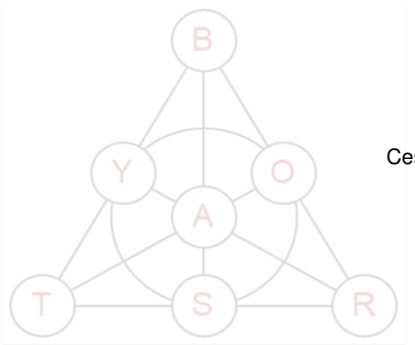
Kombinatorické struktury za karetní hrou dobble



Petr Stehlík

Katedra matematiky, FAV KMA ZČU

Cesty k matematice, Praha, pátek 23. 9. 2022

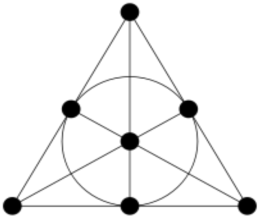
Matematika a společenské hry

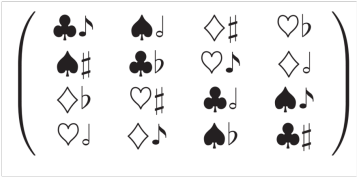
Zajímavé vazby na

- teorii her a optimalizaci
- pravděpodobnost a statistiku,
- kombinatoriku,
- geometrii.

Obsah

1. Úvod - Dobble
2. Konečné projektivní roviny
3. Latinské čtverce
4. Konstrukce vlastního a lepšího dobble
5. Bloková schémata
6. Vícerozměrný dobble





Dobble

- 55 karet, 57 symbolů, na jedné kartě vždy 8 symbolů
- každé dvě karty mají společný právě jeden symbol
- cílem jakékoliv verze je najít právě ten jeden společný symbol

- 1960-1970 - práce na neúplných blokových schématech,
- 1976 - Jacques Cottereau - milovník společenských her, vytvořil „hmyzí hru“
  - 31 karet,
  - každá karta 6 hmyzích druhů,
  - každá dvojice karet právě jeden společný hmyz,
- 2008 - Denis Blanchot (jeho zeť a novinář), objevil několik „hmyzích karet“
- 2009 - první komerční dobble, ve Francii

Dobble - 2022

Stále jedna z nejvíce prodávaných her na celém světě a nejprodávanější karetní hra

Mnoho mutací

... a za úspěchem se skrývá krásná, moderní a hluboká matematika.

Konečná projektivní rovina

Značení
S - množina symbolů
K - karta se symboly $K = \{s_1, \ldots, s_p\}$
$\mathcal{K}$ - množina všech karet, $\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_m\}$

Definice
Mějme S konečnou množinu a množinu některých jejích podmnožin $\mathcal{K} \subset 2^S$. Dvojici $(S, \mathcal{K})$ nazýváme **konečnou projektivní rovinou**, splňuje-li následující axiomy

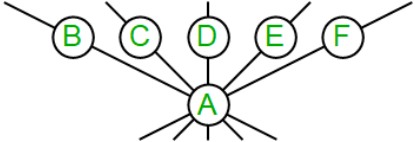
(A0) existuje čtyřprvková množina $M \subset S$, taková, že $|M \cap K| \leq 2$ pro všechny množiny $K \in \mathcal{K}$,

(A1) každé dvě množiny $K, L \in \mathcal{K}$ mají společný právě jeden prvek $|K \cap L| = 1$

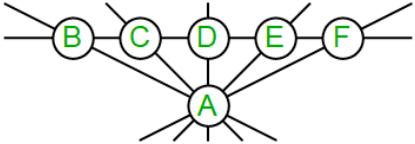
(A2) pro každé dva prvky $s, t \in S$ existuje právě jedna množina $K \in \mathcal{K}$, pro kterou $s, t \in K$.

Konečná projektivní rovina - axiomy a dobble

(A1) každé dvě množiny $K, L \in \mathcal{K}$ mají společný právě jeden prvek $|K \cap L| = 1$
Libovolné dvě karty mají jediný společný symbol. (základní princip dobble)



(A2) pro každé dva prvky $s, t \in S$ existuje právě jedna množina $K \in \mathcal{K}$, pro kterou $s, t \in K$.
Každou dvojici symbolů najdeme na právě jedné kartě (aby karet nebylo moc)



(A0) existuje čtyřprvková množina $M \subset S$, taková, že $|M \cap K| \leq 2$ pro všechny množiny $K \in \mathcal{K}$,
Aby byly symboly vyváženě rozdělené a karty symetrické.

