Matematické duely a truely

Antonín Slavík
Matematicko-fyzikální fakulta UK

Cesty k matematice, 23. září 2022

Duely (podle Wikipedie)

Souboj nebo duel je dobrovolné střetnutí dvou osob se zbraněmi, které se řídí pravidly a má poskytnout satisfakci uraženému, to jest odčinit předchozí urážku, resp. obnovit jeho čest. ... Souboje patřily ke starému kodexu cti bojovníků, šlechty a později zejména důstojníků. V době romantismu se souboje rozšířily i mezi měšťany a hlavně studenty. ... Mezi slavné oběti soubojů patří ruští básníci Alexandr Sergejevič Puškin a Michail Jurjevič Lermontov, americký politik Alexander Hamilton, francouzský matematik Évariste Galois, ...

Základní sekvenční duel (1)

- 2 hráči A, B se střídají po jednom výstřelu, dokud jeden z nich nezasáhne soupeře
- $P(A \text{ zasáhne soupeře}) = a$,
  $P(B \text{ zasáhne soupeře}) = b$, kde $0 < a, b \leq 1$

Jaké jsou pravděpodobnosti výher obou hráčů?

Základní sekvenční duel (1)

- 2 hráči A, B se střídají po jednom výstřelu, dokud jeden z nich nezasáhne soupeře
- $P(A \text{ zasáhne soupeře}) = a$,
  $P(B \text{ zasáhne soupeře}) = b$, kde $0 < a, b \leq 1$

Jaké jsou pravděpodobnosti výher obou hráčů?

$$P(A \text{ vyhraje}) = a + (1-a)(1-b)a + [(1-a)(1-b)]^2 a + \cdots =$$
$$= \frac{a}{1-(1-a)(1-b)} = \frac{a}{a+b-ab}$$
$$P(B \text{ vyhraje}) = (1-a)b + (1-a)(1-b)(1-a)b +$$
$$+ (1-a)[(1-b)(1-a)]^2 b + \cdots =$$
$$= \frac{(1-a)b}{1-(1-a)(1-b)} = \frac{(1-a)b}{a+b-ab}$$

Základní sekvenční duel (1)

- 2 hráči A, B se střídají po jednom výstřelu, dokud jeden z nich nezasáhne soupeře
- $P(A \text{ zasáhne soupeře}) = a$,
  $P(B \text{ zasáhne soupeře}) = b$, kde $0 < a, b \leq 1$

Jaké jsou pravděpodobnosti výher obou hráčů?

$$P(A \text{ vyhraje}) = a + (1-a)(1-b)a + [(1-a)(1-b)]^2 a + \cdots =$$
$$= \frac{a}{1-(1-a)(1-b)} = \frac{a}{a+b-ab}$$
$$P(B \text{ vyhraje}) = (1-a)b + (1-a)(1-b)(1-a)b +$$
$$+ (1-a)[(1-b)(1-a)]^2 b + \cdots =$$
$$= \frac{(1-a)b}{1-(1-a)(1-b)} = \frac{(1-a)b}{a+b-ab}$$

Poznámka: $P(A \text{ vyhraje}) + P(B \text{ vyhraje}) = 1$

Příklad: $a = b = \frac{1}{2} \Rightarrow P(A \text{ vyhraje}) = \frac{2}{3}$, $P(B \text{ vyhraje}) = \frac{1}{3}$

Základní sekvenční duel (2)

Kdy mají oba hráči stejné pravděpodobnosti výhry? Musí platit:

