Zásady práce s nekonečnem

Luboš Pick (KMA MFF UK Praha)

Cesty k matematice, Praha, 22.9. 2022

Citát (varovný)

Citát (varovný)

Dvadsať minút, a nič som sa nedozvedel . . .

(komentář k videozáznamu přednášky)

Otázka didaktická: jak učit analýzu?

Otázka didaktická: jak učit analýzu?

- reálná čísla,

Otázka didaktická: jak učit analýzu?

- reálná čísla,
- limita posloupnosti,

Otázka didaktická: jak učit analýzu?

- reálná čísla,
- limita posloupnosti,
- limita funkce,

Otázka didaktická: jak učit analýzu?

- reálná čísla,
- limita posloupnosti,
- limita funkce,
- spojitost,

Otázka didaktická: jak učit analýzu?

- reálná čísla,
- limita posloupnosti,
- limita funkce,
- spojitost,
- derivace,

Otázka didaktická: jak učit analýzu?

- reálná čísla,
- limita posloupnosti,
- limita funkce,
- spojitost,
- derivace,
- integrál,

Otázka didaktická: jak učit analýzu?

- reálná čísla,
- limita posloupnosti,
- limita funkce,
- spojitost,
- derivace,
- integrál,
- řady čísel,

Otázka didaktická: jak učit analýzu?

- reálná čísla,
- limita posloupnosti,
- limita funkce,
- spojitost,
- derivace,
- integrál,
- řady čísel,
- mocninné řady,

Otázka didaktická: jak učit analýzu?

- reálná čísla,
- limita posloupnosti,
- limita funkce,
- spojitost,
- derivace,
- integrál,
- řady čísel,
- mocninné řady,
- Fourierovy řady.

Otázka didaktická: jak učit analýzu?

- reálná čísla,
- limita posloupnosti,
- limita funkce,
- spojitost,
- derivace,
- integrál,
- řady čísel,
- mocninné řady,
- Fourierovy řady.

David Bressoud: Toto je správný způsob, jak vnímat analýzu, ale nikoli jak ji učit.

Bressaudovy hlavní námitky

Bressaudovy hlavní námitky

- Nedostatek motivace,

Bressaudovy hlavní námitky

- Nedostatek motivace,
- rigorózní definice nedávají smysl před seznámením s nedostatky geometrické intuitivní představy,

Bressaudovy hlavní námitky

- Nedostatek motivace,
- rigorózní definice nedávají smysl před seznámením s nedostatky geometrické intuitivní představy,
- není poznat, co přivedlo matematiky k jejich převratným myšlenkám,

Bressaudovy hlavní námitky

- Nedostatek motivace,
- rigorózní definice nedávají smysl před seznámením s nedostatky geometrické intuitivní představy,
- není poznat, co přivedlo matematiky k jejich převratným myšlenkám,
- vyleštěné moderní důkazy zakrývají omyly starých mistrů,

Bressaudovy hlavní námitky

- Nedostatek motivace,
- rigorózní definice nedávají smysl před seznámením s nedostatky geometrické intuitivní představy,
- není poznat, co přivedlo matematiky k jejich převratným myšlenkám,
- vyleštěné moderní důkazy zakrývají omyly starých mistrů,
- vzniká mylný dojem, že cesta objevování v matematice je rovná a bezpečná, experimentování není zapotřebí, nejasnosti nevznikají,

Bressaudovy hlavní námitky

- Nedostatek motivace,
- rigorózní definice nedávají smysl před seznámením s nedostatky geometrické intuitivní představy,
- není poznat, co přivedlo matematiky k jejich převratným myšlenkám,
- vyleštěné moderní důkazy zakrývají omyly starých mistrů,
- vzniká mylný dojem, že cesta objevování v matematice je rovná a bezpečná, experimentování není zapotřebí, nejasnosti nevznikají,
- učitel si neuvědomuje, že student potřebuje čas na pochopení látky.

Mnohé z toho, co studujeme v matematické analýze, je důsledkem **pařížské krize** z roku 1807.

Pařížská krize v matematice

Pařížská krize v matematice

Krize udeřila *21. prosince 1807.*

Pařížská krize v matematice

Krize udeřila *21. prosince 1807.*

Pařížská krize v matematice

Krize udeřila *21. prosince 1807.*

Do Francouzského Institutu přinesl 39-letý *Joseph Fourier* (1768-1830) svou práci *Teorie vedení tepla v pevných tělesech*.

Vedení tepla

Vedení tepla

Fourier studoval šíření tepla na tenkém dlouhém plochém pásku.

Vedení tepla

Fourier studoval šíření tepla na tenkém dlouhém plochém pásku.

Předpokládal, že

Vedení tepla

Fourier studoval šíření tepla na tenkém dlouhém plochém pásku.

Předpokládal, že

- ke ztrátám tepla nedochází,

Vedení tepla

Fourier studoval šíření tepla na tenkém dlouhém plochém pásku.

Předpokládal, že

- ke ztrátám tepla nedochází,
- okraje jsou drženy na konstantní teplotě 0°,

Vedení tepla

Fourier studoval šíření tepla na tenkém dlouhém plochém pásku.

Předpokládal, že

- ke ztrátám tepla nedochází,
- okraje jsou drženy na konstantní teplotě 0°,
- teplo je dodáváno na jedné z krátkých stran,

Vedení tepla

Fourier studoval šíření tepla na tenkém dlouhém plochém pásku.

Předpokládal, že

- ke ztrátám tepla nedochází,
- okraje jsou drženy na konstantní teplotě 0°,
- teplo je dodáváno na jedné z krátkých stran,
- druhá strana je daleko (v nekonečnu).

Fourierův tenký pásek

Fourierův tenký pásek

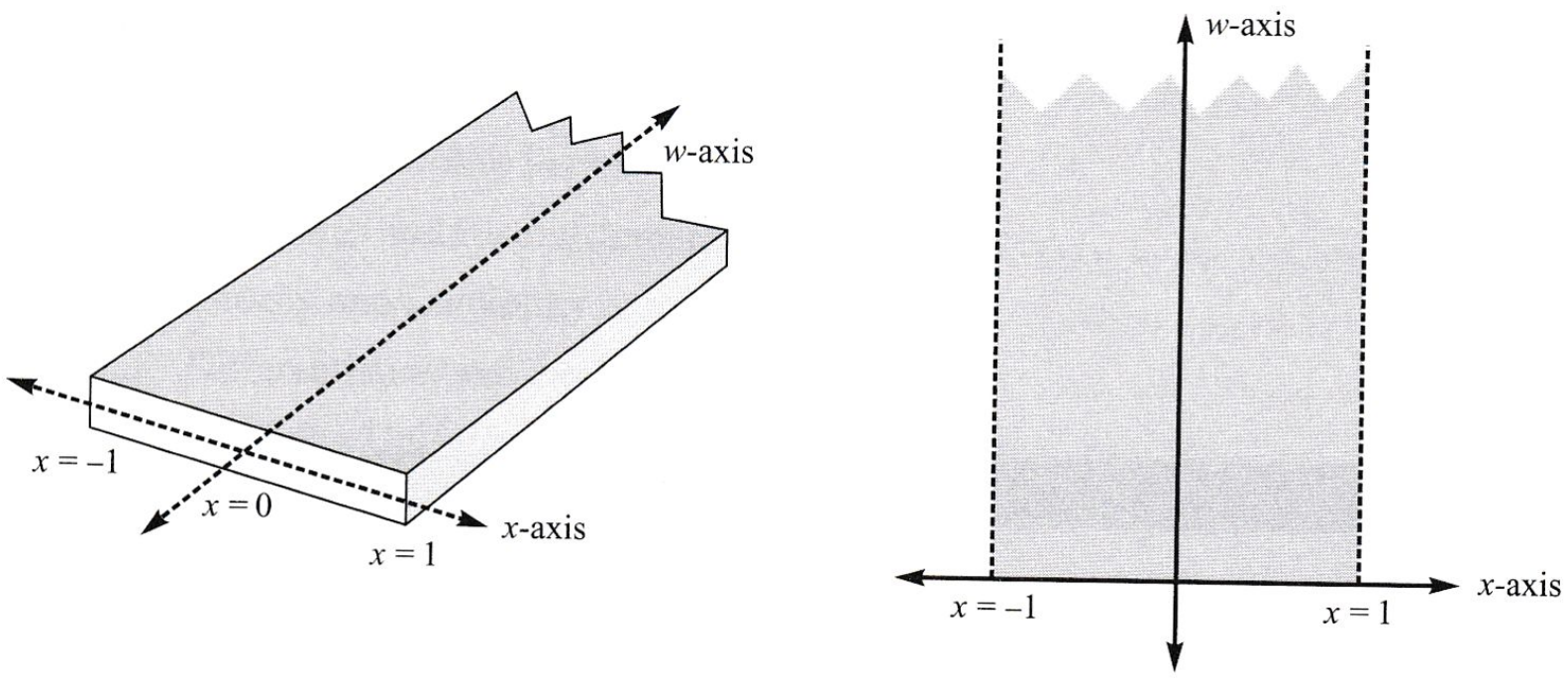


FIGURE 1.1. Two views of Fourier's thin plate.

Matematický popis

Matematický popis

$z(x, y)$ ... teplota

Matematický popis

$z(x, y)$ ... teplota (funkce dvou proměnných),

Matematický popis

$z(x, y)$ ... teplota (funkce dvou proměnných),

podmínka: $z(-1, y) = z(1, y) = 0$ pro každé $y > 0$,

Matematický popis

$z(x, y)$ ... teplota (funkce dvou proměnných),

podmínka: $z(-1, y) = z(1, y) = 0$ pro každé $y > 0$,

$z(x, 0) = f(x)$ ... známá teplota dolního okraje (funkce jedné proměnné).

Matematický popis

$z(x, y)$ ... teplota (funkce dvou proměnných),

podmínka: $z(-1, y) = z(1, y) = 0$ pro každé $y > 0$,

$z(x, 0) = f(x)$ ... známá teplota dolního okraje (funkce jedné proměnné).

První a nejdůležitější případ: $z(x, 0) = f(x) = 1$.

Matematický popis

$z(x, y)$ ... teplota (funkce dvou proměnných),

podmínka: $z(-1, y) = z(1, y) = 0$ pro každé $y > 0$,

$z(x, 0) = f(x)$ ... známá teplota dolního okraje (funkce jedné proměnné).

První a nejdůležitější případ: $z(x, 0) = f(x) = 1$.

Úkol: nalézt stabilní řešení splňující podmínky.

První potíž: co se děje v bodě $[-1, 0]$ (bod nespojitosti)?

První potíž: co se děje v bodě $[-1, 0]$ (bod nespojitosti)?

Fourier nicméně našel řešení.

První potíž: co se děje v bodě $[-1, 0]$ (bod nespojitosti)?

Fourier nicméně našel řešení.

Studoval funkce, které klesnou k nule na okolí bodu $[-1, 0]$.

Fourierovo první pozorování

Fourierovo první pozorování

Tvrzení:

Fourierovo první pozorování

Tvrzení: Nechť

$$f(x) = a_1 \cos(\frac{\pi x}{2}) + a_2 \cos(\frac{3\pi x}{2}) + \cdots + a_n \cos(\frac{(2n-1)\pi x}{2}).$$

Fourierovo první pozorování

Tvrzení: Nechť

$$f(x) = a_1 \cos(\frac{\pi x}{2}) + a_2 \cos(\frac{3\pi x}{2}) + \cdots + a_n \cos(\frac{(2n-1)\pi x}{2}).$$

Potom

$$z(x, w) = a_1 e^{-\pi w/2} \cos(\frac{\pi x}{2}) + \cdots + a_n e^{-(2n-1)\pi w/2} \cos(\frac{\pi x}{2})$$

Fourierovo první pozorování

Tvrzení: Nechť

$$f(x) = a_1 \cos(\frac{\pi x}{2}) + a_2 \cos(\frac{3\pi x}{2}) + \cdots + a_n \cos(\frac{(2n-1)\pi x}{2}).$$

Potom

$$z(x, w) = a_1 e^{-\pi w/2} \cos(\frac{\pi x}{2}) + \cdots + a_n e^{-(2n-1)\pi w/2} \cos(\frac{\pi x}{2})$$

(exponenciála, kosinus, řada funkcí, číslo π).

Šíření tepla v pásku

Šíření tepla v pásku

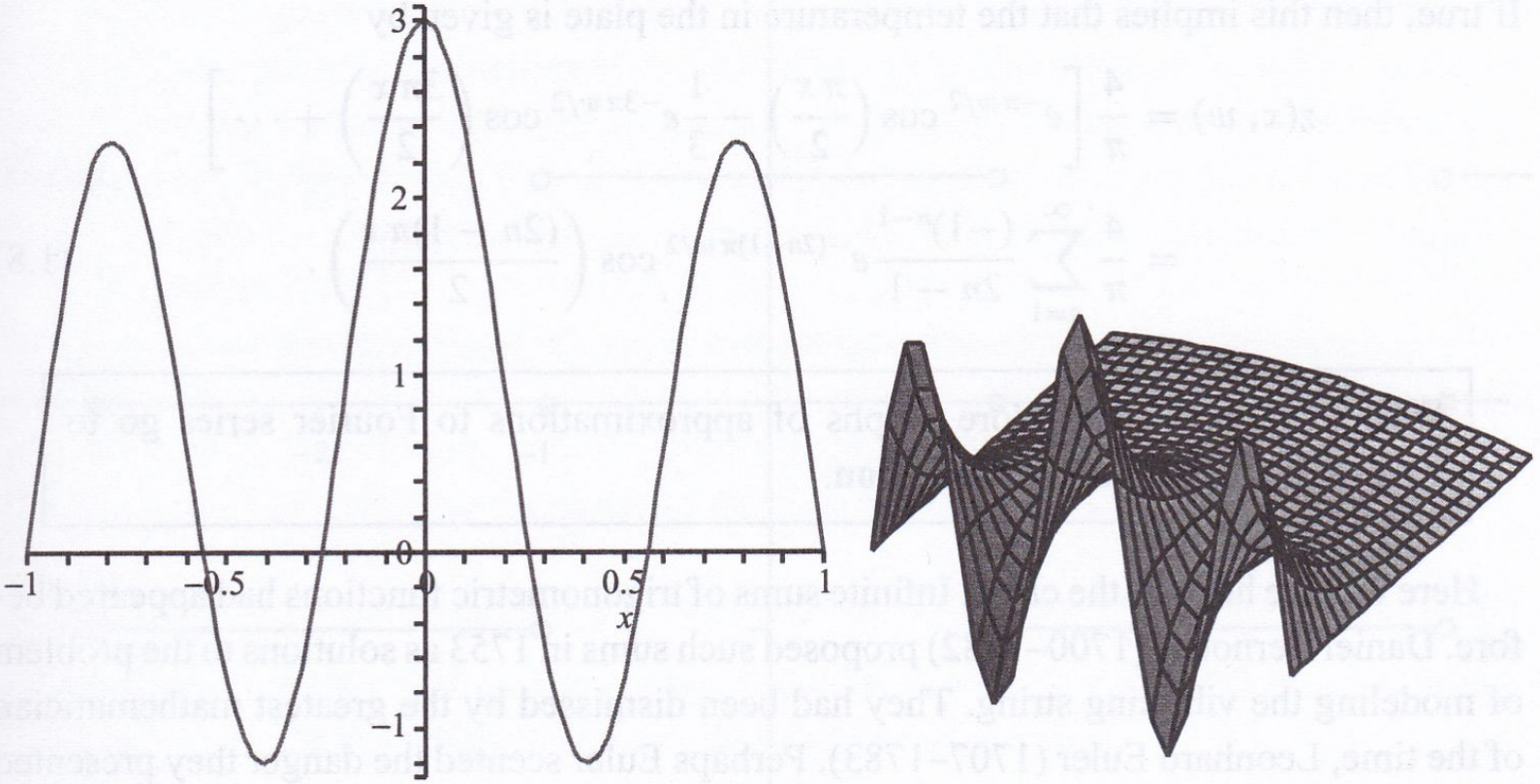


FIGURE 1.2. The functions $f(x)$ and $z(x, w)$.

