Variace KoncepTestů z kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky

Cesty k matematice IV.

Tomáš Zadražil

20. května 2021

Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Gymnázium Duhovka
tomas.zadrazil@google.com

Dovolte mi, abych se stručně představil...

Čím se aktuálně živím?

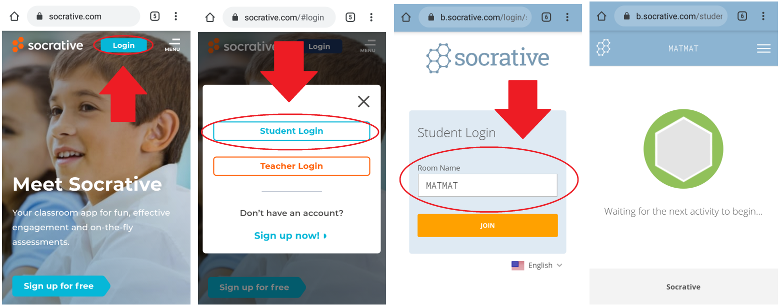
- PhD student a vyučující na KDM MFF UK
- učitel matematiky na Gymnázium Duhovka
- 5 let praxe na klasické škole
- soukromý lektor matematiky

Čím se zabývám?

- aktivizující metody (Peer Instruction)
- matematické koncepty a jejich představa
- konceptuální porozumění
- interakce ve výuce
- postoje vůči matematice
- interakce a interaktivní techniky

Ukázka aplikace Socrative

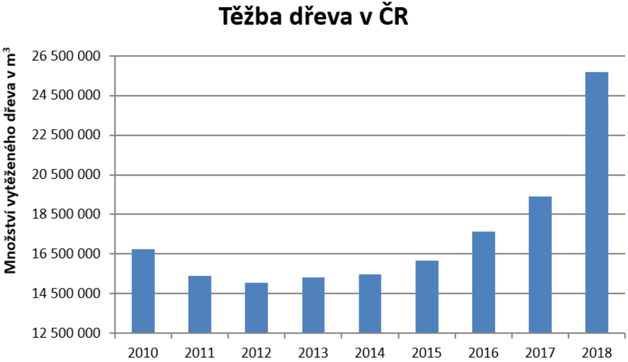
Přihlaste se prosím na **www.socrative.com**.
(Nebo si stáhněte aplikaci **Socrative Student**.)



Zvolte možnost **Login**, dále **Student Login** a přihlašte se (join) do místnosti **MATMAT**.

Vstupní aktivita bude za okamžik zahájena.

Čtení z grafu



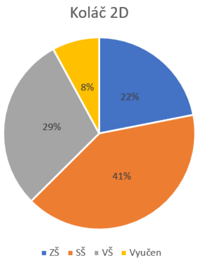
Na základě zběžného pohledu na graf lze konstatovat, že v roce 2018 byla průmyslová těžba dřeva. . .

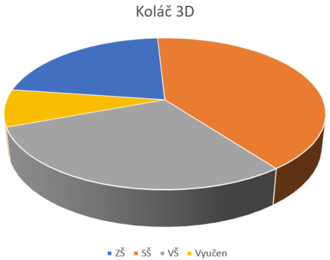
(A) . . . méně než dvakrát větší co v roce 2010.

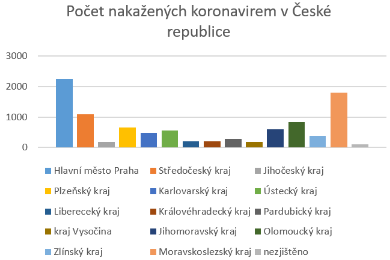
(B) . . . přibližně dvakrát větší než v roce 2010.

(C) . . . přibližně třikrát větší než v roce 2010.

(D) Ani jedno z tvrzení (A)–(C) není pravdivé.


Koláč 2D
8%
22%
29%
41%
ZŠ SŠ VŠ Vyučen


Koláč 3D
ZŠ SŠ VŠ Vyučen


Počet nakažených koronavirem v České republice
3000
2000
1000
0
Hlavní město Praha
Středočeský kraj
Jihočeský kraj
Plzeňský kraj
Karlovarský kraj
Ústecký kraj
Libereceký kraj
Královéhradecký kraj
Pardubický kraj
kraj Vysočina
Jihomoravský kraj
Olomoucký kraj
Zlínský kraj
Moravskoslezský kraj
nezjištěno


Počet nakažených koronavirem v České republice
nezjištěno
Moravskoslezský kraj
1795
Zlínský kraj
Olomoucký kraj
833
Jihomoravský kraj
589
kraj Vysočina
Pardubický kraj
Královéhradecký kraj
Libereceký kraj
Ústecký kraj
565
Karlovarský kraj
479
Plzeňský kraj
666
Jihočeský kraj
Středočeský kraj
1093
Hlavní město Praha
2254

Matení grafy

https://www.idnes.cz/technet/veda/manipulace-grafy-statistika.A151023_164547_veda_pka

Teoretická rukověť

Matematické koncepty a konceptuální porozumění

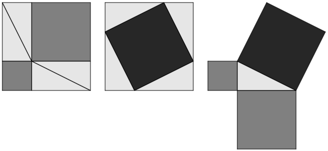
Matematické koncepty

základní pojmy, principy a hluboké myšlenky matematiky

Matematické koncepty a konceptuální porozumění

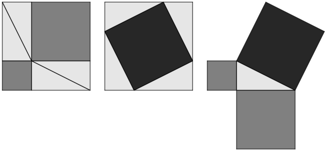
Matematické koncepty

základní pojmy, principy a hluboké myšlenky matematiky



Matematické koncepty a konceptuální porozumění

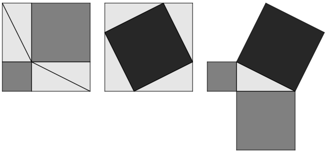
Matematické koncepty
základní pojmy, principy a hluboké myšlenky matematiky



Matematické koncepty a konceptuální porozumění

Matematické koncepty

základní pojmy, principy a hluboké myšlenky matematiky



Konceptuální porozumění

- umění odpovědět na otázku **„proč?“** daný postup, daná poučka, nebo tvrzení funguje?
- schopnost **použít** nabyté vědomosti v netradičním (unikátním) kontextu

Prekoncepce a miskoncepce

Prekoncepce

intuitivní, často naivní, pojetí, které předchází seznámení s formální definicí daného konceptu.

Prekoncepce a miskoncepce

Prekoncepce

intuitivní, často naivní, pojetí, které předchází seznámení s formální definicí daného konceptu.

PŘ: „Odčítání vede ke zmenšení“.

Prekoncepce a miskoncepce

Prekoncepce

intuitivní, často naivní, pojetí, které předchází seznámení s formální definicí daného konceptu.

Prekoncepce a miskoncepce

Prekoncepce

intuitivní, často naivní, pojetí, které předchází seznámení s formální definicí daného konceptu.

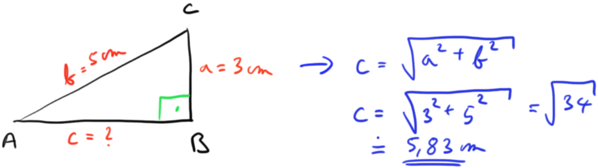
Miskoncepce

špatné, respektive mylné, pojetí konceptu.

Prekoncepce a miskoncepce

Prekoncepce

intuitivní, často naivní, pojetí, které předchází seznámení s formální definicí daného konceptu.



Miskoncepce

špatné, respektive mylné, pojetí konceptu.

Proces, procedura, koncept a procept

Proces budeme užívat v obecném smyslu jako „proces sčítání“ nebo „proces násobení“. Procedurou pak budeme rozumět konkrétní algoritmus k vykonání procesu.

Klíčem k proceptu je společný symbolický zápis jak pro proceduru (akci) tak i pro její výsledek (objekt / koncept)...

procept

je amalgámem tří komponentů: **procesu, jehož výstupem je matematický objekt (koncept)**, a symbolu který je užíván k reprezentaci obojího, procesu i objektu

- $9 + 4 = 9 + 1 + 3 = 10 + 3 = 13$
- $\frac{3}{2} = 3 : 2$

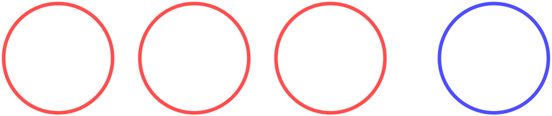
Proceptuální myšlení se vyznačuje flexibilitou při přechodu od procesu ke konceptu a naopak.

KoncepTesty

Kuličky

V sáčku jsou tři červené a jedna modrá kulička. Budeme vytahovat dvě kuličky naráz. Který z následujících jevů je pravděpodobnější?

(A) Obě vytažené kuličky mají stejnou barvu.
(B) Obě vytažené kuličky mají různou barvu.
(C) Ani jeden. Jevy A, B jsou stejně pravděpodobné.
(D) Ani jeden. Jevy A, B jsou stejně pravděpodobné.



Nevydařený experiment :-(

Instrukce:

1. Před sebou máte 3 červené a 1 modrou kostičku.
2. Vezměte kostky do dlaně a dlaní „pořádně zakarbujte“.
3. Náhodně vyjměte dvě kostičky.
4. Mají-li kostičky stejnou barvu, nakreslete na papír čárku.
5. Mají-li kostičky různou barvu, nakreslete na papír kolečko.
6. Experiment desetkrát zopakujte.

(. . . možnost predikce a dopamin efekt)

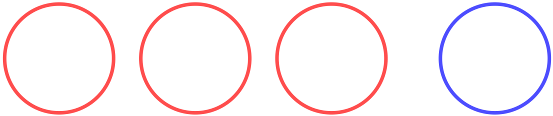
Kuličky

V sáčku jsou tři červené a jedna modrá kulička. Budeme vytahovat dvě kuličky naráz. Který z následujících jevů je pravděpodobnější?

(A) Obě vytažené kuličky mají stejnou barvu.

(B) Obě vytažené kuličky mají různou barvu.

(C) Ani jeden. Jevy A, B jsou stejně pravděpodobné.



Kuličky

V sáčku jsou tři červené a jedna modrá kulička. Budeme vytahovat dvě kuličky naráz. Který z následujících jevů je pravděpodobnější?

(A) Obě vytažené kuličky mají stejnou barvu.

(B) Obě vytažené kuličky mají různou barvu.

(C) **Ani jeden. Jevy A, B jsou stejně pravděpodobné.**

Kuličky

Další vysvětlení spočívá ve způsobu volby...

$$\frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}}$$

Kuličky

Konečně, vysvětlení spočívající v symetrii (z pera dr. Staňka)... *V pytlíku zůstanou dvě stejně barevné kuličky* $\Leftrightarrow$

budou vytaženy dvě různobarevné kuličky. *V pytlíku zůstanou*

dvě různobarevné kuličky $\Leftrightarrow$ *budou vytaženy dvě stejně barevné kuličky.*

Definice *KoncepTestu*

KoncepTest je podle definován jako[1] :

(1) jednoznačně formulovaná otázka

(2) s adekvátní obtížností

(3) testující porozumění jedinému *konceptu* (nosnému pojmu, myšlence, nebo principu),

(4) kterou nelze vyřešit pouhým využitím paměti (nebo pouhým dosazením do vzorce)

(5) a která je obvykle provázena přiměřenou nabídkou možných odpovědí (nebo jde o tzv. otevřenou otázku).

[1] Eric Mazur (1997). *Peer instruction: a user's manual*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall. ISBN: 9780135654415.

Hod třemi kostkami

Při kterém z následujících hodů (A)–(C) dosáhneme s největší pravděpodobností tria ⚀, ⚁, ⚂ (v libovolném pořadí)? Případně zvolte některou z možností (D)–(E).

