

Interpretace exponenciálních funkcí a logaritmů v reálných situacích

Vahid Borji

Katedra didaktiky matematiky

Září 2024



Cesty k matematice



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

Důležitost funkcí exponentu a logaritmu:

- ❖ Exponenciální a logaritmické funkce jsou základními tématy středoškolských a vysokoškolských studijních programů.
- ❖ Jsou předpokladem pro osvojení dalších pokročilých matematických pojmů.
- ❖ Logaritmické škály se používají k měření mnoha jevů v reálném světě. Například měření intenzity zemětřesení, intenzity zvuku a jasu hvězdy se provádí pomocí logaritmických stupnic.

Obtíže ve výuce a učení exponenciálních a logaritmických funkcí:

- ❖ Někteří studenti učitelství nejsou schopni interpretovat pojmy exponent a logaritmus v reálných situacích a je to mezinárodní problém.
- ❖ Pokud $x > 0$, logaritmus x o základu a ($a > 0, a \neq 1$), je reálné číslo y takové, že $a^y = x$ a je symbolizováno $y = \log_a(x)$ (Euler, 1770/1984)
- ❖ Studenti vědí, že $\log_2 8$ je 3, ale většina z nich, dokonce ani učitelé, to nejsou schopni popsat v kontextuální situaci (pseudorealistických kontextech).

Studenti se svého učitele matematiky obvykle ptají na otázku:

Kdy/kde ve svém životě uvidím tyto matematické pojmy?

$$2^a \times 2^b = 2^{a+b}$$

$$\log_c a + \log_c b = \log_c ab$$

$$\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$$

$$\frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$$



Žáci základní školy se učí navrhovat slovní úlohy (aplikační úlohy/příběhy/reálné úlohy) pro výroky jako $3 + 4 = 7$ nebo $2 \times 3 = 6$.

Včera jsem přečetl 3 stránky své knihy. Dnes jsem přečetl 4 stránky. Jaký je celkový počet stránek, které jsem přečetl?

$3 + 4 = 7$



Jsou však studenti na střední nebo vysoké škole schopni interpretovat exponenciální a logaritmické funkce v kontextových situacích?

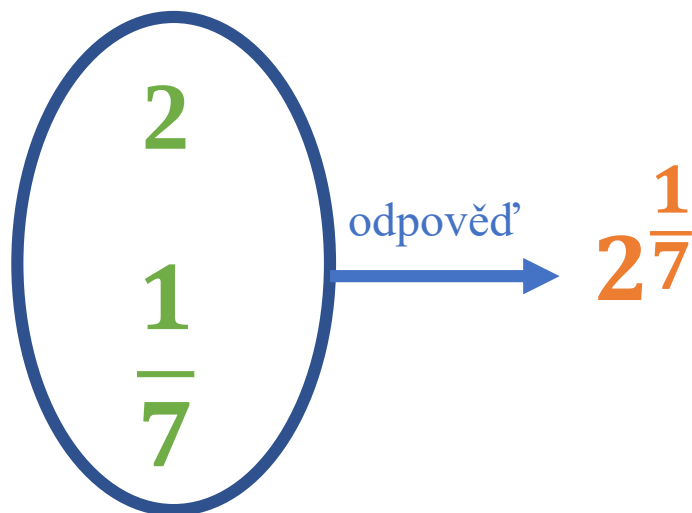
$$2^{\frac{1}{7}}$$

$$\log_2 3$$

$$\log_2 7 + \log_2 4 = \log_2 28$$

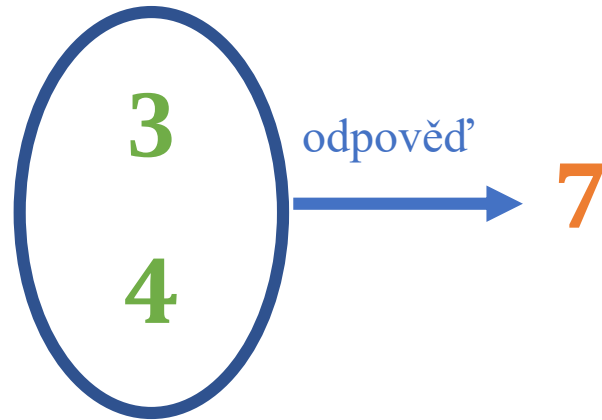


Navrhněte aplikační (slovní) úlohu s čísly 2 a $\frac{1}{7}$ tak, aby odpověď na problém v úloze byla $2\frac{1}{7}$.



Slovní úloha musí být pro studenty středních škol srozumitelná.

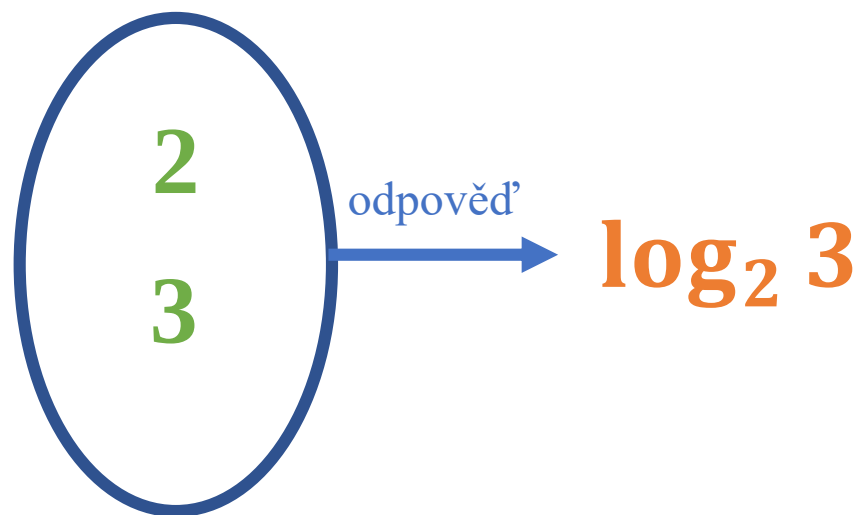
Navrhněte aplikační (slovní) úlohu s čísly **3** a **4** tak, aby odpověď na problém v úloze byla **7**.



Včera jsem přečetl **3** stránky své knihy. Dnes jsem přečetl **4** stránky. Jaký je celkový počet stránek, které jsem přečetl?

7

Navrhněte aplikační (slovní) úlohu s čísly **2** a **3** tak, aby odpověď na problém v úloze byla **$\log_2 3$** .