Druhá potíž: řešení dostaneme pouze za předpokladu, že f je uvedeného tvaru.

Druhá potíž: řešení dostaneme pouze za předpokladu, že f je uvedeného tvaru.

To vylučuje $f = 1$.

Druhá potíž: řešení dostaneme pouze za předpokladu, že f je uvedeného tvaru.

To vylučuje $f = 1$.

Idea:

Druhá potíž: řešení dostaneme pouze za předpokladu, že f je uvedeného tvaru.

To vylučuje $f = 1$.

Idea: co když těch funkcí vezmeme nekonečně mnoho?

Fourierův odvážný krok

Fourierův odvážný krok

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{4}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{3}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{5}\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) - \dots\right] \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Fourierův odvážný krok

$$1 = \frac{4}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{3}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{5}\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) - \dots\right]$$
$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right).$$

Je-li toto pravda, potom

$$z(x,w) = \frac{4}{\pi}\left[e^{-\pi w/2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{3}e^{-3\pi w/2}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \dots\right]$$
$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}e^{-(2n-1)\pi w/2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$$

Fourierův odvážný krok

$$1 = \frac{4}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{3}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{5}\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) - \dots\right]$$
$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right).$$

Je-li toto pravda, potom

$$z(x,w) = \frac{4}{\pi}\left[e^{-\pi w/2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{3}e^{-3\pi w/2}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \dots\right]$$
$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}e^{-(2n-1)\pi w/2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$$

(nekonečná řada funkcí).

Fourierova drzá funkce

Fourierova drzá funkce

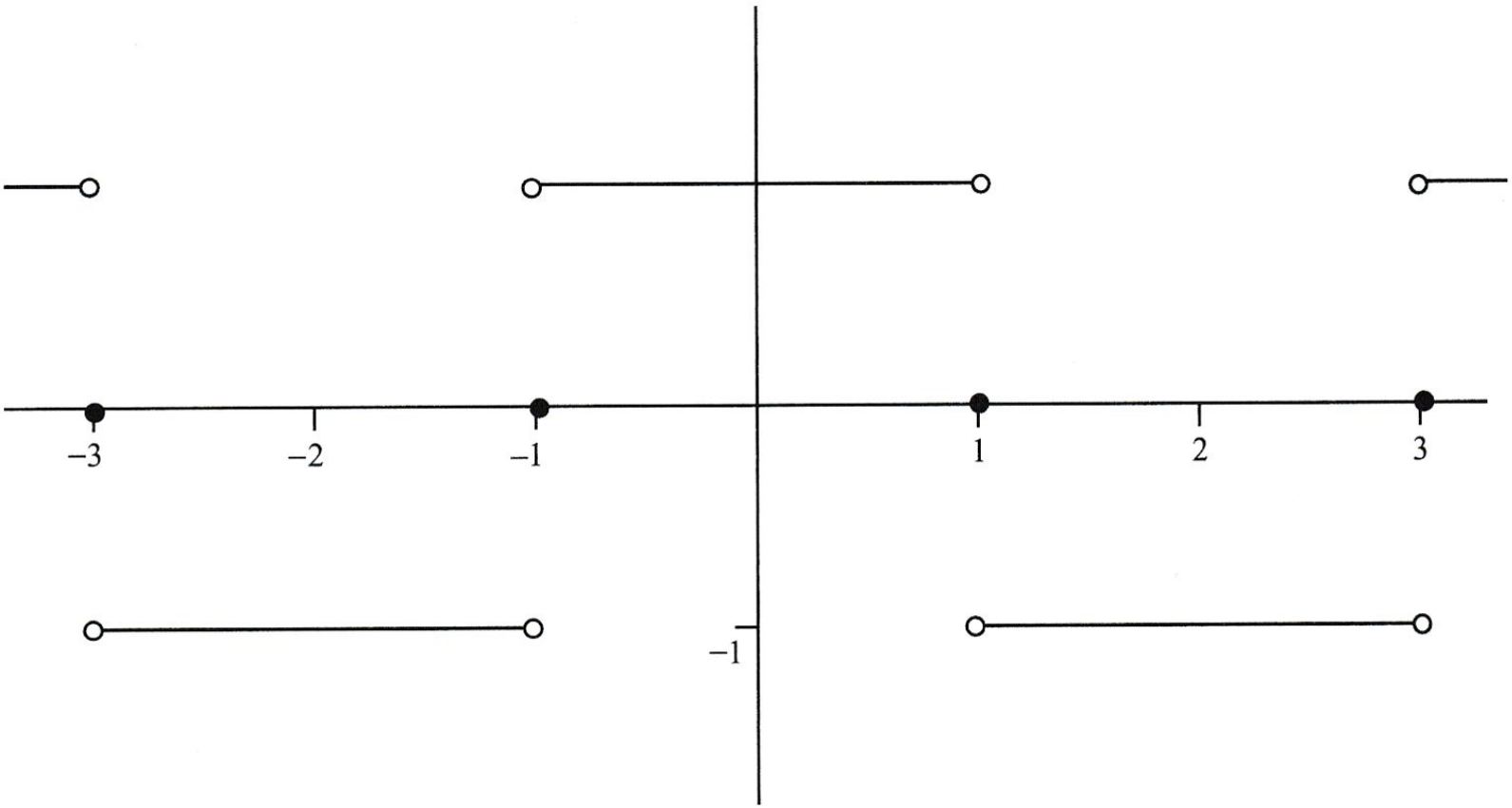


FIGURE 1.3. $f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{2} + \cdots\right].$

Slavná komis

Slavná komis

Fourierův rukopis měla posoudit komise:

Slavná komis

Fourierův rukopis měla posoudit komise:

- Pierre Simon Laplace (58)

Slavná komis

Fourierův rukopis měla posoudit komise:

- Pierre Simon Laplace (58)
- Joseph Louis Lagrange (73)

Slavná komis

Fourierův rukopis měla posoudit komise:

- Pierre Simon Laplace (58)
- Joseph Louis Lagrange (73)
- Sylvestre Francois Lacroix (42)

Slavná komis

Fourierův rukopis měla posoudit komise:

- Pierre Simon Laplace (58)
- Joseph Louis Lagrange (73)
- Sylvestre Francois Lacroix (42)
- Gaspard Monge (61)

Slavná komis

Fourierův rukopis měla posoudit komise:

- Pierre Simon Laplace (58)
- Joseph Louis Lagrange (73)
- Sylvestre Francois Lacroix (42)
- Gaspard Monge (61)
- Siméon Denis Poisson (26)

Lagrangeův útok

Lagrangeův útok

Lagrange byl přesvědčen, že Fourierova interpretace je chybná.

Lagrangeův útok

Lagrange byl přesvědčen, že Fourierova interpretace je chybná.

Na co to svést?

Lagrangeův útok

Lagrange byl přesvědčen, že Fourierova interpretace je chybná.

Na co to svést?

Nabízela se konvergence.

Lagrangeův útok

Lagrange byl přesvědčen, že Fourierova interpretace je chybná.

Na co to svést?

Nabízela se konvergence.

Chyba bude v konvergenci.

Lagrangeův útok

Lagrange byl přesvědčen, že Fourierova interpretace je chybná.

Na co to svést?

Nabízela se konvergence.

Chyba bude v konvergenci.

Nebude to konvergovat.

Lagrangeův útok

Lagrange byl přesvědčen, že Fourierova interpretace je chybná.

Na co to svést?

Nabízela se konvergence.

Chyba bude v konvergenci.

Nebude to konvergovat.

Lagrangeova argumentace: výraz definující f není definován pro všechna x, neboť řada absolutních hodnot koeficientů

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

diverguje.

Šance pro batole

Šance pro batole

Fourier tvrdil, že jeho řada konverguje všude.

Šance pro batole

Fourier tvrdil, že jeho řada konverguje všude.

V roce 1829 se ukázalo, že měl pravdu (Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805–1859).

Nic nového

Nic nového

Na jaře 1808 sepsal Siméon Denis Poisson zprávu komise o Fourierově *Teorii šíření tepla v tuhých tělesech*.

Nic nového

Na jaře 1808 sepsal Siméon Denis Poisson zprávu komise o Fourierově *Teorii šíření tepla v tuhých tělesech*.

Závěr: práce neobsahuje nic nového ani zajímavého.

Otázka šíření tepla

Otázka šíření tepla

1811 vyhlásil Francouzský institut cenu za nejlepší popis šíření tepla.

Otázka šíření tepla

1811 vyhlásil Francouzský institut cenu za nejlepší popis šíření tepla.

Cenu získal Fourier navzdory Lagrangeovým námitkám.

Otázka šíření tepla

1811 vyhlásil Francouzský institut cenu za nejlepší popis šíření tepla.

Cenu získal Fourier navzdory Lagrangeovým námitkám.

Lagrange alespoň zdržel publikaci.

Otázka šíření tepla

1811 vyhlásil Francouzský institut cenu za nejlepší popis šíření tepla.

Cenu získal Fourier navzdory Lagrangeovým námitkám.

Lagrange alespoň zdržel publikaci.

1813 Lagrange zemřel, ale Fourierův rukopis stále trčel v Institutu.

Další vývoj

Další vývoj

Po druhém Napoleonově pádu se Fourier vrátil do Paříže jako ředitel Statistického úřadu, pobočka pro Seinu.

Další vývoj

Po druhém Napoleonově pádu se Fourier vrátil do Paříže jako ředitel Statistického úřadu, pobočka pro Seinu.

1822 byl jmenován doživotním tajemníkem Akademie věd.

Další vývoj

Po druhém Napoleonově pádu se Fourier vrátil do Paříže jako ředitel Statistického úřadu, pobočka pro Seinu.

1822 byl jmenován doživotním tajemníkem Akademie věd.

Mladí matematikové, kterým díky této posici pomohl, byli například

Další vývoj

Po druhém Napoleonově pádu se Fourier vrátil do Paříže jako ředitel Statistického úřadu, pobočka pro Seinu.

1822 byl jmenován doživotním tajemníkem Akademie věd.

Mladí matematikové, kterým díky této posici pomohl, byli například

- Gustav Dirichlet,

Další vývoj

Po druhém Napoleonově pádu se Fourier vrátil do Paříže jako ředitel Statistického úřadu, pobočka pro Seinu.

1822 byl jmenován doživotním tajemníkem Akademie věd.

Mladí matematikové, kterým díky této posici pomohl, byli například

- Gustav Dirichlet,
- Sophie Germain,

Další vývoj

Po druhém Napoleonově pádu se Fourier vrátil do Paříže jako ředitel Statistického úřadu, pobočka pro Seinu.

1822 byl jmenován doživotním tajemníkem Akademie věd.

Mladí matematikové, kterým díky této posici pomohl, byli například

- Gustav Dirichlet,
- Sophie Germain,
- Joseph Liouville,

Další vývoj

Po druhém Napoleonově pádu se Fourier vrátil do Paříže jako ředitel Statistického úřadu, pobočka pro Seinu.

1822 byl jmenován doživotním tajemníkem Akademie věd.

Mladí matematikové, kterým díky této posici pomohl, byli například

- Gustav Dirichlet,
- Sophie Germain,
- Joseph Liouville,
- Claude Navier,

Další vývoj

Po druhém Napoleonově pádu se Fourier vrátil do Paříže jako ředitel Statistického úřadu, pobočka pro Seinu.

1822 byl jmenován doživotním tajemníkem Akademie věd.

Mladí matematikové, kterým díky této posici pomohl, byli například

- Gustav Dirichlet,
- Sophie Germain,
- Joseph Liouville,
- Claude Navier,
- Charles Sturm.

Otázka konvergence Fourierových řad

Otázka konvergence Fourierových řad

1820 Poissonův článek - úvahy kruhem

Otázka konvergence Fourierových řad

1820 Poissonův článek - úvahy kruhem

1822 Fourierova kniha - pokusy o důkaz, náznaky

Otázka konvergence Fourierových řad

1820 Poissonův článek - úvahy kruhem

1822 Fourierova kniha - pokusy o důkaz, náznaky

1826 Cauchyovo řešení, ale s chybami

Otázka konvergence Fourierových řad

1820 Poissonův článek - úvahy kruhem

1822 Fourierova kniha - pokusy o důkaz, náznaky

1826 Cauchyovo řešení, ale s chybami

1829 Dirichletův článek "Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à representer une fonction arbitraire entre des limites données" (první rigorózní důkaz konvergence Fourierových řad).

Proč?

Proč?

Kontorversi započal Jean Le Rond (1717–1783).

Proč?

Kontorversi započal Jean Le Rond (1717–1783).

Později připojil "d'Alembert et de la Chapelle'".

Proč?

Kontorversi započal Jean Le Rond (1717–1783).

Později připojil "d'Alembert et de la Chapelle'".

Srovnej James Joseph

Proč?

Kontorversi započal Jean Le Rond (1717–1783).

Později připojil "d'Alembert et de la Chapelle'".

Srovnej James Joseph Sylvester.

Kontroverse kolem struny

Kontroverse kolem struny

d'Alembert publikoval 1747 rovnici vibrující struny

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

kde

Kontroverse kolem struny

d'Alembert publikoval 1747 rovnici vibrující struny

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

kde

- y je výchylka vibrující struny nad posicí x,

Kontroverse kolem struny

d'Alembert publikoval 1747 rovnici vibrující struny

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

kde

- y je výchylka vibrující struny nad posicí x,
- c je konstanta závisející na délce, napětí a hmotnosti struny,

Kontroverse kolem struny

d'Alembert publikoval 1747 rovnici vibrující struny

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

kde

- y je výchylka vibrující struny nad posicí x,
- c je konstanta závisející na délce, napětí a hmotnosti struny,
- t je čas.