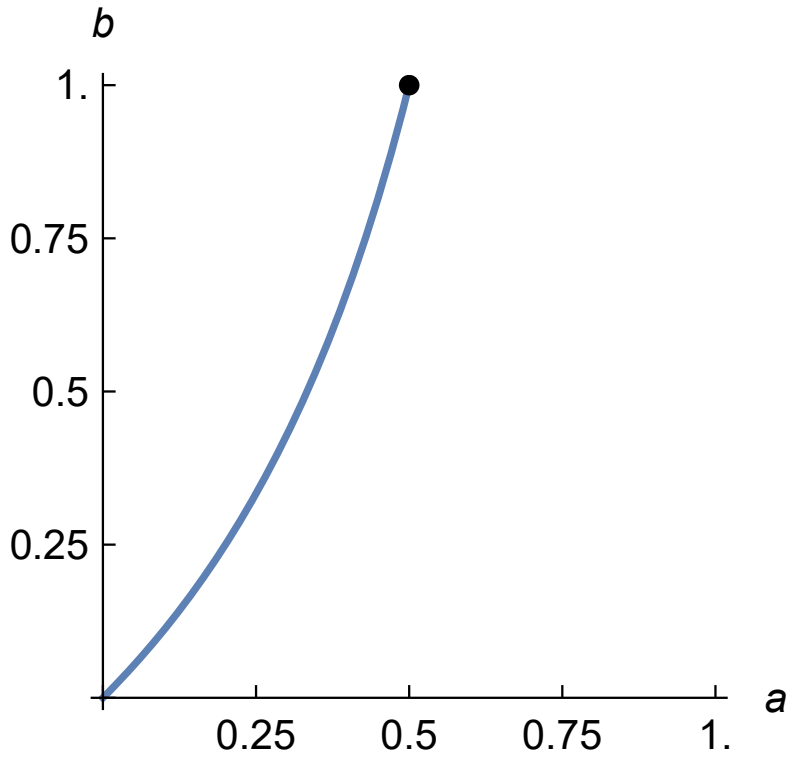
$$\frac{1}{2} = P(A \text{ vyhraje}) = \frac{a}{a+b-ab}$$

$$b = \frac{a}{1-a}$$

Toto může nastat jen pro $a \leq \frac{1}{2}$.

Například:

- $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{2}{3}$
- $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$



Revolverový duel (1)

Jak dosáhnout toho, aby pravděpodobnosti zásahu soupeře byly pro oba hráče přesně stejné, tj. $a = b$?

Revolverový duel (1)

Jak dosáhnout toho, aby pravděpodobnosti zásahu soupeře byly pro oba hráče přesně stejné, tj. $a = b$?

Oba soupeři sdílejí revolver, který si postupně vyměňují. Revolver obsahuje zásobník pro n nábojů, avšak pouze 1 náboj. Každý hráč nejprve zatočí zásobníkem a poté zmáčkne spoušť. Hráči jsou tak blízko, že při výstřelu nemůže jeden druhého minout. Pak $a = b = \frac{1}{n}$.

$$P(A \text{ vyhraje}) = \frac{a}{a + b - ab} = \frac{n}{2n - 1}$$
$$P(B \text{ vyhraje}) = \frac{(1 - a)b}{a + b - ab} = \frac{n - 1}{2n - 1}$$

Pro $n \to \infty$ konvergují obě pravděpodobnosti k $\frac{1}{2}$.

Revolverový duel (2)

Jaká je střední délka revolverového duelu?

$$P(\text{duel skončí v } k\text{-tém kole}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \frac{1}{n}$$

Střední délka revolverového duelu je

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} = \frac{1}{n} \cdot n^2 = n.$$

Revolverový duel (3)

Proč platí $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} = n^2$?

Počítejme obecněji $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1}$, kde $0 \leq x < 1$.

Revolverový duel (3)

Proč platí $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} = n^2$?

Počítejme obecněji $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1}$, kde $0 \leq x < 1$.

1. způsob:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Revolverový duel (3)

Proč platí $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} = n^2$?

Počítejme obecněji $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1}$, kde $0 \leq x < 1$.

1. způsob:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

2. způsob:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} x^{k-1} = \sum_{j,k \in \mathbb{N},\, j \leq k} x^{k-1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} x^{k-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \sum_{j=1}^{\infty} x^{j-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Stupňovaný revolverový duel (1)

Hráči se nestřídají po 1 pokusu, ale následujícím způsobem:

A má 1 pokus, B má 2 pokusy, A má 3 pokusy, B má 4 pokusy, ...

Hráč A tedy má

- 1 pokus po 0 kolech,
- 3 pokusy po $1 + 2$ kolech,
- 5 pokusů po $1 + 2 + 3 + 4$ kolech, ...

Obecně má $2m - 1$ pokusů po
$1 + 2 + \cdots + 2(m - 1) = (2m - 1)(m - 1)$ kolech.

Stupňovaný revolverový duel (1)

Hráči se nestřídají po 1 pokusu, ale následujícím způsobem:

A má 1 pokus, B má 2 pokusy, A má 3 pokusy, B má 4 pokusy, ...

Hráč A tedy má

- 1 pokus po 0 kolech,
- 3 pokusy po $1 + 2$ kolech,
- 5 pokusů po $1 + 2 + 3 + 4$ kolech, ...

Obecně má $2m - 1$ pokusů po
$1 + 2 + \cdots + 2(m-1) = (2m-1)(m-1)$ kolech.