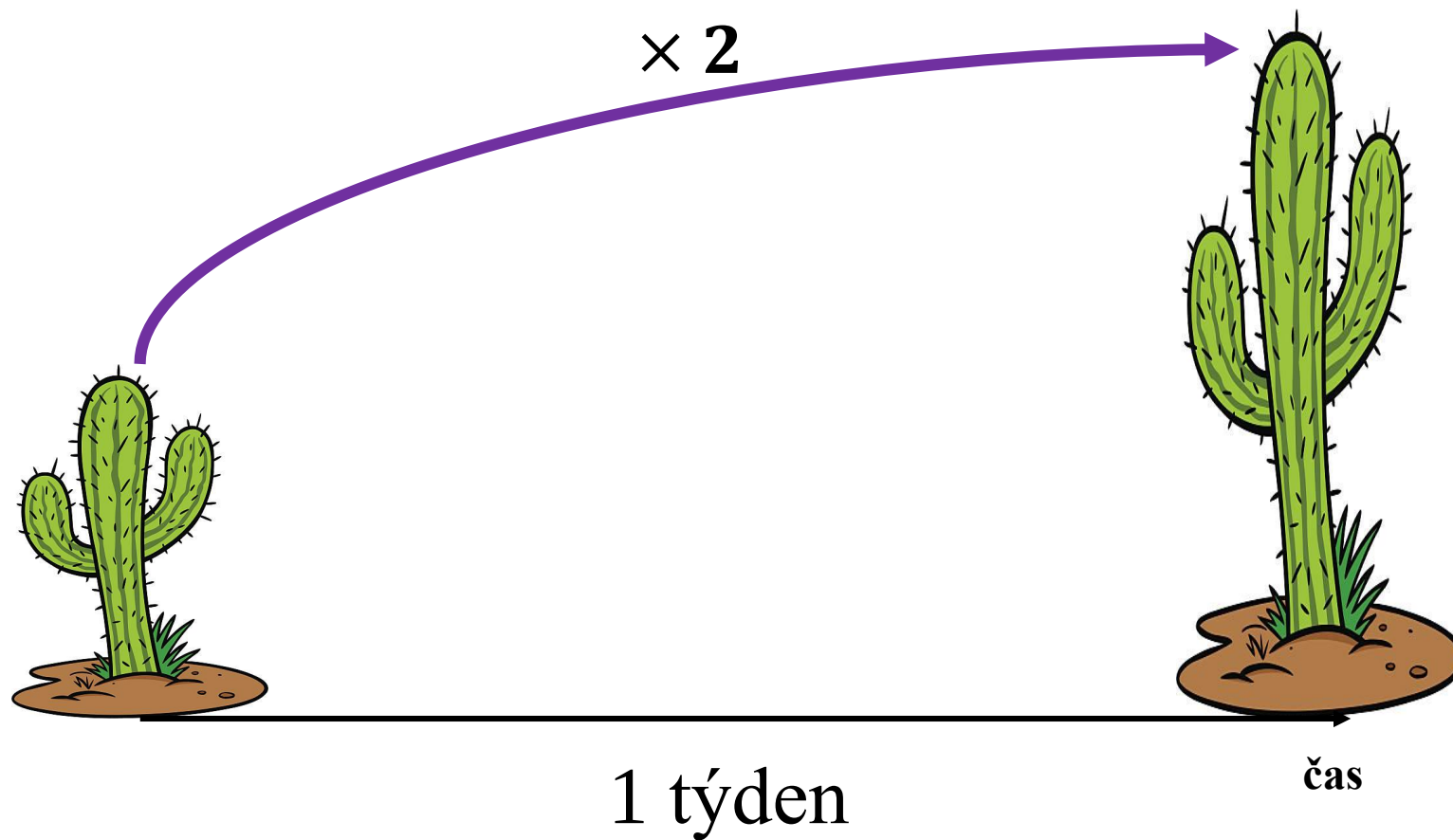
Slovní úloha musí být pro studenty středních škol srozumitelná.

Cíl: Jak můžeme studentům a učitelům pomoci porozumět konceptům exponentu a logaritmu a jejich větám v skutečné situaci?

$$2^{\frac{1}{7}} \quad \log_2 3$$

$$\log_2 7 + \log_2 4 = \log_2 28$$

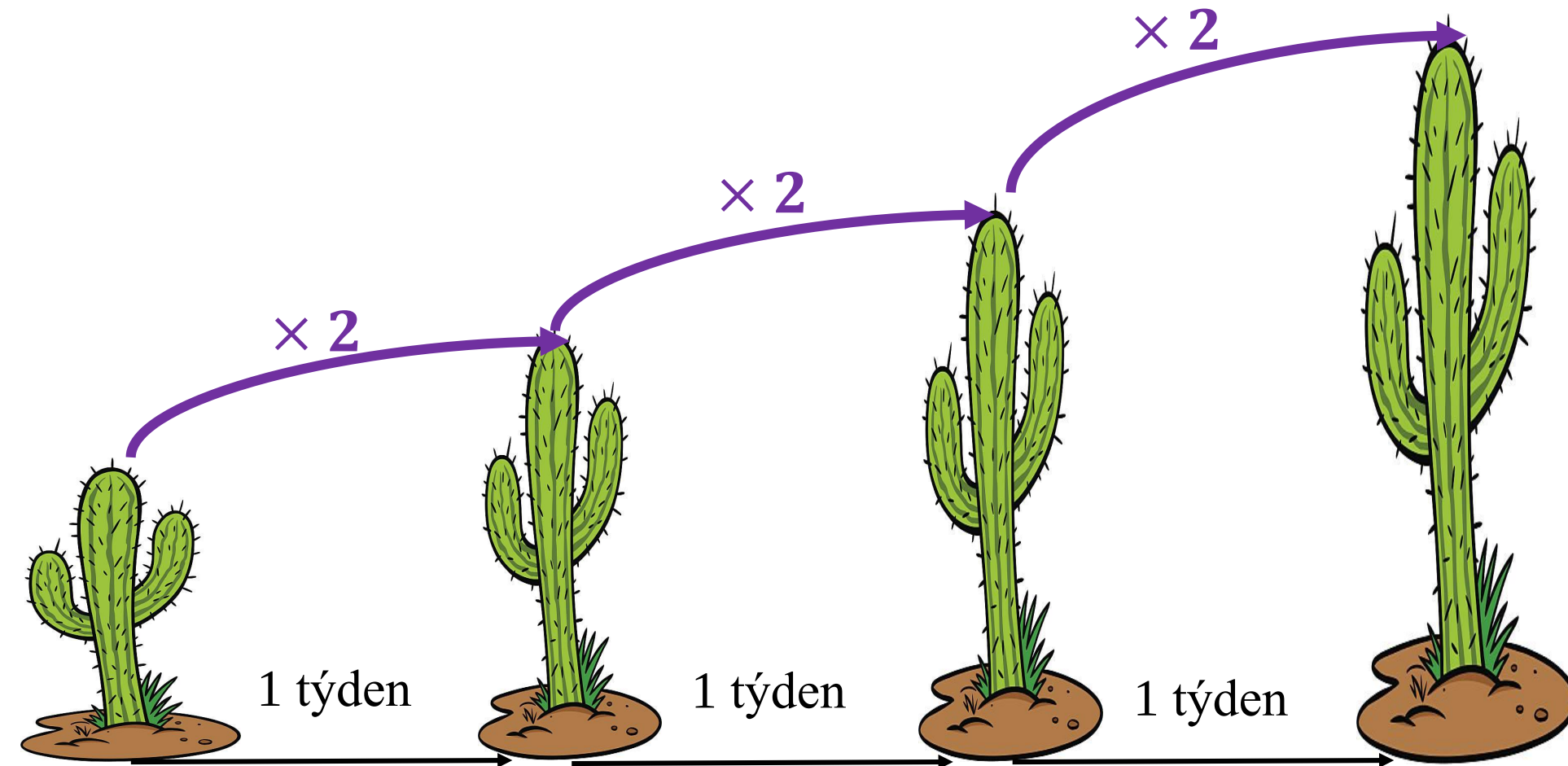
Uvažujme kontextovou situaci o kaktusu:



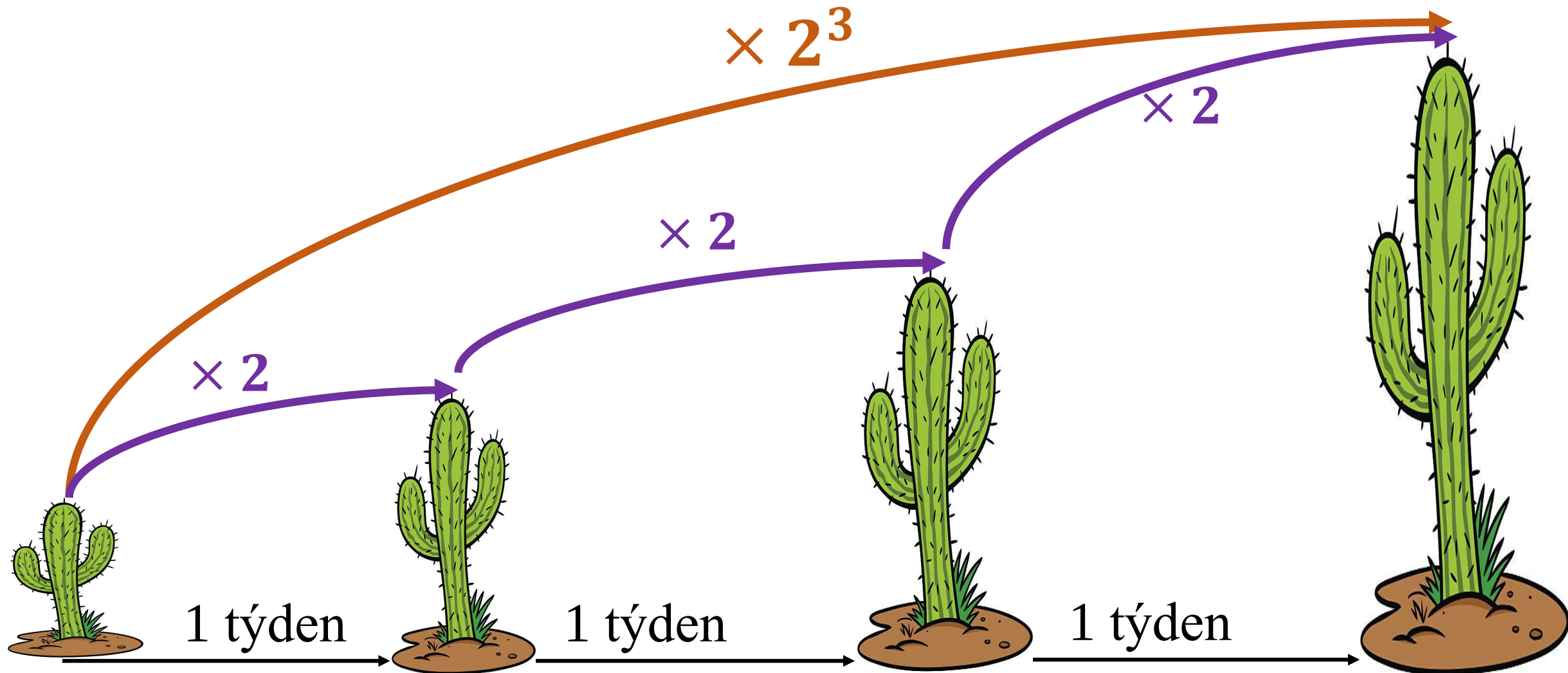
V tomto příběhu jsou dvě veličiny:

- 1) Výška kaktusu
- 2) Čas

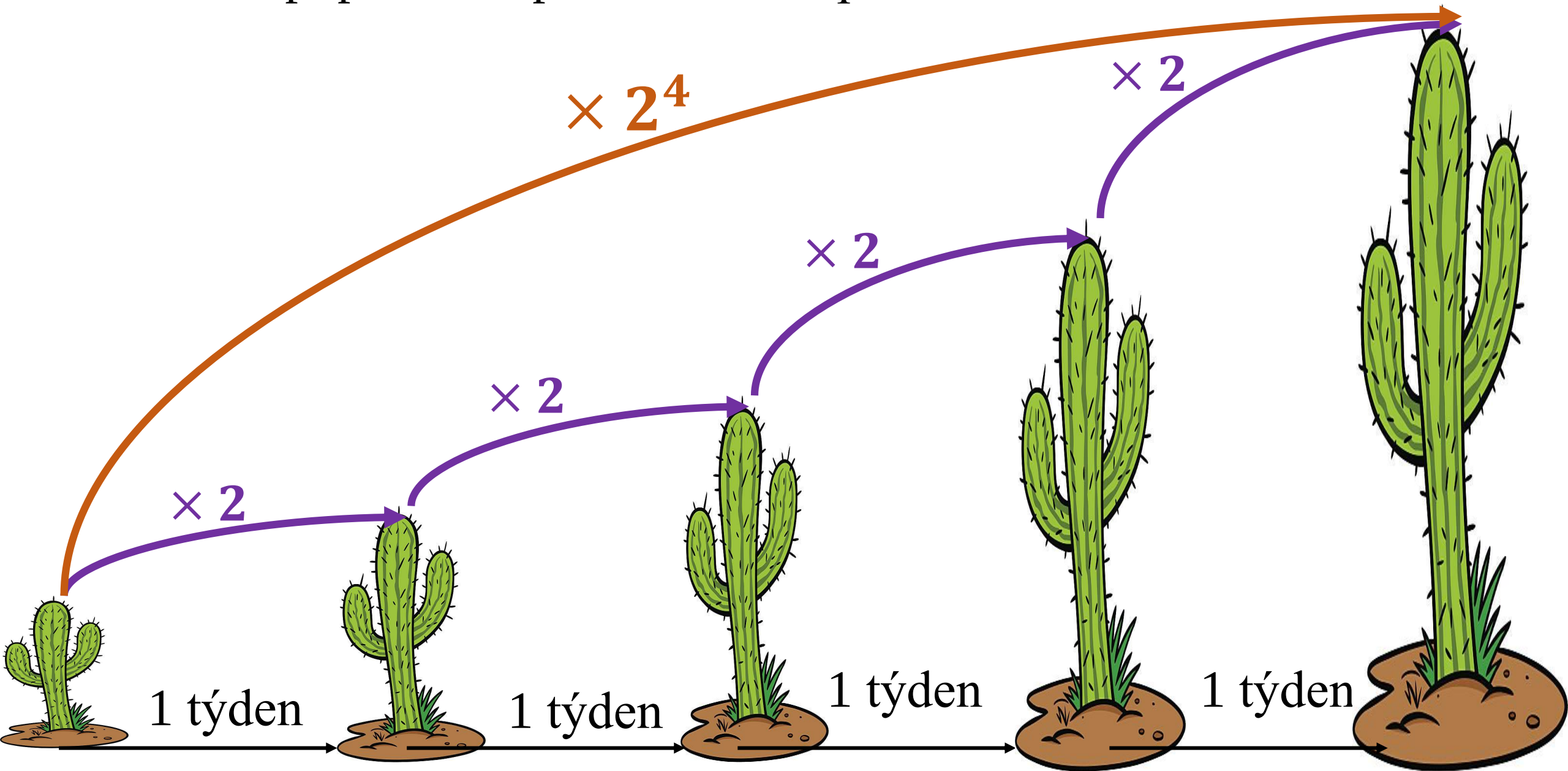
Mezi „výškou“ a „časem“ existuje exponenciální vztah