Kontroverse kolem struny

d'Alembert publikoval 1747 rovnici vibrující struny

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

kde

- y je výchylka vibrující struny nad posicí x,
- c je konstanta závisející na délce, napětí a hmotnosti struny,
- t je čas.

K řešení potřebujeme okrajové podmínky, například $y(0,t) = y(\ell,t) = 0$ a potřebujeme znát počáteční stav $y(x,0)$.

Kontroverse kolem struny

d'Alembert publikoval 1747 rovnici vibrující struny

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

kde

- y je výchylka vibrující struny nad posicí x,
- c je konstanta závisející na délce, napětí a hmotnosti struny,
- t je čas.

K řešení potřebujeme okrajové podmínky, například $y(0,t) = y(\ell,t) = 0$ a potřebujeme znát počáteční stav $y(x,0)$.

Výsledek: jestliže lze $y(x,0)$ popsat lineární kombinací funkcí tvaru $\sin(\frac{k\pi x}{\ell})$, pak řešení bude tvaru

$$y(x,t) = 3\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\cos\left(\frac{\pi ct}{\ell}\right) - 2\sin\left(\frac{3\pi x}{\ell}\right)\cos\left(\frac{3\pi ct}{\ell}\right) + \dots$$

Nekonečně mnoho harmonik?

Nekonečně mnoho harmonik?

Na d'Alemberta navázal Daniel Bernoulli (1753), který navrhl, že by vibrující struna mohla mít nekonečně mnoho harmonik.

Nekonečně mnoho harmonik?

Na d'Alemberta navázal Daniel Bernoulli (1753), který navrhl, že by vibrující struna mohla mít nekonečně mnoho harmonik.

Tuto možnost zavrhl Leonhard Euler s odůvodněním, že řešení by nutně muselo být periodické.

Kam až sahá kontroverse?

Kam až sahá kontroverse?

1734 George Berkeley: *The Analyst* (abuse of infinity, compensating errors, . . .)

Kam až sahá kontroverse?

1734 George Berkeley: *The Analyst* (abuse of infinity, compensating errors, . . .)

1754 d'Alembert: *différentiel* (článek pro Diderotovu *Encyclopédie*)

Kam až sahá kontroverse?

1734 George Berkeley: *The Analyst* (abuse of infinity, compensating errors, . . .)

1754 d'Alembert: *différentiel* (článek pro Diderotovu *Encyclopédie*)

1784 Berlínská Akademie vypisuje cenu za *jasnou a precisní teorii nekonečna v matematice*

Kam až sahá kontroverse?

1734 George Berkeley: *The Analyst* (abuse of infinity, compensating errors, . . .)

1754 d'Alembert: *différentiel* (článek pro Diderotovu *Encyclopédie*)

1784 Berlínská Akademie vypisuje cenu za *jasnou a precisní teorii nekonečna v matematice*

Simon Antoine Jean L'Huillier (1750–1840)

Sčítání nekonečně mnoha výrazů

Sčítání nekonečně mnoha výrazů

"Infinite summation" je oxymoron.

Sčítání nekonečně mnoha výrazů

"Infinite summation" je oxymoron.

"Infinite" znamená "bez konce".

Sčítání nekonečně mnoha výrazů

"Infinite summation" je oxymoron.

"Infinite" znamená "bez konce".

"Summation" znamená "dosáhnout uzávěru, dosáhnout nejvyššího bodu", ... ("summit" apod.)

Archimédovské chápání

Archimédovské chápání

Kvadratura paraboly, kterou provedl Archimédés ze Syrakus (287-212) metodou Eudoxa z Knidu (408-355).

Archimédovské chápání

Kvadratura paraboly, kterou provedl Archimédés ze Syrakus (287-212) metodou Eudoxa z Knidu (408-355).

Metoda vyčerpávání (method of exhaustion).

Archimédovské chápání

Kvadratura paraboly, kterou provedl Archimédés ze Syrakus (287-212) metodou Eudoxa z Knidu (408-355).

Metoda vyčerpávání (method of exhaustion).

E.J. Dijksterhuis (1892–1965): nejhorší název na světě.

Archimédovy trojúhelníky

Archimédovy trojúhelníky

První trojúhelník má plochu 1.

Archimédovy trojúhelníky

První trojúhelník má plochu 1. Každá další generace trojúhelníků má čtvrtinovou plochu předcházející generace.

Archimédovy trojúhelníky

První trojúhelník má plochu 1. Každá další generace trojúhelníků má čtvrtinovou plochu předcházející generace. Postupné aproximace celkové plochy:

$$1,\ 1+\frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16},\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64},\ \ldots$$

Archimédovy trojúhelníky

První trojúhelník má plochu 1. Každá další generace trojúhelníků má čtvrtinovou plochu předcházející generace. Postupné aproximace celkové plochy:

$$1,\ 1+\frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16},\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64},\ \dots$$

Tedy v n-té generaci máme

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{4^n}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot 4^n} \tag{1}$$

Archimédovy trojúhelníky

První trojúhelník má plochu 1. Každá další generace trojúhelníků má čtvrtinovou plochu předcházející generace. Postupné aproximace celkové plochy:

$$1,\ 1+\frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16},\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64},\ \dots$$

Tedy v n-té generaci máme

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{4^n}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot 4^n} \tag{1}$$

Dnešní přístup:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}.$$

Archimédovy trojúhelníky

První trojúhelník má plochu 1. Každá další generace trojúhelníků má čtvrtinovou plochu předcházející generace. Postupné aproximace celkové plochy:

$$1,\ 1+\frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16},\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64},\ \dots$$

Tedy v n-té generaci máme

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{4^n}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot 4^n} \tag{1}$$

Dnešní přístup:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}.$$

Přesně to Archimédés *neudělal*.

Archimédův přístup

Archimédův přístup

Označme K "plochu".

Archimédův přístup

Označme K "plochu".

Předpokládejme, že $K > \frac{4}{3}$.

Archimédův přístup

Označme K "plochu".

Předpokládejme, že $K > \frac{4}{3}$. Nalezneme n takové, že po n-té generaci dosáhneme plochy $> \frac{4}{3}$.

Archimédův přístup

Označme K "plochu".

Předpokládejme, že $K > \frac{4}{3}$. Nalezneme n takové, že po n-té generaci dosáhneme plochy $> \frac{4}{3}$. Spor s (1).

Archimédův přístup

Označme K "plochu".

Předpokládejme, že $K > \frac{4}{3}$. Nalezneme n takové, že po n-té generaci dosáhneme plochy $> \frac{4}{3}$. Spor s (1).

Nyní předpokládejme, že $K < \frac{4}{3}$.

Archimédův přístup

Označme K "plochu".

Předpokládejme, že $K > \frac{4}{3}$. Nalezneme n takové, že po n-té generaci dosáhneme plochy $> \frac{4}{3}$. Spor s (1).

Nyní předpokládejme, že $K < \frac{4}{3}$. Nalezneme n takové, že $\frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n} > K$.

Archimédův přístup

Označme K "plochu".

Předpokládejme, že $K > \frac{4}{3}$. Nalezneme n takové, že po n-té generaci dosáhneme plochy $> \frac{4}{3}$. Spor s (1).

Nyní předpokládejme, že $K < \frac{4}{3}$. Nalezneme n takové, že $\frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n} > K$. Spor s tím, že celková plocha nemůže být větší, než plocha vepsaných trojúhelníků.

Co je to nekonečný součet?

Co je to nekonečný součet?

Můžeme například *axiomatisovat* vzorec

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \text{pro každé } x \neq 1.$$

Co je to nekonečný součet?

Můžeme například *axiomatisovat* vzorec

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \text{pro každé } x \neq 1.$$

Tuto definici přijali (mimo jiné): Grandi (1703), Leibniz (1711), Euler (1754).

Ohlasy

Ohlasy

Ivor Grattan-Guiness (1941–2014): *Convolutions in French Mathematics 1800–1840*:
Moderní pohled na kavalírský přístup matematiků 18. století k nekonečným sumám vzbuzuje dojem, že tito nebozí mužové odkládali své mozky jsouce s nimi konfrontováni ...

Ohlasy

Ivor Grattan-Guiness (1941–2014): *Convolutions in French Mathematics 1800–1840*:
Moderní pohled na kavalírský přístup matematiků 18. století k nekonečným sumám vzbuzuje dojem, že tito nebozí mužové odkládali své mozky jsouce s nimi konfrontováni ...

Eli Maor (*1937):
Takové lehkomyslné a drzé úvahy se nám dnes jeví jako zcela neuvěřitelné.

Ohlasy

Ivor Grattan-Guiness (1941–2014): *Convolutions in French Mathematics 1800–1840*:
Moderní pohled na kavalírský přístup matematiků 18. století k nekonečným sumám vzbuzuje dojem, že tito nebozí mužové odkládali své mozky jsouce s nimi konfrontováni ...

Eli Maor (*1937):
Takové lehkomyslné a drzé úvahy se nám dnes jeví jako zcela neuvěřitelné.

Morris Kline (1908–1992):
Leibniz uznával, že jeho argumentace je spíše metafyzické než matematické povahy, zároveň však tvrdil, že v matematické analýze existuje více metafyzické pravdy než by se zdálo.

Cauchyův přístup

Cauchyův přístup

1821: Augustin Louis Cauchy ("Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique")

Cauchyův přístup

1821: Augustin Louis Cauchy ("Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique")

Jedno z hlavních témat: nekonečné řady.

Cauchyův přístup

1821: Augustin Louis Cauchy ("Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique")

Jedno z hlavních témat: nekonečné řady.

V úvodu vyzdvihuje geometrickou intuici a varuje před "algebraickými technikami".

Příklad algebraické techniky

Příklad algebraické techniky

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 - x + x - x^2 + x^2 = x^3 + x^3 + \dots \\
&= (1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \dots
\end{aligned}
$$

a tedy

$$
\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots
$$

Příklad algebraické techniky

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 - x + x - x^2 + x^2 = x^3 + x^3 + \dots \\
&= (1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \dots
\end{aligned}
$$

a tedy

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Cauchy:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 - x + x - x^2 + x^2 = x^3 + x^3 \cdots - x^n + x^n \\
&= (1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \cdots - x^n(1-x) + x^n,
\end{aligned}
$$

a tedy

$$\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Kontroverse ale sahá mnohem dál

Kontroverse ale sahá mnohem dál

Zenon: jakýkoli pohyb je pouhou ilusí.

Kontroverse ale sahá mnohem dál

Zenon: jakýkoli pohyb je pouhou ilusí.

Jak z toho ven? Návrhy moudrých:

Jak z toho ven? Návrhy moudrých:

- *Díogenés ze Sinópé*: neřekl nic a vydal se na vycházku;

Jak z toho ven? Návrhy moudrých:

- *Díogenés ze Sinópé*: neřekl nic a vydal se na vycházku;
- *Aristotelés*: čas není sledem nedělitelných okamžiků;

Jak z toho ven? Návrhy moudrých:

- *Díogenés ze Sinópé*: neřekl nic a vydal se na vycházku;
- *Aristotelés*: čas není sledem nedělitelných okamžiků;
- *Archimédés*: metoda vyčerpávání a geometrická řada;

Jak z toho ven? Návrhy moudrých:

- *Díogenés ze Sinópé*: neřekl nic a vydal se na vycházku;
- *Aristotelés*: čas není sledem nedělitelných okamžiků;
- *Archimédés*: metoda vyčerpávání a geometrická řada;
- *Tomáš Akvinský*: věc je v pohybu v čase, ale nikoli v každém okamžiku;

Jak z toho ven? Návrhy moudrých:

- *Díogenés ze Sinópé*: neřekl nic a vydal se na vycházku;
- *Aristotelés*: čas není sledem nedělitelných okamžiků;
- *Archimédés*: metoda vyčerpávání a geometrická řada;
- *Tomáš Akvinský*: věc je v pohybu v čase, ale nikoli v každém okamžiku;
- *Henri Bergson*: dráha je dělitelná, ale pohyb nikoli;

Jak z toho ven? Návrhy moudrých:

- *Díogenés ze Sinópé*: neřekl nic a vydal se na vycházku;
- *Aristotelés*: čas není sledem nedělitelných okamžiků;
- *Archimédés*: metoda vyčerpávání a geometrická řada;
- *Tomáš Akvinský*: věc je v pohybu v čase, ale nikoli v každém okamžiku;
- *Henri Bergson*: dráha je dělitelná, ale pohyb nikoli;
- *Hermann Weyl*: prostor není diskrétní (dlaždičkový argument);

Jak z toho ven? Návrhy moudrých:

- *Díogenés ze Sinópé*: neřekl nic a vydal se na vycházku;
- *Aristotelés*: čas není sledem nedělitelných okamžiků;
- *Archimédés*: metoda vyčerpávání a geometrická řada;
- *Tomáš Akvinský*: věc je v pohybu v čase, ale nikoli v každém okamžiku;
- *Henri Bergson*: dráha je dělitelná, ale pohyb nikoli;
- *Hermann Weyl*: prostor není diskrétní (dlaždičkový argument);
- *Bertrand Russell*: pohyb je jen změna polohy v čase, pohyb v okamžiku neexistuje;

Jak z toho ven? Návrhy moudrých:

- *Díogenés ze Sinópé*: neřekl nic a vydal se na vycházku;
- *Aristotelés*: čas není sledem nedělitelných okamžiků;
- *Archimédés*: metoda vyčerpávání a geometrická řada;
- *Tomáš Akvinský*: věc je v pohybu v čase, ale nikoli v každém okamžiku;
- *Henri Bergson*: dráha je dělitelná, ale pohyb nikoli;
- *Hermann Weyl*: prostor není diskrétní (dlaždičkový argument);
- *Bertrand Russell*: pohyb je jen změna polohy v čase, pohyb v okamžiku neexistuje;
- *Nick Huggett*: chyba je v tom, že Zenon předpokládá uzávěr;

Jak z toho ven? Návrhy moudrých:

- *Díogenés ze Sinópé*: neřekl nic a vydal se na vycházku;
- *Aristotelés*: čas není sledem nedělitelných okamžiků;
- *Archimédés*: metoda vyčerpávání a geometrická řada;
- *Tomáš Akvinský*: věc je v pohybu v čase, ale nikoli v každém okamžiku;
- *Henri Bergson*: dráha je dělitelná, ale pohyb nikoli;
- *Hermann Weyl*: prostor není diskrétní (dlaždičkový argument);
- *Bertrand Russell*: pohyb je jen změna polohy v čase, pohyb v okamžiku neexistuje;
- *Nick Huggett*: chyba je v tom, že Zenon předpokládá uzávěr;
- *Peter Lynds*: polohu pohybujícího se tělesa nelze přesně určit.