(A) při současném hodu třemi bílými kostkami;

(B) při současném hodu červenou, modrou a zelenou kostkou;

(C) při současném hodu dvěma bílými a jednou černou kostkou;

(D) $P(A) = P(B)$, $P(A) > P(C)$;

(E) $P(C) = P(B)$, $P(C) > P(A)$;

(F) $P(A) = P(C)$, $P(A) > P(B)$;

(E) $P(A) = P(B) = P(C)$.

Otázka okolo popravy

Král Dobromysl nerad vidí své poddané trpět. Nedávno se jeho strážím podařilo lapit neznámý počet lapků větší než 4 (stráže nejen vypadají, ale i nesvedou napočítat do pěti). Král proto nechá pro výstrahu současně 4 náhodně vybrané kriminálníky pověsit na náměstí. Než jsou však odsouzenci vybráni a rozsudek vykonán, Dobromysl umírá a na jeho místo nastupuje jeho syn Krutoslav, který se původní rozsudek rozhodne upravit. Stále budou popraveni 4 náhodně vybraní lapkové, ale každý jiným způsobem. Jak se liší počet možných poprav oproti původní verzi krále Dobromysla?

(A) Bude stejný.

(B) Bude 4 krát větší.

(C) Bude 16 krát větší.

(D) Bude 24 krát větší.

(E) Bude 64 krát větší.

(F) Bez přesného počtu zajatých lapků nelze rozhodnout.

Sbírky KoncepTestů (Matematika)

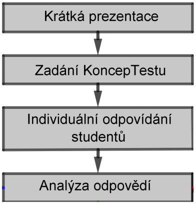
- **StonyBrook – SŠ**
- **cpp.edu – VŠ**
- **MathQuest – VŠ**
- **SercCarleton – VŠ**
- **GoodQuestions – VŠ**
- **Rozcestník – VŠ**

V ČJ...

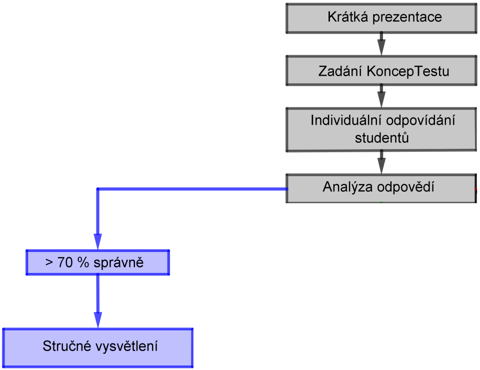
- Harčová, D. (2013). Konceptuálne úlohy vo vyučování matematiky. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze.
- Zadražil, T. (2018). KoncepTesty ve výuce matematiky. Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Srní.
- Zadražil, T. (2018). Peer Instruction ve výuce geometrie. Cesty k matematice. Matfyzpress, MFF UK, Praha.
- Zadražil, T. (2018) Zpětná vazba ve výuce matematiky a metoda Peer Instruction. Dva dny s didaktikou matematiky. PedF UK. Praha.
- Zadražil, T. (2019). Elektronické hlasování ve výuce matematiky. Užití počítačů ve výuce matematiky. Jihočeská Univerzita v Českých Budějovicích. České Budějovice.
- Zadražil, T. (2019). Pýthagorova věta v pojetí Peer Instruction. Dva dny s didaktikou matematiky. PedF UK. Praha.
- Zadražil, T. (2021). Peer instruction a výuka podobnosti. Matematika–fyzika–informatika. Prometheus. Praha.

Jeden blok Peer Instruction

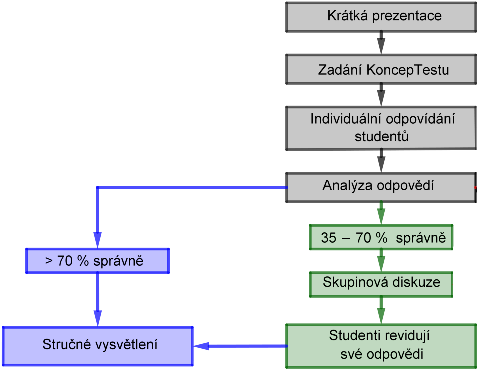
Jeden blok Peer Instruction



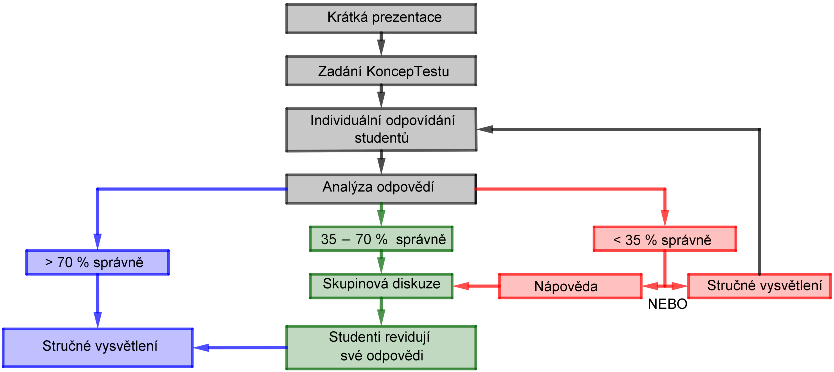
Jeden blok Peer Instruction



Jeden blok Peer Instruction



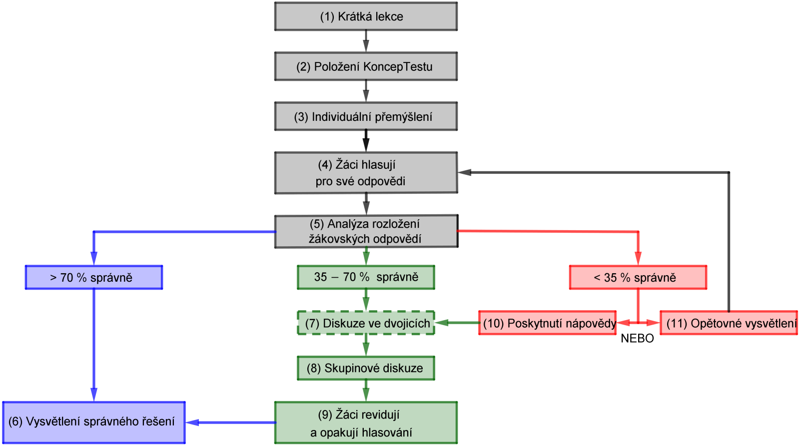
Jeden blok Peer Instruction[2,3]



[2] Eric Mazur (1997). *Peer instruction: a user's manual*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall. ISBN: 9780135654415.

[3] Trisha et. al. Vickrey (2015). „Research-Based Implementation of Peer Instruction: A Literature Review". In: *CBE—Life Sciences Education* 14.1, es3. DOI: 10.1187/cbe.14-11-0198.

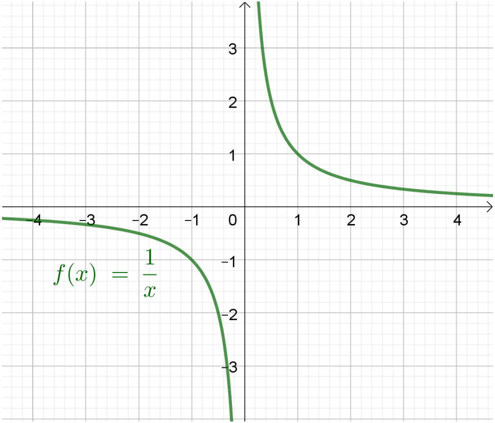
Pasažéři, standardní diskutéři, poradci a dominantní řečníci



*„Ono to bavení v té skupině.. jakože **ten, co se to snaží vysvětlit**, takže mi jako **nevíme, jestli to má dobře** nebo ne, **takže se nad tím snažíme více přemýšlet, než když nám to ukazujete vy**, protože **my víme, že vy** jakože vy, **to máte dobře**.. a **tak nad tim**, jakože, **tolik nepřemýšlíme.**“*

Konceptuálního obraz

Můj „první“ velký omyl. . .



. . . aneb typický člen rodiny monotónních funkcí.

Iracionalita iracionálních čísel

Stanovte, kolikrát se číslice jedna vyskytuje v desetinném zápisu čísla π.

„*Jednou,* $\pi = 3,14$*.*“

„*Dvakrát,* $\pi = 3,141592654$*.*“

„∞ krát, π má nekonečný desetinný zápis.“

„*Nevím, to snad ani nejde určit, když* π *má nekonečný neperiodický desetinný rozvoj.*“

Iracionalita iracionálních čísel

Stanovte, kolikrát se číslice jedna vyskytuje v desetinném zápisu čísla π.

„*Jednou,* $\pi = 3,14$*.*“

„*Dvakrát,* $\pi = 3,141592654$*.*“

„∞ krát, π má nekonečný desetinný zápis.“

„*Nevím, to snad ani nejde určit, když* π *má nekonečný neperiodický desetinný rozvoj.*“

Iracionalita iracionálních čísel

Stanovte, kolikrát se číslice jedna vyskytuje v desetinném zápisu čísla π.

„*Jednou,* $\pi = 3,14$*.*“

„*Dvakrát,* $\pi = 3,141592654$*.*“

„∞ krát, π má nekonečný desetinný zápis.“

„*Nevím, to snad ani nejde určit, když* π *má nekonečný neperiodický desetinný rozvoj.*“

Iracionalita iracionálních čísel

Stanovte, kolikrát se číslice jedna vyskytuje v desetinném zápisu čísla π.

„*Jednou,* $\pi = 3,14$.“

„*Dvakrát,* $\pi = 3,141592654$.“

„∞ krát, π má nekonečný desetinný zápis.“

„*Nevím, to snad ani nejde určit, když* π *má nekonečný neperiodický desetinný rozvoj.*“

Iracionalita iracionálních čísel

Stanovte, kolikrát se číslice jedna vyskytuje v desetinném zápisu čísla π.

„*Jednou,* $\pi = 3,14$*.*“

„*Dvakrát,* $\pi = 3,141592654$*.*“

„∞ krát, π má nekonečný desetinný zápis.“

„*Nevím, to snad ani nejde určit, když* π *má nekonečný neperiodický desetinný rozvoj.*“

Otevřená otázka = příležitost diferenciace

V čem se liší π od $\sqrt{2}$?