Konečná projektivní rovina a geometrie

Ač kombinatorický objekt, myšlenka konečných projektivních rovin vychází z geometrických axiomů projektivní roviny

(A1) každé dvě množiny $K, L \in \mathcal{K}$ mají společný právě jeden prvek $|K \cap L| = 1$
Každé dvě přímky se protínají právě v jednom bodě. (rovnoběžné přímky v jednom bodě v nekonečnu odpovídajícímu směrnici)

(A2) pro každé dva prvky $s, t \in S$ existuje právě jedna množina $K \in \mathcal{K}$, pro kterou $s, t \in K$.
Všechny body v nekonečnu leží na jedné společné přímce v nekonečnu (zúplnění jako reálná čísla).

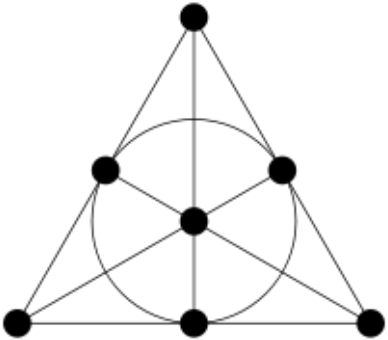
(A0) existuje čtyřprvková množina $M \subset S$, taková, že $|M \cap K| \leq 2$ pro všechny množiny $K \in \mathcal{K}$,
Existují čtyři body, které neleží na přímce.

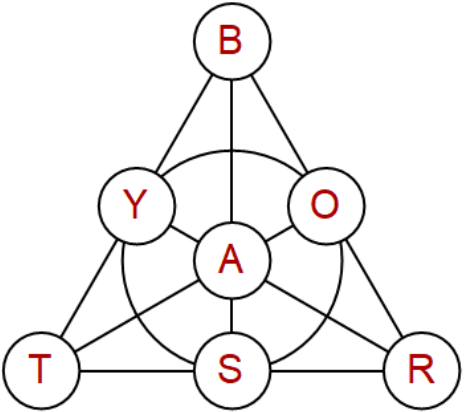
Zásadní rozdíly

- konečný počet symbolů x nekonečný počet bodů,
- neuspořádání „symbolů“ na „kartách“ x uspořádání bodů na přímkách (pozor na intuici),
- absence geometrické představy.

Konečná projektivní rovina - nejjednodušší příklad

Fanova rovina (Gino Fano) - 7 symbolů, 7 karet





$S = \{B, Y, T, O, A, S, R\}$ a karty $K_1, \ldots, K_7$ jsou dány:

BYT OBR OSY ARY BAS TRS TAO

Konečná projektivní rovina - řád projektivní roviny

Jednoduché tvrzení
Všechny karty mají stejný počet bodů.

Důkaz:

- vezměme libovolné dvě karty K_1, K_2,
- z (A0) plyne, že existuje symbol s, který na nich neleží,
- vezměme nyní kartu K, kde je s a každý symbol $t \in K_1$, pak musí vždy existovat právě jeden symbol $u \in K_2$, pro který $u \in K$.

Řád projektivní roviny
Řádem konečné projetkivní roviny je číslo $|K| - 1$, kde $K \in \mathcal{K}$ je libovolná karta.
(podle tvrzení je jedno, kterou kartu vezmeme v potaz)

- značíme $(S, \mathcal{K})_n$,
- počet symbolů p je tedy o jedno větší než řád projektivní roviny $p = n + 1$,
- Fanova rovina je konečná projektivní rovina řádu 2. Existují konečné projektivní roviny pro $n > 2$? Jsou dány jednoznačně?

Konečná projektivní rovina - počet symbolů a karet

Věta

Pro projektivní rovinu $(S, \mathcal{K})_n$ platí

(a) každý symbol $s \in S$ leží na $n+1$ kartách

(b) $|S| = |\mathcal{K}| = n^2 + n + 1 = p^2 - p + 1$

Důkaz:

(a) podobně jako stejný počet symbolů na kartách,

(b) pro libovolnou kartu $K \in \mathcal{K}$

- $n+1$ symbolů $s_1, \ldots, s_{n+1}$ na této kartě,
- existuje symbol s, který na ní neleží,
- $n+1$ karet, kde je s a každý z bodů $s_1, \ldots, s_{n+1}$

$$n(n+1) + 1 = n^2 + n + 1$$

Konečná projektivní rovina - Dualita a incidenční matice

Symboly a karty lze tedy zaměňovat.

