteq 1.039720771.$$

Znázornění posloupnosti částečných součtů obou řad ($n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$):



Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}\,,\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}\,,\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Pak

- pro každé $s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ existuje bijekce $\varphi\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = s;$$

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}, \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Pak

- pro každé $s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ existuje bijekce $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = s;$$
- existuje bijekce $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ neexistuje.

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Pak

- pro každé $s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ existuje bijekce $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že

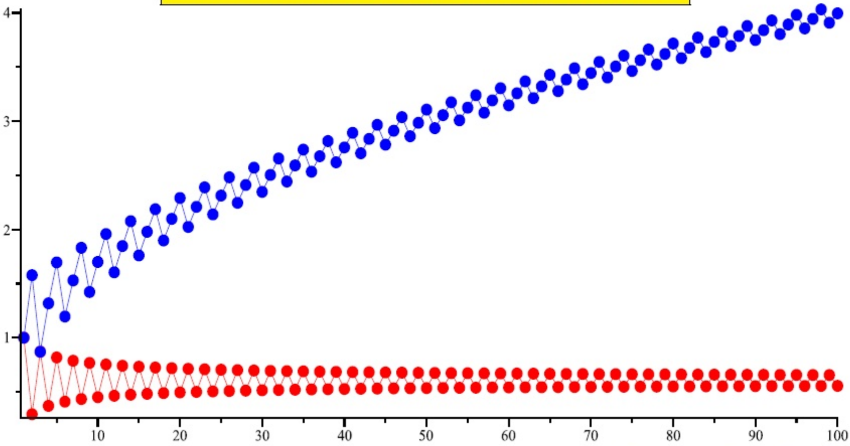
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = s;$$

- existuje bijekce $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ neexistuje.

(Vhodným přerovnáním neabsolutně konvergentní řady lze získat jakýkoliv výsledek.)

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\dots \neq 1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\dots$$

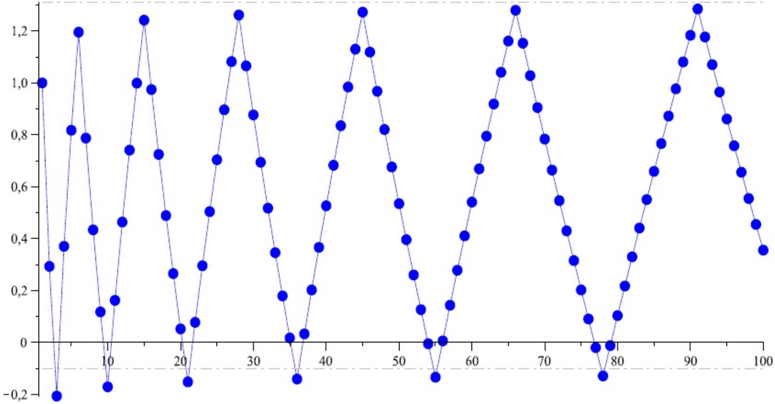
Znázornění posloupnosti částečných součtů obou řad ($n \in \{1, 2, \dots, 100\}$):



(další přerovnání řady $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{9}}-\frac{1}{\sqrt{10}}+\dots$)

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{12}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{13}}+\frac{1}{\sqrt{15}}+\frac{1}{\sqrt{17}}-\dots$$

Znázornění posloupnosti částečných součtů přerovnané řady ($n \in \{1, 2, \dots, 100\}$):



Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}$$

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}$$

a buď

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bijekce.}$$

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}$$

a buď

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bijekce.}$$

Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}$$

a buď

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bijekce.}$$

Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} \in \mathbb{R}.$$

Věta.

Nechť
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}$$
a buď
$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bijekce.}$$
Pak
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} \in \mathbb{R}.$$

(Součet absolutně konvergentní řady a řady vzniklé jejím přerovnáním je stejný.)

- $\left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \dots$

- $\left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \ldots = \frac{9}{19} \doteq 0,4736842105$

- $\left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \ldots = \frac{9}{19} \doteq 0,4736842105$

  $\left(\frac{9}{10}\right)^1 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 + \left(\frac{9}{10}\right)^7 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \ldots$

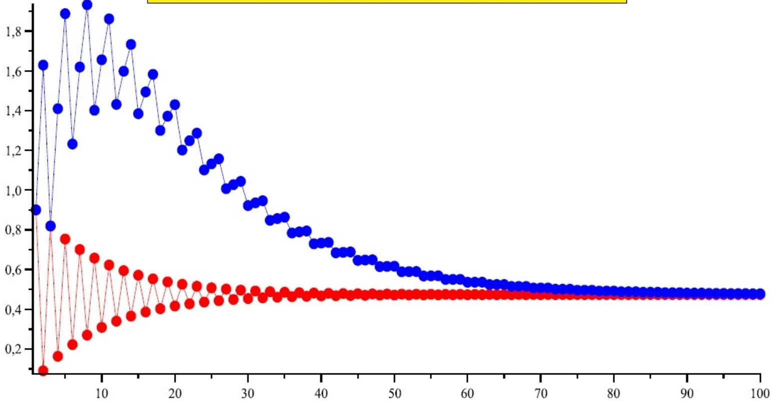
- $\left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \ldots = \frac{9}{19} \doteq 0,4736842105$

