Dušan JEDINÁK

50 rokov v učiteľských službách

Zápisky priateľa matematickej kultúry

Topoľčany
MMXVIII

Úvodné zhrnutie

Číslo päťdesiat

(sedem ako číslo plnosti znásobené sebou samým plus božské číslo jeden)

znamená *neprekonateľnú plnosť*.

Asi aj preto si intenzívnejšie pripomínam 50 rokov strávených v prostredí našich výchovnovzdelávacích inštitúcií.

Na prelome rokov 2008 a 2009 som urobil krátke vyhodnotenie svojej učiteľskej práce za predchádzajúcich 40 rokov a zavesil som to na moju webstránku http://www.era.topindex.sk/ do časti D.J. - 40 rokov v učiteľských službách »

Po desiatich rokoch dopĺňam a spracúvam ďalšie 10 ročné obdobie do publikácie D. J. 50 rokov v učiteľských službách ***Zápisky priateľa matematickej kultúry***.

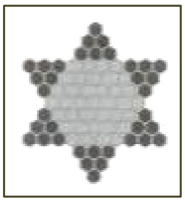
Od školského roku 2008/2009 som začal pôsobiť na ZŠ Tribečská ul., v Topoľčanoch ako asistent a učiteľ počtov a merby pre intelektovo nadaných žiakov. Niektoré didaktické materiály som ponúkal na školskej webstránke: http://www.zstribecskato.sk/skolska-m.html. So žiakmi sme dosiahli aj niektoré nečakané úspechy: Artuš PETRÁŠ, bol celoštátnym víťazom Pytagoriáda 6 (školský rok 2009/2010) aj PYT7 (2010/ 2011), Martin BABALA bol ako siedmak *úspešný riešiteľ* (12. miesto) celoslovenského kola PYT8 v Bratislave (2016/2017) a ako ôsmak bol úspešný (6.- 8.) v krajskom kole MO-Z9 v Nitre (2017/18). Aj na ďalších talentovaných žiakov (napr. M. Pavlík, A. Rybanský, Š. Varga, R. Kuník, O. Longauer, P. Furák, T. Gábriš) spomínam častejšie a rád.

V školských rokoch 2012 – 2014 som viedol matematické semináre i vyučovacie hodiny matematiky pre gymnazistov Gymnázia sv. Vincenta de Paul v Topoľčanoch (http://gymto.edupage.info/text/?text=teachers/73060)

Zdá sa, že som sa snažil v našich školách (základných, stredných i vysokých) šíriť zmysluplnejší a plnohodnotnejší vzťah k vyučovaciemu predmetu *matematika* (teda skôr a výstižnejšie *počty a merba*), možno som popularizoval vo svojom najbližšom okolí aj akúsi matematickú kultúru. Bol som *šibnutý svojim spôsobom*. Neviem, či budem mať ešte čas, sa za to aj hanbiť. Mám zmiešané pocity o tom, aký to môže mať, pre mňa či pre iných, zmysel. Možno sa niekedy, tu alebo tam, dozvieme a uvidíme...

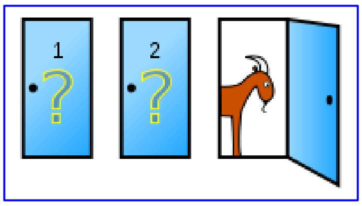
Zápisky priateľa matematickej kultúry

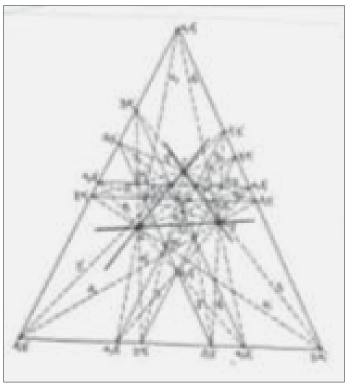
Záverečná úvaha:

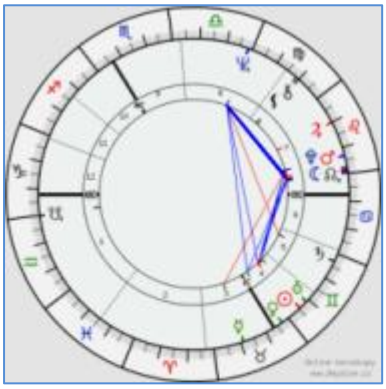


Táto „hviezda“ je vytvorená zo 73 menších šesťuholníkov. Čiernych je 6 · 6 = 36 a šedých je 37.

73 je „hviezdne“ číslo.







Richard FEYNMAN

(1918 –1988)

Nobelova cena za fyziku (1965)

Ak vás zaujíma úplný obraz sveta,
jediná cesta ako ho pochopiť,
je pomocou matematického popisu...

Aby sme vedeli chápať prírodu, môže byť nevyhnutné,
aby sme lepšie chápali matematické vzťahy

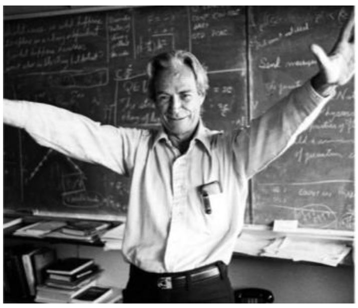
Nepoznať' matematiku
je výrazným obmedzením na ceste
k pochopeniu sveta.

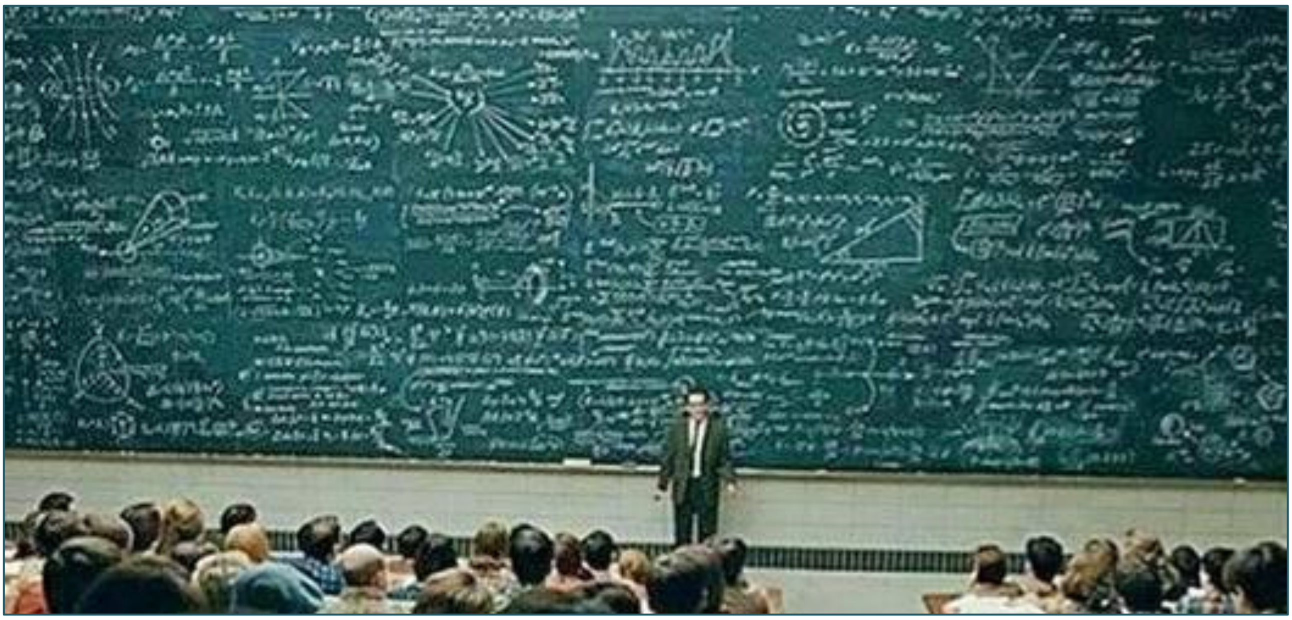
Chcel som hlavne, aby ste dokázali oceniť nádheru tohto sveta a vedeli naň pozerať aj fyzikálnym spôsobom, lebo som presvedčený, že to patrí k hlavnej časti skutočnej kultúry dnešných čias...