(. . . *kvalita odpovědi na otevřenou otázku odpovídá úrovni odpovídajícího.)*

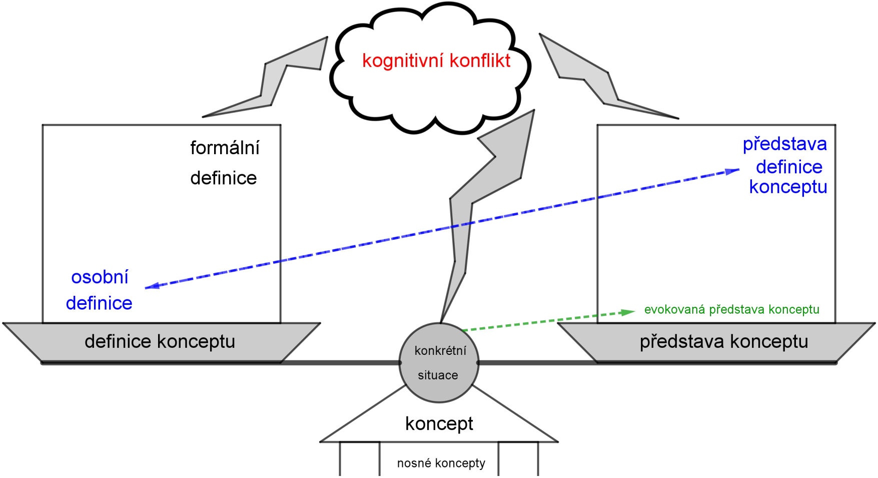
Konceptuální obraz[4]

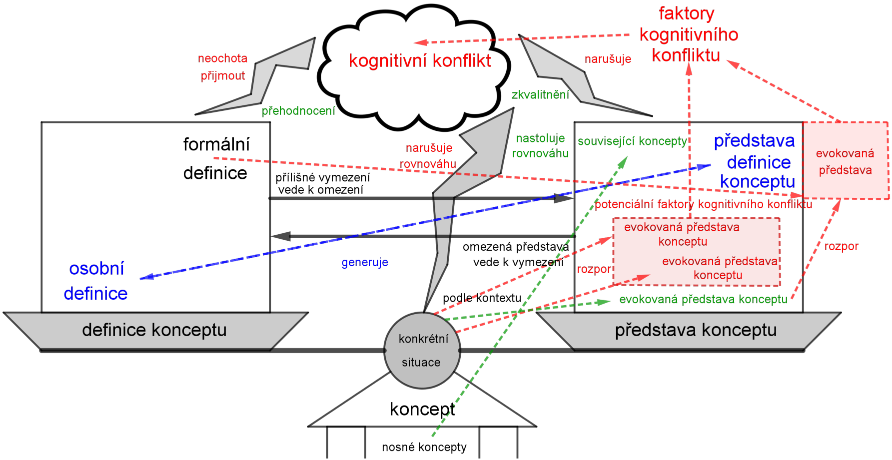
Konceptuální obraz

je celková kognitivní strukturu, která je asociována s daným konceptem, což obsahuje veškeré mentální obrazy, asociované vlastnosti a procesy.

- celková kognitivní struktura dokreslující význam konceptu;
- vyvíjí se řadu let, jak zraje jednotlivec;
- konceptuální obraz nemusí být koherentní a může se značně lišit od formální definice;
- rozdílné stimulace povedou k evokování rozdílných částí obrazu konceptu;
- evokace protichůdných částí vede ke kognitivnímu konfliktu;

[4] David Tall a Shlomo Vinner (1981). „Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity". In: *Educational Studies in Mathematics* 12.2, s. 151–169. ISSN: 1573-0816. DOI: 10.1007/BF00305619.


kognitivní konflikt
formální
definice
představa
definice
konceptu
osobní
definice
evokovaná představa konceptu
definice konceptu
konkrétní
situace
představa konceptu
koncept
nosné koncepty



faktory kognitivního konfliktu
kognitivní konflikt
neochota přijmout
přehodnocení
narušuje
zkvalitnění
narušuje rovnováhu
nastoluje rovnováhu
formální definice
související koncepty
představa definice konceptu
evokovaná představa
přílišné vymezení vede k omezení
potenciální faktory kognitivního konfliktu
evokovaná představa konceptu
omezená představa vede k vymezení
rozpor
evokovaná představa konceptu
rozpor
osobní definice
generuje
podle kontextu
evokovaná představa konceptu
definice konceptu
konkrétní situace
představa konceptu
koncept
nosné koncepty

Ctiborův konceptuální obraz pravděpodobnosti

Ctiborův konceptuální obraz pravděpodobnosti

"Pravděpodobně vyhrajeme!"

"Je možné, že..."

"Je to 50 na 50."

"Určitě spadne."

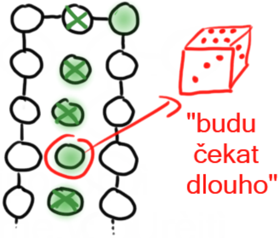
Ctiborův konceptuální obraz pravděpodobnosti

"Pravděpodobně vyhrajeme!"

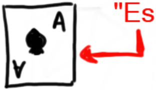
"Je možné, že..."

"Je to 50 na 50."

"Určitě spadne."



Ctiborův konceptuální obraz pravděpodobnosti



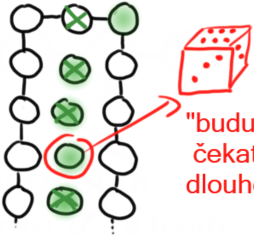
"Es je v balíčku málo - tj. je malá šance na vytažení esa."

"Pravděpodobně vyhrajeme!"

"Je možné, že..."

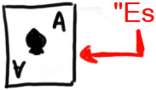
"Je to 50 na 50."

"Určitě spadne."



"budu čekat dlouho"

Ctiborův konceptuální obraz pravděpodobnosti



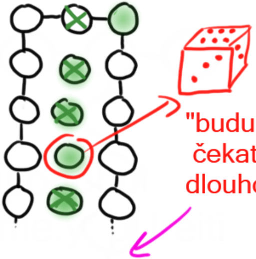
"Es je v balíčku málo - tj. je malá šance na vytažení esa."

"Pravděpodobně vyhrajeme!"

"Je možné, že..."

"Je to 50 na 50."

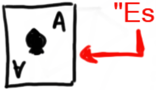
"Určitě spadne."



"budu čekat dlouho"

"1 ze 6 šancí, že padne..."

Ctiborův konceptuální obraz pravděpodobnosti



"Es je v balíčku málo - tj. je malá šance na vytažení esa."

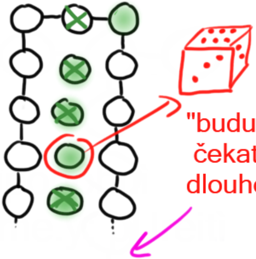
"Pravděpodobně vyhrajeme!"

"Tento tým vítězí v 60 % případů."

"Je možné, že..."

"Je to 50 na 50."

"Určitě spadne."

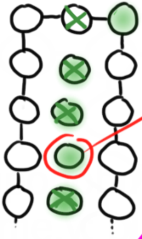


"budu čekat dlouho"

"1 ze 6 šancí, že padne..."

Ctiborův konceptuální obraz pravděpodobnosti

"Es je v balíčku málo - tj. je malá šance na vytažení esa."



"Pravděpodobně vyhrajeme!"

"Tento tým vítězí v 60 % případů."

"Je možné, že..."

"budu čekat dlouho"

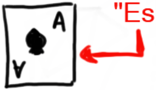
"Je to 50 na 50."

"Určitě spadne."

"menší plocha = menší šance na zásah"

"1 ze 6 šancí, že padne..."

Ctiborův konceptuální obraz pravděpodobnosti



"Es je v balíčku málo - tj. je malá šance na vytažení esa."

"Pravděpodobně vyhrajeme!"

"Tento tým vítězí v 60 % případů."

"Je možné, že..."

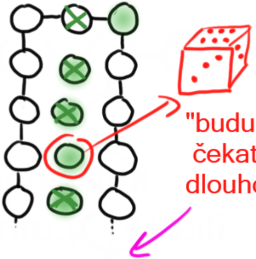
$(0 < P < 1)$

"Je to 50 na 50."

(100 %)

"Určitě spadne."

"menší plocha = menší šance na zásah"

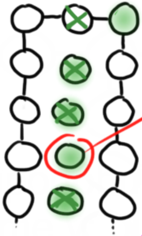


"budu čekat dlouho"

"1 ze 6 šancí, že padne..."

Ctiborův konceptuální obraz pravděpodobnosti

"Es je v balíčku málo - tj. je malá šance na vytažení esa."



"Pravděpodobně vyhrajeme!"

"Tento tým vítězí v 60 % případů."

"Je možné, že..."

"Je to 50 na 50."

(0 < P <1)

"budu čekat dlouho"

(100 %)

"Určitě spadne."

"menší plocha = menší šance na zásah"

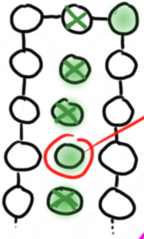
"1 ze 6 šancí, že padne..."

STATISTIKA

KOMBINATORIKA

Ctiborův konceptuální obraz pravděpodobnosti

"Es je v balíčku málo - tj. je malá šance na vytažení esa."



"Pravděpodobně vyhrajeme!"

"Tento tým vítězí v 60 % případů."

"Je možné, že..."

"budu čekat dlouho"

"Je to 50 na 50."

(0 < P <1)

(100 %)

"Určitě spadne."

"menší plocha = menší šance na zásah"

"1 ze 6 šancí, že padne..."

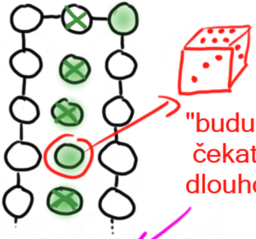
STATISTIKA

PŘ: Jaká je pravděpodobnost,
že v hodu a) dvěma bílými;
b) modrou a červenou; kostkou...

KOMBINATORIKA

Ctiborův konceptuální obraz pravděpodobnosti

"Es je v balíčku málo - tj. je malá šance na vytažení esa."



"Pravděpodobně vyhrajeme!"

"Tento tým vítězí v 60 % případů."

"Je možné, že..."

"budu čekat dlouho"

"Je to 50 na 50."

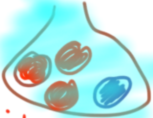
(0 < P <1)

(100 %)

"Určitě spadne."

"menší plocha = menší šance na zásah"

"1 ze 6 šancí, že padne..."



STATISTIKA

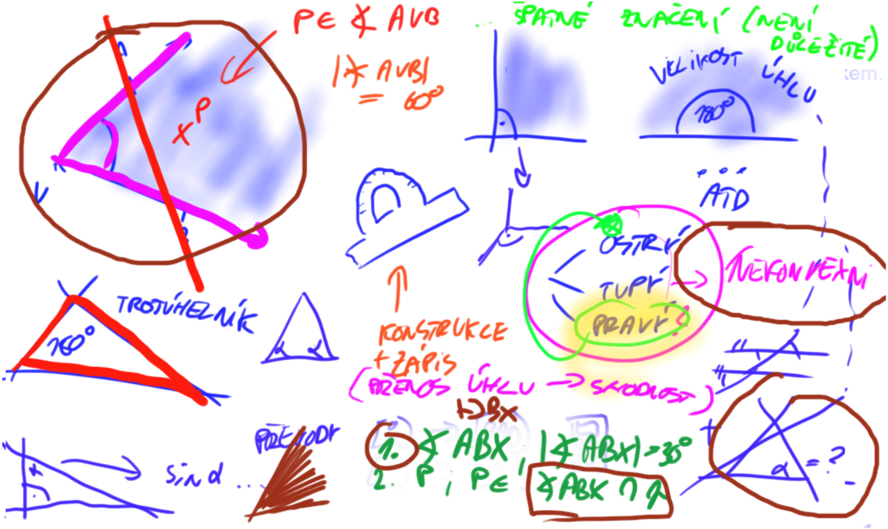
PŘ: Jaká je pravděpodobnost,
že v hodu a) dvěma bílými;
b) modrou a červenou; kostkou...

KOMBINATORIKA

Kvalita porozumění danému konceptu = košatost, harmonie a provázanost odpovídajícího konceptuálního obrazu.

Jak vypadá můj konceptuální obraz pro úhel?

Snáze se nám pracuje s projevy neporozumění – začněme tedy u nich!



Formální: část roviny vymezená dvěma polopřímkami se společným počátkem;
Osobní: dvě polopřímky se společným počátkem + oblouček

KoncepTesty v kontextu teorie konceptuálního obrazu

1. Konceptuální obraz žije v „hlavě jednotlivce“ a tento si nemusí být vědom trhlin a nedostatků.
   1.1 Potenciální faktory kognitivního konfliktu se stávají aktivními, jsou-li evokovány souběžně.
   1.2 Pouze skrze kognitivní konflikt je možno odstranit trhliny a nedostatky!
2. KoncepTesty připravujeme tak, aby navodily kognitivní konflikt a skrze tento zkvalitnily daný konceptuální obraz.
   2.1 Bereme v potaz běžné miskoncepce.
   2.2 Bereme v potaz běžné chyby žáků.
   2.3 Bereme v potaz zkreslení plynoucí z osobní definice konceptu.