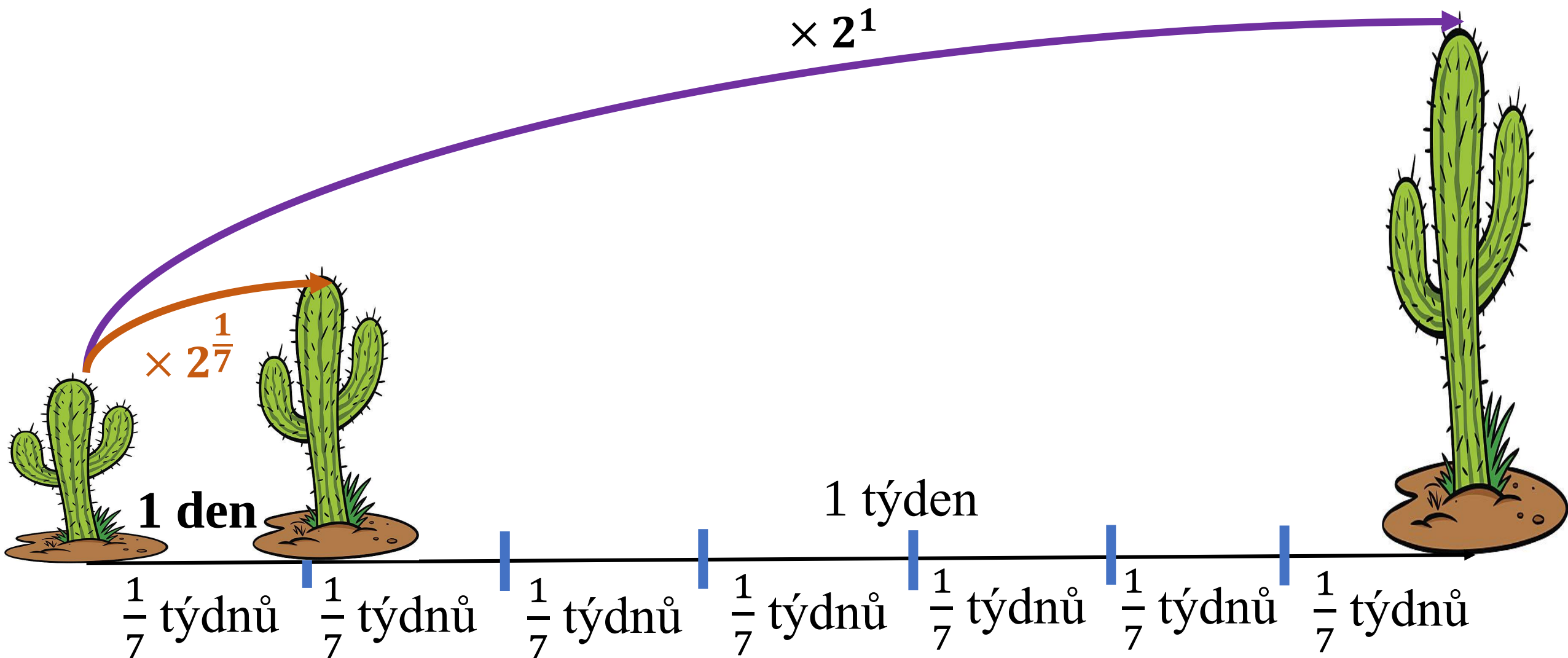
Jak můžeme popsat/interpretovat 2^3 v příběhu o kaktusu?



Jak můžeme popsat/interpretovat 2^4 v příběhu o kaktusu?

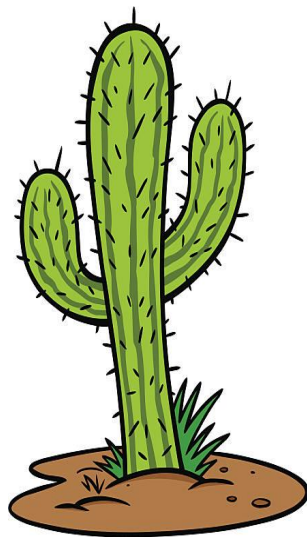


Jak můžeme popsat/interpretovat $2^{\frac{1}{7}}$ v příběhu o kaktusu?



Jak můžeme popsat/interpretovat 2^0 v příběhu o kaktusu?

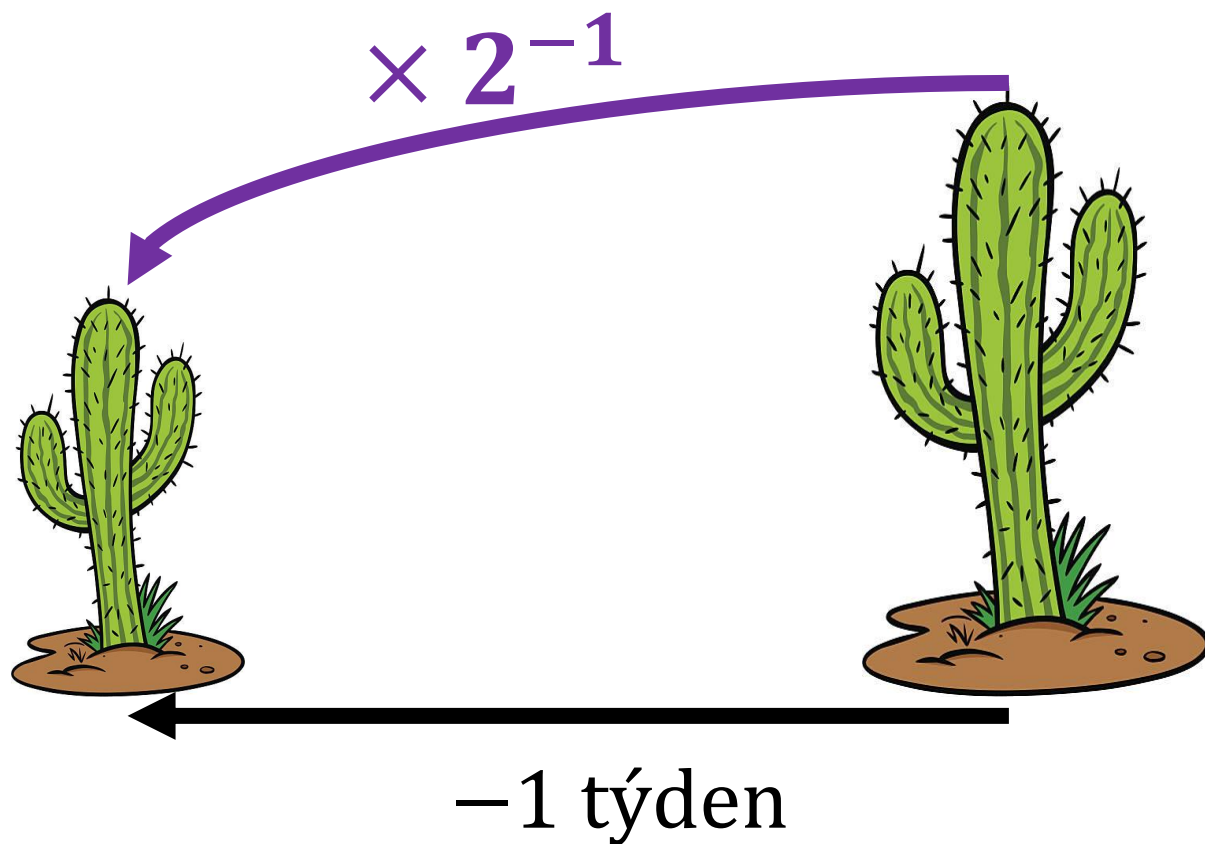
$$2^0 = 1$$



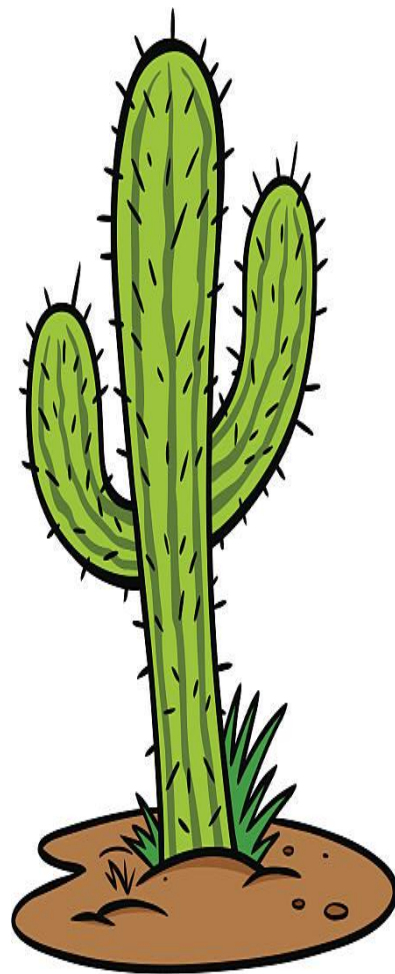
$$2^0 \\ = \\ 1$$

neuplynul žádný čas

Jak můžeme popsat/interpretovat 2^{-1} v příběhu o kaktusu?