Pravděpodobnost, že v této skupině pokusů vyhraje, je

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{(2m-1)(m-1)} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m-1}\right).$$

Celková pravděpodobnost výhry hráče A je

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{(2m-1)(m-1)} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2m-1}\right).$$

Stupňovaný revolverový duel (2)

n	$P(A$ vyhraje$)$
2	0,610322
3	0,557085
4	0,538937
5	0,529620
6	0,523919
7	0,520065
8	0,517283
9	0,515180
10	0,513533

Stupňovaný revolverový duel (2)

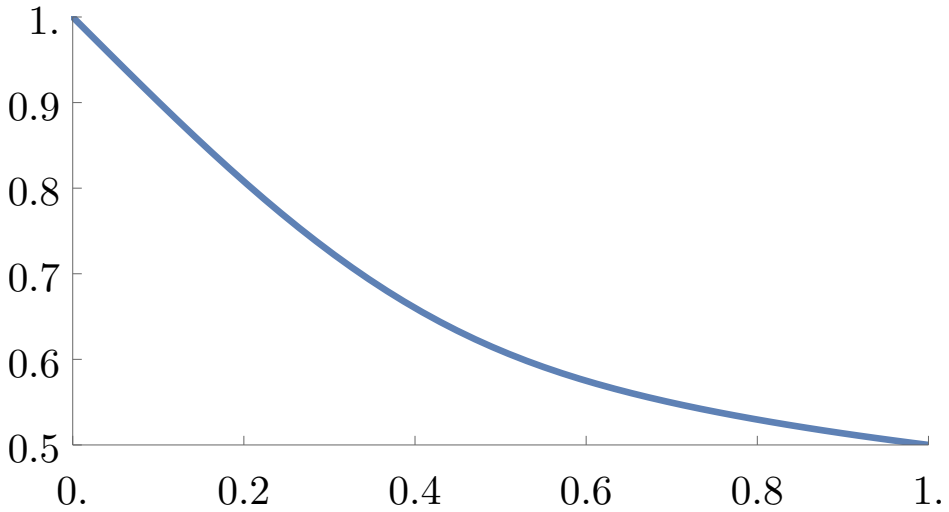
n	$P(A \text{ vyhraje})$
2	0,610322
3	0,557085
4	0,538937
5	0,529620
6	0,523919
7	0,520065
8	0,517283
9	0,515180
10	0,513533

Platí $\lim_{n\to\infty} P(A \text{ vyhraje}) = \frac{1}{2}$? Označíme-li $q = 1 - \frac{1}{n}$, pak

$$P(A \text{ vyhraje}) = \sum_{m=1}^{\infty} q^{(2m-1)(m-1)} \left(1 - q^{2m-1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{\frac{1}{2}k(k+1)}$$

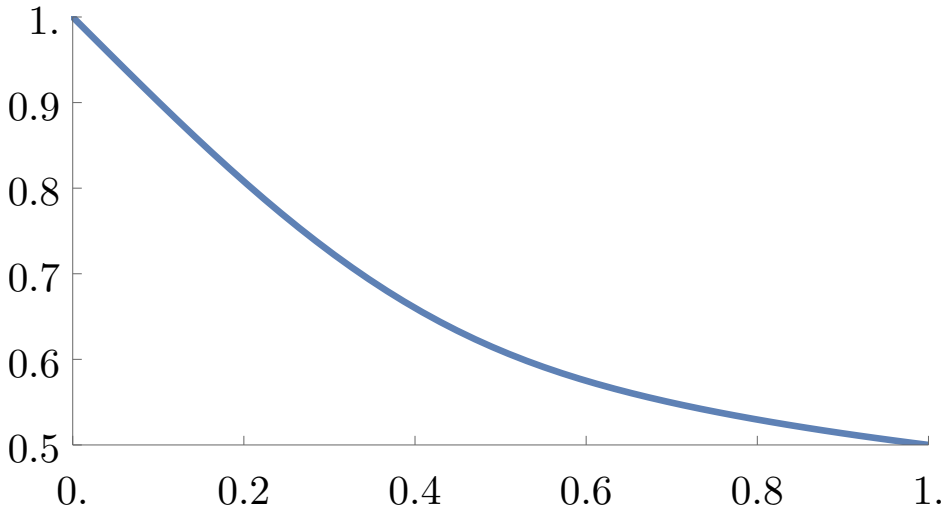
a zajímá nás limita této funkce pro $q \to 1-$.