PS: Tyto poznatky lze uplatnit i mimo KoncepTesty!

Google Preview

tištěná kniha e-kniha

Kritická místa matematiky základní školy v řešení žáků

Vondrová, Naďa

témata: matematika a statistika, pedagogika – didaktika

brožovaná, 464 str., 1. vydání
vydáno: únor 2016
ISBN: 978-80-246-3234-6
doporučená cena: 440 Kč

E-shop

Sdílet

Šťovíkův hrachový experiment

Sedlák Šťovík je horlivým příznivcem a pěstitelem biopotravin. Nedávno se na trhu objevilo nové hnojivo na přírodní bázi, jehož účinnost je zapotřebí otestovat. Šťovík proto svůj hrachový záhon rozdělil na dva stejné záhonky, přičemž na jednom pěstoval hrách obvyklým způsobem, a druhý pak hnojil novým hnojivem. Na závěr svých experimentů z obou záhonků náhodně sklidil po 40 hrachových luscích a spočítal, kolik kuliček se v každém nachází. Získal následující data:

Počet kuliček v luscích ze záhonku nehnojeného novým hnojivem:
4 6 5 6 5 6 4 6 4 9 5 3 6 7 5 4 6 4 6 5 6 7 4 6 5 2 8 6 5 6 5 5 5 4 4 4 6 7 5 6

Počet kuliček v luscích ze záhonku hnojeném novým hnojivem:
6 7 7 4 9 5 6 7 8 9 8 9 7 7 9 8 7 6 6 7 9 7 7 7 8 9 4 7 4 8 9 9 8 6 7 8 6 8 7 8

Může na základě popsaného experimentu sedlák Šťovík rozhodnout účinnost nového hnojiva? Diskutujte, zda je jeho experiment popsán dostatečně, či nikoli. Svá stanoviska stručně vysvětlete.

Nechvalně proslulá příšerná dvojčata Innumerathus a Matofila se nudila. „Už vím, co budeme dělat,“ povídá Matofila, „pojďme si zahrát kostky!“ „Kostky nemám rád.“ „Ale to nebudou jen tak obyčejné kostky, jsou to velmi *zvláštní* kostky,“ trvala na svém Matofila a vytáhla je ze staré krabice od čokolády. Byly tři; červená, žlutá a modrá. Innumerathus vzal do ruky červenou kostku. „Tahle je nějaká divná,“ řekl. „jsou na ní dvě trojky, dvě čtyřky a dvě osmičky.“ „Přesně tak, a ty ostatní jsou podobné,“ nevzrušeně odvětila Matofila. „Na žluté jsou dvě jedničky, dvě pětky a dvě devítky a na modré dvě dvojky, dvě šestky a dvě sedmičky.“ „Připadají mi nějaký cinknutý,“ řekl Innumerathus podezíravě. „Kdepak, jsou dokonale spravedlivé. Každá hodnota může padnout se stejně velkou pravděpodobností.“ „A jak vlastně teda budeme hrát?“ „Každý si jednu z nich vezmeme. Hodíme vždy oba kostkou zároveň, a komu padne vyšší číslo, vyhrává. Zahrajeme si o kapesné!“ Innumerathus se tvářil skepticky, takže sestřička rychle dodala: „Můžeš si vybrat kostku jako první, abys neřekl! Vyber si tu nejlepší z nich!“ „No teda, já nevím. . . “ řekl Innumerathus váhavě. Má hrát? Pokud ano, tak s jakou kostkou? A pokud ne, proč ne?

Zrádné kostky – Team-Based-Learning

Jak to s nimi je? Otevřená otázka skrze Socrative...

Zrádné kostky – Team-Based-Learning

Zjednodušené zadání úlohy:

(1) K dispozici tyto tři kostky:
- červená: $\boxed{3}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{4}$, $\boxed{8}$, $\boxed{8}$;
- žlutá: $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{5}$, $\boxed{5}$, $\boxed{9}$, $\boxed{9}$;[5]
- modrá: $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{6}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{7}$.

(2) Nejprve si jednu kostku vezme Innumerathus, poté si svou kostku zvolí Matofila.

(3) Každý ze sourozenců hodí svou kostkou a ten, komu padne vyšší hodnota, vyhrává.

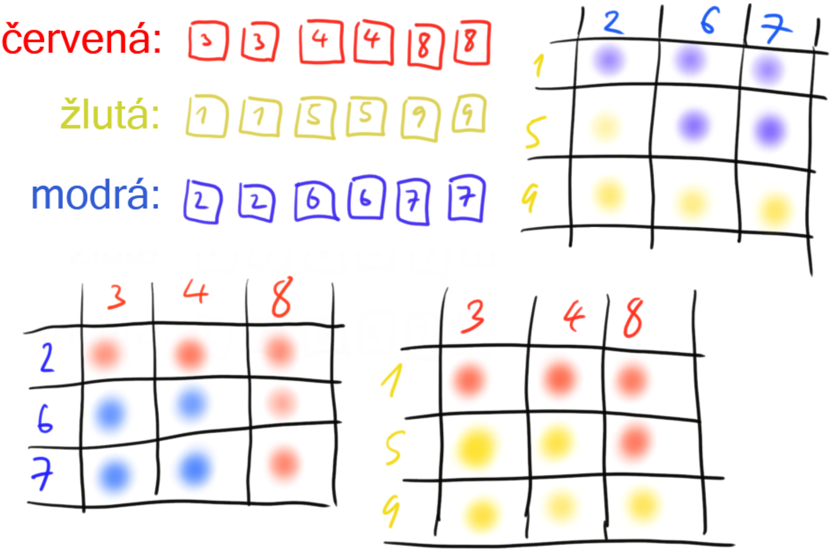
(4) Je hra spravedlivá? Své stanovisko vysvětlete.

---
[5] Ano, toto není žlutá, ale oranžová. . . Nicméně, žlutá byla špatně vidět a vždy můžeme uvažovat informatický trik: „*žlutá := oranžová*“

Zrádné kostky – Team-Based-Learning

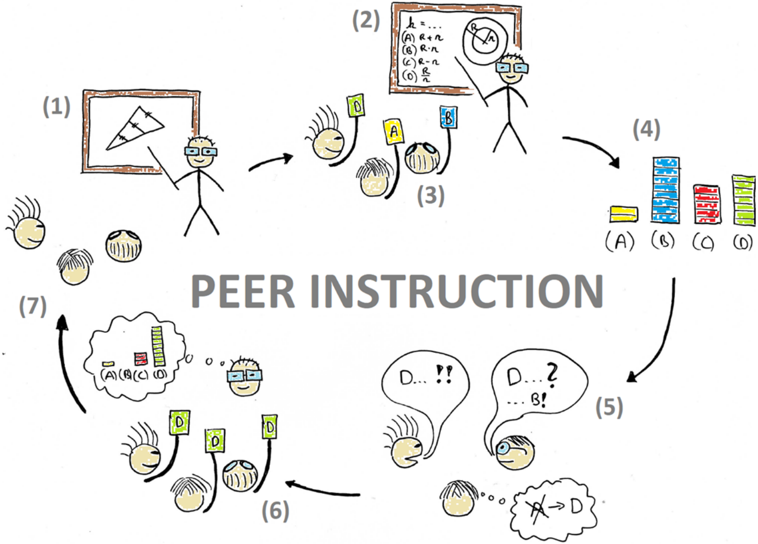
Jak to s nimi je? Otevřená otázka skrze Socrative…

Zrádné kostky



Otázky a komentáře

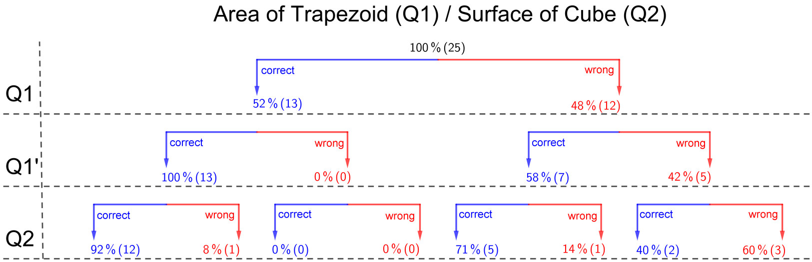
Takže ještě jednou...

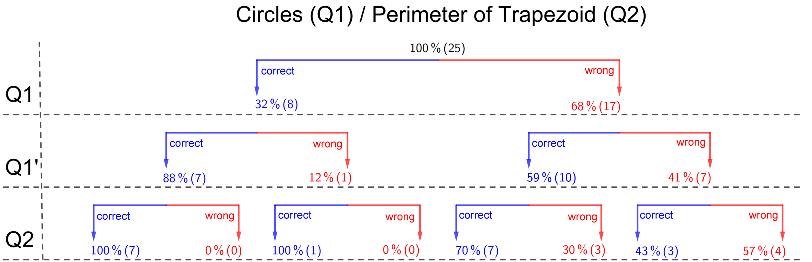


A to je konec!

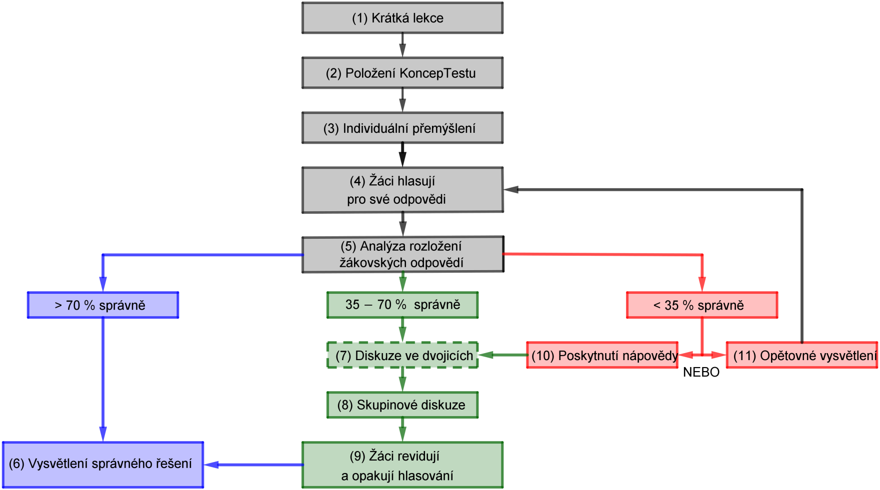
Prozatím...