log

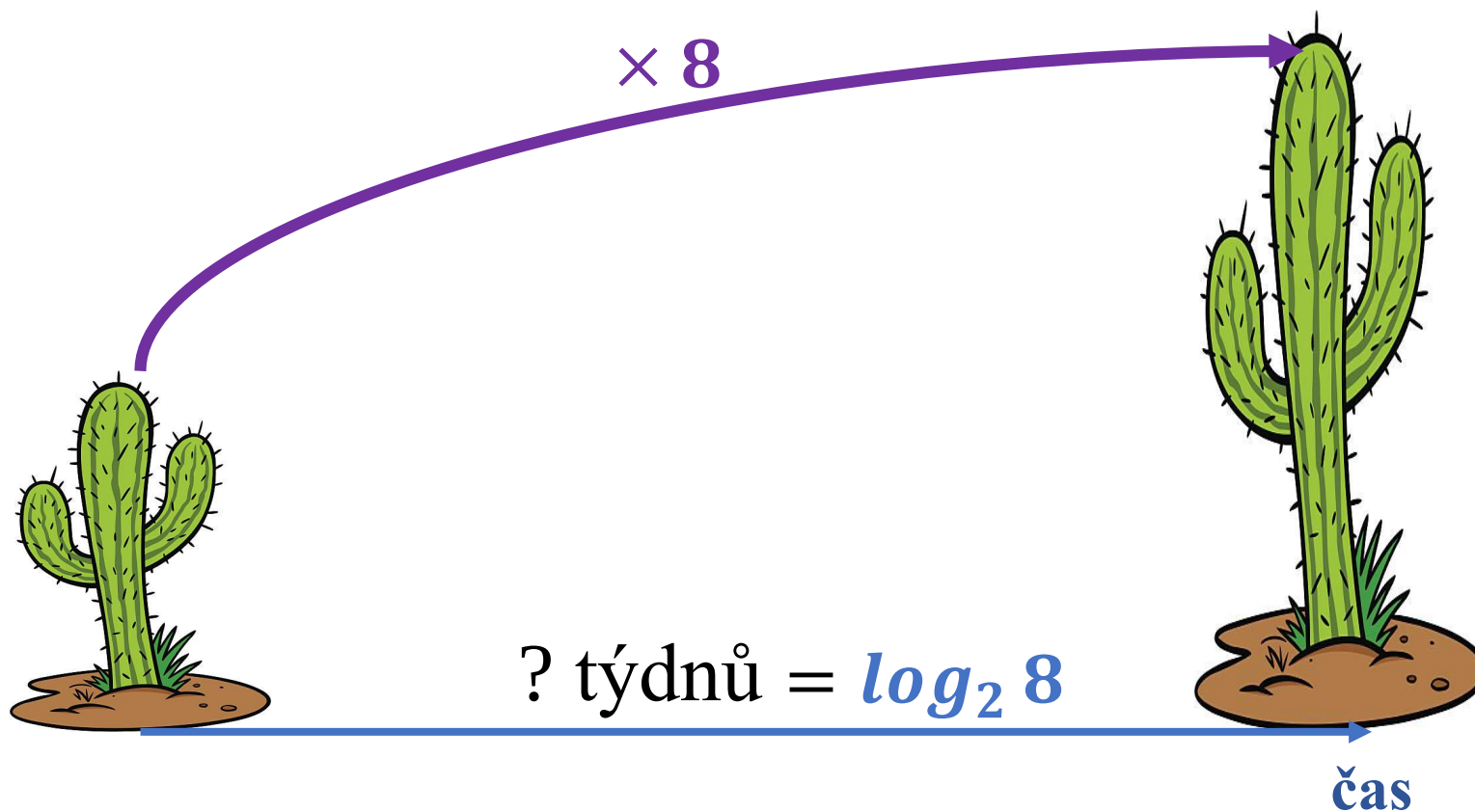


$$\log_2 8$$

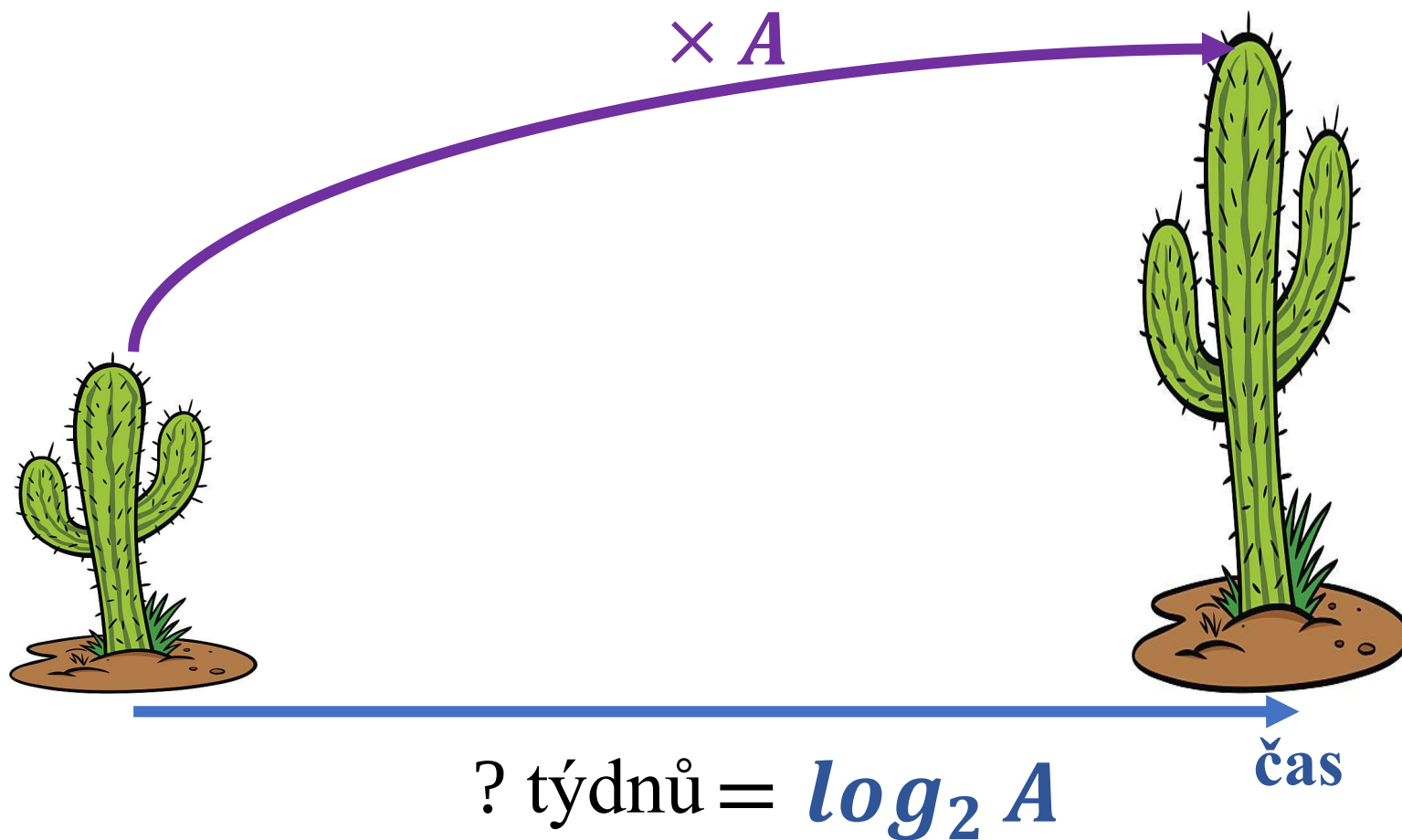
Kolik činitelů **2** máme v **8**?