Nič síce neviem, ale toľko zase viem, že všetko je zaujímavé, ak to študujete dostatočne hlboko.

Nikdy nemáme definitívne pravdu. Môžeme si byť istí iba tým, že sa mýlime.

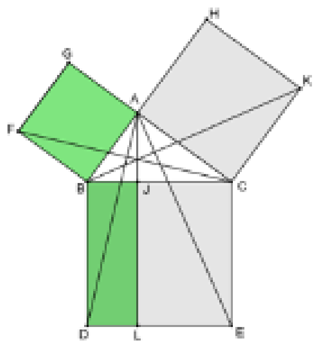
Fyzika nie je najdôležitejšou vecou. Tou je láska.





Školská matematika a jej kultúrne hodnoty

Úvod



Každý človek si matematiku ako školský predmet asi veľmi dobre pamätá. Viacerí ľudia skôr z tej nepríjemnejšej stránky, keď im chýbala presnosť, dôslednosť, svedomitosť, pracovitosť či netradičný pohľad na postup riešenia – tvorivosť a vhľad do situácie. Vtedy bolo treba správnejšie premýšľať, odhaliť súvislosti, zdôvodňovať i dokazovať poznané zákonitosti. Zostalo zo štúdia školskej matematiky niečo pre praktické vzdelanie a všeobecnú kultúru? Skúsme sa zamyslieť nad tým, kde, kto, kedy a ako vníma nielen školskú matematiku, ale celý logický spôsob myslenia, matematickú kultúru.

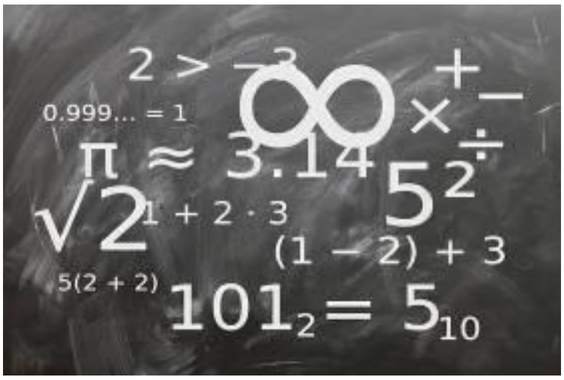
Korene matematiky

Všetko, čo je okolo nás, čo nachádzame v prírode, čo vytvárame ľudskými rukami, sa skladá z častí, má nejakú štruktúru. Ak prvky majú vlastnosti a medzi prvkami existujú vzťahy i pravidlá pre skladanie, môžeme takýto systém študovať pomocou matematiky. Vzrušujúca harmónia prírody prebúdza v nás cit, ktorý nazývame matematikou. Matematika je výsledkom myšlienkového procesu, pri ktorom sú reálne procesy nahradené myslenými matematickými modelmi. Matematiku môžeme chápať ako také myšlienkové bádanie, ktoré pomocou určitých stanovených pravidiel odvodzuje závery z definovaných pojmov a prijatých princípov. Matematika sa snaží odhaliť nové súvislosti a logicky ich usporiadať. *Matematika – to je akýsi stroj na zmocňovanie sa významných faktov a na generovanie významných dôsledkov* (I. Stewart, *1945). Z matematiky sa vytvoril systém organizovaného myslenia, ktorý sa neustále rozvíja. Matematika sa stala jednou z veľmi úspešných metód poznania sveta, v ktorom žijeme. Matematika vznikla z potrieb ľudí, z merania zeme, určovania objemov nádob, z počítania času, zo sporov a hádok, čo sa v budúcnosti stane.
Prvé matematické vedomosti boli potrebné pri poľnohospodárskych prácach, pri stavbe obydlí, pri love zvierat, v zápase s prírodnými podmienkami. Človek, ktorý triedil a pamätal si skúsenosti, vybadal príčinnosť, snažil sa vysvetliť podmienky a následky javov. Idealizoval predstavy, vytváral abstraktné pojmy, pripravil si symboly. Začal zovšeobecňovať, pýtať sa na argumenty, odvodzovať. Prišiel na metódu dôkazov, začal skúmať svoju reč, spôsob vyjadrovania i usudzovania.
Z matematických úvah sa stal nástroj ľudského ducha pre správne a presné štruktúrované myslenie.

V priebehu dejín

Už koncom 5. storočia pred n. l. Filolaos z Krotonu vytušil: *Číslo je vodcom a pánom ľudského myslenia. Bez jeho sily by všetko zostalo tajuplným a nejasným*. Pytagoras zo Samu (asi 570 až 496 pred n. l.) a jeho obdivovatelia chápali slovo *mathema* ako pozorovanie, znalosť, vedenie o niečom. Pojem *techné* bol vyhradený pre umenie, zručnosť. Veľmi názorné je chápanie slov *matema, matano* v zmysle *učím sa premýšľaním*. Neskôr sa slovo matematika používalo pre učenie, vedenie, náuku vôbec, bolo aj označením určitého druhu filozofie, spôsobu uvažovania. Roger Bacon (1214–294) vybadal, že matematika je ľudskému duchu vrodená ako forma myslenia pre popis prírody. Galileo Galilei (1564–1642) zaviedol experimenty riadené matematikou, René Descartes (1596–1650) zdokonalil symboliku, do geometrie vniesol algebru – počítanie. Isaac Newton (1643–1727) a Gottfried Leibniz (1646–1716) vypracovali matematický spôsob vystihnutia zmeny a pohybu, ktorý otvoril cestu praktickému využitiu diferenciálneho a integrálneho počtu. Albert Einstein (1879–1955) fyzikálno–filozofickými výsledkami potvrdil svoje presvedčenie: *Čisté myslenie môže vystihnúť realitu*. Z rôznych vyriešených problémov zostávajú účinné spôsoby, metódy pre podobné pojmové štruktúry. Ak odhaľujeme a zhŕňame všeobecné univerzálne myšlienkové postupy a idey, tak robíme matematiku.

Všeobecný prostriedok na vysvetlenie



To, čo matematika v súčasnosti skúma, sa nedá jednoznačne vyjadriť, neexistuje úplne vedecká definícia matematiky. *Matematika je zároveň umenie i veda, je to eklektická zmes úžitku a tvorby, empirizmu a intuície* (J. Ewing). Predmetom matematiky sa môže stať čokoľvek. Podstatou matematiky sú modelové princípy ľudského myslenia upravené do štruktúr logického systému. Matematika sa určite dotýka najvšeobecnejších i prakticky najnevyhnutnejších javov. Často už nemôžeme určiť hranice medzi matematikou a disciplínami, v ktorých sa používa. Matematika sa stala metódou, dômyselným nástrojom ľudského umu, ktorý používa človek pre správne a presné myslenie. Matematika sa stala technikou myslenia, pretože ľudské myslenie nikde nevystupuje s takou jasnosťou ako v matematických pojmoch a úvahách. Matematika ako impozantná stavba ľudského ducha a pyramída myšlienok poskytuje rozumu široký priestor pre rozlet abstraktných postupov, cesty intuície až k tajomstvám nekonečna. Matematika ako najoriginálnejší výtvor myšlienkových pokusov a zápasov ukázala, že najväčšie abstrakcie sú tými pravými nástrojmi, ktorými kontrolujeme svoje uvažovanie o konkrétnych faktoch. Eugene Paul Wigner (1902–1995), americký teoretický fyzik, nositeľ Nobelovej ceny (1963), konštatoval: *Zázračná vhodnosť matematického jazyka pre formuláciu fyzikálnych zákonov je skvelý dar, ktorý ani nechápeme, ani si ho nezaslúžime*. V dejinách matematiky sa predstavujú vytrvalé sily rozvoja ľudských myšlienok. Tisíce matematikov súčasnosti predkladá ročne desaťtisíce matematických viet aj s dôkazmi. Zmocňujú sa matematického sveta svojím tvorivým duchom. Zvlášť v období samočinných počítačov vzrástla spoločenská potreba výsledkov z matematických výskumov. Zvýraznila sa nevyhnutnosť poznať pravidlá, algoritmy. Celé tisícročia ukladala matematika svoje výpočtové postupy pre úžitok celého ľudstva. Je len vecou odborných schopností každého jednotlivca, aby ich vhodne používal nielen vo sfére matematickej informatiky, ale aj na zušľachťovanie vzdelanostných i vedecko–technických procesov. Matematika ako veda o číslach, priestore a funkciách sa prerodila na univerzálny jazyk vhodný pre jednoduché i veľmi všeobecné vyjadrovanie. Matematika vyrástla do vnútornej krásy i praktického úžitku. Došlo k matematizácii celého vedeckého poznania. Ukázalo sa, že matematika je nevyhnutná vo vede i v technike, pomáha aj v hudbe, architektúre, ekonómii, sociológii i v športe. Ťažko sa hľadá odbor ľudskej činnosti, kde by nemohla zasiahnuť. Neustále sa presviedčame, že matematika je až neuveriteľne praktická. Legendárny fyzik Niels Bohr (1885–1962) naznačil: *Matematika sa podobá určitému druhu* *spoločného jazyka, uspôsobenému na vyjadrovanie vzťahov, ktoré buď nie je možné alebo je zložité objasňovať slovami*. Matematika sa stala najviac formalizovaná a prísne kontrolovaná sféra ľudského poznania.