Bonusy


Area of Trapezoid (Q1) / Surface of Cube (Q2)
Q1
Q1'
Q2
100 % (25)
correct
wrong
52 % (13)
48 % (12)
correct
wrong
100 % (13)
0 % (0)
correct
wrong
58 % (7)
42 % (5)
correct
wrong
92 % (12)
8 % (1)
correct
wrong
0 % (0)
0 % (0)
correct
wrong
71 % (5)
14 % (1)
correct
wrong
40 % (2)
60 % (3)


Circles (Q1) / Perimeter of Trapezoid (Q2)
Q1
Q1'
Q2
100 % (25)
correct
wrong
32 % (8)
68 % (17)
correct
wrong
88 % (7)
12 % (1)
correct
wrong
59 % (10)
41 % (7)
correct
wrong
100 % (7)
0 % (0)
correct
wrong
100 % (1)
0 % (0)
correct
wrong
70 % (7)
30 % (3)
correct
wrong
43 % (3)
57 % (4)

Pasažéři, standardní diskutéři, poradci a dominantní řečníci

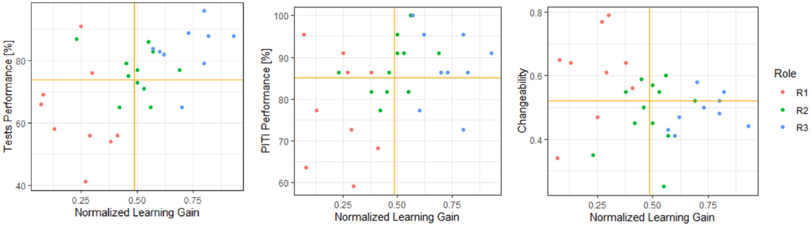


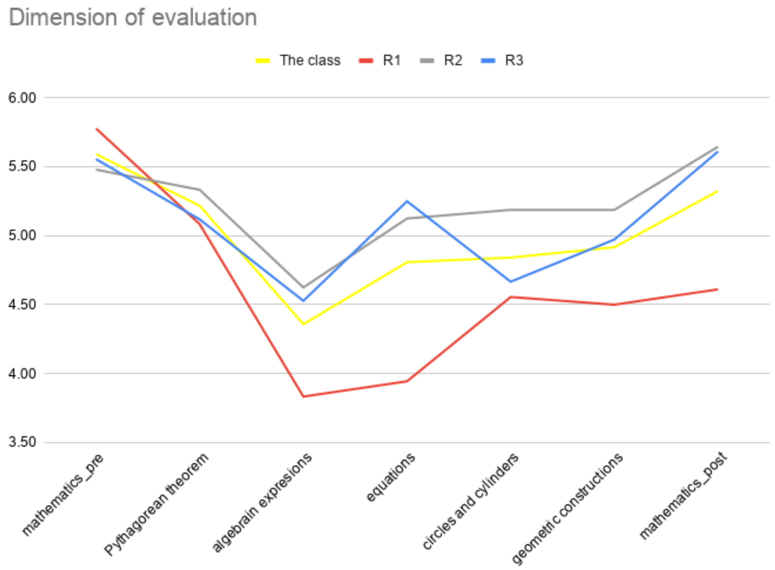
Tab. 1: Dominance – Effort model

	Weak effort to solve ConcepTests	Strong effort to solve ConcepTests
Weak need to dominate discussions	Passengers (R1)	Advisors (R3–)
Strong need to dominate discussions	–	Overwhelming speakers (R3+)

Tab. 6: Overall table

	The class	Passengers	Standard discussers	Overwhelming speakers and Advisors
Test T1	$\langle g\rangle = 0.49 \pm 0.22$	$\langle g\rangle = 0.22 \pm 0.11$	$\langle g\rangle = 0.49 \pm 0.11$	$\langle g\rangle = 0.75 \pm 0.12$
Test T2	$\langle g\rangle = 0.65 \pm 0.32$	$\langle g\rangle = 0.59 \pm 0.32$	$\langle g\rangle = 0.64 \pm 0.36$	$\langle g\rangle = 0.71 \pm 0.27$
Changeability	$c = 0.40 \pm 0.12$	$c = 0.48 \pm 0.09$	$c = 0.34 \pm 0.08$	$c = 0.35 \pm 0.07$





Dimension of evaluation
The class
R1
R2
R3
6.00
5.50
5.00
4.50
4.00
3.50
mathematics_pre
Pythagorean theorem
algebrain expresions
equations
circles and cylinders
geometric constructions
mathematics_post

FAVOR	Mean	Q1 (25%)	Q2 (75%)
7th Grade	3,0	2,4	3,5
8th Grade	2,9	2,6	3,3
9th GRade	3,0	2,6	3,3
Grammar School	2,8	2,5	3,0
TC01	2,1	2,0	2,0
TC02	2,4	2,0	3,0
TC03	2,5	2,0	3,0

TALENT	Mean	Q1 (25%)	Q2 (75%)
7th Grade	2,9	2,6	3,2
8th Grade	2,9	2,7	3,1
9th GRade	2,9	2,7	3,1
Grammar School	3,0	2,8	3,3
TC01	2,6	2,0	3,0
TC02	3,3	3,0	3,8
TC03	2,4	2,0	3,0

DIFFICULTY	Mean	Q1 (25%)	Q2 (75%)
7th Grade	2,7	2,5	2,9
8th Grade	2,5	2,2	3,7
9th GRade	2,4	2,1	2,7
Grammar School	2,4	2,1	2,8
TC01	3,1	3,0	3,0
TC02	2,7	2,0	3,0
TC03	1,8	1,0	2,0

MOTIVATION	Mean	Q1 (25%)	Q2 (75%)
7th Grade	2,6	2,3	2,9
8th Grade	2,5	2,2	2,8
9th GRade	2,6	2,3	2,9
Grammar School	2,8	2,5	3,0
TC01	2,5	2,0	3,0
TC02	2,8	2,0	3,0
TC03	2,8	2,0	3,0

IMPORTANCE	Mean	Q1 (25%)	Q2 (75%)
7th Grade	1,9	1,6	2,1
8th Grade	1,7	1,5	1,9
9th GRade	1,7	1,5	1,9
Grammar School	2,4	2,1	2,6
TC01	1,9	1,3	2,0
TC02	2,1	2,0	2,0
TC03	2,9	2,0	3,0

DILIGENCE	Mean	Q1 (25%)	Q2 (75%)
7th Grade	2,8	2,6	3,1
8th Grade	2,6	2,4	2,9
9th GRade	2,7	2,4	2,9
Grammar School	2,8	2,6	3,1
TC01	2,3	2,0	3,0
TC02	2,7	2,0	3,0
TC03	2,2	2,0	3,0

Úloha o skládání funkcí

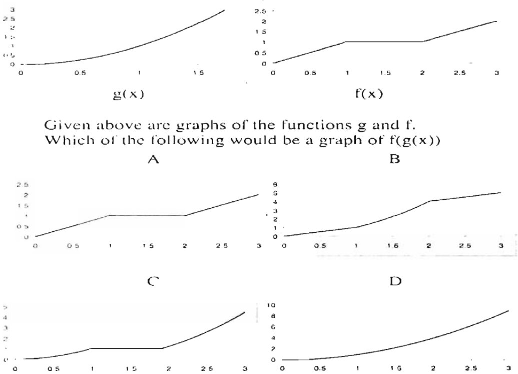
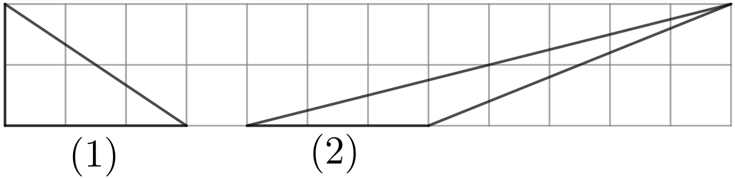


Figure 2. Composition of functions was used
to develop the idea behind the chain rule.

Kompletně převzato z[6].

[6]Scott Pilzer (2001). „PEER INSTRUCTION IN PHYSICS AND MATHEMATICS“. In: *PRIMUS* 11.2, s. 185–192. DOI: 10.1080/10511970108965987.

Obsah trojúhelníku



Obsah trojúhelníku (1) na obrázku činí 3 cm^2. Jaký je obsah trojúhelníku (2)?

(A) větší než 3 cm^2
(B) menší než 3 cm^2
(C) roven 3 cm^2
(D) bez měření nelze rozhodnout

Střední příčka

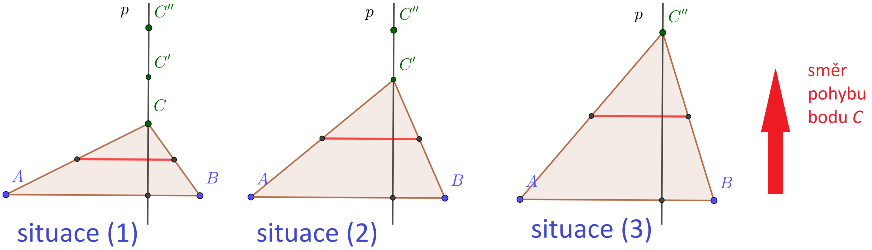
(*Čteno zleva-doprava.*) Na každé ze situací (1), (2) a (3) je červeně znázorněna střední příčka. Dále víme, že strana AB je stále stejně dlouhá, situace (1), (2) a (3) se liší toliko polohou bodu C, který se pohybuje po přímce p, jež je kolmá na AB . Mezi následujícími zvol pravdivé tvrzení.

(A) Nejkratší je střední příčka v situaci (1).

(B) Nejkratší je střední příčka v situaci (2).

(C) Nejkratší je střední příčka v situaci (3).

(D) Jiná možnost.



Vepsaná kružnice a trojúhelník

Bod S je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Pro trojúhelníky ABS, BCS a ACS platí:

(A) mají stejně velký obsah

(B) mají stejně velký obvod

(C) mají stejně dlouhou jednu z výšek

(D) mají stejně velké vnitřní úhly

(E) obecně nemají stejného nic

Druhá mocnina v proceptuálním pojetí

O kolik je 5000^2 větší než 4999^2

(A) o 1

(B) o 10

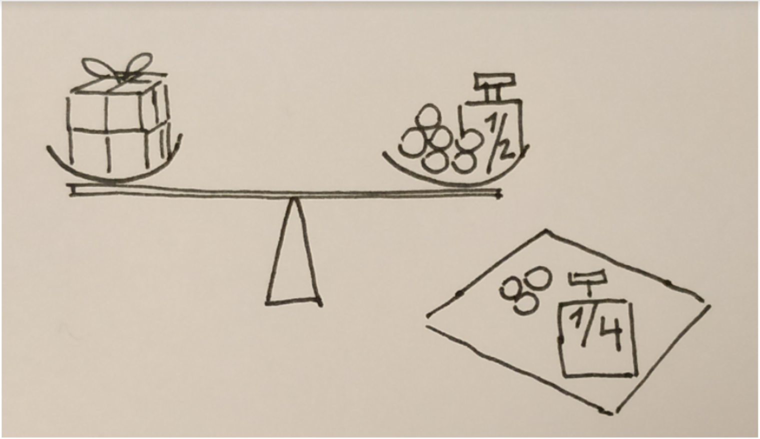
(C) o 100

(D) o 999

(E) o 9999

(F) jiná možnost

Rovnice



Vyber pravdivé tvrzení:

a) 1 kulička váží méně než ¼ kg
b) 1 kulička váží více než ¼ a méně než ½ kg
c) Váhu kuličky nelze určit
d) Váha kuličky může být libovolná

Tři kružnice

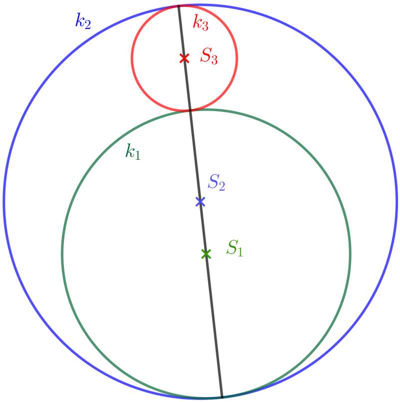
Tři kružnice na obrázku se vzájemně dotýkají a jejich středy leží na jedné přímce. Které z následujících tvrzení pro jejích délky O_1, O_2, O_3 je pravdivé?