Jak můžeme popsat například $\log_2 8$ v příběhu o kaktusu?

$\log_2 8$ je počet týdnů, které kaktus potřebuje, aby dosáhl 8násobku své výšky.

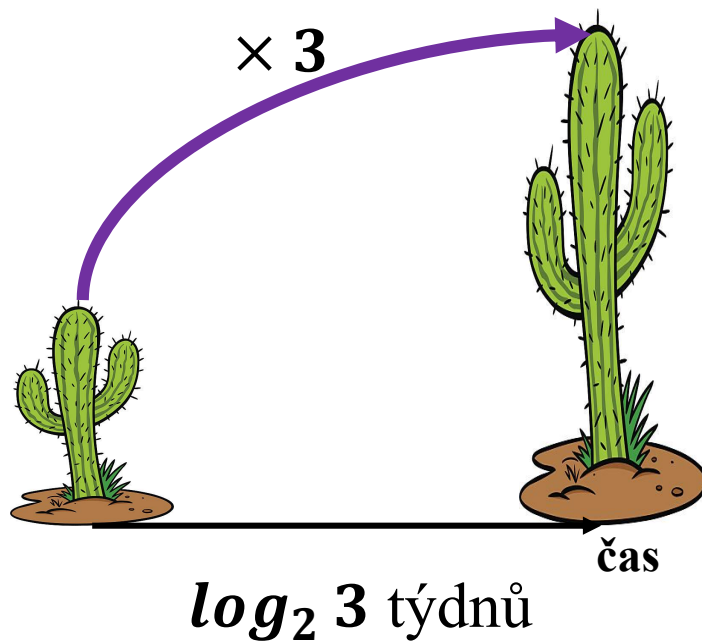


$\log_2 A$ vyjadřuje počet týdnů, které kaktus potřebuje k dosažení A -násobku své výšky.

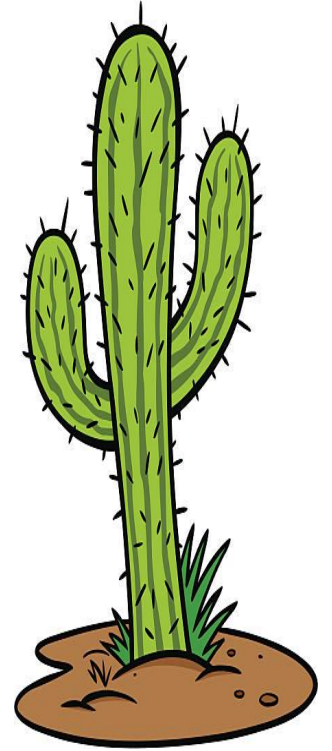


Význam $\log_2 3$ v příběhu o kaktusu:

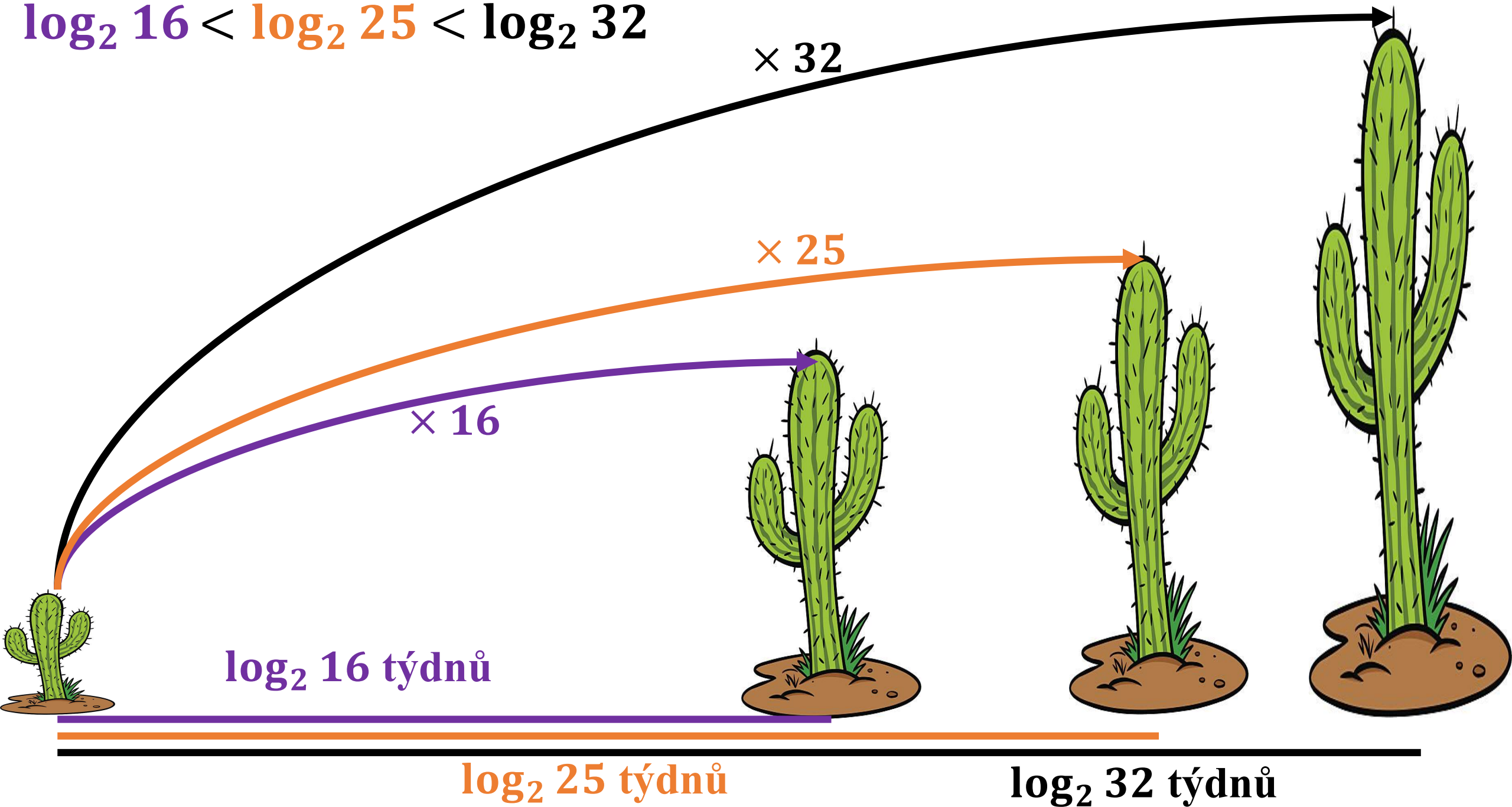
Kolik týdnů trvá, než je výška kaktusu trojnásobná.