Užitočnosť matematického vzdelania

Uvediem aspoň stručný prehľad argumentov, ktoré môžu presviedčať o plnohodnotnej efektívnosti vzdelávania v matematických oblastiach. Systematicky rozvíjaná a používaná *matematická kultúra* umožňuje:

1. rozvoj abstraktného myslenia a praktických idealizácií, možnosť odhalenia všeobecných zákonov a hlbšej podstaty sveta;
2. návyk na presné formulovanie problémov, definovanie pojmov a spresňovanie významu slov i pre tvorivé využívanie ľudského intelektu všeobecne;
3. hospodárnosť úvah, logické zdôvodňovanie a argumentovanie (overovanie hypotéz, správnosť úsudkov, protipríklady);
4. odovzdávanie matematických postupov (jazyk, symbolika, štruktúry, deduktívna výstavba, algebraizácia, dôkazové metódy);
5. uplatnenie vhodných výpočtových algoritmov a počítačovej techniky, praktické aplikácie v technickej a technologickej praxi;
6. využitie kombinačných schopností a pravdepodobnostných i štatistických odhadov (združovanie a organizovanie údajov, predpovede, kontroly);
7. podnety pre analýzu i syntézu rôznorodých problémov a postupov ich riešenia, (matematizácia reálnych situácií, stratégia odhadov);
8. geometrickú predstavivosť, schopnosť znázorňovať a využívať zhodnosť a podobnosť;
9. možnosť predvídania pomocou formálnych kalkulov s dobrou mierou spoľahlivosti;
10. vyhľadávanie spôsobov myslenia, ktoré vysvetľujú, organizujú, zjednodušujú a umožňujú pochopiteľnosť prírody i človeka v nej.

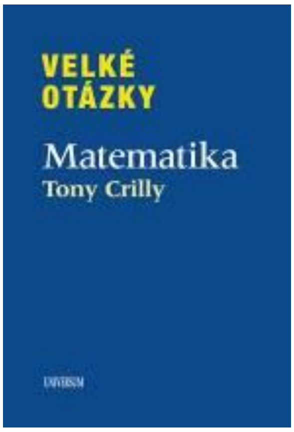
Pomoc aj pre výchovu charakteru

Už aj školská matematika ako odraz vzrušujúcej harmónie prírody v ľudskom myslení sa nevyhnutne a organicky podieľa na formovaní nielen špecifickej vedomostnej úrovne, ale môže svojím obsahom i vyučovacími formami aj mnohostranne výchovne pôsobiť, utvárať nielen intelekt, ale aj vhodné morálne i vôľové vlastnosti. Pri matematickom štúdiu možno vytvárať, rozvíjať a upevňovať aj tieto kladné charakterové, vôľové a morálne vlastnosti: svedomitosť, presnosť, sústavnosť, dôkladnosť, sebakritickosť, zodpovednosť, iniciatívnosť, vytrvalosť, húževnatosť. Matematické myslenie sa pravidelne neznáša s povrchnosťou a nesystematickosťou. Krása logickej výstavby, hlboká nadväznosť a prehľadnosť postupov zanecháva po štúdiu matematiky aj estetické zážitky. Kvalitné vyučovanie a štúdium matematických myšlienkových postupov môže výrazne prispievať k ľudskej dôstojnosti. *Celá naša dôstojnosť spočíva v myslení. V ňom sa musíme vzopnúť, nielen v priestore a čase, ktoré nedokážeme naplniť. Usilujme sa teda, aby sme mysleli správne. V tom je princíp mravnosti* (francúzsky mysliteľ Blaise Pascal, 1623 – 1662). Trvalým a prehlbujúcim sa využívaním neformálnej spolupráce a nezištnej vzájomnej pomoci možno podporiť pocit vzájomnej spolupatričnosti aj v rozširovaní matematickej kultúry.

Neustála otvorenosť

Kurt Gödel (1906–1978), matematik s najslávnejšími výsledkami 20. storočia, otriasol perspektívy matematiky odhalením, že v každom dostatočne rozvinutom formálnom systéme existujú obsahovo zrozumiteľné vety, ktoré sú v rámci danej sústavy formálne nedokázateľné. Aj tak však matematika žije ako zložitý a rozvetvený organizmus, ktorý sa neustále rozrastá a premyslenejšie prebudúva a skvalitnieva. William P. Thurston (*1946), úspešný súčasný matematik, ponúkol: *Zaoberať sa matematikou je skutočné potešenie spočívajúce v nachádzaní spôsobov myslenia, ktoré vysvetľujú, organizujú a zjednodušujú. Túto radosť môžete pocítiť, keď objavujete novú matematiku, znovuobjavujete starú, učíte sa od niekoho alebo z textov nový spôsob myslenia, alebo keď nájdete novú možnosť vysvetlenia či chápania známej matematickej štruktúry... Môžeme si myslieť, že vieme o danom predmete už všetko, a predsa nové významy číhajú za najbližším rohom.* Už aj školská matematika je oblasťou, v ktorej môžete prežívať objavy bez toho, aby ste cestovali do iných krajín alebo až k iným planétam. Bez veľkých nákladov na technické prostriedky, často len s ceruzkou a papierom, si môžete preveriť svoje sily a schopnosti logicky uvažovať a tvorivo myslieť. Matematika vám umožní uspokojiť ľudskú túžbu odhaľovať neznáme.