(A) $O_2 > O_1 + O_3$

(B) $O_2 = O_1 + O_3$

(C) $O_2 < O_1 + O_3$

(D) bez měření nelze určit



Vzorec pro n-tý člen

Na první pohled lze říci, že posloupnost

$$a_n = \left(8^{3n^2+4n+1} + (-1)^{n+n^2+3} + 9^{n^3+3n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$$

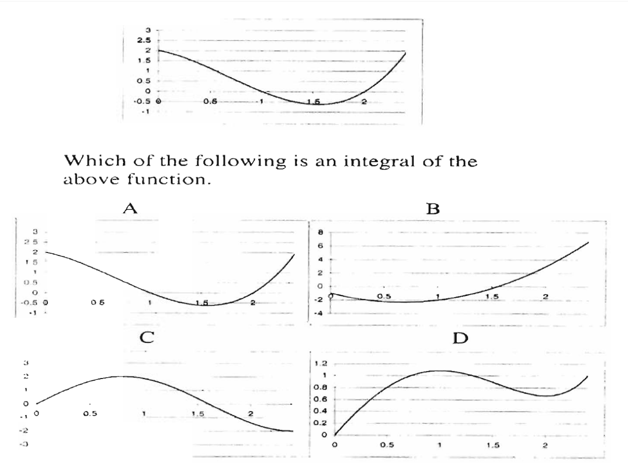
(A) . . . má pouze liché členy.

(B) . . . má pouze sudé členy.

(C) . . . má liché i sudé členy.

(D) Na první pohled nelze rozhodnout – uvedený vzorec je třeba upravit a hlouběji analyzovat.

Úloha o primitivní funkci



Kompletně převzato z[7].

[7] Scott Pilzer (2001). „PEER INSTRUCTION IN PHYSICS AND MATHEMATICS“. In: *PRIMUS* 11.2, s. 185–192. DOI:

Znaménko přirozené mocniny II.

Kolik z čísel:

$$(-\sqrt{2})^1; \quad (-2)^{13}; \quad (-2)^{32}; \quad \left((-2)^{32}\right)^7; \quad \left(\left((-2)^{31}\right)^7\right)^{13}$$

je záporných?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4 (F) 5

Obsah kruhu

Kolikrát se zvětší obsah kruhu, zvětší-li se jeho průměr dvakrát?

(A) dvakrát

(B) třikrát

(C) čtyřikrát

(D) jinakrát

Co je víc?

Rozhodněte, které z následujících tvrzení pro výrazy $2m+9$, $6n+1$ je pravdivé?

(A) $2m+9 > 6n+1$

(B) $2m+9 = 6n+1$

(C) $2m+9 < 6n+1$

(D) jiná možnost

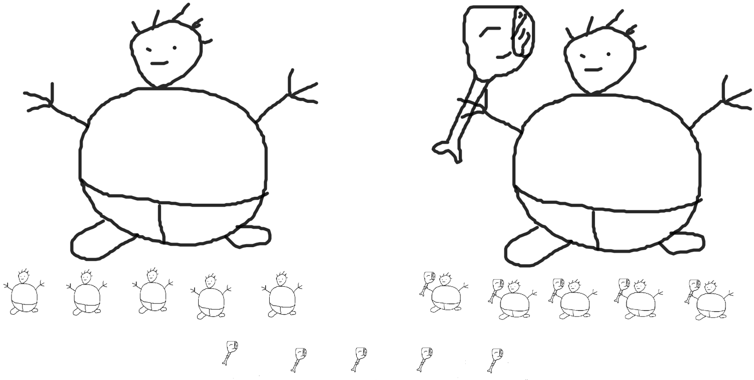
Pan Horák si hlídá váhu

Pan Horák během července přibral 5 % své hmotnosti a během srpna pak zhubl 5 % své hmotnosti. Porovnejte jeho váhu na konci června a na začátku září.

(A) pan Horák přibral

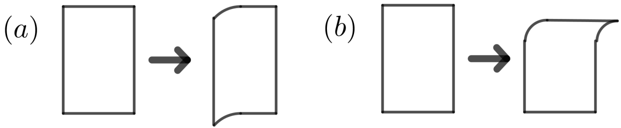
(B) pan Horák zhubl

(C) pan Horák ani nezhubl ani nepřibral



Povrch válce

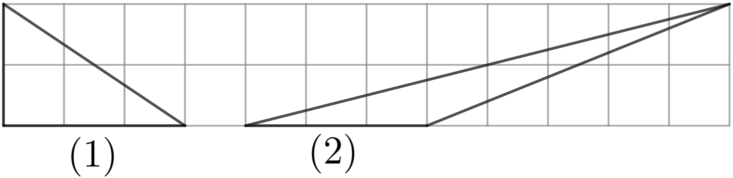
Ze dvou stejných papírových obdélníků (viz obrázek) je svinuta dvěma různými způsoby (a), (b) rulička o maximálním možném průměru. Obě ruličky jsou následně doplněny ve válec přilepením kruhových podstav. Porovnejte povrchy získaných válců a svůj závěr stručně vysvětlete.



Obsah trojúhelníku

Ve čtvercové síti jsou zakresleny trojúhelníky (1), (2) (viz obrázek). Rozhodněte, které z uvedených tvrzení pro jejich obsahy je pravdivé. Svou odpověď zdůvodněte.

(A) $S(1) > S(2)$
(B) $S(1) = S(2)$
(C) $S(1) < S(2)$
(D) nelze rozhodnout



Těžnice

Ctirad narýsoval trojúhelník ABC. Následným měřením určil vzdálenost vrcholu C od strany c jako $12\,\mathrm{cm}$. Rozhodněte, které z následujících tvrzení pro vzdálenost těžiště tohoto trojúhelníku T od vrcholu C je určitě pravdivé.

(A) $|CT| = 4\,\mathrm{cm}$

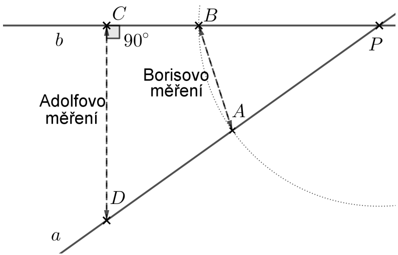
(B) $|CT| = 6\,\mathrm{cm}$

(C) $|CT| = 8\,\mathrm{cm}$

(D) jiná možnost

Vzdálenost přímek

V rovině jsou dány přímky a, b. Studenti dostali za úkol změřit jejich vzájemnou vzdálenost (viz obrázek). Adolf vzdálenost a, b měřil od bodu C k bodu D. Boris vzdálenost a, b měřil od bodu A k bodu B.



Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé. Svou odpověď zdůvodněte

(A) Vzdálenost přímek a, b správně změřil Adolf.
(B) Vzdálenost přímek a, b správně změřil Boris.
(C) Vzdálenost přímek a, b správně změřil Adolf i Boris.
(D) Jiná možnost.

Úloha o zápisu konstrukce trojúhelníku

Od pana učitele dostali žáci za úkol sestrojit rovnostranný trojúhelník ABC o délce strany $4\,\mathrm{cm}$, a svou konstrukci následně opatřit zápisem. Kamarádi Adolf, Boris a Ctibor odevzdali následující zápisy:

Adolfův zápis:

1. $AB;\ |AB| = 4\,\mathrm{cm}$
2. $m;\ m(A;\ 4\,\mathrm{cm})$
3. $n;\ n(B;\ 4\,\mathrm{cm})$
4. $C;\ C \in m \cap n$
5. $\triangle ABC$

Borisův zápis:

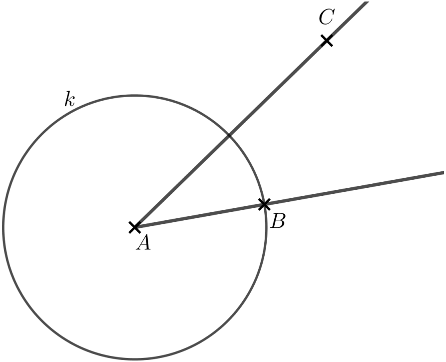
1. $AB;\ |AB| = 4\,\mathrm{cm}$
2. $m;\ m(A;\ 4\,\mathrm{cm})$
3. $\mapsto AX;\ |\sphericalangle BAX| = 60^\circ$
4. $C;\ C \in m \cap \mapsto AX$
5. $\triangle ABC$

Ctiborův zápis:

1. $AB;\ |AB| = 4\,\mathrm{cm}$
2. $m;\ m(A;\ 4\,\mathrm{cm})$
3. $\sphericalangle BAX;\ |\sphericalangle BAX| = 60^\circ$
4. $C;\ C \in m \cap \sphericalangle BAX$
5. $\triangle ABC$

Průnik úhlu a kružnice

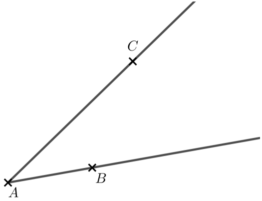
Rozhodněte, kolik společných bodů má kružnice k s úhlem BAC na obrázku.



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) > 3

Průnik úhlu a přímky

Nejprve si prohlédněte přiložený obrázek. Poté rozhodněte, které z následujících tvrzení (A)–(D) je nepravdivé, případně zvolte možnost (E).



(A) Lze sestrojit přímku, která nemá s $\sphericalangle CAB$ žádný společný bod.

(B) Lze sestrojit přímku, která má s $\sphericalangle CAB$ pouze jeden společný bod.

(C) Lze sestrojit přímku, která má s $\sphericalangle CAB$ pouze dva společné body.

(D) Lze sestrojit přímku, která má s $\sphericalangle CAB$ více než dva společné body.

(E) Všechna tvrzení (A)–(D) jsou pravdivá.

Stejné kořeny?

Která z následujících rovnice nemá stejné kořeny jako rovnice $2x + 1 = 5x - 7$:

(A) $1 = 3x - 7$

(B) $5x - 7 = 2x + 1$

(C) $2x - 4 = 5x - 12$

(D) $2x = 5x - 6$

(E) $-3x = -8$

(F) Žádná taková rovnice na seznamu není.

Stejné kořeny??

Kolik z níže uvedených rovnic má stejný kořen (řešení) jako rovnice $3x - 4 = 1 - x$:

- $\frac{3}{2}x - 2 = \frac{1}{2} - x$
- $-3x + 4 = -1 + x$
- $3x = -1 + x$
- $3x = 5 - x$
- $x = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4 (F) 5

Kdo řešil správně?

Adolf, Boris a Ctibor řešili tutéž rovnici. Každý však došel k jinému výsledku...

Adolf:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}(x-2) - \frac{x+2}{2} &= 2x-4 \\ 6(x-2)-(x+2) &= 4x-8 \\ 6x-12-x-2 &= 4x-8 \\ 5x-14 &= 4x-8 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Boris:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}(x-2) - \frac{x+2}{2} &= 2x-4 \\ 3(x-2)-(x+2) &= 4x-8 \\ 3x-6-x-2 &= 4x-8 \\ -2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Ctibor:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}(x-2) - \frac{x+2}{2} &= 2x-4 \\ 3(x-2)-(x+2) &= 4x-8 \\ 3x-6-x+2 &= 4x-8 \\ 2x-4 &= 4x-8 \\ -2x &= 4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Bez toho, aniž bys prováděl(a) zkoušku, nebo rovnici sám(a) řešil(a) rozhodni, které z následujících tvrzení je pravdivé.

(A) Rovnici správně vyřešil Adolf.

(B) Rovnici správně vyřešil Boris.

(C) Rovnici správně vyřešil Ctibor.

(D) Rovnici správně nevyřešil ani jeden.

Auta

Z Tábora vyjelo směrem do 240 km vzdálené Olomouce auto A rychlostí $v_{\mathrm{A}} = 60\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$. Hodinu po něm vyjelo týmž směrem z téhož místa auto B rychlostí $v_{\mathrm{B}} = 80\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$. Za Jak dlouho od svého výjezdu dohoní auto B auto A?

Mezi následujícími rovnicemi zvolte tu, která přímo vede k zodpovězení položené otázky:

(A) $60(x-1) + 80x = 240$
(B) $60(x+1) + 80x = 240$
(C) $60(x-1) = 80x$
(D) $60(x+1) = 80x$
(E) $60x = 80x$
(F) Ani jedna z rovnic neodpovídá situaci.

Brambory

Alfréd sám oškrábe brambory za 30 minut. Boris sám oškrábe brambory za 20 minut. Jakou část brambor oškrábou Alfréd s Bohoušem za minutu?

