Poznámky k zavedení vektorového součinu

Zdeněk Halas

KDM MFF UK

23. září 2022

Vektorový součin – problematika zavedení

Motivace:

- je důležitý...
- má četné aplikace ve fyzice i v matematice

Zavedení:

a) pomocí vlastností:

1. je kolmý na $\vec{u}$ i $\vec{v}$
2. s $\vec{u}$ a $\vec{v}$ tvoří pravotočivou bázi
3. jeho velikost je rovna $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin\varphi$

(s následným vysvětlením, že je to obsah rovnoběžníku daného vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$)

b) vztahem:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1\right)$$

problém: obojí „padá z nebe“

Základní motivace

občas se hodí **vektor kolmý ke dvěma vektorům**

(jeho velikost a „orientaci“ zatím neřešíme)

- obecná rovnice roviny (normálový vektor)
- vzdálenost bodu od roviny (normálový vektor)
- objemy těles (výška)
- moment síly vzhledem k ose otáčení

v rovině (vektor kolmý k jednomu vektoru) to je snadné: $(u_2, -u_1)$
v prostoru je to zajímavá úloha

Hledání vektoru $\vec{w}$ kolmého k zadaným $\vec{u}$ a $\vec{v}$

$$\vec{u} \perp \vec{w} \quad \text{a} \quad \vec{v} \perp \vec{w}$$

$$u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 = 0$$
$$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0$$

- vyřešme tuto soustavu
- stačí najít jedno nějaké (netriviální) řešení
- neboli jeden nějaký kolmý (nenulový) vektor

Řešení soustavy, neznámé jsou w_1, w_2, w_3

$$u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 = 0 \qquad / \cdot v_1$$
$$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0 \qquad / \cdot u_1$$

$$u_1 v_1 w_1 + u_2 v_1 w_2 + u_3 v_1 w_3 = 0$$
$$u_1 v_1 w_1 + u_1 v_2 w_2 + u_1 v_3 w_3 = 0$$

odečtěme od 2. rovnice 1. rovnici:

$$u_1 v_1 w_1 + u_2 v_1 w_2 + u_3 v_1 w_3 = 0$$
$$(u_1 v_2 - u_2 v_1) w_2 + (u_1 v_3 - u_3 v_1) w_3 = 0$$

w_2 a w_3, která by vyhovovala 2. rovnici, najdeme snadno, např.:

$$w_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1 \qquad\qquad w_2 = -(u_1 v_3 - u_3 v_1)$$

nedělíme, chceme řešení v co nejjednodušší formě

Řešení soustavy, neznámé jsou w_1, w_2, w_3

$$u_1 v_1 w_1 + u_2 v_1 w_2 + u_3 v_1 w_3 = 0$$

$$w_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1 \qquad\qquad w_2 = -(u_1 v_3 - u_3 v_1)$$

dopočítejme w_1, dostaneme

$$w_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2$$

rovnici vydělíme v_1 a dosadíme za w_3 a w_2:

$$u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 = 0$$

$$u_1 w_1 + u_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + u_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0$$

jedno z možných řešení ($\vec{w} \perp \vec{u}$ a $\vec{w} \perp \vec{v}$) je tedy:

$$\boxed{\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)}$$

Vlastnosti vektoru $\vec{w}$ – orientace a norma

$$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

pro jednoduchost zvolme KSS tak, aby:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, 0) \qquad \vec{v} = (v_1, v_2, 0)$$

potom:

$$\vec{w} = (0,\ 0,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Orientace

mohli jsme zvolit vektor opačný, ale chceme bázi souhlasnou s bází kartézskou (jsou-li $\vec{u}$, $\vec{v}$ ve „správném pořadí“)

„správné pořadí“ vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$: $\iff$ základní hodnota velikosti orientovaného úhlu $(\vec{u}, \vec{v}) \in (0, \pi)$