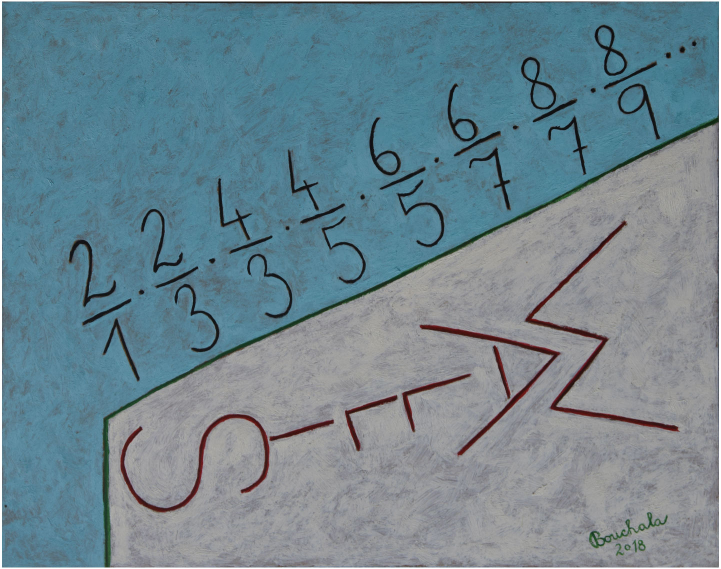
  $\left(\frac{9}{10}\right)^1 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 + \left(\frac{9}{10}\right)^7 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \ldots = \frac{9}{19}$

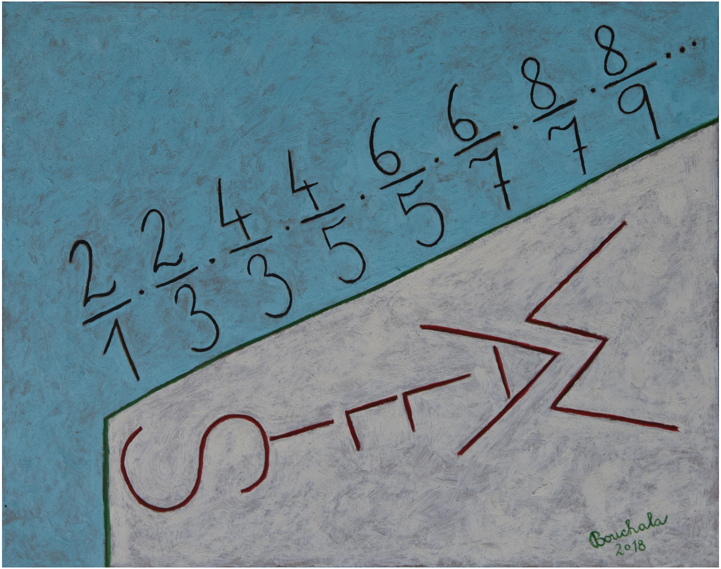
- $\left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \ldots = \frac{9}{19} \doteq 0,4736842105$

$\left(\frac{9}{10}\right)^1 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 + \left(\frac{9}{10}\right)^7 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \ldots = \frac{9}{19}$

Znázornění posloupnosti částečných součtů obou řad ($n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$):