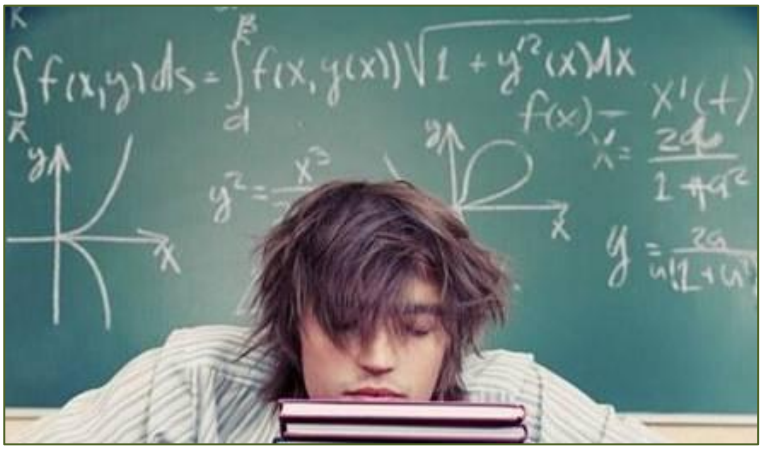
Nadšený záujem

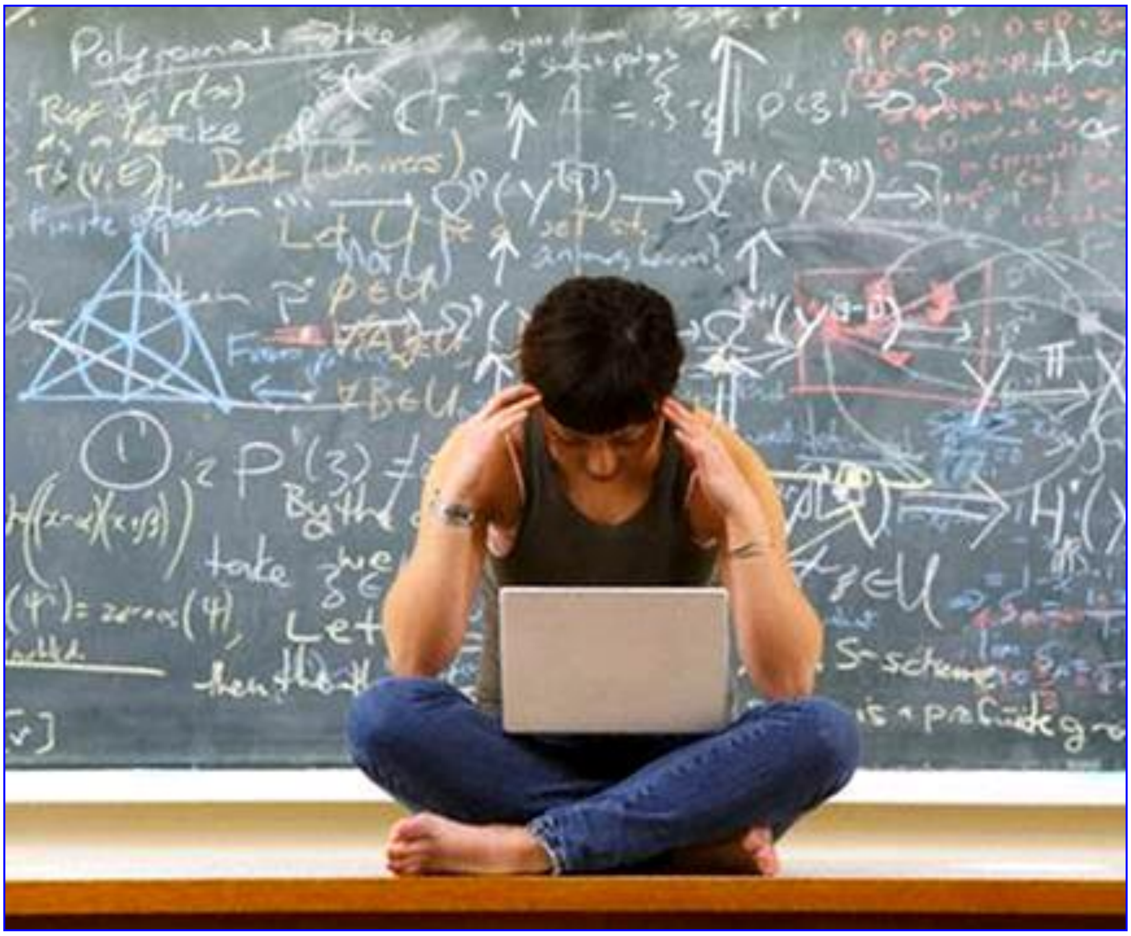


Ľudstvo ako celok už asi nikto nezastaví na ceste vyskúmať skryté prírodné tajomstvá, odhaliť duchovný závoj na tvári poznania. *Vesmír poskytuje pohľad na nekonečný proces vznikania, vývoja a zanikania foriem. Cieľom každej vedy je tento vývoj foriem predvídať a pokiaľ možno vysvetľovať* (francúzsky matematik René Thom, 1923–2002). Výstižný je postreh, ktorý ponúkol nemecký matematik H. Weyl (1885–1955): *Zaujatie matematikou sa dá porovnať so záujmom o mytológiu, literatúru alebo hudbu. Je to jedna z najvlastnejších oblastí človeka, v nej sa prejavuje ľudská podstata, túžba po intelektuálnej sfére života, ktorá je jedným z prejavov harmónie sveta.* Americký vedec a historik M. Kline (1908–1992) uznal: *Vo svete existuje zákon a systém – a matematika je kľúčom k tomuto poriadku.* Kdesi som si odpísal: *Milujem matematiku, pretože milujem všeobecnosť* (S.Shelah, izraelský matematik). Uznávam úprimné vyznanie, ktoré ponúkla maďarská matematička R. Péterová (1905–1977): *Matematika je schopná tej najvyššej hry a umožňuje nám zmocňovať sa nekonečna. Má čo povedať o nekonečne a o ideách. Má nikdy neuzavretú povahu ľudského tvorenia... Do matematiky sa môže človek zamilovať a nemusí sa pritom báť, že robí niečo neužitočné*. Ukazuje sa, že tvorivá matematická kultúra je najlepší spôsob, aký sme našli pre vyjadrenie pochopiteľnosti prírody, v ktorej žijeme.

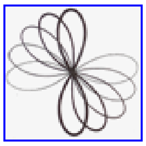
Záver

Plnohodnotným vyučovaním elementárnej matematiky už na základnej škole rozširujeme a prehlbujeme všeobecnú ľudskú kultúru, prispievame k rozvoju praktickej technickej civilizácie a ponúkame i základy užitočného spôsobu premýšľania o svete, v ktorom vytvárame pre jeho lepšie pochopenie aj matematické modely. Tie sú často užitočným prejavom súčinnosti abstraktných ideálov a praktických harmónií. Aj školská matematika sa tak pripája k úžasnému medzisvetu porozumenia vo vzťahu človeka a prírody.





Matematika je široká nádherná krajina,
otvorená pre všetkých,
ktorým myslenie prináša skutočnú radosť.
(W. Fuchs)



Abstraktný svet myšlienkových štruktúr sa nenásilne zmatematizoval, je zaplavený matematickou logikou a počítačovou informatikou. V základoch zostávajú školské počty a merba. Odborná praktická matematika formuje a dáva moc programovateľným počítačom, ktoré uplatňujú silu matematicko-logických postupov. Informačná éra ľudstva skloňuje zásady optimalizácie, rýchlosti a výkonnosti pamätí moderných počítačových systémov. Spracúvanie obrovského množstva údajov umožňuje simulovať realitu. Algoritmy a štruktúry údajov sú novodobou hudbou informatiky. Hlbšie poznanie myšlienkových postupov, ktoré ponúka jedno z najstarších duchovných umení – matematika, nemôže byť pre žiadneho človeka úplne zbytočné. *Dynamický, vizuálne atraktívny, priateľský a podnecujúci spôsob činnosti počítača, ktorý je kombinovaný s jeho univerzalitou, robí z neho ideálny nástroj na formovanie prebudeného záujmu o matematiku, o jej krásu, prekvapivosť, schopnosť predpovedať a o magické spojenie so všetkým okolo nás* (A.P. Jeršov). Vo svete abstraktných ideí a spracovania informácií je úžasne veľa matematiky, ale svet nie je iba matematikou. Skúmame, usudzujeme... *Skoro v každom vednom odbore môže byť človek o trochu lepší, ak použije matematiku* (P. Štěpánek, MFF UK Praha).

To, čím sa odlišujeme od ostatných živočíchov, nazývame myslením. Človek – bytosť rozumná, včas vytušil, že svet nemôže byť úplný chaos, lebo v tom by asi nikto neprežil. Za bezprostrednými dojmami a javmi sa skrýva systém, poriadok, súlad. Naše skúmanie je porovnávaním, vyčísľujeme pozorované pomery a podobnosti. Čísla sa stali základom odhalenia, ktoré chápeme rozmýšľaním. Narábanie s číslami sa stalo symbolickou možnosťou spracúvať dojmy na pojmy prístupné rozumu. Matematika popisovala súvislosti medzi meranými javmi, abstrahovala a zovšeobecňovala. Stala sa tým, čo sa o veciach môžeme naučiť. Zistili sme, že prírodu možno sledovať matematicky, meraním, počítaním a logickým uvažovaním. *Matematika je určitý systematický spôsob objavovania pravidiel a štruktúr, ktoré sa skrývajú za nejakým pozorovaným vzorom alebo pravidelnosťou* (I. Stewart).