Achilles a želva

Achilles a želva

Závod na 100m, želva má 10m náskok, Achilles běží desetkrát rychleji.

Achilles a želva

Závod na 100m, želva má 10m náskok, Achilles běží desetkrát rychleji. Náskok želvy:

$$10,\ 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \ldots$$

Achilles a želva

Závod na 100m, želva má 10m náskok, Achilles běží desetkrát rychleji. Náskok želvy:

$$10,\ 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \dots$$

Posuďme výpočet

$$S = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \dots$$
$$10S = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \dots$$

Achilles a želva

Závod na 100m, želva má 10m náskok, Achilles běží desetkrát rychleji. Náskok želvy:

$$10,\ 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \dots$$

Posuďme výpočet

$$S = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \dots$$
$$10S = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \dots$$

Tedy $10S - S = 100$, takže $S = 11\frac{1}{9}$ metru.

Achilles a želva

Závod na 100m, želva má 10m náskok, Achilles běží desetkrát rychleji. Náskok želvy:

$$10,\ 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \dots$$

Posuďme výpočet

$$S = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \dots$$
$$10S = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \dots$$

Tedy $10S - S = 100$, takže $S = 11\frac{1}{9}$ metru.

Je-li výpočet legální, pak Achilles dožene želvu, a dokonce víme, kde.

Ilegální krocení nekonečna

Ilegální krocení nekonečna

Uvažme *Grandiho řadu*

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots$$

Ilegální krocení nekonečna

Uvažme *Grandiho řadu*

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots$$

Potom

$$-S = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots,$$

Ilegální krocení nekonečna

Uvažme *Grandiho řadu*

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots$$

Potom

$$-S = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots,$$

tedy

$$S = 1 - S \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2}.$$

Ilegální krocení nekonečna

Uvažme *Grandiho řadu*

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots$$

Potom

$$-S = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots,$$

tedy

$$S = 1 - S \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2}.$$

A nebo taky

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) \cdots = 0,$$

Ilegální krocení nekonečna

Uvažme *Grandiho řadu*

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots$$

Potom

$$-S = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots,$$

tedy

$$S = 1 - S \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2}.$$

A nebo taky

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) \cdots = 0,$$

případně

$$S = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) \cdots = 1.$$

Co z toho je správně?

Ilegální krocení nekonečna

Uvažme *Grandiho řadu*

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots$$

Potom

$$-S = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots,$$

tedy

$$S = 1 - S \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2}.$$

A nebo taky

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) \cdots = 0,$$

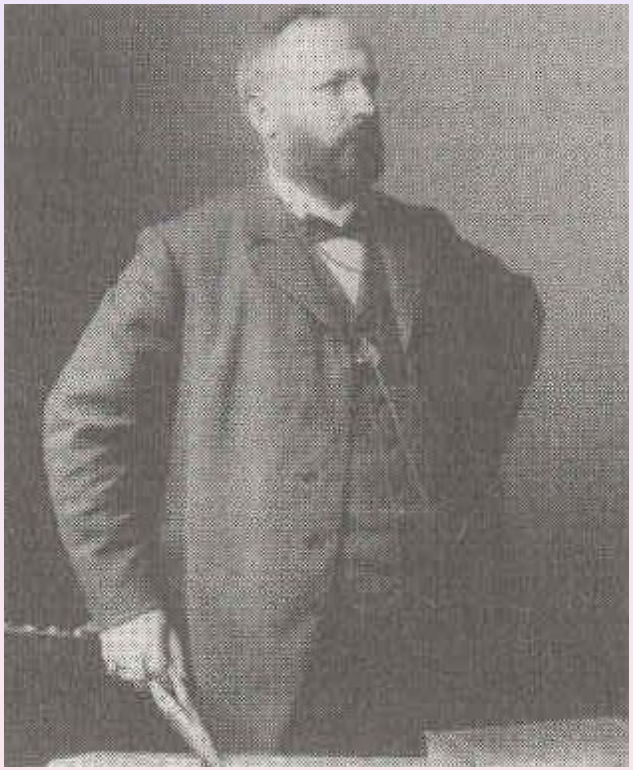
případně

$$S = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) \cdots = 1.$$

Co z toho je správně? A proč jsme na podobné potíže nenarazili u Achilla?

Georg Cantor (1845–1918)

Georg Cantor (1845–1918)



Cantor a nekonečno

Cantor a nekonečno

Cantorův objev: *kardinalita* množiny

Cantor a nekonečno

Cantorův objev: *kardinalita* množiny

U konečných množin je to *počet prvků*.

Cantor a nekonečno

Cantorův objev: *kardinalita* množiny

U konečných množin je to *počet prvků*.

U nekonečných množin . . . ?

Cantor a nekonečno

Cantorův objev: *kardinalita* množiny

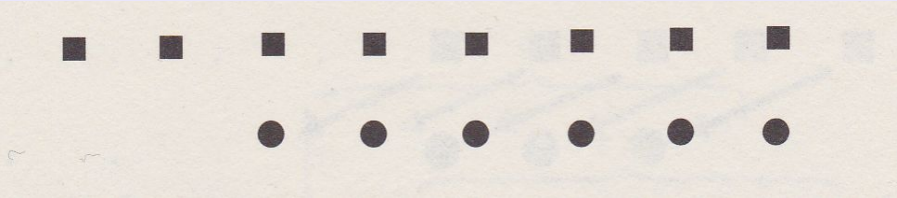
U konečných množin je to *počet prvků*.

U nekonečných množin . . . ?

Dvě množiny jsou *ekvivalentní*, jestliže mezi nimi existuje *bijekce*.

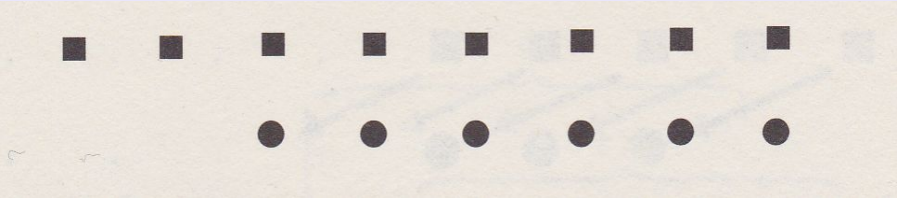
Úskalí práce s nekonečnem

Úskalí práce s nekonečnem

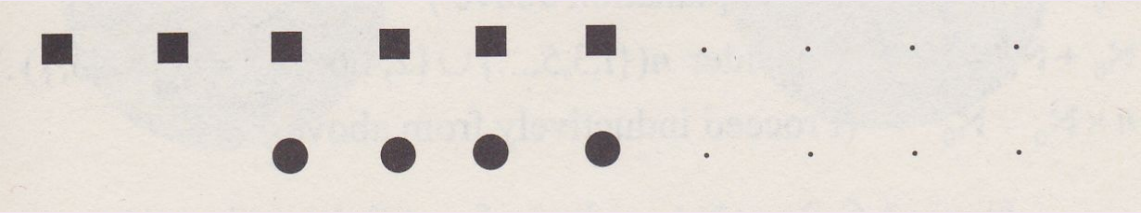


Máme více kostiček než koleček.

Úskalí práce s nekonečnem

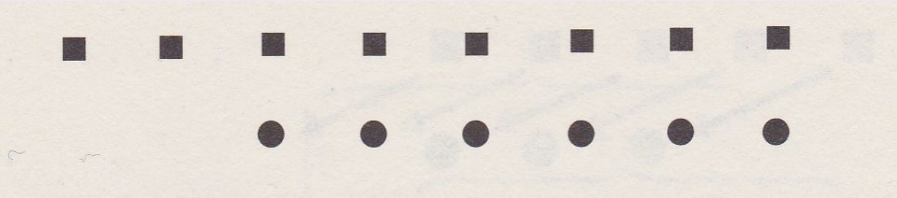


Máme více kostiček než koleček.

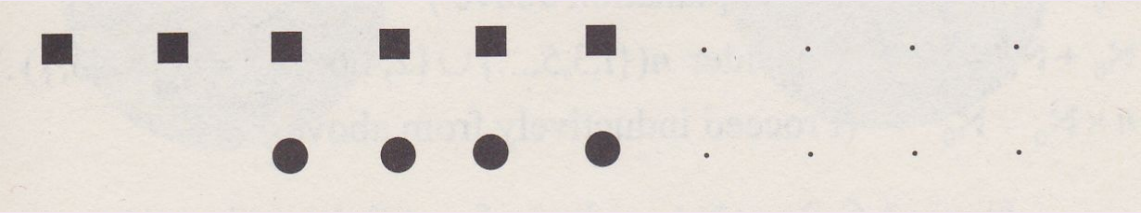


Máme více kostiček než koleček?

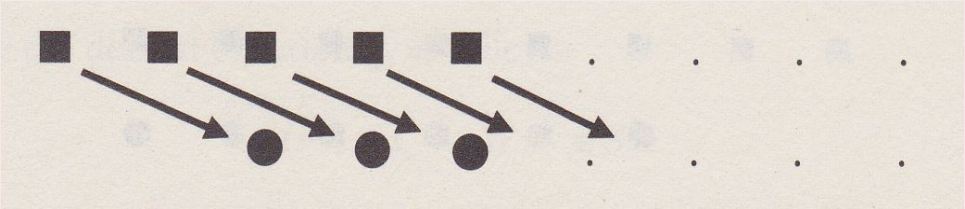
Úskalí práce s nekonečnem



Máme více kostiček než koleček.



Máme více kostiček než koleček?



Nemáme!

První Cantorův šok

První Cantorův šok

Množina může být ekvivalentní své vlastní podmnožině!

První Cantorův šok

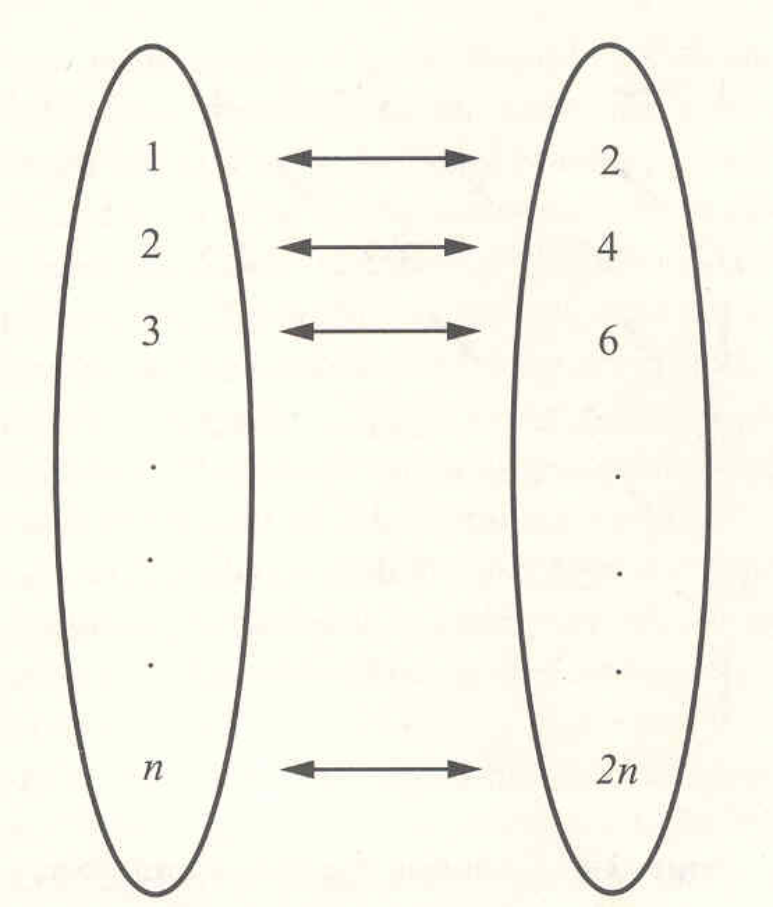
Množina může být ekvivalentní své vlastní podmnožině!

Příklad: přirozená čísla a sudá čísla.

První Cantorův šok

Množina může být ekvivalentní své vlastní podmnožině!

Příklad: přirozená čísla a sudá čísla.



Co je to nekonečná množina?

Co je to nekonečná množina?

DEFINICE (G. Cantor):

Co je to nekonečná množina?

DEFINICE (G. Cantor): Množina je *nekonečná*, pokud existuje prosté zobrazení této množiny na některou její *vlastní* podmnožinu.

Co je to nekonečná množina?

DEFINICE (G. Cantor): Množina je *nekonečná*, pokud existuje prosté zobrazení této množiny na některou její *vlastní* podmnožinu.

DEFINICE (alternativní):

Co je to nekonečná množina?

DEFINICE (G. Cantor): Množina je *nekonečná*, pokud existuje prosté zobrazení této množiny na některou její *vlastní* podmnožinu.

DEFINICE (alternativní): Množina je *nekonečná*, pokud existuje prosté zobrazení z $\mathbb{N}$ do této množiny.

Spočetné množiny

Spočetné množiny

Množiny, mající nejvýše tolik prvků jako $\mathbb{N}$, nazýváme **spočetné**.

Druhý Cantorův šok

Druhý Cantorův šok

Racionálních čísel není více, než přirozených!

Druhý Cantorův šok

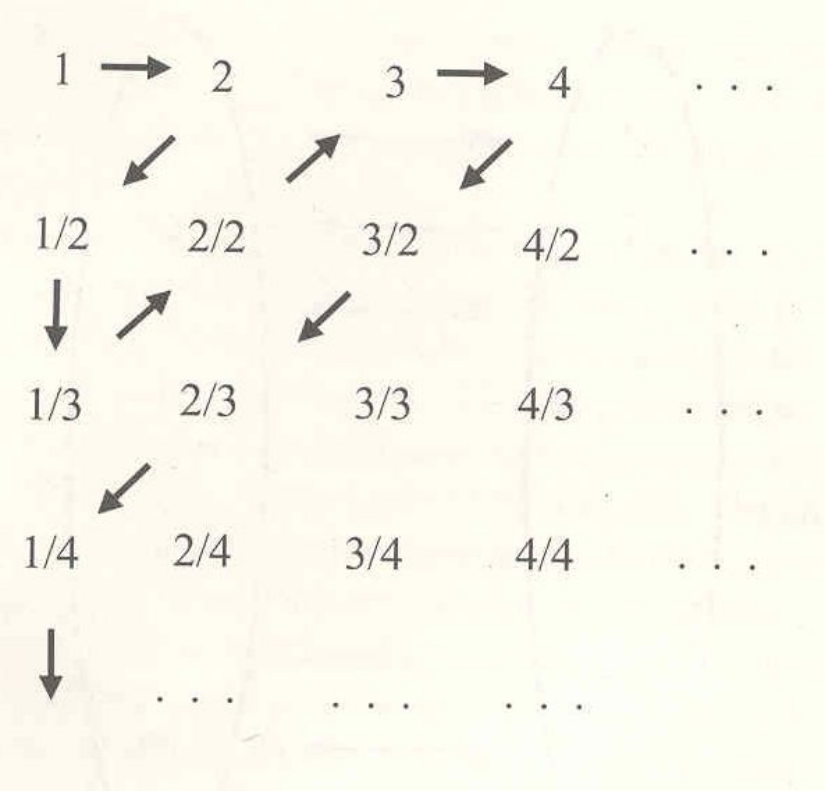
Racionálních čísel není více, než přirozených!