Incidenční matice

	BYT	OBR	OSY	ARY	BAS	TRS	TAO
S			1		1	1	
R		1		1		1	
A				1	1		1
B	1	1			1		
O		1	1				1
Y	1		1	1			
T	1					1	1

U takto dokonalého dobble máme nové možnosti her:

BYT OBR OSY ARY BAS TRS TAO

Např.: Najdi kartu, kde je libovolná dvojice písmen?

Konečná projektivní rovina - komerčnímu Dobble něco chybí

- Základní verze dobblu obsahuje 55 karet.
- ... ale měla by mít 8 symbolů na kartě (řád 7)

$$7^2 + 7 + 1 = 57,$$

- symbolů je opravdu 57,
- lze najít 2 chybějící karty (2 sloupce incidenční matice),
- některé symboly jsou tedy méně zastoupeny a pro některé dvojice symbolů nenalezneme kartu K, kde oba chybí - axiom (A2) tedy neplatí.

Proč tomu tak je, není jasné:

- „dobble“ - z francouzského dvojitý (55)?
- souvislost s počtem karet standardního karetního balíčku (52 + žolíky)?
- aby při standardní hře (pekelná věž) tří hráčů, byl rovnoměrný start?

Otázky

- praktická - jak si zkonstruovat svůj vlastní dobble?
- teoretická - proč má $(P, \mathcal{K})_n$ symbolů na kartě $n + 1$?

Latinské čtverce

Představme si množinu p symbolů S. Latinský čtverec $L_p : \{1, \ldots, p\}^2 \to S$ je čtvercová matice $p \times p$, pro kterou je každý prvek $s \in S$ obsažen právě v jednom sloupci a jednom řádku.

Zvolíme-li například $p = 4$ a množinu prvků

$$S = \{\clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \heartsuit\},$$

pak

$$L_4 = \begin{pmatrix} \clubsuit & \spadesuit & \diamondsuit & \heartsuit \\ \spadesuit & \diamondsuit & \heartsuit & \clubsuit \\ \diamondsuit & \heartsuit & \clubsuit & \spadesuit \\ \heartsuit & \clubsuit & \spadesuit & \diamondsuit \end{pmatrix}$$

je příkladem Latinského čtverce řádu 4.

Ortogonální latinské čtverce

Dva Latinské čtverce $L_p, \tilde{L}_p$ tvořené symboly S, T jsou ortogonální, pokud se každá dvojice symbolů $(s,t) \in S \times T$ vyskytuje právě jednou, tj. pokud pro každou dvojici symbolů $(s,t) \in S \times T$ existuje právě jedna dvojice $(i,j) \in \{1,\dots,p\}^2$ tak, že

$$(L_p)_{ij} = s \quad \text{a současně} \quad (\tilde{L}_p)_{ij} = t.$$

Například pro dvojici symbolů

$$S = \{\clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \heartsuit\}, \quad T = \{\♪, \♩, \sharp, \flat\}$$

jdou následující dva Latinské čtverce ortogonální

$$L_4 = \begin{pmatrix} \clubsuit & \spadesuit & \diamondsuit & \heartsuit \\ \spadesuit & \clubsuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \diamondsuit & \heartsuit & \clubsuit & \spadesuit \\ \heartsuit & \diamondsuit & \spadesuit & \clubsuit \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}_4 = \begin{pmatrix} \♪ & \♩ & \sharp & \flat \\ \sharp & \flat & \♪ & \♩ \\ \flat & \sharp & \♩ & \♪ \\ \♩ & \♪ & \flat & \sharp \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \clubsuit\♪ & \spadesuit\♩ & \diamondsuit\sharp & \heartsuit\flat \\ \spadesuit\sharp & \clubsuit\flat & \heartsuit\♪ & \diamondsuit\♩ \\ \diamondsuit\flat & \heartsuit\sharp & \clubsuit\♩ & \spadesuit\♪ \\ \heartsuit\♩ & \diamondsuit\♪ & \spadesuit\flat & \clubsuit\sharp \end{pmatrix}$$

protože se každá dvojice karetního a hudebního symbolu vyskytuje na právě jedné pozici (i,j).