$$\log_2 16 < \log_2 25 < \log_2 32$$

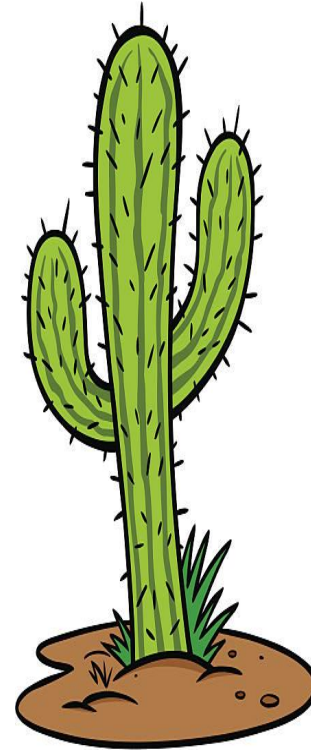


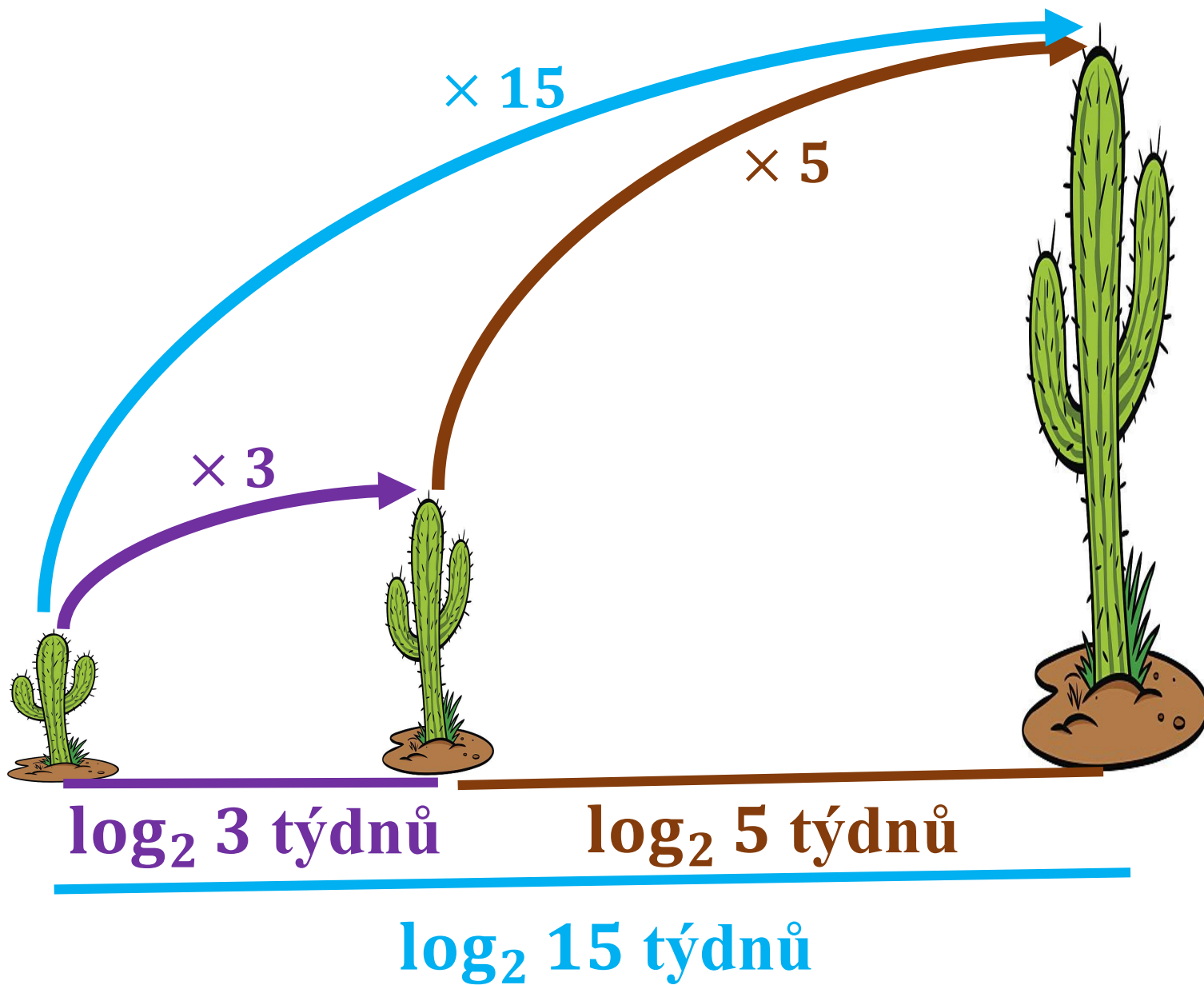
$$\log_2 16 < \log_2 25 < \log_2 32$$



$$\log_b X + \log_b Y = \log_b XY$$

$$\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 15$$

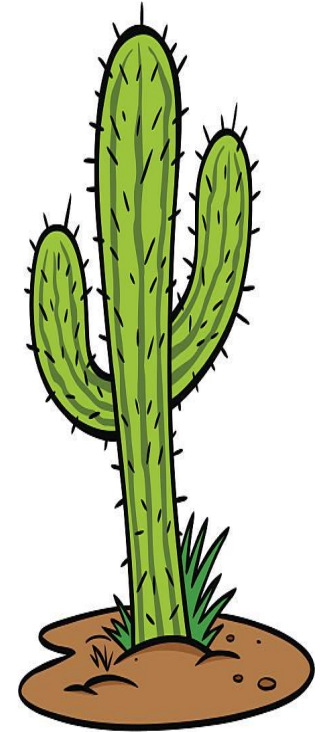




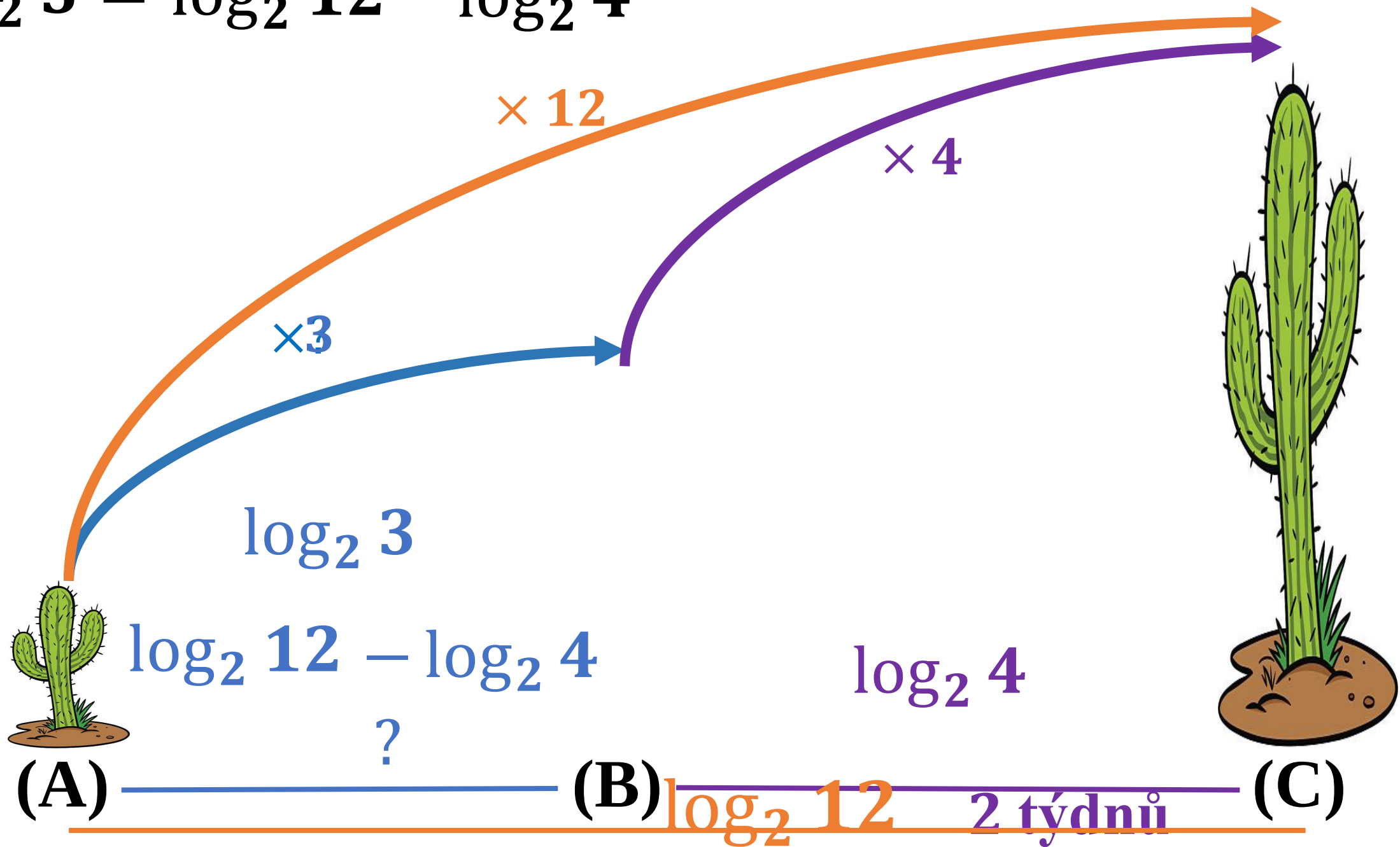
$$\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 15$$