Racionální čísla jsou *spočetná*.

Druhý Cantorův šok

Racionálních čísel není více, než přirozených!

Racionální čísla jsou *spočetná*.



Cantorova věta o potenční množině

Cantorova věta o potenční množině

Pro libovolnou množinu x má její potenční množina $P(x)$, tedy množina obsahující všechny podmnožiny množiny x, větší mohutnost než x.

Třetí Cantorův šok

Třetí Cantorův šok

Reálných čísel je podstatně více než přirozených!

Třetí Cantorův šok

Reálných čísel je podstatně více než přirozených!

Reálná čísla jsou **nespočetná**.

Třetí Cantorův šok

Reálných čísel je podstatně více než přirozených!

Reálná čísla jsou **nespočetná**.

To vyplývá z *diagonalizační metody*, kterou Cantor vyvinul.

Třetí Cantorův šok

Reálných čísel je podstatně více než přirozených!

Reálná čísla jsou **nespočetná**.

To vyplývá z *diagonalizační metody*, kterou Cantor vyvinul.

#1) $.a_1a_2a_3\ldots$

#2) $.b_1b_2b_3\ldots$

#3) $.c_1c_2c_3\ldots$

$\downarrow$

A tedy . . .

A tedy . . .

. . . existuje více druhů nekonečen!

A tedy . . .

. . . existuje více druhů nekonečen!

Cantor dokázal existenci *hierarchie* nekonečen.

A tedy . . .

. . . existuje více druhů nekonečen!

Cantor dokázal existenci *hierarchie* nekonečen.

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$$

A tedy . . .

. . . existuje více druhů nekonečen!

Cantor dokázal existenci *hierarchie* nekonečen.

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$$

Hypotéza kontinua:

$$(c =)2^{\aleph_0} = \aleph_1? \quad (\text{zřejmě platí } \aleph_1 \leq c).$$

A tedy . . .

. . . existuje více druhů nekonečen!

Cantor dokázal existenci *hierarchie* nekonečen.

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$$

Hypotéza kontinua:

$$(c =)2^{\aleph_0} = \aleph_1? \quad (\text{zřejmě platí } \aleph_1 \leq c).$$

Cantor věřil, že ano, ale nedokázal to.

Hypotéza kontinua

Hypotéza kontinua

Formulace: dopis G. Cantora R. Dedekindovi z 5.11.1882.

Hypotéza kontinua

Formulace: dopis G. Cantora R. Dedekindovi z 5.11.1882.

Z dopisu G. Cantora G. Mittagu-Lefflerovi (1884): *. . . "důkaz platnosti hypotézy kontinua Vám pravděpodobně zašlu do 14 dnů . . ."*

Hilbertův seznam

Hilbertův seznam

David Hilbert (Paříž 1900): 23 nejdůležitějších neřešených matematických problémů.

Hilbertův seznam

David Hilbert (Paříž 1900): 23 nejdůležitějších neřešených matematických problémů.

První místo na seznamu: *hypotéza kontinua*.

Semeniště paradoxů

Semeniště paradoxů

Burali-Fortiův paradox (1897): Množina všech ordinálních čísel definuje ordinální číslo větší, než libovolný její prvek. Takže množina všech ordinálních čísel není množina.

Semeniště paradoxů

Burali-Fortiův paradox (1897): Množina všech ordinálních čísel definuje ordinální číslo větší, než libovolný její prvek. Takže množina všech ordinálních čísel není množina.

Cantorův paradox (1899): Nechť S je množina všech množin. Potom $P(S)$ je její podmnožina, takže má nejvýše stejnou mohutnost, jako S.

Semeniště paradoxů

Burali-Fortiův paradox (1897): Množina všech ordinálních čísel definuje ordinální číslo větší, než libovolný její prvek. Takže množina všech ordinálních čísel není množina.

Cantorův paradox (1899): Nechť S je množina všech množin. Potom $P(S)$ je její podmnožina, takže má nejvýše stejnou mohutnost, jako S.

Russellův paradox (1901): Definujeme množinu všech množin, které nejsou samy sobě svým prvkem. Je tato množina svým vlastním prvkem?

Axiomatisace teorie množin - reakce na paradoxy

Axiomatisace teorie množin - reakce na paradoxy

Cantor, Zermelo, Fränkel (1908) (dle Eukleidova vzoru)

Axiomatisace teorie množin - reakce na paradoxy

Cantor, Zermelo, Fränkel (1908) (dle Eukleidova vzoru)

1) axiom existence množiny
2) axiom extenzionality
3) axiom vydělení
4) axiom dvojice
5) axiom sumy
6) axiom potence
7) axiom nahrazení
8) axiom nekonečna
9) axiom výběru

Kongruence

Kongruence

Dva objekty se nazývají **kongruentní**, jestliže lze jeden převést na druhý pomocí **isometrie**.

Kongruence

Dva objekty se nazývají **kongruentní**, jestliže lze jeden převést na druhý pomocí **isometrie**.

Isometrie je rigidní pohyb tělesa zachovávající vzdálenosti mezi body.

Kongruence

Dva objekty se nazývají **kongruentní**, jestliže lze jeden převést na druhý pomocí **isometrie**.

Isometrie je rigidní pohyb tělesa zachovávající vzdálenosti mezi body.

Příklady isometrií:

Kongruence

Dva objekty se nazývají **kongruentní**, jestliže lze jeden převést na druhý pomocí **isometrie**.

Isometrie je rigidní pohyb tělesa zachovávající vzdálenosti mezi body.

Příklady isometrií:

- posun,

Kongruence

Dva objekty se nazývají **kongruentní**, jestliže lze jeden převést na druhý pomocí **isometrie**.

Isometrie je rigidní pohyb tělesa zachovávající vzdálenosti mezi body.

Příklady isometrií:

- posun,
- rotace,

Kongruence

Dva objekty se nazývají **kongruentní**, jestliže lze jeden převést na druhý pomocí **isometrie**.

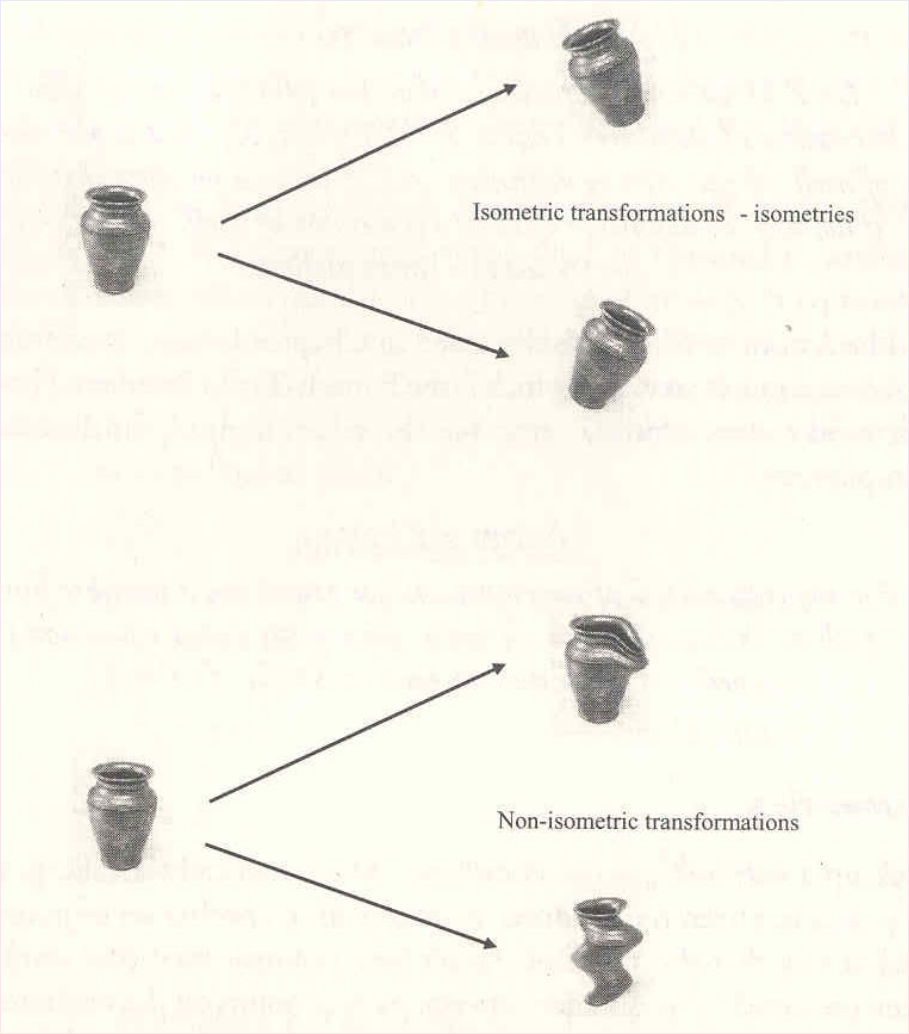
Isometrie je rigidní pohyb tělesa zachovávající vzdálenosti mezi body.

Příklady isometrií:

- posun,
- rotace,
- zrcadlení.

Kongruence – ilustrace

Kongruence – ilustrace



Kongruence po částech

Kongruence po částech

Dva objekty jsou **kongruentní po částech**, lze-li jeden rozložit na sjednocení konečně mnoha částí a z množin jim kongruentních sestavit druhý.

Kongruence po částech – příklady

Kongruence po částech – příklady

- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{4, 5, 6, \dots\}$ *jsou* kongruentní

Kongruence po částech – příklady

- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{4, 5, 6, \dots\}$ *jsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{2, 4, 6, \dots\}$ *nejsou* kongruentní

Kongruence po částech – příklady

- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{4, 5, 6, \dots\}$ *jsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{2, 4, 6, \dots\}$ *nejsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{1, 2, 3\} \cup \{5, 6, 7 \dots\}$

nejsou kongruentní, ale jsou kongruentní po částech,

Kongruence po částech – příklady

- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{4, 5, 6, \dots\}$ *jsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{2, 4, 6, \dots\}$ *nejsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{1, 2, 3\} \cup \{5, 6, 7 \dots\}$

nejsou kongruentní, ale jsou kongruentní po částech,

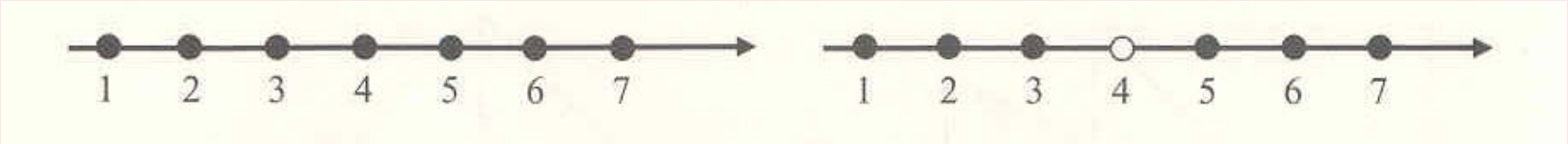
protože množina $\{5, 6, 7 \dots\}$ je kongruentní množině $\{4, 5, 6, 7 \dots\}$.

Kongruence po částech – příklady

- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{4, 5, 6, \dots\}$ *jsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{2, 4, 6, \dots\}$ *nejsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{1, 2, 3\} \cup \{5, 6, 7 \dots\}$

nejsou kongruentní, ale jsou kongruentní po částech,

protože množina $\{5, 6, 7 \dots\}$ je kongruentní množině $\{4, 5, 6, 7 \dots\}$.



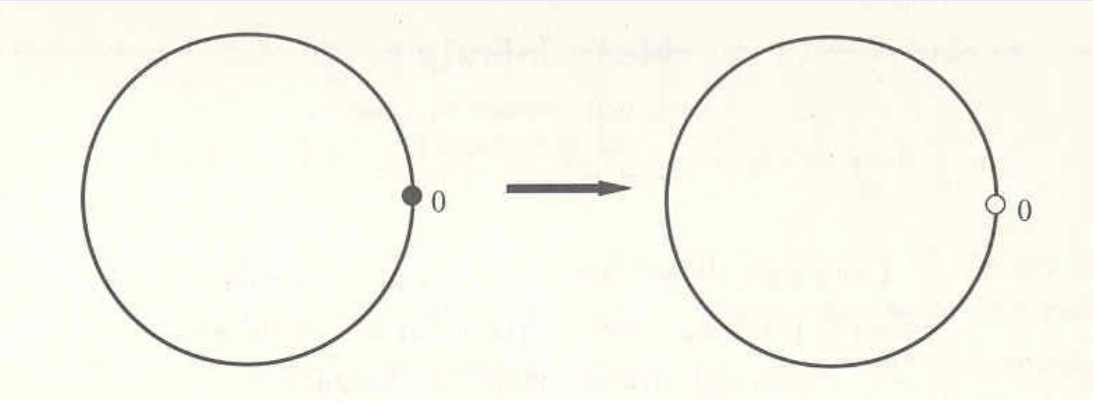
Posun z/do nekonečna

Posun z/do nekonečna

Kružnice je po částech kongruentní kružnici bez bodu.

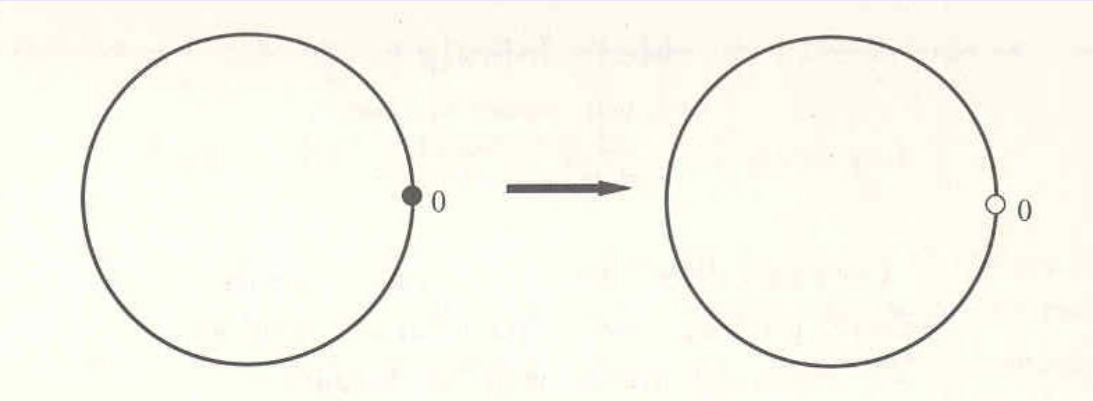
Posun z/do nekonečna

Kružnice je po částech kongruentní kružnici bez bodu.