(A) $\frac{1}{12}$

(B) $\frac{1}{20}$

(C) $\frac{1}{30}$

(D) $\frac{1}{50}$

(E) $\frac{1}{60}$

(F) žádný z předchozích výsledků není správný

Dělníci

První dělník vykope jámu za 6 hodin, druhý za 5 hodin a třetí rovněž za 5 hodin. Za jak dlouho vykopou dělníci jámu společně, jestliže první dělník bude pracovat pouze hodinu a druhý dělník bude pracovat o hodinu méně než třetí dělník?

Rozhodněte, která z následujících rovnic vede k přímému nalezení hledané doby práce:

(A) $\frac{x}{6} + \frac{x}{5} + \frac{x}{5} = 1$
(B) $\frac{x}{6} + \frac{x-1}{5} + \frac{x}{5} = 1$
(C) $\frac{x}{6} + \frac{x-1}{5} + \frac{x-1}{5} = 1$
(D) $\frac{x}{6} + \frac{x+1}{5} + \frac{x+1}{5} = 1$
(E) $\frac{x}{6} + \frac{x+1}{5} + \frac{x}{5} = 1$
(F) žádná z výše uvedených rovnic nevede k hledané době

Úloha o skřítcích

Sedem škriatkov sa delilo o korisť. Postupne dostáva každý jednu zlatku. Keď už má každý z nich 15 zlatiek, to čo zostane, nestačí na to, aby každý z nich dostal ešte jednu zlatku. Koľko zlatiek mohli ulúpiť?

Koľko rôznych riešení môže mať táto úloha:

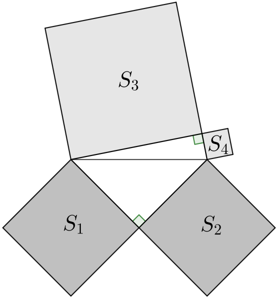
(A) žiadne
(B) jedno
(C) šesť
(D) sedem
(E) viac ako sedem

Kompletně převzato z[8].

[8] **harcova**.

Dva trojúhelníky a čtyři čtverce

Na obrázku jsou vyznačeny dva pravoúhlé trojúhelníky se společnou přeponou a čtverec nad každou z odvěsen.



Které z následujících tvrzení pro obsahy S_1, S_2, S_3, S_4 je pravdivé?

(A) $S_1 + S_2 > S_3 + S_4$

(B) $S_1 + S_2 < S_3 + S_4$

(C) $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$

(D) bez měření nelze rozhodnout

Vzorec pro n-tý člen VS rekurentní určení

Geometrickou posloupnost je možno definovat dvěma způsoby. Při daném q a a_1:

- jde o posloupnost, jejíž n-tý člen získáme jako součin $(n-1)$-ní mocniny kvocientu q a prvního členu posloupnosti a_1.
- jde o posloupnost, pro niž platí, že podíl $(n+1)$-ního a n-tého členu (v tomto pořadí) je konstantní, a sice q.

Jsou uvedené definice ekvivalentní?

(A) Ano, jsou. (B) Ne, nejsou.

Vzorec pro n-tý člen

Na první pohled lze říci, že posloupnost

$$a_n = \left(8^{3n^2+4n+1} + (-1)^{n+n^2+3} + 9^{n^3+3n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$$

(A) . . . má pouze liché (ve smyslu pořadí) členy.

(B) . . . má pouze sudé (ve smyslu pořadí) členy.

(C) . . . má liché i sudé (ve smyslu pořadí) členy.

(D) Na první pohled nelze rozhodnout – uvedený vzorec je třeba upravit a hlouběji analyzovat.

Podobnost 01

Mezi následujícími tvrzeními zvol pravdivé.

(A) Jsou-li si útvary podobné, pak jsou i shodné.

(B) Jsou-li útvary shodné, pak jsou si i podobné.

(C) Útvary jsou si podobné jedině a pouze tehdy, jsou-li navzájem shodné.

(D) Ani jedno z tvrzení (A)–(D) není pravdivé.

Podobnost 02

Adolf tvrdí, že jsou si všechny obdélníky podobné.
Boris hlásá, že jsou si podobné všechny pravoúhlé trojúhelníky.
Ctibor se musí rozhodnout, komu má dát za pravdu...

(A) pouze Adolfovi

(B) pouze Borisovi

(C) Adolfovi i Borisovi

(D) Ani Adolfovi ani Borisovi

Podobnost 03

K dispozici máme dva shodné červené trojúhelníky a dva shodné modré trojúhelníky. Z těchto trojúhelníků nezávisle na sobě Adolf a Boris složili jeden červeno-modrý čtyřúhelník. Co o těchto čtyřúhelnících můžeme s jistotou prohlásit?

(A) Že jsou navzájem shodné.
(B) Že jsou navzájem podobné.
(C) Že nejsou navzájem podobné.
(D) Že nejsou navzájem shodné.
(E) Nelze rozhodnout.

Stín a výška pyramidy

Uvažme, že pyramida je pravidelný čtyřboký jehlan o délce podstavné hrany 230 metrů. V okamžik, kdy délka našeho stínu odpovídá naší výšce, sahá stín pyramidy do vzdálenosti 31 metrů od základny pyramidy. Rozhodněte, jak vysoká je pyramida?

(A) 31 metrů.

(B) 146 metrů.

(C) 261 metrů.

(D) $>$ 261 metrů.

(E) Na základě těchto údajů nelze rozhodnout.

Obvod podobného lichoběžníku

Lichoběžník $ABCD$ má obvod 240 cm. Jaký obvod má jemu podobný lichoběžník $A'B'C'D'$ při koeficientu podobnosti $k = \frac{3}{2}$?

(A) menší něž 160 cm

(B) 160 cm

(C) mezi 160 cm a 360 cm

(D) 360 cm

(E) větší než 360 cm

(F) nelze rozhodnout

Obsah podobného lichoběžníku

Lichoběžník $ABCD$ má obsah $240\,\mathrm{cm}^2$. Jaký obsah má jemu podobný lichoběžník $A'B'C'D'$ při koeficientu podobnosti $k = 4$?

(A) $480\,\mathrm{cm}^2$

(B) $960\,\mathrm{cm}^2$

(C) $1920\,\mathrm{cm}^2$

(D) $3840\,\mathrm{cm}^2$

Kruhy

Uvažme dva kruhy $K(A, m)$ a $K'(B, n)$, přičemž $m > n$. Co platí pro koeficient jejich podobnosti?

(A) $k = m + n$

(B) $k = |m - n|$

(C) $k = |n - m|$

(D) $k = m \cdot n$

(E) $k = \frac{m}{n}$

(F) $k = \frac{n}{m}$

Krychle

Jaký je objem obrazu krychle, která je obrazem krychle v podobném zobrazení při $k = \frac{1}{2}$?

(A) dvakrát menší

(B) čtyřikrát menší

(C) jinakrát menší

(D) dvakrát větší

(E) čtyřikrát větší

(F) jinakrát větší

Dvě koule

Velká koule váží 64 Kg. Malá koule, která je vyrobena ze stejného materiálu jako velká váží 4 Kg. V jakém poměru jsou poloměry těchto koulí v pořadí velká:malá.

(A) 16 : 1 (B) 8 : 1 (C) 4 : 1 (D) 2 : 1

Krychle II.

Jaký je povrch obrazu krychle, která je obrazem krychle v podobném zobrazení při $k = \frac{1}{2}$?

(A) dvakrát menší

(B) čtyřikrát menší

(C) jinakrát menší

(D) dvakrát větší

(E) čtyřikrát větší

(F) jinakrát větší

Kozderkovo pole

Pan Kozderka se chystá prodat své pole čtyřúhelníkového tvaru. Do každého ze čtyř rohů proto zarazil kolík, mezi kolíky napnul provazy, a tímto způsobem zjistil, že:

- Mezi prvním a druhým kolíkem je 148 metrů.
- Mezi druhým a třetím kolíkem je 154 metrů.
- Mezi třetím a čtvrtým kolíkem je 115 metrů.
- Mezi čtvrtým a prvním kolíkem je 89 metrů.

(Poznamenejme, že kolíky pan Kozderka čísloval ve smyslu pořadí vrcholů čtyřúhelníku.)
Je možné na základě naměřených údajů určit s přesností na metry čtvereční výměru Kozderkova pole?

(A) ano, pan Kozderka změřil vše potřebné
(B) ne, pan Kozderka musí změřit ještě vzdálenost mezi prvním a třetím kůlem, nebo vzdálenost mezi druhým a čtvrtým kůlem
(C) ne, pan Kozderka musí změřit ještě vzdálenost mezi prvním a třetím kůlem i vzdálenost mezi druhým a čtvrtým kůlem
(D) ne, pomocí popsaných vzdáleností (včetně (B) a (C)) pan Kozderka nikdy výměru pole zjisti nemůže

Vzorec pro n-tý člen podruhé

Posloupnost je dána vzorcem $a_n = \left(-10n + 2n^2 + 50\right)_{n=1}^{\infty}$.
Mezi následujícími zvolte pravdivé tvrzení.

(A) Tato posloupnost má pouze kladné členy.

(B) Tato posloupnost má pouze nezáporné členy.

(C) Tato posloupnost má záporné i kladné členy.

(D) Tato posloupnost má pouze nekladné členy.

(E) Tato posloupnost má pouze záporné členy.

(F) Nelze rozhodnout.

Vzorec pro n-tý člen podruhé

Posloupnost je dána vzorcem $a_n = \left(-10n + 2n^2 + 53\right)_{n=1}^{\infty}$. Mezi následujícími zvolte pravdivé tvrzení.

(A) Tato posloupnost má pouze nezáporné členy.

(B) Tato posloupnost má záporné i kladné členy.

(C) Nejmenším členem této posloupnosti je číslo 1.

(D) Nelze rozhodnout.

Vzorec pro n-tý člen a rekurentní určení[9]

Posloupnosti určené vztahem $a_n = a_{n-1} + 4$ odpovídá pouze vzorec...

(A) $a_n = 4n - 2$

(B) $a_n = 4n$

(C) $a_n = 2^n$

(D) $a_n = 2 + 4(n - 1)$

(E) Ani jeden z výše uvedených vzorců posloupnost negeneruje.

(F) Posloupnost generuje více než jeden ze vzorců.

[9] *Stoony Brook University* (2018). *ConcepTests High School Mathematics*. URL: http://www.math.stonybrook.edu/~lbrgr/ConcepTests.html (cit. 26. 11. 2019).

Nejvyšší součet[10]

Který ze součtů je nejvyšší?

(A) $\sum_{n=1}^{5} 2n - 10$

(B) $\sum_{n=1}^{5} 2^{n-10}$

(C) $\sum_{n=1}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-10}$

(D) $\sum_{n=1}^{5} 2^{n} - 10$

[10] *Stoony Brook University* (2018). *ConcepTests High School Mathematics*. URL: http://www.math.stonybrook.edu/~lbrgr/ConcepTests.html (cit. 26. 11. 2019).

Nejvyšší součet (podruhé)[11]

Který ze součtů je nejvyšší?

(A) $\sum_{n=-1}^{0} 2^{n-1}$

(B) $\sum_{n=0}^{1} 2^{n-1}$

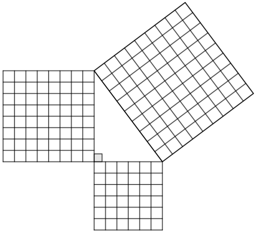
(C) $\sum_{n=1}^{2} 2^{n-1}$

(D) $\sum_{n=2}^{3} 2^{n-1}$

[11] *Stoony Brook University* (2018). *ConcepTests High School Mathematics*. URL: `http://www.math.stonybrook.edu/~lbrgr/ConcepTests.html` (cit. 26. 11. 2019).