$$\log_b X - \log_b Y = \log_b \frac{X}{Y}$$

$$\log_2 12 - \log_2 4 = \log_2 3$$

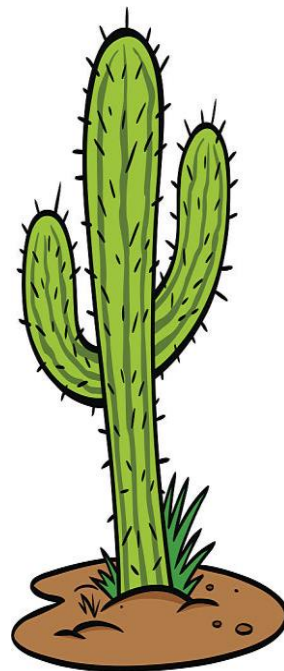


$$\log_2 3 = \log_2 12 - \log_2 4$$

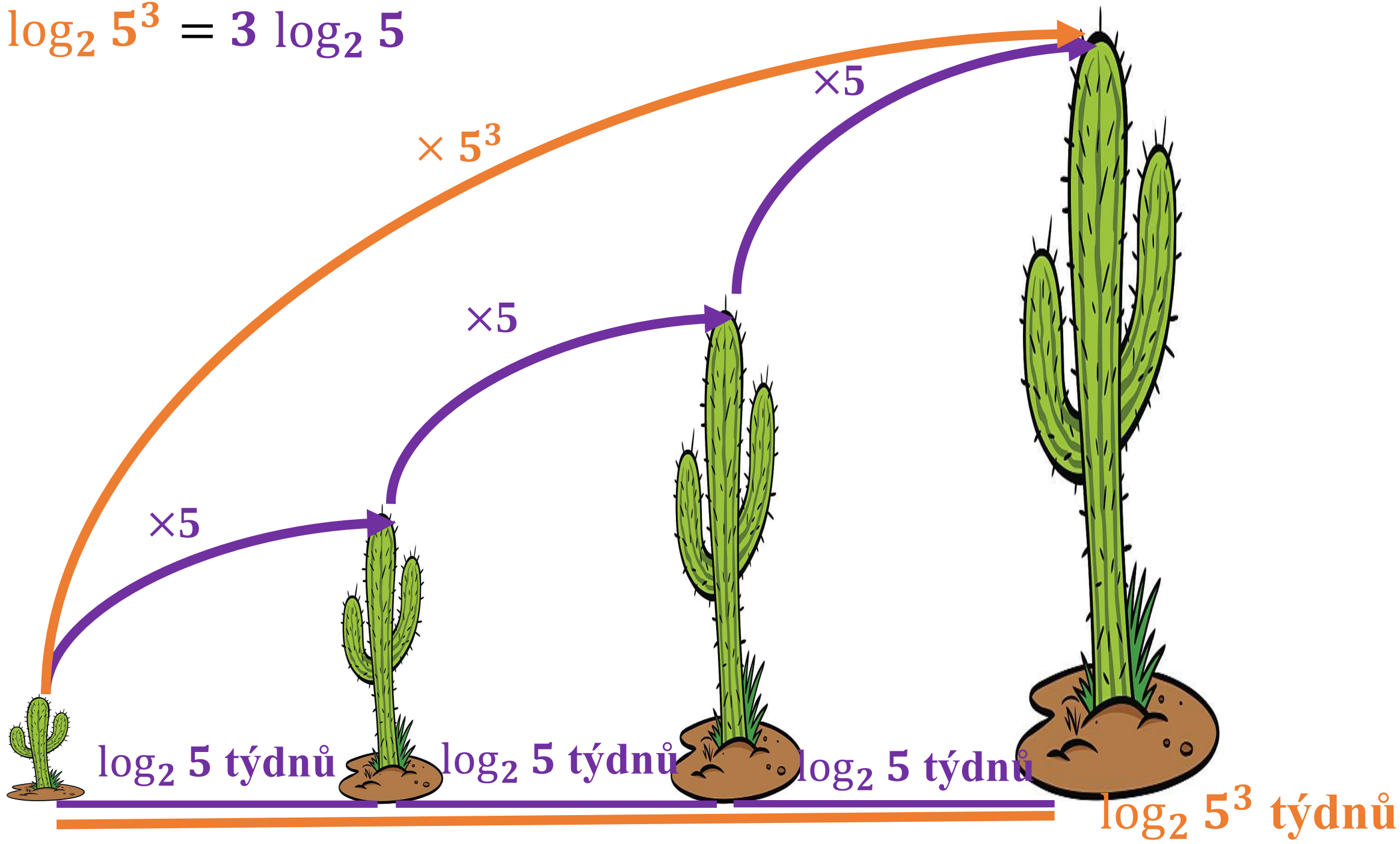


$$\log_b X^y = y \times \log_b X$$

$$\log_2 5^3 = 3 \log_2 5$$



$$\log_2 5^3 = 3 \log_2 5$$

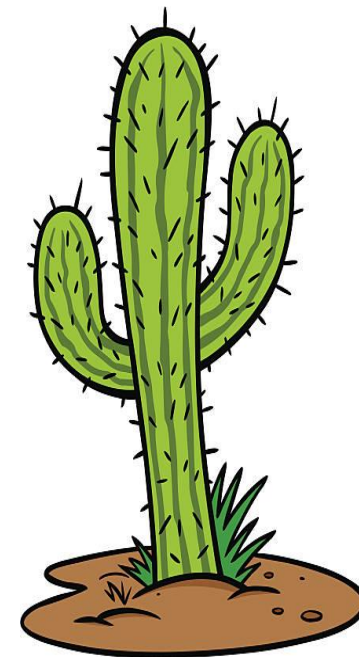


Další logaritmické věty můžeme interpretovat v příběhu o kaktusu.

$$\frac{\log_2 A}{\log_2 B} = \log_B A$$

$$2^{\log_2 A} = A$$

$$\log_2 2^A = A$$



Děkuji za pozornost!

borji@karlin.mff.cuni.cz