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ tohle nepostihne, proto vezmeme $\vec{v}^{\perp} = (v_2, -v_1, 0)$ kolmý na $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v}^{\perp} > 0 \quad \text{neboli} \quad u_1 v_2 - u_2 v_1 > 0$$

Obsah – norma vektoru $\vec{w}$

$\|\vec{w}\|$ je dána, nechceme-li zbytečně dělit; nalezněme tedy její geometrickou interpretaci

$$\|\vec{w}\| = \|(0,\ 0,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)\| = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

díky požadavku „pravotočivosti“ nemusíme psát absolutní hodnotu

z úvah o orientaci:

$$\vec{u} \cdot \vec{v}^{\perp} > 0 \quad \text{neboli} \quad u_1 v_2 - u_2 v_1 > 0$$

najděme geometrickou interpretaci vztahu $u_1 v_2 - u_2 v_1$

uvažme: vektor $\vec{v}^{\perp} = (v_2, -v_1, 0)$ je kolmý na $\vec{v}$, tj.

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = \vec{u} \cdot \vec{v}^{\perp} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

neboli

$$\|\vec{w}\| = u_1 v_2 - u_2 v_1 = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin\varphi$$

Vlastnosti vektoru $\vec{w}$ – orientace a norma

nejjednodušší verze

$$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

pro jednoduchost zvolme KSS tak, aby:

$$\vec{u} = (u_1, 0, 0) \qquad \vec{v} = (v_1, v_2, 0)$$

potom:

$$\vec{w} = (0,\ 0,\ u_1 v_2)$$

Orientace

chceme, aby báze $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ byla bází souhlasnou s bází kartézskou

(základem je, aby $\vec{u}$, $\vec{v}$ byly ve „správném pořadí“)

„správné pořadí“ vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$: $\iff$ u_1 a v_2 mají stejné znaménko:

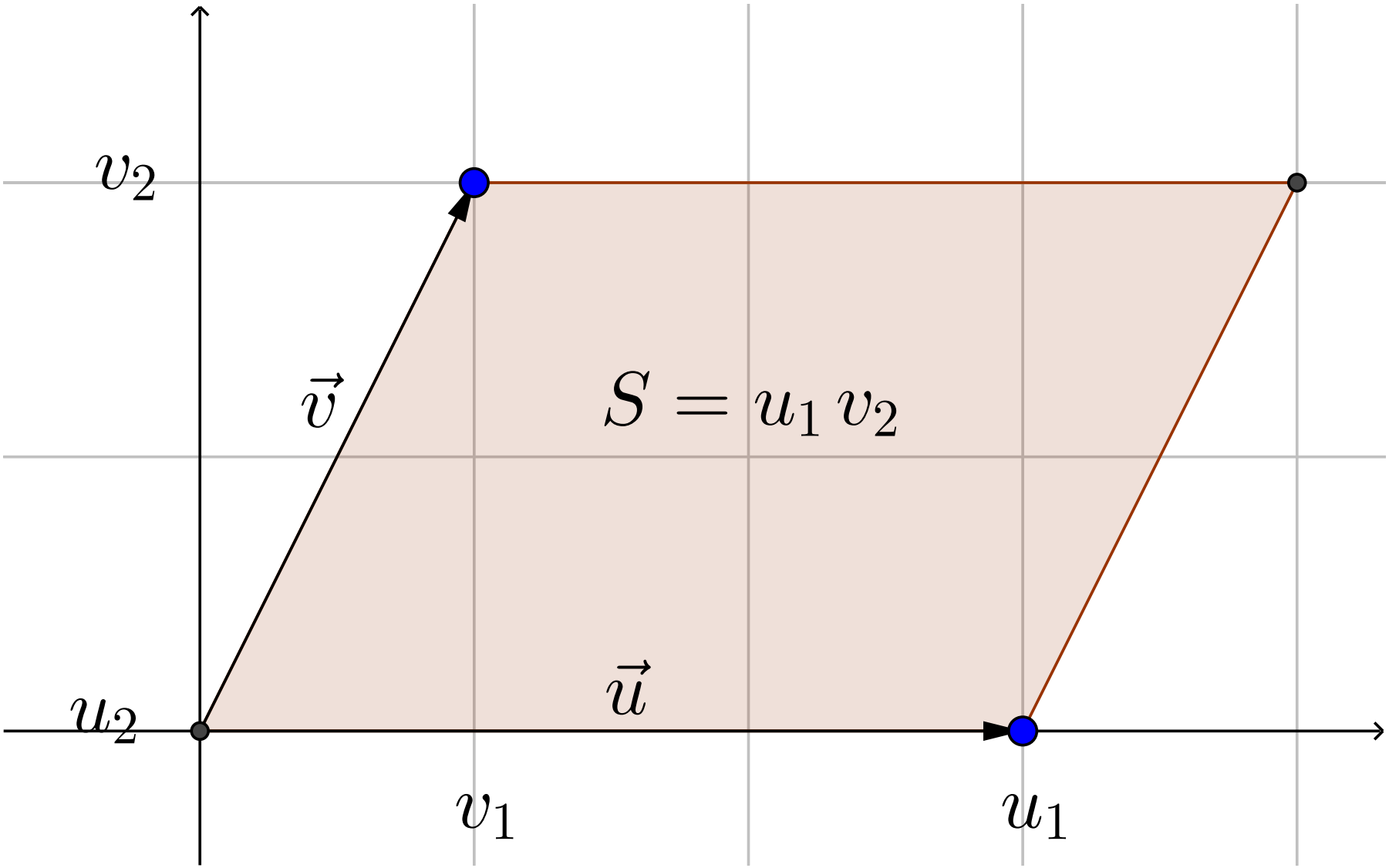
$$u_1 v_2 > 0$$

Norma