Dlhoročná história vývoja matematickej kultúry ponúkala matematiku *ako filozofiu* (Euklid), *ako skutočnosť* (Archimedes), *ako umenie* (Apollonios), *ako písmo* (Diofantos), *ako myšlienkový stroj* (al Chovárizmí), *ako metódu* (Descartes), *ako kozmos* (Leibniz), *ako zovšeobecnenie* (Galois). Matematická kultúra sa ukázala ako všeobecná kategória myslenia, vhodný popis foriem cez algoritmy, účinný nástroj abstrakcie a zovšeobecňovania. Matematika pomáha usporadúvať, utrieďovať a systemizovať poznatky, so snahou o ucelený, logicky a metodologicky zdôvodnený systém. Veľmi vznešene povedané: matematika môže byť kompasom rozumu, uzdou fantázie, najpravdivejšou vedou, skutočnou harmóniou. Ešte vznešenejšie: matematika ako povolanie a osvietenie na ceste k večnej pravde, k božskému nekonečnu. Skromnejšie: Predmet matematiky je daný myslením, formalizovanou sférou ľudského poznania. *Matematika je jazyk, do ktorého je vstavaná logika prekvapujúco zladená s logikou reality* (J.D. Barrow).

Matematika skúma aj samú seba, zápasí s tým, aby sa oslobodila od rozporov. Matematická kultúra sa dotýka najvšeobecnejších i prakticky najnevyhnutnejších javov. Matematika sa stala metódou, dômyselným nástrojom ľudského umu, ktorý používa pre správne myslenie. *Zaujatie matematikou sa dá porovnať so záujmom o mytológiu, literatúru alebo hudbu. Je to jedna z najvlastnejších oblastí človeka, v nej sa prejavuje ľudská podstata, túžba po intelektuálnej sfére života, ktorá je jedným z prejavov harmónie sveta* (H. Weyl).

Steven Weinberg, nositeľ Nobelovej ceny za fyziku (1979), vníma matematiku ako prostriedok, ktorý nám umožňuje vysvetliť jednu skupinu faktov pomocou inej skupiny. *Zdá sa, že vesmír nemožno popísať inak než matematickým jazykom... Matematika je veda poriadku.* Zdá sa, že matematika objavila svet ideálnych foriem spojených prostredníctvom večných a nevyhnutných vzťahov, ktoré môže sledovať iba inteligentný rozum.

Asi ťažko budeme hľadať vedný odbor, kde by sa nedali uplatniť matematické poznatky. Matematika má do činenia so všetkými ostatnými vedeckými disciplínami. Matematika sa ponúka ako umenie zachytiť a prenášať ľudské myšlienky o abstraktných súvislostiach, ako medzisvet rozumu medzi človekom a prírodou. Zákonitosti nášho sveta sa objavujú z matematického popisu prírody. Matematika sa javí ako úspešný univerzálny jazyk pre účinné premýš1anie a odvodzovanie ďalších súvislostí. Albert Einstein pripustil, že *čisté myslenie môže vystihnúť realitu*. Matematická kultúra je nezaslúženým, ale efektným i efektívnym putom medzi mysliacim človekom a materiálnym svetom, v ktorom žije. *Matematika sprevádza ľudstvo v celej jeho kultúrnej histórii. Prináša závažné objavy, bez ktorých sa nemôže kultúrna civilizácia vôbec zaobísť* (P. Vopěnka).

Známy anglický matematik, filozof a logik A. N. Whitehead (1861–1947) už vo svojej dobe predpovedal: *Vzhľadom k nesmiernosti svojej látky je matematika (i moderná matematika) vedou v plienkach. Ak sa civilizácia bude ďalej rozvíjať, potom v budúcich dvoch tisícročiach bude najväčšou novinkou v ľudskom myslení nadvláda matematického rozumu*. Naznačil aj smerovanie k automatizácii prenosu a spracovania informácií: *Civilizácia postupuje tým, že rozširuje počet dôležitých operácií, ktoré môžeme vykonať bez toho, aby sme na ne museli myslieť*. K tomu nám mohutne pomáha aj matematika, jej algoritmy pre výpočtové postupy, spôsob myslenia i argumentácie. Nevyhnutnosť hlbšieho a širšieho matematického vzdelania nekončí, ale začína.

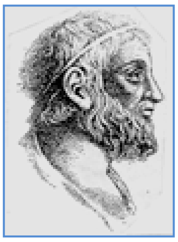
Matematika môže byť svetom porozumenia

(z myšlienok významných osobností)

Schopnosti rozumu

Odvtedy, čo sme si začali uvedomovať, že svet okolo nás nie je iba chaos, spoznávame stále vzrušujúcejšiu harmonickú súhru prírody s ľudským myslením. Medzi prvkami sveta a ich vlastnosťami existujú štruktúrované vzťahy, ktoré sme sa naučili odhaľovať triedením, meraním, počítaním. Ľudské myslenie je schopné združovať, idealizovať, odhaľovať súvislosti a kvantifikovať ich, abstrahovať i zovšeobecňovať, študovať vzory a vytvárať modely. Ľudia odhalili možnosti svojho jazyka, spôsob vyjadrovania i usudzovania. Spoluprácou sa dohodli na postupnosti argumentov, odvodení, ktoré prijímajú ako metódu dôkazov. *Medzi prírodou a človekom vybudovali ľudia medzisvet rozumu vo forme matematiky* (P. Heintel).

V staroveku



V šiestom storočí pred naším letopočtom Pytagoras zo Samu (asi 570–496 pred n. l.) na hudobných harmóniách spoznal, že súlad možno aritmeticky vyjadriť. *Číslo je podstatou všetkých vecí a celého kozmu.* Koncom 5. storočia pred n. l. Filolaos z Krotonu vytušil: *Všetko, čo sa dá poznať, má číslo, lebo bez neho nie je možné niečo si myslieť alebo poznať... Číslo je vodcom a pánom ľudského myslenia. Bez jeho sily by všetko zostalo tajuplné a nejasné*. Grécky filozof Platón (427–347 pred n. l.) vedel, že *najušľachtilejšia sila našej duše je schopnosť, ktorá sa spolieha na meranie a výpočet*. Vnímal a popisoval nemenný svet duchovných podstát a ideí, ako podnet pre rozumové usudzovanie. Uznal, že *počty a merba vedú k rozumovému poznávaniu, k pravde a lepšiemu pochopeniu všetkých náuk*. Ukázal cestu k dokonalým abstrakciám a idealizovaným pojmom. *Matematika ponúka skvelý prostriedok pre objavenie právd, ktoré sú bez účasti rozumu nedostupné.* Nad vchodom Platónovej akadémie v Aténach bol vraj umiestnený nápis: *Nevstupuj, kto neovládaš geometriu.* To už vtedy v podstate znamenalo, že filozofovať môžu tí, ktorí v hľadaní pravdy sú schopní uplatňovať rozum a ideály. Aj aténsky rečník Isokrates (436–338 pred n. l.) ponúkal matematiku ako gymnastiku rozumu a prípravu pre filozofiu. Najuniverzálnejší antický mysliteľ Aristoteles (384–327 pred n. l.) oceňoval, že *na človeku je najpozoruhodnejšia jeho schopnosť myslieť.*

V priebehu dejín

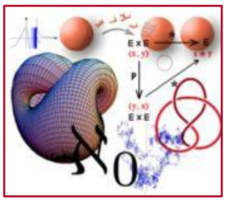
Kultúra myslenia sa vytvárala v spoločenskom živote, v prostredí dialógu a riešenia problémov, vo vzťahu medzi skutočnosťou a jej opisom. Matematika sa „vkrádala“ do našich predstáv ako univerzálny prostriedok zdôvodneného usudzovania o príčinnosti faktov v abstraktnom hodnotiacom uvažovaní. Matematické poznávanie sa v priebehu dejín stávalo umením vnímať a prenášať ľudské myšlienky o abstraktných súvislostiach. Aj kresťanský teológ Aurelius Augustinus (354–439) vybadal: *Čísla sú formou Božej múdrosti prítomné vo svete... Všetko má tvary, pretože všetko má čísla. Odober im čísla a budú ničím...* Boethius (asi 480–524), rímsky štátnik a filozof, zistil: *Všetka náuka o pravde je zahrnutá v mnohosti a veľkosti... Nemôže dosiahnuť poznanie božských vecí ten, kto nie je vôbec zbehlý v matematike.* Isidorus zo Sevilly (7. stor.) vo svojich dielach, ktoré ovplyvnili stredovekú vzdelanosť, píše: *Od zvieraťa sa nelíši, kto nevie, ako sa počíta... Odober z vecí číslo a všetko sa zrúti do ničoty. Ak ulúpiš vekom číslo, do temnoty uvrhneš všetko.* Snahou o zjednotenie súdobej prírodovedy, filozofie a mystiky vynikol Robert Grosseteste (asi 1175–1253). Svetlo chápal ako formu i princíp pohybu. Zdôvodnil, že svet má matematickú povahu, lebo svetlo v ňom stanovilo geometriu. *Matematika je prvá z vied, bez ktorej nemožno popísať ostatné vedy.* Anglický stredoveký mysliteľ Roger Bacon (1214–1292) zdôraznil prísnosť matematických postupov:

Kto nedoceňuje výsledky matematiky, škodí celej vede, lebo ten, kto neovláda matematiku, nemôže poznať ostatné exaktné vedy a nemôže pochopiť svet. Mikuláš Kuzánsky (1401–1464), diplomat a cirkevný hodnostár, pochopil tajuplnosť ako orientačný bod pre usmernenie poznávacej aktivity. Ponúkal filozofiu prírody ako spojenie protikladov. *Všetko skúmanie je porovnávaním, lebo využíva pomer ako prostriedok... K poznaniu božských vecí je nám otvorená iba cesta prostredníctvom symbolov... Matematika nám najviac pomáha pri pochopení rozličných božských vecí.* Aj uznávaný Leonardo da Vinci (1452–1519), maliar, sochár, architekt a vynálezca, uznal: *Žiadne ľudské bádanie si nemôže robiť nároky na to, že je skutočnou vedou, ak nepoužíva matematické dôkazy; nie je žiadna istota tam, kde nemožno aplikovať aspoň jednu z matematických disciplín... Najväčšiu radosť telu dáva svetlo slnka, najväčšiu radosť duchu - jas matematickej pravdy.* Možno preto odporúčal: *Matematika je najväčšou potechou rozumu. Jej je treba dať prednosť pred ostatnými ľudskými bádaniami a vedami.* Známy prírodovedec Galileo Galilei (1564–1642) spojil výsledky experimentov s matematikou: *Filozofia sveta je obsiahnutá v grandióznej knihe, otvorenej pre všetkých – myslím tým knihu prírody. Porozumieť jej môže iba ten, kto sa naučí jej jazyk a písmo. Napísaná je jazykom matematiky a jej písmom sú matematické vzorce.* Priateľ vesmírnej harmónie Johannes Kepler (1571–1630) uznal: *Ľudský duch najlepšie vníma kvantitatívne vzťahy, je vlastne stvorený na ich chápanie.* Veľmi pôsobivo vyjadril poznávaciu silu matematických úvah René Descartes (1596–1650): *Porovnával som tajomstvá prírody so zákonmi matematiky. Som presvedčený, že ten istý kľúč otvára dvere pochopeniu jedného i druhého... Všetky výskumy, ktoré smerujú k preskúmaniu systému a miery – bez ohľadu na to, čo je ich predmetom a na čo sa vzťahujú – patria do matematiky.* Francúzsky filozof a prírodovedec Blaise Pascal (1623–1662), známy znalec rozporov v ľudskej povahe, ponúkal presvedčenie, že ľudská dôstojnosť spočíva v myslení. *Človek je zrejme stvorený na to, aby myslel. V tom je celá jeho dôstojnosť i prednosť; jeho povinnosťou je, aby myslel správne.* Kombinácia matematiky, predstavivosti a experimentu sa stala najmocnejším nástrojom ľudstva pri prenikaní do tajomstiev prírody i ľudskej myšlienkovej aktivity.

Vo vede aj v umení

Odhaľovanie súvislostí a objavovanie zákonitostí je možno jednou z najhlbších ľudských radostí. Spoznanie neznáma je aj prejavom veľkosti a dôstojnosti človeka. Aj pomocou matematiky sme sa dostali k tomu, že v nami spoznávanom svete chápeme príčinné vzťahy a organizované štruktúry s platnými zákonmi. Ak uznávame súvislosti, ktoré zjednodušujú a vysvetľujú, môžeme uplatňovať matematiku. Kľúčom k axiomatizovaným systémom s pravidlami sú matematické úvahy a postupy. Dlhodobým vývojom sa matematika stala organickou súčasťou vedeckého, technického a technologického sveta. Ukázalo sa, že matematika je nevyhnutná nielen vo vede a technike, ale pomáha aj v umení a hudbe, archeológii, sociológii i v športe. Matematika je až neuveriteľne praktická v mnohých odboroch ľudskej činnosti. *Matematika je ako sila ľudského ducha povolaná nahradiť nám nedokonalosť našich zmyslov i krátky čas nášho života* (J. B. Fourier, 1768–1830). Univerzálne myšlienkové postupy a idey nám cez matematiku umožňujú dotýkať sa aj nekonečna. *Matematika je veda o nekonečne. Jej cieľom je, aby človek, ktorý je konečný, vystihol nekonečno pomocou znakov* (H. Weyl, 1885–1955). Matematické myslenie nám umožňuje vnímať vzťah medzi zmyslovým a nadzmyslovým svetom. Matematika nám pomáha pochopiť obrovskú rozmanitosť jednotlivostí sveta, v ktorom žijeme.

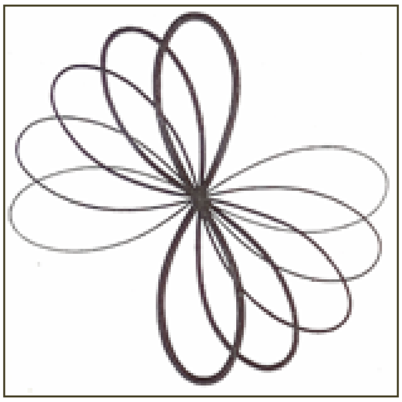
Dotyk filozofie



Od čias R. Descarta je matematika v pozornosti filozofov. Anglický matematik a filozof **A**. N. Whitehead (1861–1947) vedel, že matematika je zvláštny druh poznania: *Naša existencia je posilňovaná pojmovými ideálmi, ktoré prekonávajú neurčité vnemy... Originalita matematiky spočíva v tom, že v matematickej vede sú vyjadrené vzťahy medzi vecami, ktoré sa bez sprostredkovania ľudským rozumom nedajú vôbec vyjadriť... Matematika je veda o najzložitejších* *abstrakciách, k akým môže ľudský um dospieť.* Nemecký filozof Ernst Cassirer (1874–1945), ktorý zobral do úvahy vývoj matematiky, vznik spoločenských vied i teórie relativity, pochopil matematický rozum ako puto medzi človekom a vesmírom: *Číslo je nástrojom nášho prenikania do prírody a skutočnosti... Matematika je univerzálny symbolický jazyk, ktorý sa nezaoberá opisom vecí, ale všeobecným vyjadrovaním vzťahov.* Gaston Bachelard (1884–1962), francúzsky filozof a epistemológ, vymedzil povahu nového ducha vedy ako ideál komplexity realizmu a racionalizmu, obohacovaním rozumu v dotyku so skúsenosťou: *V samej matematike sa realita prejavuje vo svojej podstatnej funkcii: podnecovať myslenie*. Ruskí metodológovia matematiky Belajev a Perminov ponúkali matematiku ako činnosť zameranú na konštruovanie symbolických systémov, ktoré sú vhodné na odhalenie skrytej informácie a transformáciu súdov v rozličných oblastiach obsahového poznania s nevyhnutným predpokladom logickej neprotirečivosti. Americkí matematici Kac a Ulam vyjadrili svoju filozofickú rovinu slovami: *Matematika je najúplnejšie vyjadrenie rozumového obrazu sveta a zároveň stvárnenie ľudskej túžby vyskúšať možnosti vlastných myšlienkových postupov*. Poľský filozof L. Kolakowski (1927–2009) konštatoval: *Matematika je najmocnejší intelektuálny nástroj, ktorý bol kedy vytvorený a prostredníctvom ktorého unikáme času*. Význam filozofie matematiky vyjadril nositeľ Fieldsovej medaily R. Thom (1923–2002): *Aká je filozofia matematiky, také je aj vyučovanie matematiky.*