Posun z/do nekonečna

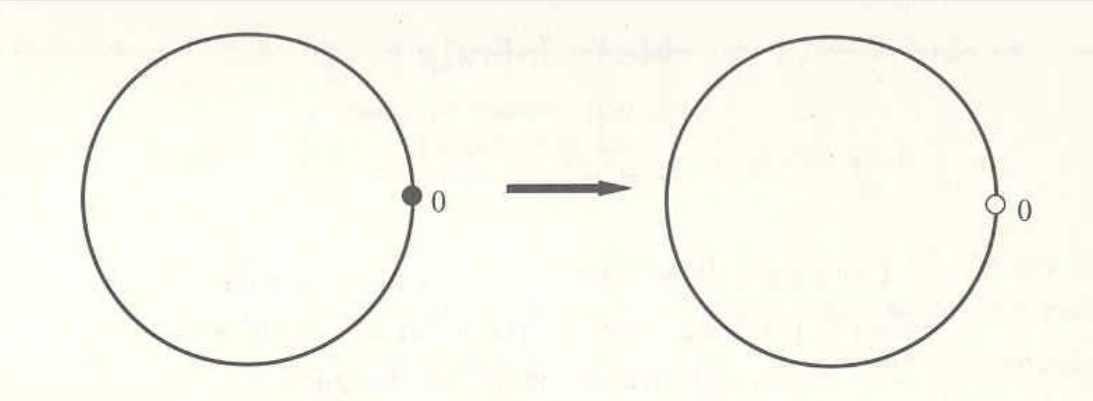
Kružnice je po částech kongruentní kružnici bez bodu.



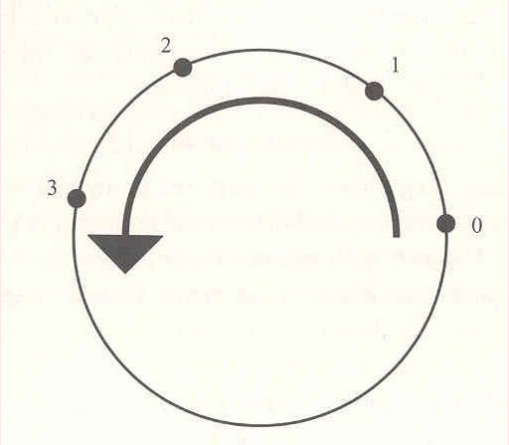
Myšlenka:

Posun z/do nekonečna

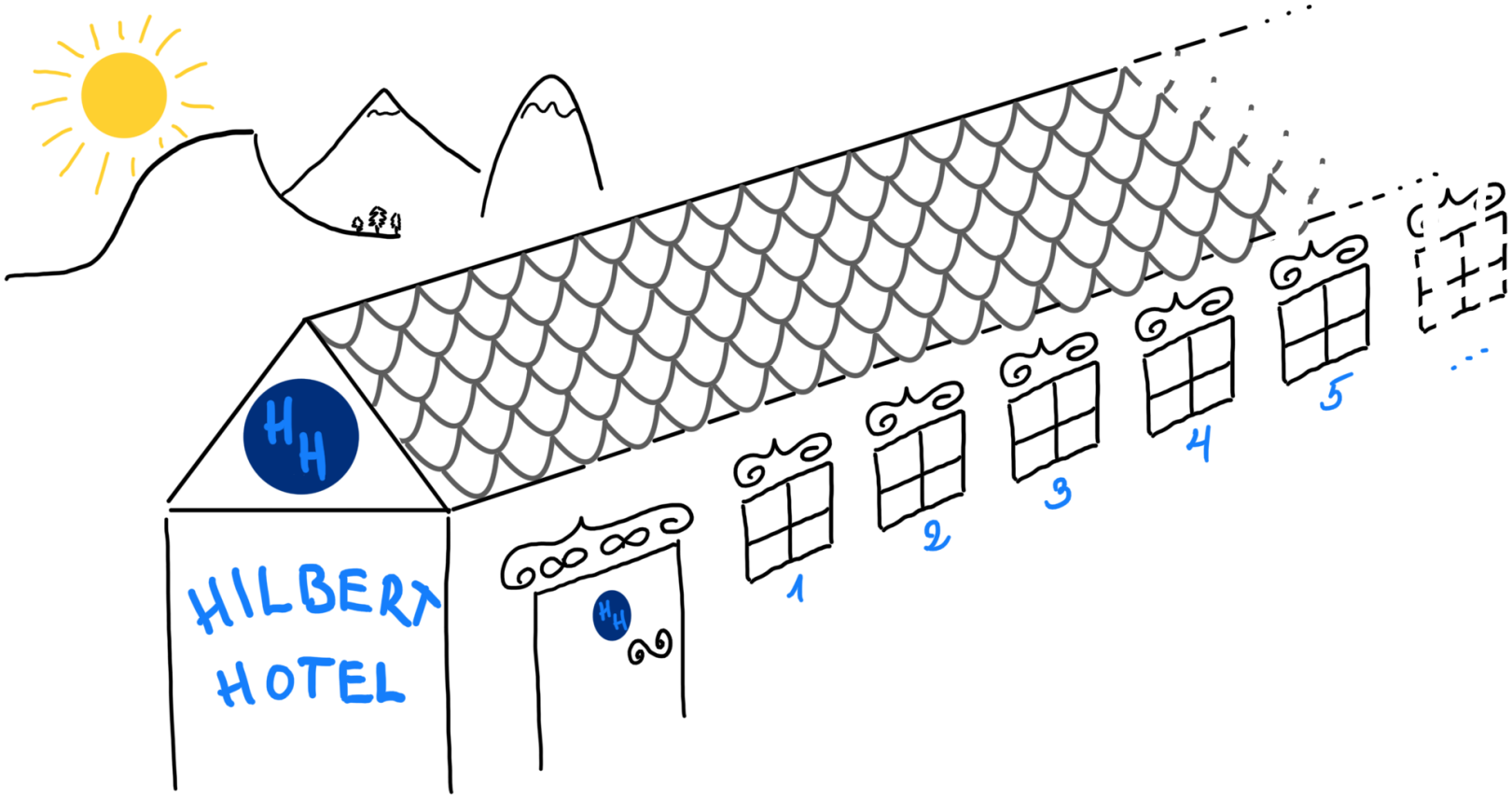
Kružnice je po částech kongruentní kružnici bez bodu.



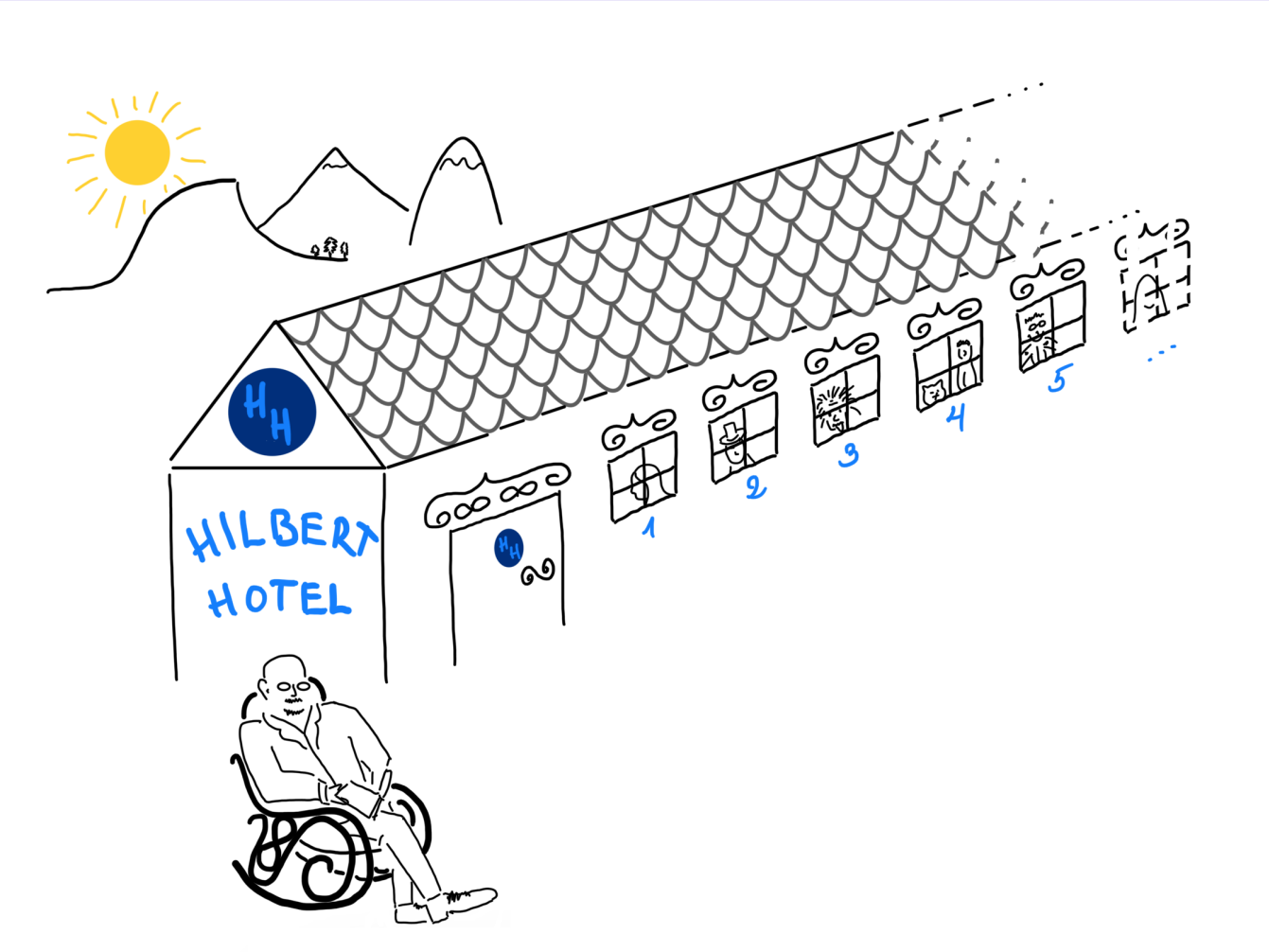
Myšlenka:



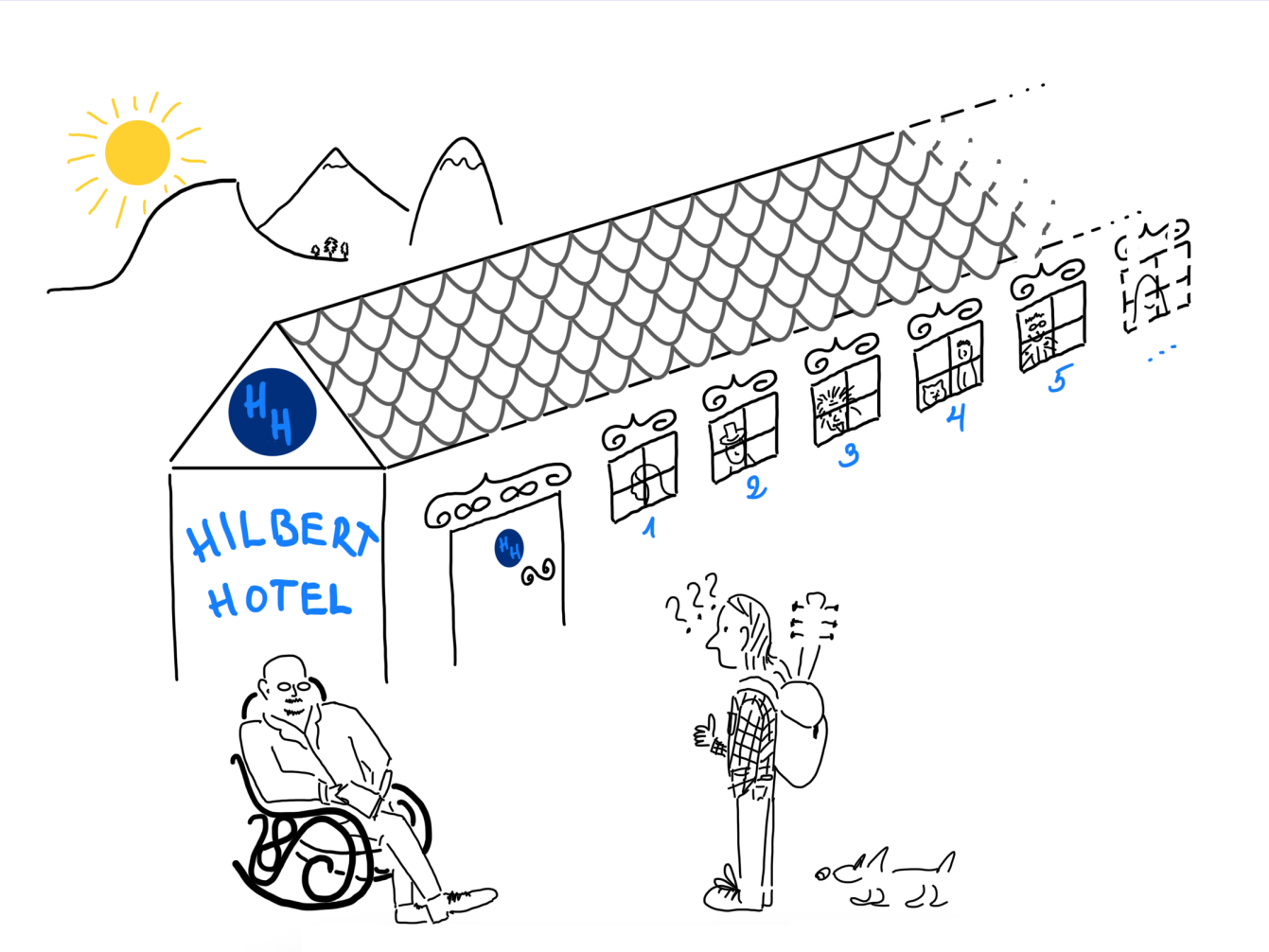
Hilbertův hotel



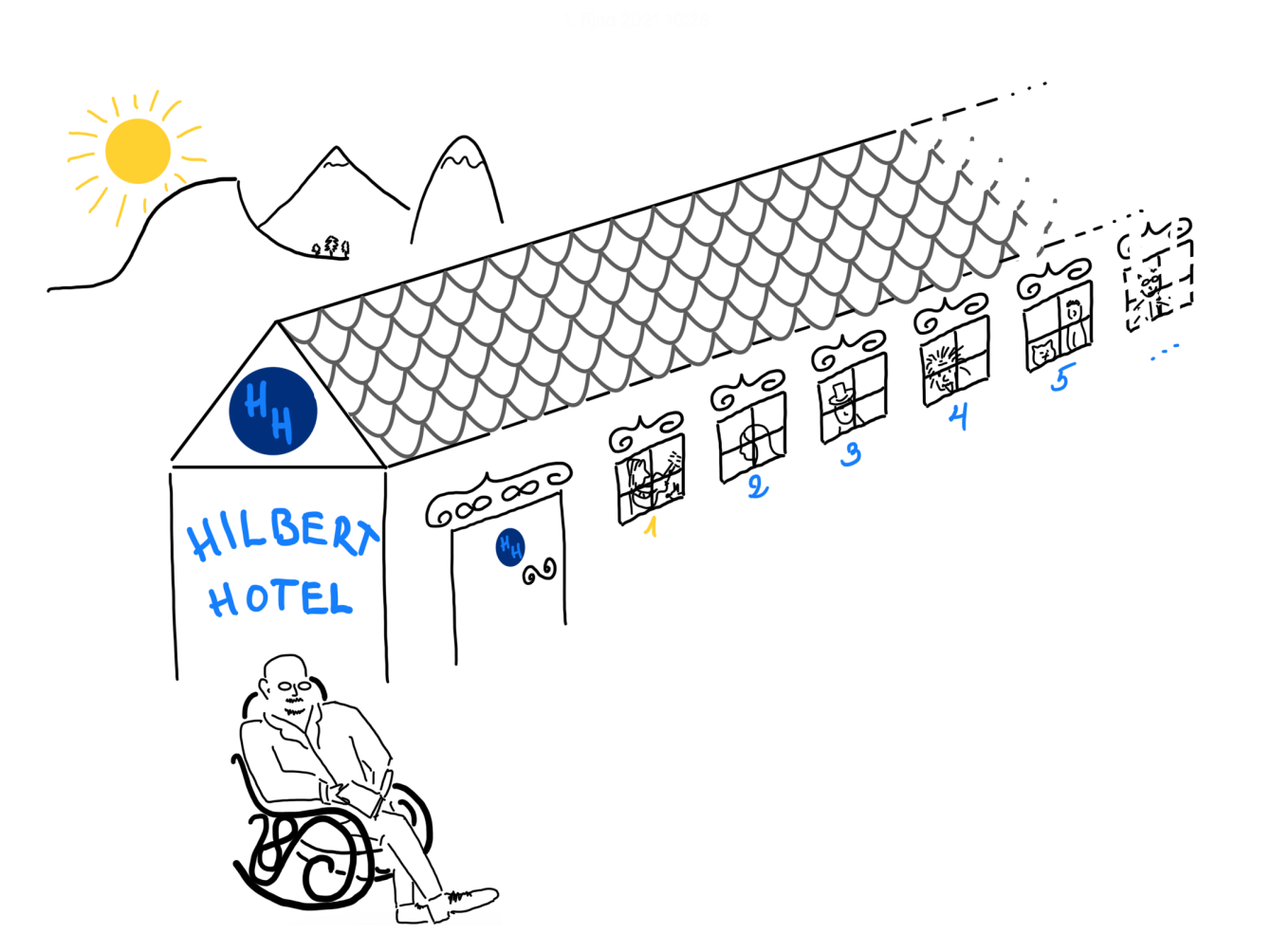
Hotel zcela zaplněn



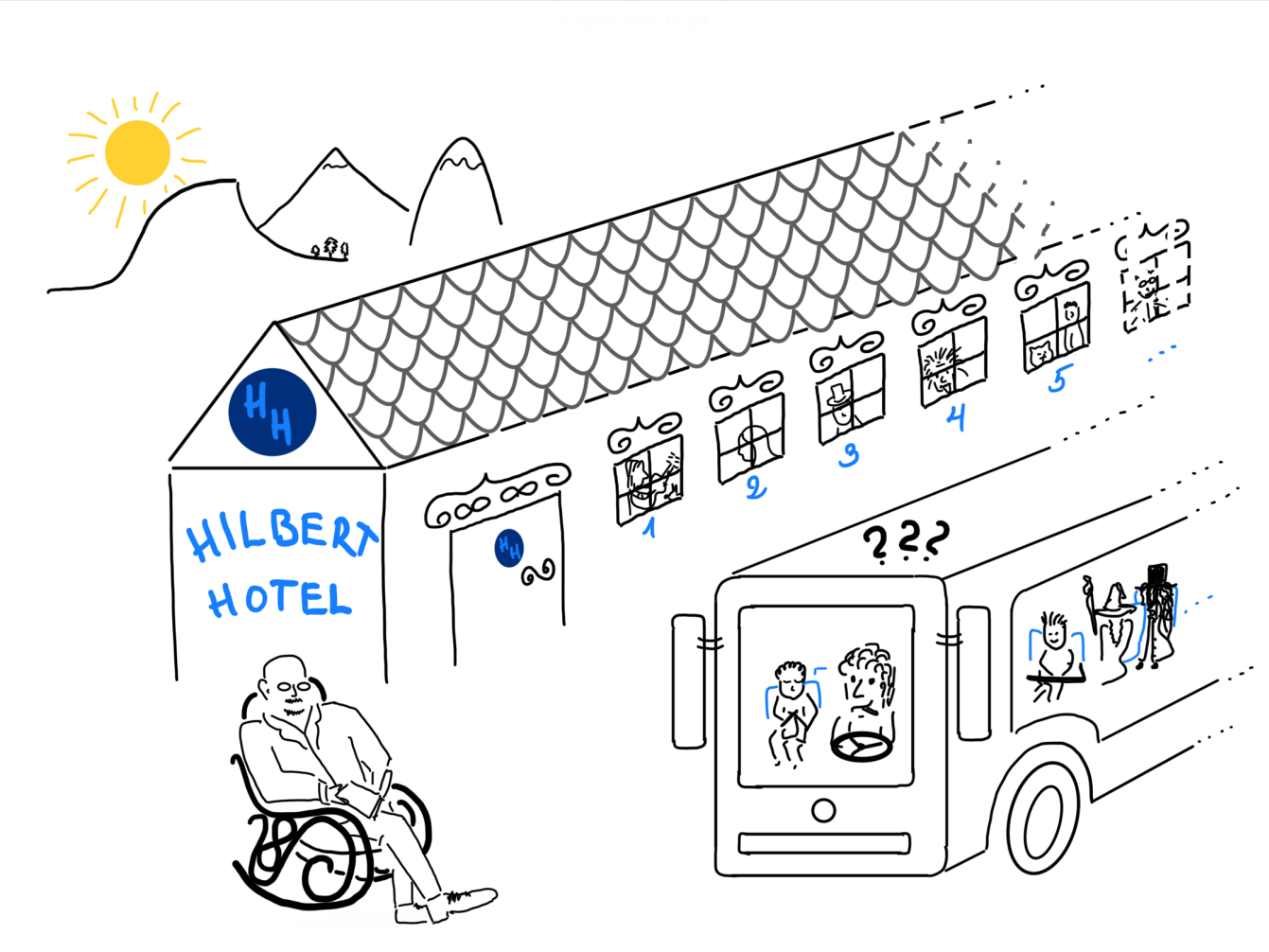
Příchod turisty



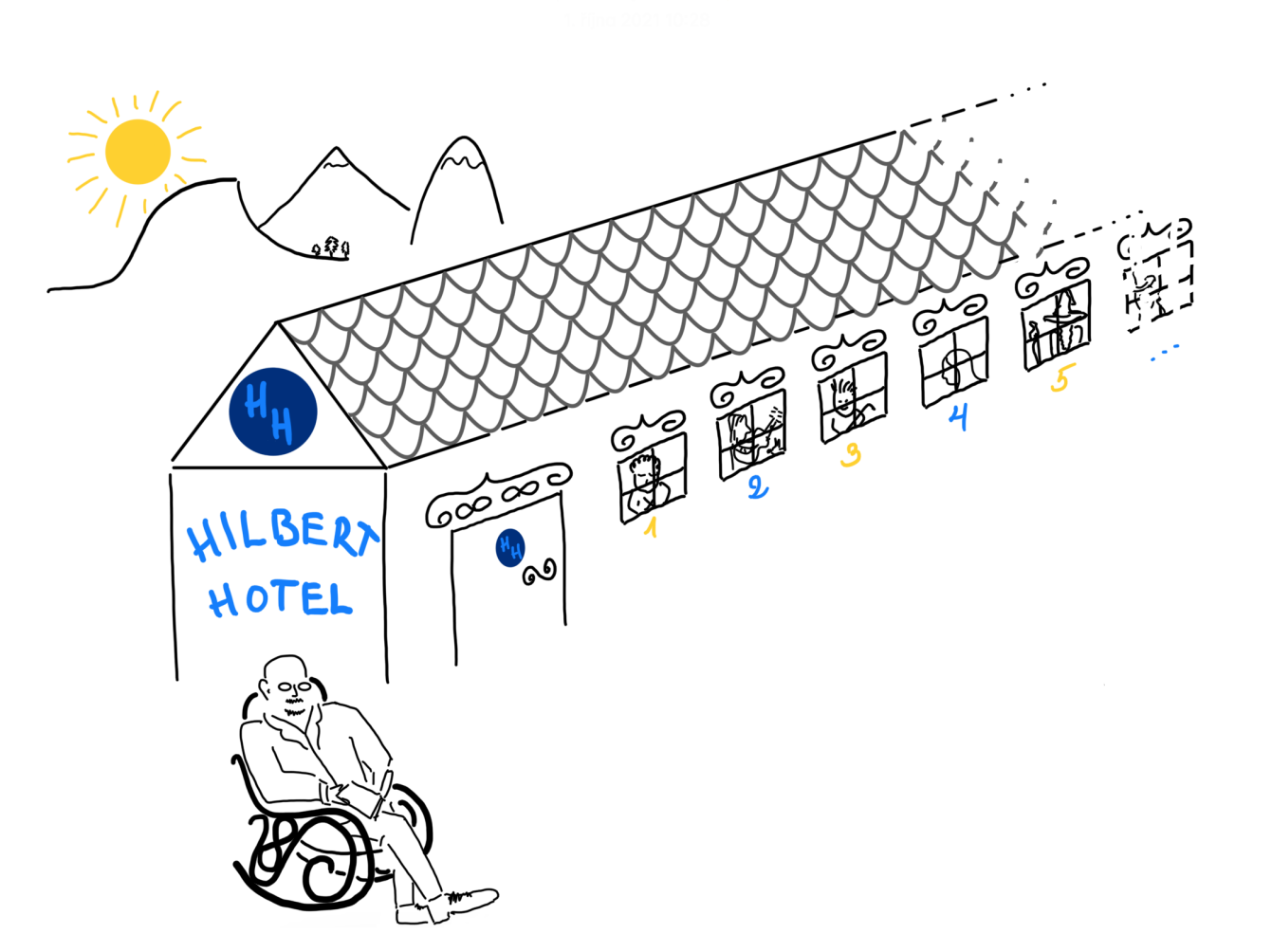
Turista ubytován



Nekonečný bus



Mischief managed



Hotel Infinity

Hotel Infinity

Copyright Lawrence M. Lesser
All rights reserved
Reprinted with permission

On a dark desert highway – not much scenery
Except this long hotel stretchin' far as I could see.
Neon sign in front read "No Vacancy,"
But it was late and I was tired, so I went inside to plea.

The clerk said, "No problem. Here's what can be done—
We'll move those in a room to the next higher one.
That will free up the first room and that's where you can stay."
I tried understanding that as I heard him say:

CHORUS: "Welcome to the HOTEL INFINITY—
Where every room is full (every room is full)
Yet there's room for more.
Yeah, plenty of room at the HOTEL INFINITY—
Move 'em down the floor (move 'em down the floor)
To make room for more."

I'd just gotten settled, I'd finally unpacked
When I saw 8 more cars pull into the back.
I had to move to room 9; others moved up 8 rooms as well.
Never more will I confuse a Hilton with a Hilbert Hotel!

My mind got more twisted when I saw a bus without end
With an infinite number of riders coming up to check in.
"Relax," said the nightman. "Here's what we'll do:
Move to the double of your room number: that frees the
odd-numbered rooms."

(Repeat Chorus)

Last thing I remember at the end of my stay—
It was time to pay the bill but I had no means to pay.
The man in 19 smiled, "Your bill is on me.
20 pays mine, and so on, so you get yours for free!"

Máme míru?

Máme míru?

Vitaliova konstrukce neměřitelných množin:

Máme míru?

Vitaliova konstrukce neměřitelných množin:

Čísla a a b jsou *ekvivalentní*, je-li jejich rozdíl *racionální*.

Máme míru?

Vitaliova konstrukce neměřitelných množin:

Čísla a a b jsou *ekvivalentní*, je-li jejich rozdíl *racionální*.

$[0, 1]$ se rozpadne na *třídy ekvivalence*.

Máme míru?

Vitaliova konstrukce neměřitelných množin:

Čísla a a b jsou *ekvivalentní*, je-li jejich rozdíl *racionální*.

$[0, 1]$ se rozpadne na *třídy ekvivalence*.

Axiom výběru: sestrojíme *výběrovou množinu M*.

Máme míru?

Vitaliova konstrukce neměřitelných množin:

Čísla a a b jsou *ekvivalentní*, je-li jejich rozdíl *racionální*.

$[0, 1]$ se rozpadne na *třídy ekvivalence*.

Axiom výběru: sestrojíme *výběrovou množinu M*.

Tvrdíme, že M není měřitelná.

Důkaz neměřitelnosti Vitaliovy množiny

Důkaz neměřitelnosti Vitaliovy množiny

Předpokládejme, že M je měřitelná a $\mu(M)$ je její míra.

Důkaz neměřitelnosti Vitaliovy množiny

Předpokládejme, že M je měřitelná a $\mu(M)$ je její míra.

Potom buď $\mu(M) = 0$, nebo $\mu(M) > 0$.

Důkaz neměřitelnosti Vitaliovy množiny

Předpokládejme, že M je měřitelná a $\mu(M)$ je její míra.

Potom buď $\mu(M) = 0$, nebo $\mu(M) > 0$.

Označme $M_q = \{x + q;\ x \in M\}$.

Důkaz neměřitelnosti Vitaliovy množiny

Předpokládejme, že M je měřitelná a $\mu(M)$ je její míra.

Potom buď $\mu(M) = 0$, nebo $\mu(M) > 0$.

Označme $M_q = \{x + q;\ x \in M\}$.

Je-li $\mu(M) = 0$, pak
$\mu(\mathbb{R}) = \mu(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} M_q) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \mu(M_q) = 0$, spor.