Ortogonální latinské čtverce

- ortogonlita - trošku nešťastné označení, s kolmostí nemá nic společného,
- řecko-latinské čtverce - stará formulace problému s písmenky

$$\begin{pmatrix} A\alpha & B\beta & C\gamma \\ B\gamma & C\alpha & A\beta \\ C\beta & A\alpha & B\alpha \end{pmatrix}$$

  - Každé latinské písmenko právě v jedné řádce a právě jednom sloupci.
  - Každé řecké písmenko právě v jedné řádce a právě jednom sloupci.
  - Každá dvojice písmenek právě v jedné příhrádce.
- Eulerovy čtverce - známý problém s 36 důstojníky

Eulerův problém 36 důstojníků

Původní formulace

(podle legendy dostal tento úkol Leonard Euler od Kateřiny Veliké, když pobýval v Petrohradu)

Máme 36 důstojníků z 6 jednotek, z každé jednotky 6 hodností (např. desátník, četař, rotný, praporčík, poručík, kapitán).

Je možné je uspořádat do čtverce 6x6 tak, aby se v žádném sloupci ani řádku neopakovala stejná hodnost ani stejná jednotka?

Moderní formulace

Existují ortogonální latinské čtverce řádu 6?

Euler se domníval, že nikoliv, a vyřkl dokonce hypotézu, že neexistují ortogonální latinské čtverce $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$.

Odpověď

- Ne pro $n = 6$, Gaston Tarry (1901) - výčtem všech možností.
- Nicméně, Bose, Parker a Shrikhande (1960) ukázali, že obecnější Eulerova hypotéza neplatí a $n = 2, 6$, jsou jediné hodnoty pro které neexistují ortogonální latinské čtverce.

Počet ortogonálních latinských čtverců

$N(n)$ největší přirozené číslo $k \in \mathbb{N}$, pro které existuje k po dvou ortogonálních Latinských čtverců

- $N(2) = 1$,
- $N(6) = 1$,
- $N(3) = 2$, atd.

Tvrzení
Pro $n \geq 2$ platí $1 \leq N(n) \leq n - 1$.
Důkaz permutace řádků, nemožnost umístění n-tého čtverce

Platí

- $N(2) = 1$,
- $N(3) = 2$,
- $N(4) = 3$,
- $N(5) = 4$,
- $N(6) = 1$,
- $N(7) = 6$, atd. (např. $N(10)$ se nezná, ale $N(10) \geq 2$)

Konečné projektivní roviny a ortogonální latinské čtverce

Existence konečné projektivní roviny je úzce svázána s existencí maximálního možného počtu ortogonálních latinských čtverců.

Věta $N(n) = n - 1$ právě tehdy, když existuje konečná projektivní rovina $(S, \mathcal{K})_n$ řádu n. (tj. s kartami obsahujícími $n + 1$ symbolů)

Důsledky

- Protože neexistují ortogonální latinské čtverce řádu $n = 6$ nenajdeme dokonalý dobble se $n + 1 = 7$ symboly
- Naopak ale existují dokonalé dobbly s $3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, \ldots$ symboly.

Důkaz
Je konstrukční a dává nám návod, jak si vytvořit incidenční matici.

Konstrukce dobblu pomocí ortogonálních latinských čtverců

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	3	4	5	1	2	4	5	1	2	3	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2,	5	1	2	3	4,	2	3	4	5	1,	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	2	3	4	5	1	5	1	2	3	4	3	4	5	1	2
5	1	2	3	4	4	5	1	2	3	3	4	5	1	2	2	3	4	5	1

1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1

Konstrukce dobblu

Z latinských čtverců řádu 5 dostáváme dokonalý dobble s 6 symboly na kartě (31 symbolů, 31 karet)

Na stejných principech z latinských čtverců řádu 9 dostáváme dokonalý dobble s 10 symboly na kartě (91 symbolů, 91 karet)

Zobecnění

Jakékoliv zobecňování je špatné, s výjimkou tohoto. Kurt Gödel

Co kdybychom místo

- karet, kde libovolná dvojice má právě jeden společný symbol,

chtěli například

- karty takové, že libovolná trojice má právě jeden společný symbol?
- karty takové, že libovolná dvojice má právě dva společné symboly?
- atd.

Tyto otázky nás z fascinujícího světa latinských čtverců přesouvají do světa blokových schémat a moderní statistiky - a jejích aplikacích ve farmakologii, medicíně, inženýrství apod.

Blokové schéma - zobecnění konečných projektivních rovin

$t - (v, k, \lambda)$ (neúplné) blokové schéma nazveme množinu symbolů a jejich podmnožin („karet“) skládající se z

- v symbolů,
- každá karta obsahuje právě k symbolů,
- jakýchkoli t symbolů je obsaženo na λ kartách.