Názory fyzikov

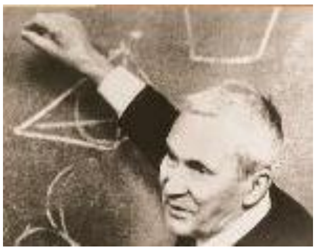
Netreba zabudnúť na tých, pre ktorých sú matematické disciplíny nenahraditeľnou pomocou v odhaľovaní a vysvetľovaní prírodných javov. Nech prehovoria známi fyzici:
William Thomson, lord Kelvin: *Ak to, o čom hovoríte, môžete zmerať a vyjadriť číslami, tak o tom niečo viete***.**
Max Laue: *Matematika dáva najčistejší a bezprostredný zážitok pravdy, v tom je jej hodnota pre všeobecné vzdelanie ľudí.*
Albert Einstein: *Každá veda, ktorá sa zaoberá neobyčajne logickými vzťahmi medzi danými predmetmi podľa daných pravidiel, je matematika... Matematici sa namáhajú objaviť najuniverzálnejšie predstavy pre operácie, ktoré by dovoľovali jednoducho, logicky a do jedného systému uchopiť čo najširší okruh formálnych vzájomných vzťahov. Snažiac sa dosiahnuť ideovú a logickú vycibrenosť, odkryli formuly potrebné pre hlbšie preniknutie do zákonov prírody.*
Niels Bohr: *Matematika sa podobá určitému druhu spoločného jazyka, uspôsobenému na vyjadrovanie vzťahov, ktoré buď nie je možno alebo je zložité objasňovať slovami.*
Paul Dirac: *Matematika je prostriedok špeciálne prispôsobený na osvojenie si rôznych abstraktných pojmov a čo sa toho týka, jej moc je neohraničená.*
Stephen Weinberg: *Javy, ktoré študujeme, sú tak zvláštne a zložité, že o nich nemožno premýšľať bez matematiky... Zdá sa, že vesmír nemožno popísať inak než matematickým jazykom.* John Barrow: *Matematika je jazyk, do ktorého je vstavaná logika prekvapujúco zladená s logikou reality... Matematika je najviac formalizovaná sféra ľudského poznania... Svet vyjadriteľný matematikou môžeme považovať za záhadu záhad.*



John Polkinghorne*: Matematika je abstraktný kľúč na otváranie tajomstva skutočného vesmíru.*
Roger Penrose: *Matematika, ktorou sa riadi náš fyzikálny svet, je neobyčajne plodná a mocná aj ako matematika sama o sebe. Tento vzťah pokladám za hlboké tajomstvo.*
Gian-Carlo Rota: *Tajomstvo a sláva matematiky nie je ani tak v tom, že sa abstraktné teórie ukazujú ako užitočné pri riešení problémov, ale v tom, že teória pripravená pre jeden typ problémov je často jedinou cestou pre riešenie problémov úplne iného druhu, problémov, pre ktoré táto teória nebola vymyslená.*

Náznak definície

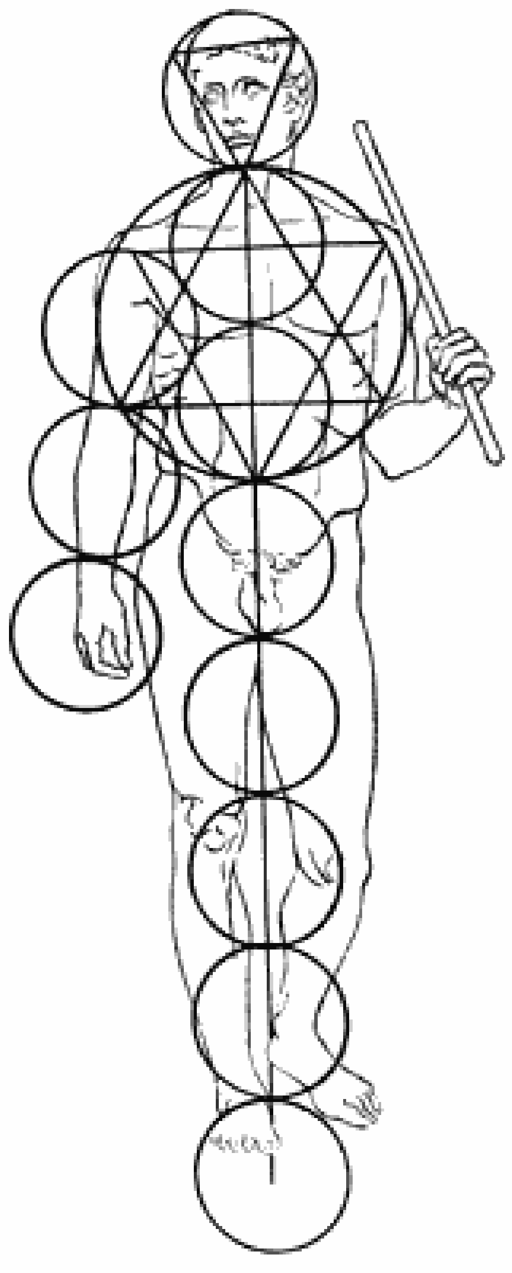
Ako vnímajú svoju vedu významní matematici? Oni majú možnosť pochopiť matematiku ako medzihru ponorenú do obrazu reality v ľudskom rozume. Pozrime si ponuku myšlienok od ľudí bytostne spojených s matematikou:



* *Vo svete existuje zákon a systém – a matematika je kľúčom k tomuto poriadku* (M. Kline).
* *Živá matematika je založená na fluktuácii medzi protikladnými silami intuície a logiky, medzi jedinečnosťou pozemských problémov a všeobecnosťou ďalekosiahlych abstrakcií* (R. Courant).
* *Najvyššie poslanie matematiky spočíva v tom, aby nachádzala skrytý poriadok v chaose, ktorý nás obklopuje* (N. Wiener).
* *Matematika je štúdium ideálnych konštrukcií a odhaľovanie predtým neznámych vzťahov medzi časťami týchto konštrukcií... Matematika má do činenia so všetkými ostatnými vedami. Neexistuje veda, na ktorú by sa nevzťahovali aplikácie matematiky* (Ch. S. Peirce).
* *Matematické myslenie je jednou zo schopností, ktoré majú všetky ľudské bytosti, rovnako ako hovoriť a písať, počúvať alebo skladať hudbu, dívať sa a maľovať obrazy, veriť v kultúrne a morálne kódexy a podriaďovať sa im* (J. P. Aubin).
* *Matematika je rovnako neohraničená ako priestor, ktorý je pre jej ctižiadosť príliš úzky... Je nemožné ju obmedziť vo vnútri daných hraníc alebo redukovať na definície trvalej platnosti, rovnako ako je to nemožné pri vedomí života* (J. Sylvester).
* *Matematika je veda, ktorá dáva najlepšiu príležitosť poznávať proces myslenia a má tú prednosť, že pri jej pestovaní nadobúdame cvik v metóde rozumového uvažovania, ktoré môže byť potom používané na štúdium ktoréhokoľvek predmetu* (G. Polya).
* *Zaujatie matematikou sa dá porovnať so záujmom o mytológiu, literatúru alebo hudbu. Je to jedna z najvlastnejších oblastí človeka, v nej sa prejavuje ľudská podstata, túžba po intelektuálnej sfére života, ktorá je jedným z prejavov harmónie sveta* (H. Weyl).
* *Za tisícročia svojej existencie matematika vytvorila obdivuhodnú kultúru myslenia a abstraktný jazyk, ktorý umožňuje jednotne popísať aj veľmi rozdielne procesy* (N. N. Moisejev).