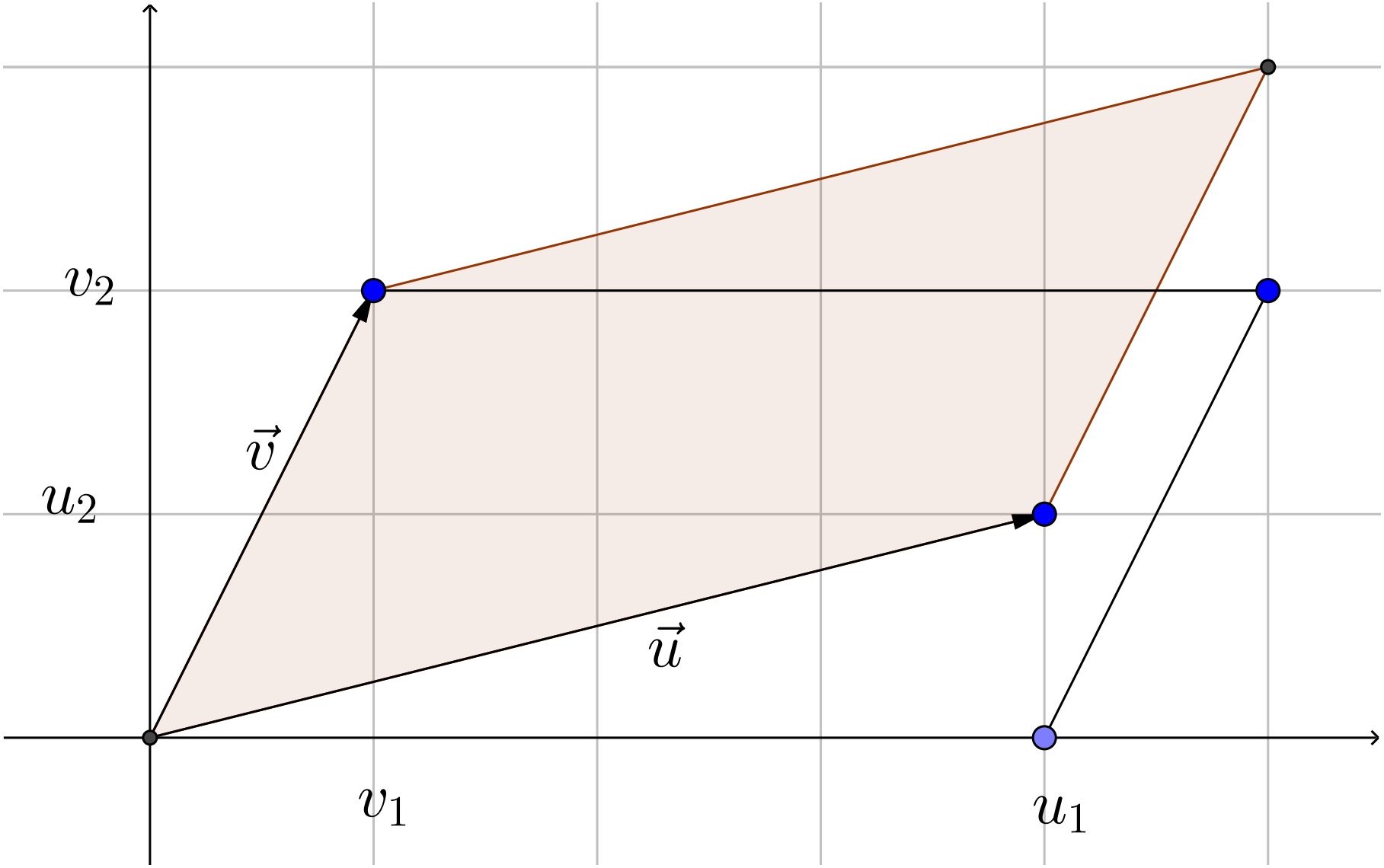
$$\|\vec{w}\| = \|(0,\ 0,\ u_1 v_2)\| = u_1 v_2$$