Stupňovaný revolverový duel (3)



Pro $q = 1$ řada $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{\frac{1}{2}k(k+1)}$ diverguje.

Stupňovaný revolverový duel (3)



Pro $q = 1$ řada $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{\frac{1}{2}k(k+1)}$ diverguje.

Má však Cesàrův součet (limitu průměrů částečných součtů) $\frac{1}{2}$.

Z toho plyne (Georg Frobenius, 1880), že

$$\lim_{q\to 1-}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{\frac{1}{2}k(k+1)} = \frac{1}{2}.$$

Truely

- Varianta pro 3 hráče A, B, C
- Pravděpodobnosti, že zasáhnou soupeře, jsou a, b, c

Každý hráč si může vybrat, na koho bude mířit, ale:

- Pokud zasáhne cíl, pak bude hra pokračovat duelem, ve kterém je výhodnější utkat se se slabším soupeřem.
- Pokud nezasáhne cíl, pak je jedno, na koho mířil.

Tedy pro každého hráče je výhodné mířit na silnějšího soupeře (strategie nejsilnějšího protivníka).

Základní sekvenční truel (1)

Hráči A, B, C se střídají po jednom výstřelu (v tomto pořadí), řídí se strategií nejsilnějšího protivníka.

Nechť např. $a > b > c$. Jaké jsou pravděpodobnosti výher?

Základní sekvenční truel (1)

Hráči A, B, C se střídají po jednom výstřelu (v tomto pořadí), řídí se strategií nejsilnějšího protivníka.

Nechť např. $a > b > c$. Jaké jsou pravděpodobnosti výher?

Hráč A vyhraje, pokud v některém kole vyřadí B a v následném duelu mezi A, C (začíná C!) vyhraje A.

$$P(A \text{ vyřadí } B) = a + (1-a)(1-b)(1-c)a + \cdots =$$
$$= \frac{a}{1-(1-a)(1-b)(1-c)}$$

$$P(A \text{ vyhraje duel s } C, \text{ začíná } C) = \frac{(1-c)a}{1-(1-a)(1-c)}$$

$$P(A \text{ vyhraje}) = \frac{a}{1-(1-a)(1-b)(1-c)} \cdot \frac{(1-c)a}{1-(1-a)(1-c)}$$

Základní sekvenční truel (2)

Hráč B vyhraje v následujících případech:

1. Hráč B v některém kole vyřadí A, v následném duelu mezi B, C (začíná C) zvítězí B
2. Hráč C v některém kole vyřadí A, v následném duelu mezi B, C (začíná B) zvítězí B

Základní sekvenční truel (2)

Hráč B vyhraje v následujících případech:

1. Hráč B v některém kole vyřadí A, v následném duelu mezi B, C (začíná C) zvítězí B
2. Hráč C v některém kole vyřadí A, v následném duelu mezi B, C (začíná B) zvítězí B

Hráč C vyhraje v následujících případech:

1. Hráč B v některém kole vyřadí A, v následném duelu mezi B, C (začíná C) zvítězí C
2. Hráč C v některém kole vyřadí A, v následném duelu mezi B, C (začíná B) zvítězí C
3. Hráč A v některém kole vyřadí B, v následném duelu mezi A, C (začíná C) zvítězí C

Pravděpodobnosti uvedených jevů se vypočítají podobně jako dříve.

Základní sekvenční truel (3)

Příklad: $a = 0{,}9$, $b = 0{,}8$, $c = 0{,}5$

$$P(A \text{ vyhraje}) \doteq 0{,}43$$
$$P(B \text{ vyhraje}) \doteq 0{,}04$$
$$P(C \text{ vyhraje}) \doteq 0{,}52$$

Nejslabší hráč má nejvyšší šanci přežít!

Cvičení: Vypočítejte pravděpodobnosti výher, pokud $a < b < c$.

Literatura

- A. Matis, *Matematické duely a truely*, bakalářská práce, MFF UK, 2022.
- D. Lanphier, *Duels, truels, gruels, and survival of the unfittest*. In J. Beineke, J. Rosenhouse (eds.), *The Mathematics of Various Entertaining Subjects, vol. 2*, Princeton University Press, 2017, 169–194.
- P. Nahin, *Duelling idiots and other probability puzzlers*, Princeton University Press, 2000.
- A. Matis, A. Slavík, *Duelling idiots and Abel sums*, American Mathematical Monthly, 2022, v tisku.