Trojúhelníky, tři velké a spousta malých čtverců

Na obrázku je vynesen pravoúhlý trojúhelník, tři velké čtverce a mnoho malých čtverečků. Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé.



(A) Všechny malé čtverečky jsou stejně velké.

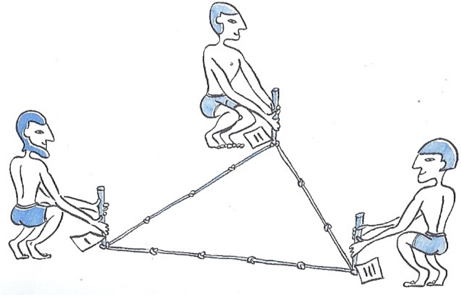
(B) V jednom z velkých čtverců jsou čtverečky, které jsou menší než ve zbývajících dvou čtvercích.

(C) V jednom z velkých čtverců jsou čtverečky, které jsou větší než ve zbývajících dvou čtvercích.

(D) Bez měření nelze rozhodnout, které z tvrzení (A)–(C) je pravdivé.

Harpedonapté

Před více než 4000 lety vytyčovali takzvaní *harpedonapté* pravé úhly pro zakládání egyptských chrámů. Rozhodněte, u kterého z mužů na obrázku se nachází pravý úhel.



(A) U muže I.
(B) U muže II.
(C) U muže III.
(D) U žádného z mužů – pravý úhel takto nevznikne.

Cheopsova pyramida

Adolf s Ctiborem se nacházejí v Egyptě u Cheopsovy pyramidy. Adolf se náhle zeptá: „Nevíš, jak je ta pyramida vysoká?“. Ctibor odpoví: „Nevím, ale za chvíli to vědět budu!“ Načež obejde pyramidu v těsné blízkosti kolem dokola a napočítá $460 + 460 + 460 + 460 = 1840$ kroků. Pak se vydá z rohu po jedné z bočních hran směrem k vrcholu pyramidy a napočítá 425 kroků (jeden jeho krok je dlouhý právě 0,5 metru). Na vrcholu ještě chvíli něco počítá, a poté zvolá: „Heuréka! Už vím, jak je Cheopsova pyramida vysoká!“

Které z následujících tvrzení nejpřesněji vystihuje skutečnost:

(A) Pomocí takto odkrokovaných vzdáleností je Ctibor opravdu schopen určit výšku pyramidy.

(B) Pomocí takto odkrokovaných vzdáleností je Ctibor opravdu schopen určit výšku pyramidy, úlohu by ale mohl vyřešit i pomocí jiných vzdáleností a nachodit se přitom méně.

(C) Pomocí vzdáleností, které Ctibor určil krokováním, není možné určit výšku pyramidy. Existují však jiné rozměry pyramidy, které by mohl určit krokováním a pomocí kterých by pak výšku určil.

(D) Ať by Ctibor krokoval jakékoli rozměry, pomocí získaných vzdáleností by nikdy nemohl být schopen určit výšku pyramidy.

Pravoúhlý trojúhelník?

Který z následujících trojúhelníků je pravoúhlý?

(A) $\triangle ABC$, $a = 6\,\mathrm{cm}$, $b = 3\,\mathrm{cm}$, $c = 4\,\mathrm{cm}$

(B) $\triangle ABC$, $a = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, $b = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, $c = \sqrt{6}\,\mathrm{cm}$

(C) $\triangle ABC$, $a = \sqrt{11}\,\mathrm{cm}$, $b = \sqrt{2}\,\mathrm{cm}$, $c = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}$

(D) $\triangle ABC$, $a = \sqrt{5}\,\mathrm{cm}$, $b = \sqrt{5}\,\mathrm{cm}$, $c = \sqrt{5}\,\mathrm{cm}$

Co když dva čtverce nedají dohromady čtverec třetí?

Trojúhelník *ABC* je určen trojicí délek stran a, b, c, přičemž c je nejdelší ze stran. Kolik z následujících tvrzení je pravdivých?

- Pokud je $c^2 > a^2 + b^2$, pak je *ABC* tupoúhlý $\triangle$.
- Pokud je $c^2 > a^2 + b^2$, pak je *ABC* ostroúhlý $\triangle$.
- Pokud je $c^2 > a^2 + b^2$, pak nelze obecně tvrdit, jaký je *ABC* $\triangle$.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

Vejde se to do výtahu?

Dědeček chvíli pátral, až na stránkách výrobce nalezl rozměry výtahu, který mají v paneláku: $170 \times 170 \times 240\,\mathrm{cm}$. O víkendu se totiž chystá koupit dřevěné latě o délce 3 metry a není si jistý, zda se do výtahu vejdou, nebo zda si bude muset zavolat kamarády na pomoc se stěhováním do schodů.

Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé:

(A) Latě se do výtahu s přehledem vejdou.

(B) Latě se do výtahu vejdou, bude to ale jen tak tak (tj. pokud by byl některý s rozměrů výtahu o milimetr kratší, latě by se do něj již nevešly).

(C) Dědeček do výtahu latě určitě nenacpe (aniž by je musel krátit).

(D) Něco takového není možné rozhodnout na základě pouhého výpočtu.

Vzorec pro n-tý člen VS rekurentní určení

Geometrickou posloupnost je možno definovat dvěma způsoby. Při daném q a a_1:

- jde o posloupnost, jejíž n-tý člen získáme jako součin $(n-1)$-ní mocniny kvocientu q a prvního členu posloupnosti a_1.
- jde o posloupnost, pro niž platí, že podíl $(n+1)$-ního a n-tého členu (v tomto pořadí) je konstantní, a sice q.

Jsou uvedené definice ekvivalentní?

(A) Ano, jsou. (B) Ne, nejsou.

Vzorec pro *n*-tý člen

Na první pohled lze říci, že posloupnost

$$a_n = \left(8^{3n^2+4n+1} + (-1)^{n+n^2+3} + 9^{n^3+3n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$$

(A) . . . má pouze liché členy.

(B) . . . má pouze sudé členy.

(C) . . . má liché i sudé členy.

(D) Na první pohled nelze rozhodnout – uvedený vzorec je třeba upravit a hlouběji analyzovat.

Edukační styl[12,13]

Podle interakce učitel – žák:

- transmisivní (případně instruktivní)
- konstruktivní

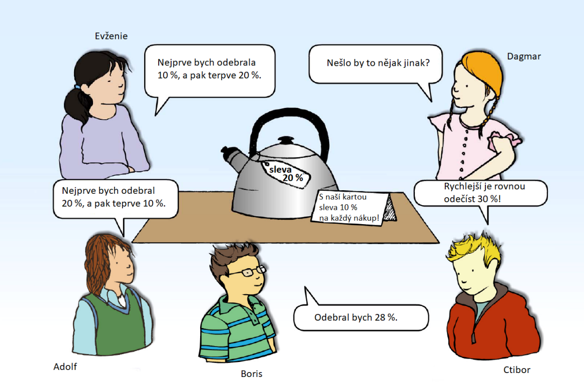
Podle míry zapojení žáka:

- metody aktivního učení
- …

Pedagogika praví:
„Žák se učí, učitel vyučuje."

[12]M Hejný (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy. ISBN: 978-80-7290-776-2.

[13]František Kuřina Milan Hejný (2015). *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál. ISBN: 978-80-262-0901-0.



Samostatně:

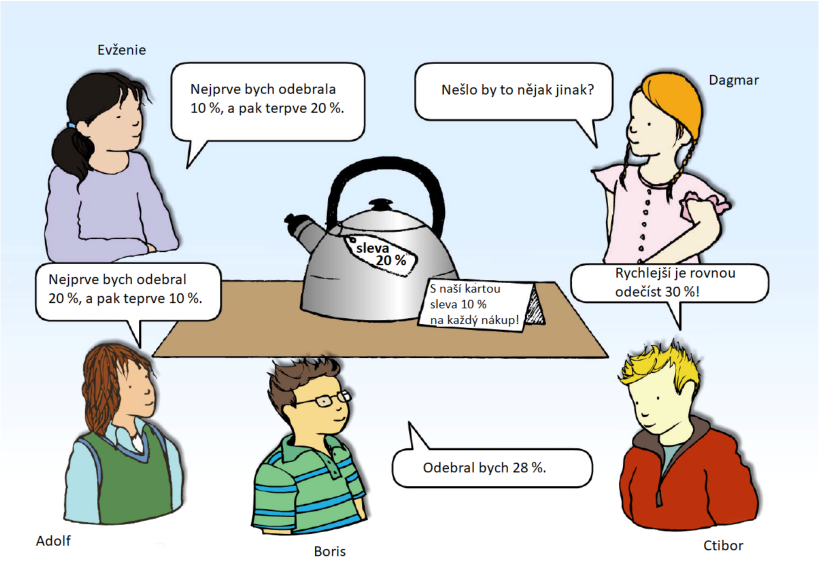
a) Seznam se s řešeným problémem a zamysli se nad názory jednotlivých dětí.

b) Který z nabízených postupů bys zvolil a proč?

c) Které děti mají pravdu a které nikoli? Svá stanoviska zdůvodni.

Ve skupině:

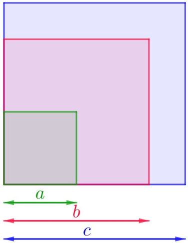
1) Diskutujte ve skupině své názory na a), b), c). Své názory vždy argumetujte a snažte se dobrat vzájemné shody.


Evženie
Nejprve bych odebrala 10 %, a pak terpve 20 %.
Nešlo by to nějak jinak?
Dagmar
sleva 20 %
S naší kartou sleva 10 % na každý nákup!
Nejprve bych odebral 20 %, a pak teprve 10 %.
Rychlejší je rovnou odečíst 30 %!
Odebral bych 28 %.
Adolf
Boris
Ctibor

ČESKO HLEDÁ DRUHOU MOCNINU 02

Concept Cartoons

Česko hledá druhou mocninu 03



(obrázek na projektoru)

0) *a*^2 je jiný zápis pro druhou mocninu čísla *a*

1) Přečti si výroky všech tří diskutérů i davu.

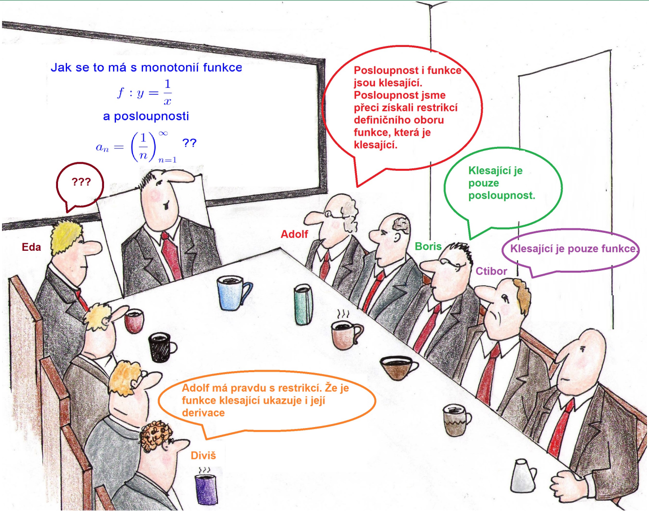
2) S kým souhlasíš, s kým nikoliv?

3) Zamysli se, do jaké míry má kdo pravdu? Pokud někdo pravdu nemá, pokus se jeho výrok lehce poupravit tak, aby pravdu měl.

Ve skupině:
Opět proveďte úkoly 1)-3)

4) Připravte se na obhajobu práčě skupiny před celou třídou.

Concept Cartoons[14]



[14] L Samková (2015). „Using Concept Cartoons to investigate future teachers' knowledge". In: *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, s. 3241–3247.