geometrická interpretaci vztahu $u_1 v_2$: obsah obdélníku daným vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$

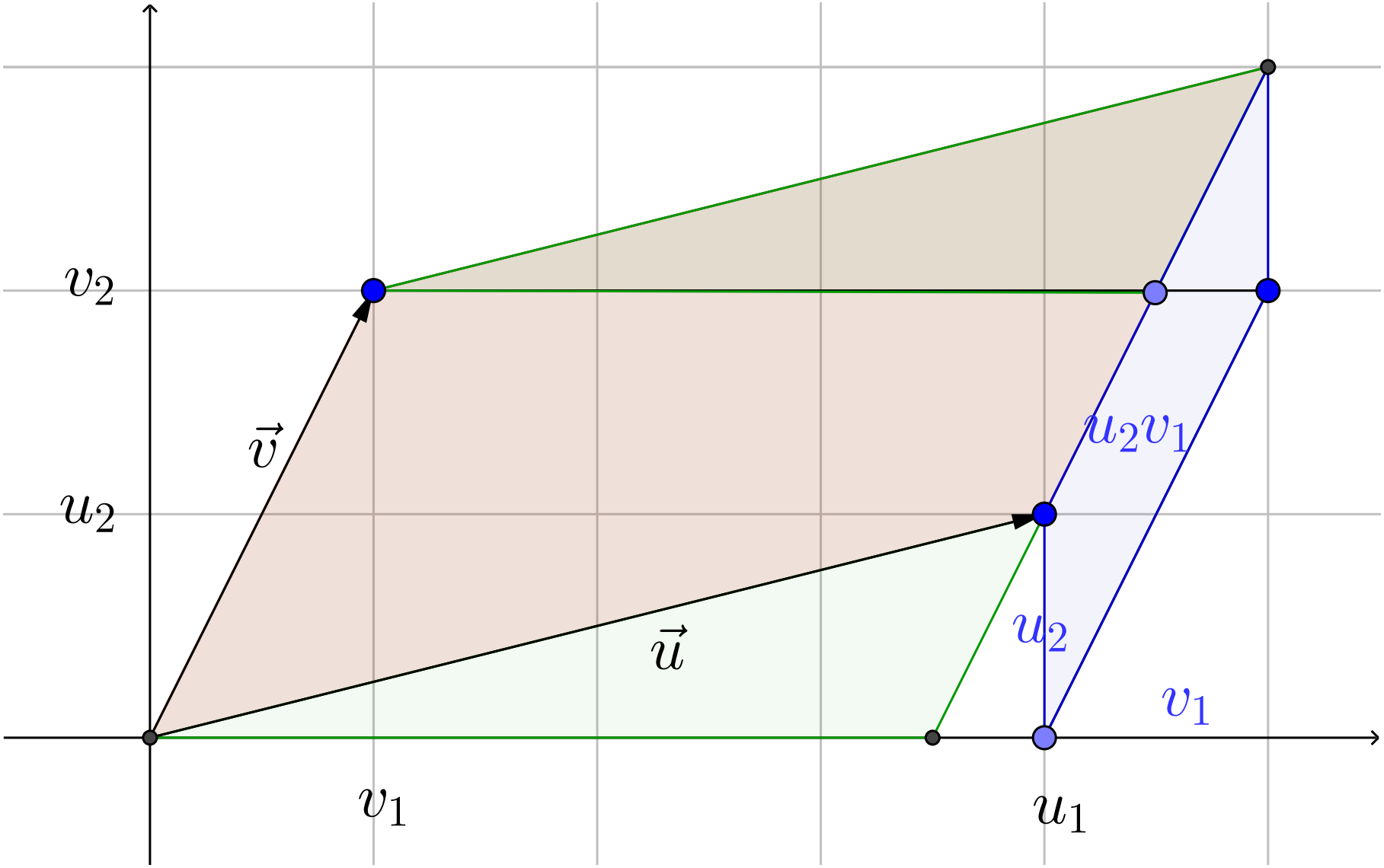
Geometrický význam $u_1 v_2 - u_2 v_1$



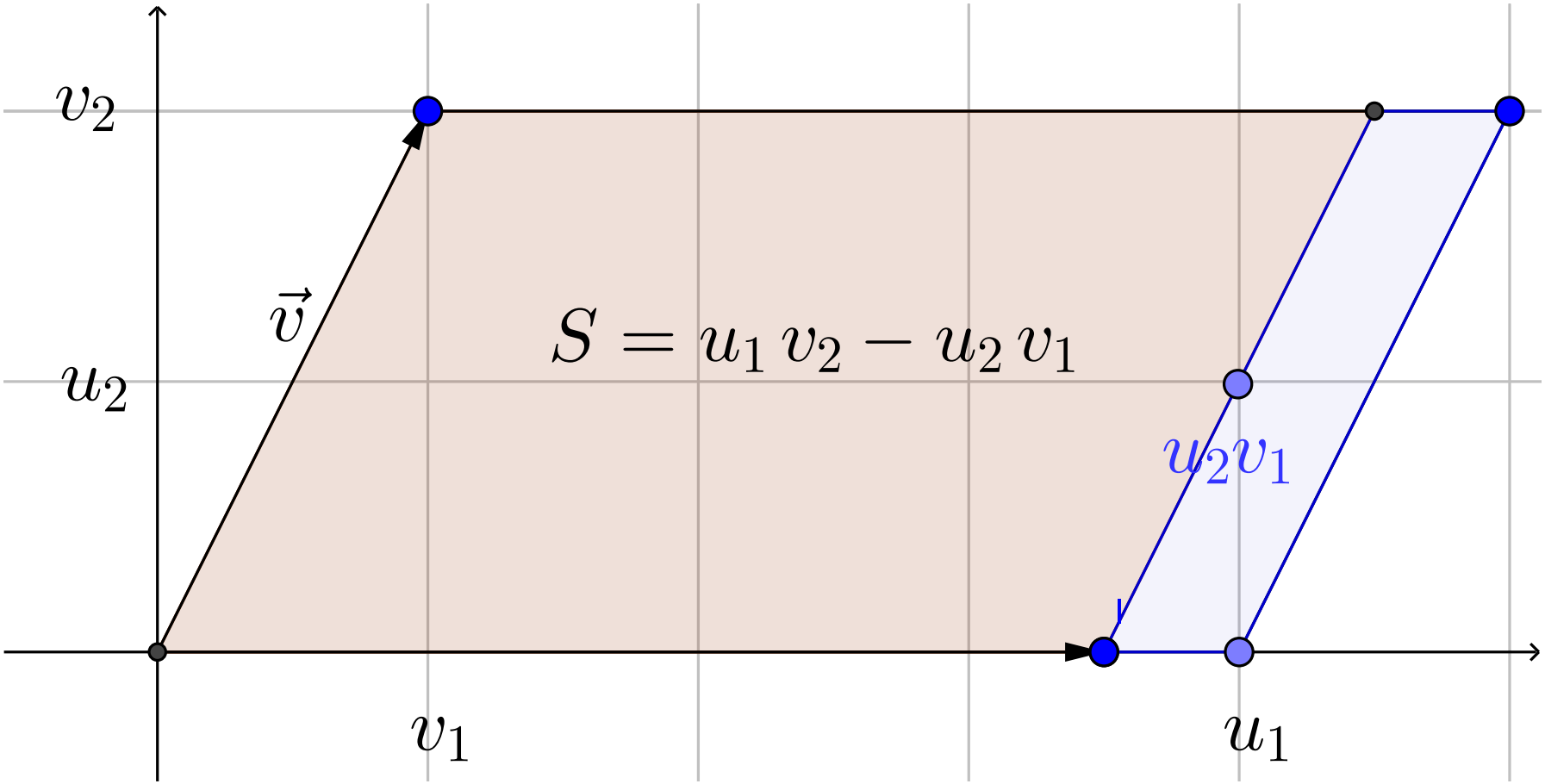
Geometrický význam $u_1 v_2 - u_2 v_1$



Geometrický význam $u_1 v_2 - u_2 v_1$



Geometrický význam $u_1 v_2 - u_2 v_1$



Výpočet pomocí bázových vektorů

předepíšeme, jak má vektorový součin vypadat, a to pouze na vektorech báze:

$$\vec{e_1} \times \vec{e_2} = \vec{e_3} \qquad \vec{e_2} \times \vec{e_3} = \vec{e_1} \qquad \vec{e_3} \times \vec{e_1} = \vec{e_2}$$

$$\vec{e_2} \times \vec{e_1} = -\vec{e_3} \qquad \vec{e_3} \times \vec{e_2} = -\vec{e_1} \qquad \vec{e_1} \times \vec{e_3} = -\vec{e_2}$$

Je-li

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3$$

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$$

dostaneme (z distributivity)

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{e}_3$$

Moment síly vzhledem k ose otáčení

otáčivý účinek síly na tuhé těleso

představme si setrvačník, na něm bod, síla F působí ve směru tečny, tj. kolmo na poloměr

Ze zákona rovnováhy na páce – „invariant“: otáčivý účinek je přímo úměrný velikosti síly a vzdálenosti od osy otáčení

$$M = r \cdot F$$

všimněme si: součin $r \cdot F$ můžeme interpretovat jako obsah obdélníku

když síla nebude působit ve směru tečny – obsah rovnoběžníku:

$$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha$$

vše je vztaženo vzhledem k ose otáčení, ta je kolmá na setrvačník

kolmost, obsah (a volba orientace) $\implies$ vektorový součin

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

Takže:

- hledáme vektor kolmý ke dvěma vektorům
- o ostatní se ani moc nestaráme, ono to vyjde
- nebo předepíšeme vše, co si přejeme, pro vektory báze
- fyzika požaduje kolmost i obsah (přímá úměrnost)