Počet karet (bloků) je dán

$$b = \lambda \frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}}$$

Konečné projektivní roviny, existují-li, tak jsou

$$2 - (n^2 + n + 1, n + 1, 1)$$

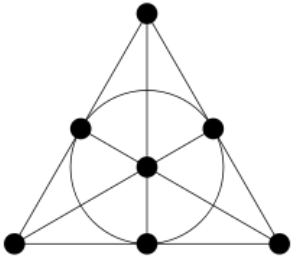
blokovým schématem s $b = v$ (optimální schéma). Např. Fanova rovina ($n = 2$) je

$$2 - (7, 3, 1)$$

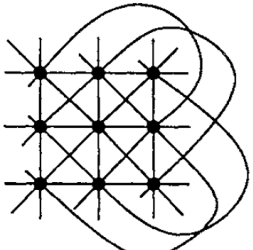
optimálním blokovým schématem.

Blokové schéma - neoptimální případ

Známe Fanovu rovinu $2-(7,3,1)$ blokové schéma



Existují ale další bloková schémata se 3 symboly, $2-(9,3,1)$ blokové schéma

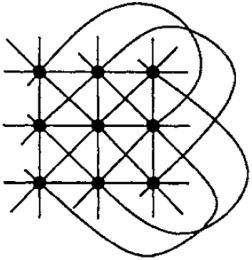


Bloková schémata - motivace ze návrhu experimentů

Typický problém vědecké práce: testování hypotéz.

Při mnoho faktorech velmi rychle roste počet experimentů, které je nutné provést. Otázka: Jak provádět experimenty efektivně, malý počet experimentů, spravedlivé zastoupení - bloková schémata (R.A.Fisher 1940)

Mám devět příměsí A,B,C,D,E,F,G,H,I do slitiny a zkoumám, jakým způsobem má daná příměs vliv na nějakou sledovanou vlastnost (tvrdost, koroze, atd.) Zajímají mě i kombinace faktorů. Kdybych zkoumal každou trojici mám $\binom{9}{3} = 84$ experimentů



Naše neoptimální schéma nám ale nabízí následující praktickou variantu s 12 experimenty rozdělenými do 4 dní

Po	Út	St	Čt
ABC	ADG	AEI	AFH
DEF	BEH	BFG	BDI
GHI	CFI	CDH	CEG

Následné vyhodnocení vlivu faktoru standardně pomocí analýzy rozptylu (ANOVA).

Dobble a neoptimální bloková schémata

Neoptimální bloková schémata často nesplňují základní pravidlo - mnohé karty nemají společný symbol.
Znamená to, že jsou pro naše účely nepoužitelné?
Nikoliv, jen to chce komplikovanější konstrukci přes dualitu. Příklad

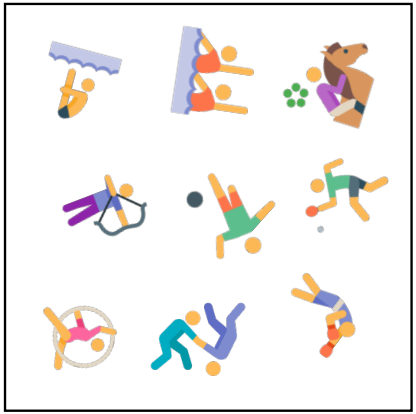
- $3 - (8, 4, 1)$ blokové schéma - jakékoli 3 symboly na právě jedné kartě, 8 symbolů, 14 karet
- vyměním-li symboly za karty - jakékoli 3 karty mají právě jeden společný symbol, 14 symbolů, 8 karet

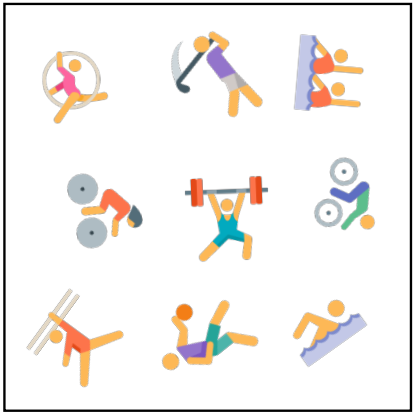
Zajímavý příklad

Při $\lambda = 2$ mluvíme o tzv. birovinách, $\lambda = 3$ mluvíme o tzv. trirovinách, apod.

$2 - (37, 9, 2)$ blokové schéma

- na každých 2 kartách jsou dva symboly totožné,
- 37 karet i 37 symbolů, optimální schéma





Děkuji za pozornost.

- Stehlík, P.: Matematika za karetní hrou dobble. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 64 (2019), 69–90.
  - návody k vytvoření,
  - ukázkové alternativní karetní systémy.
- Otava, M.: Základní principy navrhování experimentů. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 63 (2018), 196—211.