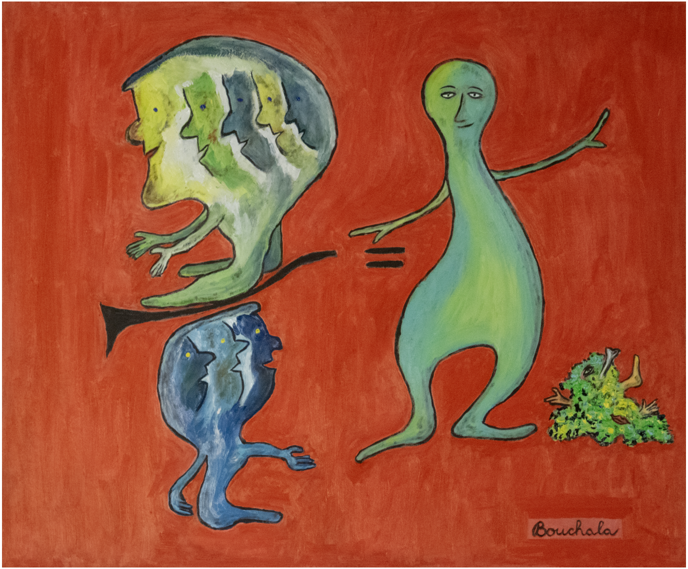


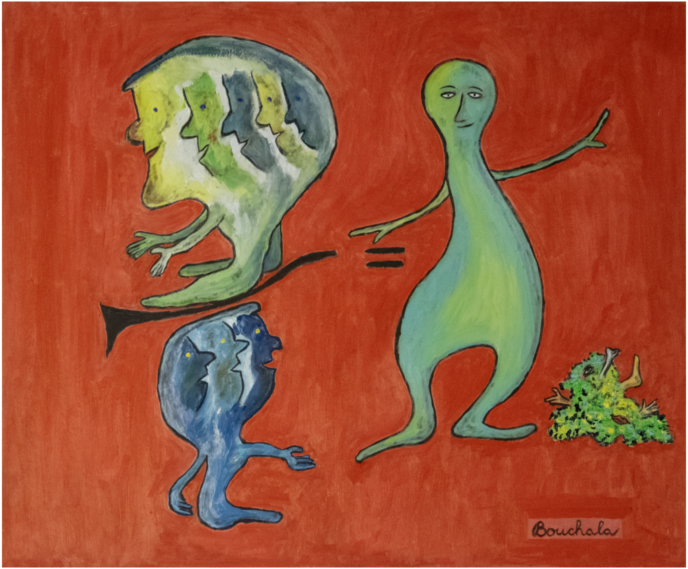

$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$
Bouchala
2018



$\frac{\pi}{2}$ na nakloněné rovině

Dvoubarevná pravda


Bouchala



Dělení se zbytkem

BOUCHALA

B

OB

UOB

UOBC

UOHBC

UOH ABC

ULOH ABC

ULOHA ABC

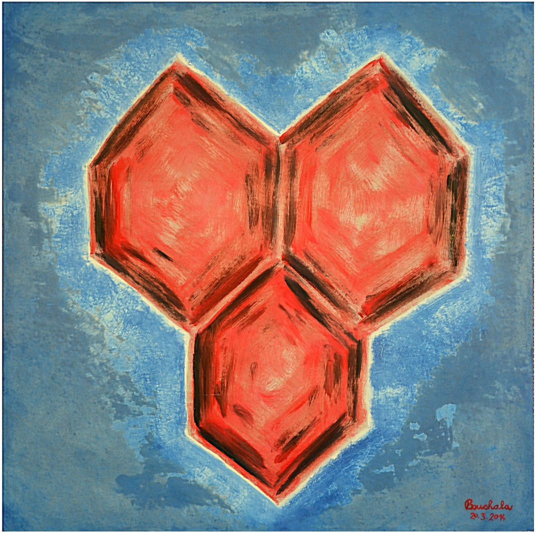
A

A

Jordanovo dítě

B

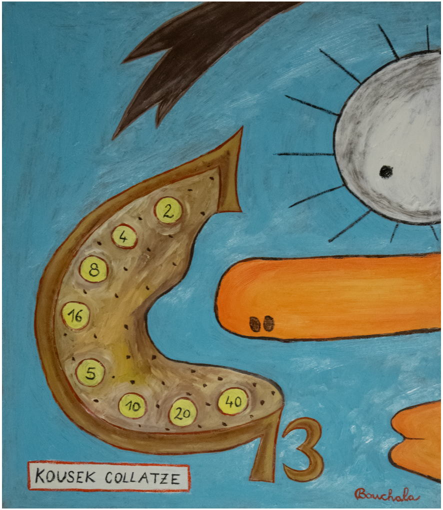
B



MaTh problém

C

C



Kousek Collatze

Literatura a zdroje

J. Veselý
Matematická analýza pro učitele
Matfyzpress, Praha 1997

Literatura a zdroje

- J. Veselý
  Matematická analýza pro učitele
  Matfyzpress, Praha 1997
- E. Calda, HgS
  Základy patamatematiky
  Prometheus, Praha 2005

Literatura a zdroje

- J. Veselý
  Matematická analýza pro učitele
  Matfyzpress, Praha 1997
- E. Calda, HgS
  Základy patamatematiky
  Prometheus, Praha 2005
- J. Bouchala, P. Vodstrčil
  Ř+A+D+Y+ ...
  Svět matematických aplikací II,
  JČMF, Praha 2020

Literatura a zdroje

- J. Veselý
  Matematická analýza pro učitele
  Matfyzpress, Praha 1997
- E. Calda, HgS
  Základy patamatematiky
  Prometheus, Praha 2005
- J. Bouchala, P. Vodstrčil
  Ř+A+D+Y+ ...
  Svět matematických aplikací II,
  JČMF, Praha 2020

MatematiKant
(hlava v oblacích a nohy pevně na zemi)

Literatura a zdroje

- J. Veselý
  Matematická analýza pro učitele
  Matfyzpress, Praha 1997
- E. Calda, HgS
  Základy patamatematiky
  Prometheus, Praha 2005
- J. Bouchala, P. Vodstrčil
  Ř+A+D+Y+ ...
  Svět matematických aplikací II,
  JČMF, Praha 2020

MatematiKant
(hlava v oblacích a nohy pevně na zemi)

Děkuji vám za pozonrost!

Literatura a zdroje

- J. Veselý
  Matematická analýza pro učitele
  Matfyzpress, Praha 1997
- E. Calda, HgS
  Základy patamatematiky
  Prometheus, Praha 2005
- J. Bouchala, P. Vodstrčil
  Ř+A+D+Y+ ...
  Svět matematických aplikací II,
  JČMF, Praha 2020

MatematiKant
(hlava v oblacích a nohy pevně na zemi)

Děkuji vám za pozornost!