Důkaz neměřitelnosti Vitaliovy množiny

Předpokládejme, že M je měřitelná a $\mu(M)$ je její míra.

Potom buď $\mu(M) = 0$, nebo $\mu(M) > 0$.

Označme $M_q = \{x + q;\ x \in M\}$.

Je-li $\mu(M) = 0$, pak
$\mu(\mathbb{R}) = \mu(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} M_q) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \mu(M_q) = 0$, spor.

Je-li $\mu(M) > 0$, pak
$\mu([0,2]) \geq \mu(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} M_q) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}(M_q) = \infty$, spor.

Důkaz neměřitelnosti Vitaliovy množiny

Předpokládejme, že M je měřitelná a $\mu(M)$ je její míra.

Potom buď $\mu(M) = 0$, nebo $\mu(M) > 0$.

Označme $M_q = \{x + q;\ x \in M\}$.

Je-li $\mu(M) = 0$, pak
$\mu(\mathbb{R}) = \mu(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} M_q) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \mu(M_q) = 0$, spor.

Je-li $\mu(M) > 0$, pak
$\mu([0,2]) \geq \mu(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} M_q) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}(M_q) = \infty$, spor.

Tedy M **nemůže být měřitelná**.

Superslovník Hyperwebster

Superslovník Hyperwebster

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Superslovník Hyperwebster

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Začíná: *A, AA, AAA, AAAA, . . .*

Superslovník Hyperwebster

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Začíná: A, AA, AAA, $AAAA$, $\ldots$

Po nekonečně mnoha výrazech: AB, ABA, $ABAA$, $\ldots$

Superslovník Hyperwebster

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Začíná: A, AA, AAA, $AAAA$, $\ldots$

Po nekonečně mnoha výrazech: AB, ABA, $ABAA$, $\ldots$

Není to sice **výkladový** slovník, ale definice a poučky v něm budou (platné i neplatné):

Superslovník Hyperwebster

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Začíná: A, AA, AAA, $AAAA$, $\ldots$

Po nekonečně mnoha výrazech: AB, ABA, $ABAA$, $\ldots$

Není to sice **výkladový** slovník, ale definice a poučky v něm budou (platné i neplatné):

LICHOBEZNIK-JE-KONVEXNI-CTYRUHELNIK

Superslovník Hyperwebster

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Začíná: *A, AA, AAA, AAAA, . . .*

Po nekonečně mnoha výrazech: *AB, ABA, ABAA, . . .*

Není to sice **výkladový** slovník, ale definice a poučky v něm budou (platné i neplatné):

LICHOBEZNIK-JE-KONVEXNI-CTYRUHELNIK

LICHOBEZNIK-JE-HLODAVEC

Vydání Hyperwebsteru

Vydání Hyperwebsteru

Vydavatel se rozhodne vydat slovník ve 26 dílech:

Vydání Hyperwebsteru

Vydavatel se rozhodne vydat slovník ve 26 dílech:

Díl A: A, AA, AAA, . . . , AB, ABA, . . . , ABB,
Díl B: B, BA, BAA, . . . , BB, BBA, . . . , BBB,
Díl C: C, CA, CAA, . . . , CB, CBA, . . . , CBB,
⋮
Díl Z: Z, ZA, ZAA, . . . , ZB, ZBA, . . . , ZBB,

Vydání Hyperwebsteru

Vydavatel se rozhodne vydat slovník ve 26 dílech:

Díl A: A, AA, AAA, . . . , AB, ABA, . . . , ABB,
Díl B: B, BA, BAA, . . . , BB, BBA, . . . , BBB,
Díl C: C, CA, CAA, . . . , CB, CBA, . . . , CBB,
⋮
Díl Z: Z, ZA, ZAA, . . . , ZB, ZBA, . . . , ZBB,

Pak škrtne zbytečné první písmenko.

Vydání Hyperwebsteru

Vydavatel se rozhodne vydat slovník ve 26 dílech:

Díl A: A, AA, AAA, . . . , AB, ABA, . . . , ABB,
Díl B: B, BA, BAA, . . . , BB, BBA, . . . , BBB,
Díl C: C, CA, CAA, . . . , CB, CBA, . . . , CBB,
⋮
Díl Z: Z, ZA, ZAA, . . . , ZB, ZBA, . . . , ZBB,

Pak škrtne zbytečné první písmenko.

Pak zjistí, že jsou všechny díly stejné, takže vydá jen díl A.

Vydání Hyperwebsteru

Vydavatel se rozhodne vydat slovník ve 26 dílech:

Díl A: A, AA, AAA, . . . , AB, ABA, . . . , ABB,
Díl B: B, BA, BAA, . . . , BB, BBA, . . . , BBB,
Díl C: C, CA, CAA, . . . , CB, CBA, . . . , CBB,
⋮
Díl Z: Z, ZA, ZAA, . . . , ZB, ZBA, . . . , ZBB,

Pak škrtne zbytečné první písmenko.

Pak zjistí, že jsou všechny díly stejné, takže vydá jen díl A.

A změní jeho název na **Hyperwebster**.

Sierpińského–Mazurkiewiczův paradox

Sierpińského–Mazurkiewiczův paradox

Wacław Sierpiński: *Lze rozložit nějakou množinu E na disjunktní sjednocení dvou množin E_1 a E_2 tak, aby každá z nich byla kongruentní původní množině?*

Sierpińského–Mazurkiewiczův paradox

Wacław Sierpiński: *Lze rozložit nějakou množinu E na disjunktní sjednocení dvou množin E_1 a E_2 tak, aby každá z nich byla kongruentní původní množině?*

S. Mazurkiewicz: **ANO**

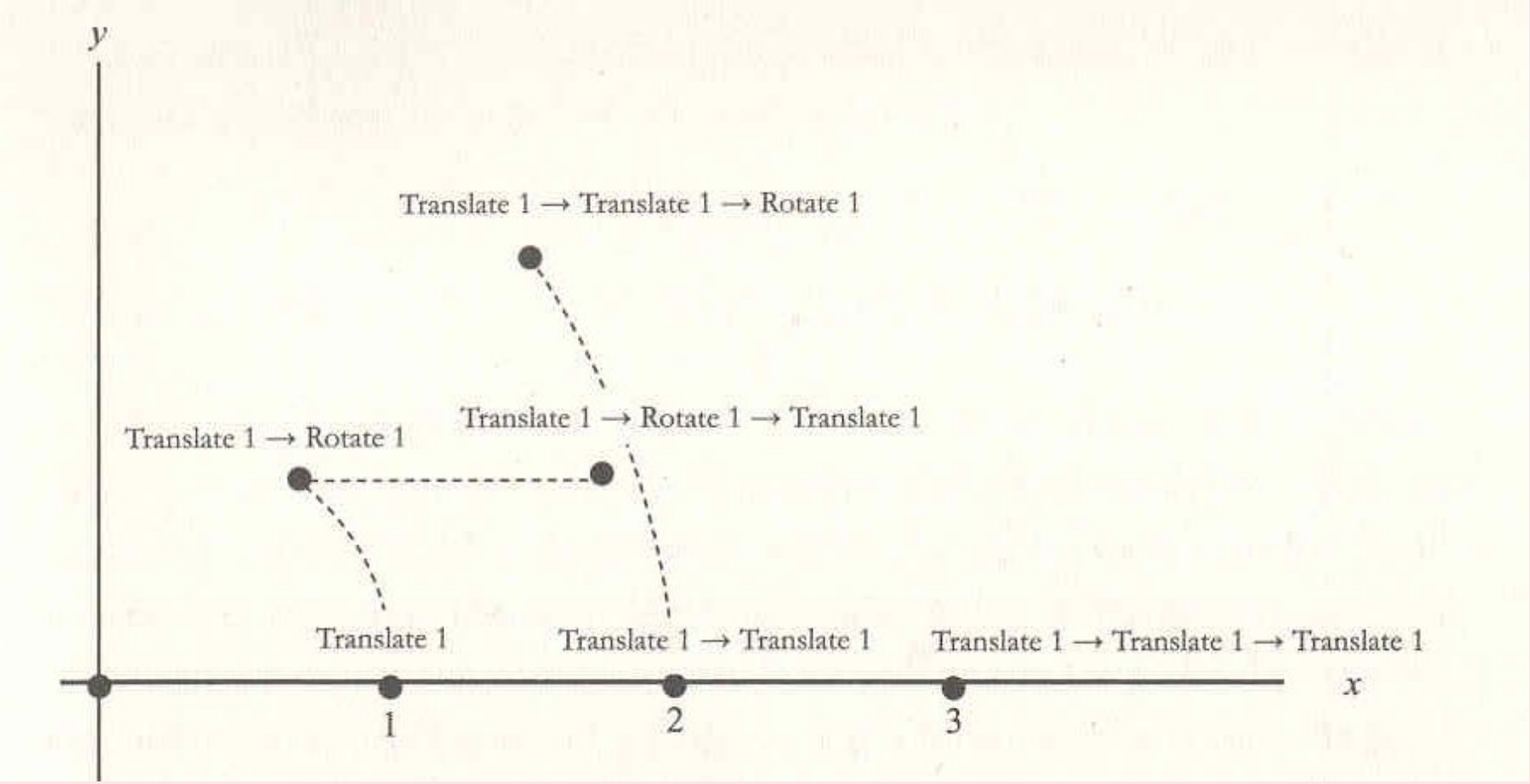
Sierpińského–Mazurkiewiczův paradox - obrázek

Sierpińského–Mazurkiewiczův paradox - obrázek

Množina E:

Sierpińského–Mazurkiewiczův paradox - obrázek

Množina E:



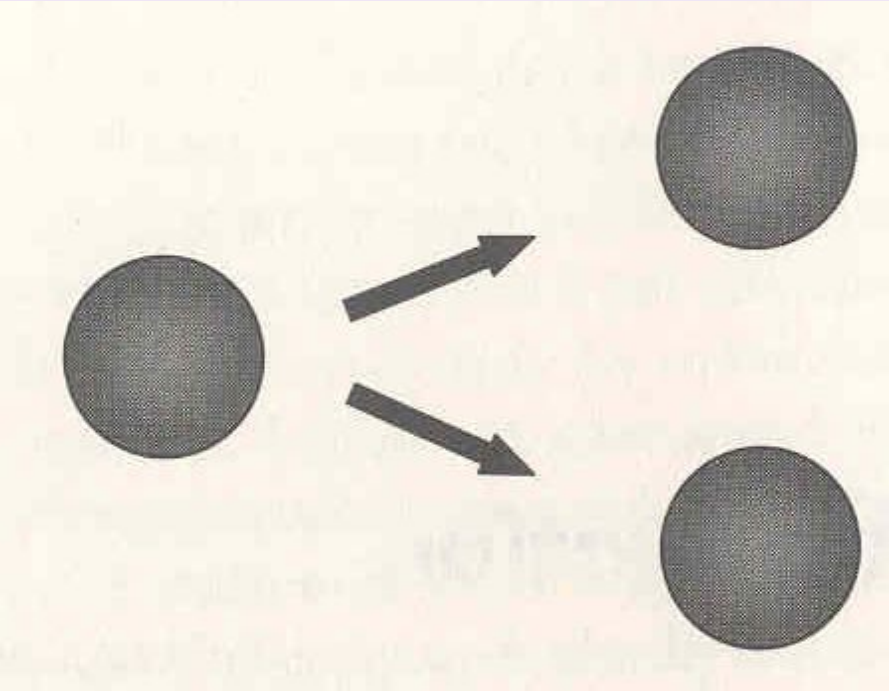
Věta Stefana Banacha a Alfreda Tarského (1924)

Věta Stefana Banacha a Alfreda Tarského (1924)

Jednotkovou kouli v 3D lze rozložit na sjednocení konečně mnoha podmnožin a z nich potom složit dvě koule, obě identické s původní koulí.

Věta Stefana Banacha a Alfreda Tarského (1924)

Jednotkovou kouli v 3D lze rozložit na sjednocení konečně mnoha podmnožin a z nich potom složit dvě koule, obě identické s původní koulí.



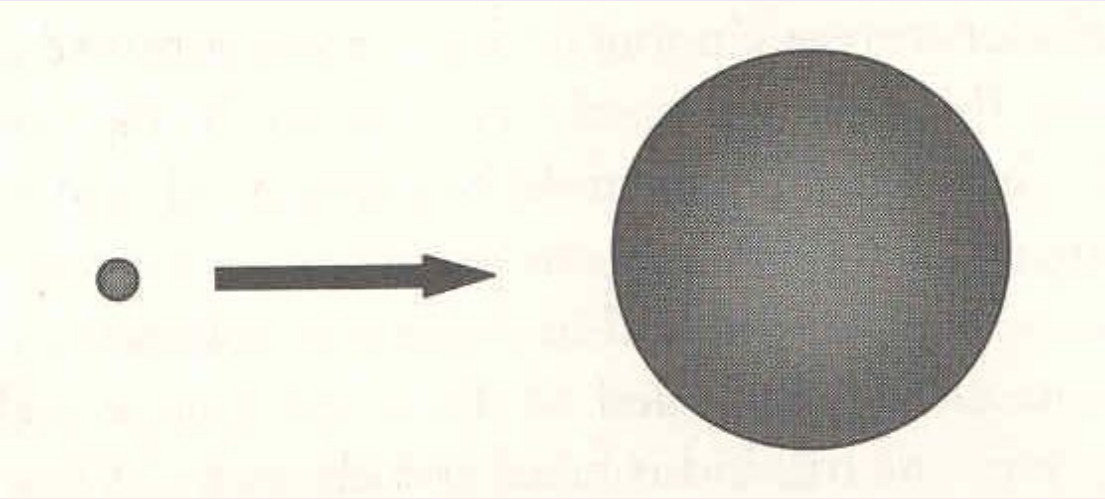
A tedy

A tedy

Důsledek. Hrášek a sluníčko jsou **po částech kongruentní**.

A tedy

Důsledek. Hrášek a sluníčko jsou **po částech kongruentní**.



Test, jestli jste dávali pozor

Test, jestli jste dávali pozor

Otázka: Který název filmu je na světě nejblbější?

Test, jestli jste dávali pozor

Otázka: Který název filmu je na světě nejblbější?

Odpověď:

Test, jestli jste dávali pozor

Otázka: Který název filmu je na světě nejblbější?

Odpověď: *Nekonečný příběh II*.

Co se děje v nekonečnu?

Co se děje v nekonečnu?

"Lines that are parallel
meet at Infinity!"
Euclid repeatedly
heatedly urged.

Until he died,
and so reached that vicinity;
in it he found
that the damned things diverged.

(Piet Hein (1905–1996): *Grooks VI*)

A na úplný závěr jeden limerick

A na úplný závěr jeden limerick

A conjecture both deep and profound
Is whether a circle is round.
In a paper by Erdős,
Written in Kurdish,
A counterexample is found.

(Anonymous)

The last slide

The last slide