Medzi zemou a nebom

To, čo matematika v súčasnosti skúma, sa nedá jednoznačne vyjadriť, neexistuje úplná vedecká definícia matematiky. *Matematika je zároveň umenie i veda, je to eklektická zmes úžitku a tvorby, empirizmu a intuície* (J. Ewing). Predmetom matematiky sa môže stať čokoľvek. Podstatou matematiky sú princípy ľudského myslenia upravené do logického systému. Matematika sa dotýka najvšeobecnejších i prakticky najnevyhnutnejších javov. Často už nemôžeme určiť hranice medzi matematikou a disciplínami, v ktorých sa používa. Matematika sa stala metódou, dômyselným nástrojom ľudského umu, ktorý používa človek pre správne a presné uvažovanie. Ľudské myslenie nevystupuje nikde s takou jasnosťou ako v matematike. Matematika ako impozantná stavba ľudského ducha a pyramída myšlienok poskytuje rozumu široký priestor pre rozlet logických úvah, tušenia intuície i dotyky s tajomným nekonečnom. Matematika ako najoriginálnejší výtvor myšlienkových pokusov a zápasov ukázala, že najväčšie abstrakcie sú tými pravými nástrojmi, ktorými kontrolujeme svoje uvažovanie o konkrétnych faktoch. E. P. Wigner (1902–1995), americký teoretický fyzik, nositeľ Nobelovej ceny (1963), konštatoval: *Zázračná vhodnosť matematického jazyka pre formuláciu fyzikálnych zákonov je skvelý dar, ktorý ani nechápeme, ani si ho nezaslúžime*. Ian Stewart (*1945), úspešný popularizátor matematického myslenia, vníma matematiku ako viac–menej systematický spôsob objavovania pravidiel a štruktúr, ktoré sa skrývajú za nejakým pozorovaným vzorom alebo pravidelnosťou. Uznal, že matematika má úžasnú moc odkryť nečakanú štruktúru aj tam, kde vládne zdanlivý chaos. *Odvtedy, ako sme sa pozreli na svet* *očami matematiky, objavili sme veľké tajomstvo. Prírodné modely ukazujú na podstatné princípy, podľa ktorých funguje celý vesmír.* Kurt Gödel (1906–1978), matematik a logik s najslávnejšími výsledkami 20. storočia, otriasol perspektívami matematiky odhalením, že v každom dostatočne rozvinutom formálnom systéme existujú obsahovo zrozumiteľné vety, ktoré sú v rámci danej sústavy formálne nedokázateľné. Napriek tomu, matematika ako zložitý a rozvetvený organizmus neustále rastie i skvalitňuje. Wiliam P. Thurston (*1946), úspešný svetoznámy matematik prízvukuje: *Zaoberať sa matematikou je skutočné potešenie spočívajúce v nachádzaní spôsobov myslenia, ktoré vysvetľujú, organizujú a zjednodušujú. Túto radosť môžete pocítiť, keď objavujete novú matematiku, znovuobjavujete starú, učíte sa od niekoho alebo z textov nový spôsob myslenia, alebo keď nájdete novú možnosť vysvetlenia či chápania známej matematickej štruktúry... Môžeme si myslieť, že vieme o danom predmete už všetko, a predsa nové významy číhajú za najbližším rohom.* P. A. Griffiths (*1938) zhrnul: *Matematika má duálnu povahu: je nezávislou disciplínou oceňovanou pre svoju presnosť a vnútornú krásu a súčasne je bohatým zdrojom nástrojov pre svet aplikácií*. Niektorí učitelia počtov a merby (školskej matematiky) radi opakujú: *Matematika je široká nádherná krajina, otvorená pre všetkých, ktorým myslenie prináša skutočnú radosť* (W. Fuchs). Už aj školská matematika prispieva k tomu, aby sme si lepšie porozumeli nielen s prírodou, ale aj ako ľudské bytosti vzájomne medzi sebou.



Nevstupuj, kto nepoznáš matematiku.
Platón
(427–348 pred n. l.)

Boh je matematik.
P. Dirac
(1892–1984)

Ten neznámy ukrytý za kozmom
je prinajmenšom hypermatematickou inteligenciou,
ktorá kalkuluje a produkuje vzťahy,
takže musí byť typom
abstraktným a duchovným.
J. Guitton
(1901–1999)

Matematická kultúra vo vzťahu vedy a viery

K poznaniu božských vecí je nám otvorená iba cesta prostredníctvom symbolov...
Matematika nám najviac pomáha pri pochopení rozličných božských vecí.
Mikuláš Kuzánsky (1401–1464)

V procese vytvárania ľudského vzťahu medzi náboženskou vierou a prirodzeným kritickým rozumom má nezanedbateľnú úlohu matematická kultúra. Matematika ako schopnosť odrážať a modelovať procesy myslenia je dlhodobou vedou i moderným umením zároveň. Tisícročia nesie pravdivý civilizačný odkaz od predchádzajúcich generácií. V priebehu historického rozvoja ľudskej schopnosti poznávať bol na popis zákonitostí prírody vybudovaný matematický jazyk. *Medzi prírodou a človekom vybudovali ľudia medzisvet rozumu vo forme matematiky* (P. Heintel).

Už Platón (427–347 pred n. l.) vedel, že *najušľachtilejšia sila našej duše je schopnosť, ktorá sa spolieha na meranie a výpočet*. V súčasnej pedagogike matematického vzdelávania uznávame, že už pri základnom vyučovaní školskej matematiky potrebujeme uplatniť tvorivý rozum a ideálne predstavy. Anglický stredoveký mysliteľ Roger Bacon (1214–1292) zdôraznil užitočnosť prísnych matematických postupov: *Kto nedoceňuje výsledky matematiky, škodí celej vede, lebo ten, kto neovláda matematiku, nemôže poznať ostatné exaktné vedy a nemôže pochopiť svet.* Francúzsky filozof a prírodovedec Blaise Pascal (1623–1662), známy znalec rozporuplnosti ľudskej povahy, ponúkal presvedčenie o tom, že ľudská výhoda spočíva v myslení: *Človek je zrejme stvorený na to, aby myslel. V tom je celá jeho dôstojnosť i prednosť; jeho povinnosťou je, aby myslel správne.* Kombinácia matematickej logiky, duchovnej predstavivosti a prírodného experimentu sa stala najmocnejším nástrojom človeka pri prenikaní do tajomstiev prírody i ľudskej myšlienkovej aktivity v tradičnom (a možno predsa len zdanlivom) zápase medzi náboženskou vierou a prírodnou vedou.

Matematické poznanie ako základná ľudská charakteristika

Spoznávanie neznáma je trvalým prejavom veľkosti a dôstojnosti človeka. Aj pomocou matematických vied sme sa dostali k tomu, že v nami spoznávanom svete chápeme príčinné vzťahy a organizované štruktúry s platnými zákonmi. Ak uznávame súvislosti, ktoré zjednodušujú a vysvetľujú, môžeme uplatňovať matematické postupy. Matematika nám pomáha pochopiť obrovskú rozmanitosť jednotlivostí sveta, v ktorom žijeme. Dlhodobým vývojom sa matematická kultúra stala organickou súčasťou vedeckého, informatického, technického i technologického sveta. *Za tisícročia svojej existencie matematika vytvorila obdivuhodnú kultúru myslenia i abstraktný jazyk, ktorý umožňuje jednotne popísať aj veľmi rozdielne procesy* (N.N. Moisejev). Ukázalo sa, že matematické poznatky sú nevyhnutná nielen vo vede a technike, ale pomáhajú aj v umení i hudbe, v archeológii, sociológii a dokonca v športe. Matematický prístup a postup je až neuveriteľne praktický v mnohých odboroch ľudskej činnosti. *Matematika je ako sila ľudského ducha povolaná nahradiť nám nedokonalosť našich zmyslov i krátky čas nášho života* (J. B. Fourier, 1768–1830). Univerzálne myšlienkové postupy a idey nám cez matematiku umožňujú dotýkať sa aj nekonečna. *Matematika je veda o nekonečne. Jej cieľom je, aby človek, ktorý je konečný, vystihol nekonečno pomocou znakov* (H. Weyl, 1885–1955). Matematické myslenie nám umožňuje vzťah medzi merateľným zmyslovým svetom a tvorivo chápajúcim ľudským intelektom. *Matematika je najmocnejší intelektuálny nástroj, ktorý bol kedy vytvorený a prostredníctvom ktorého unikáme času* (L. Kolakowski,1927–2009).

Matematika ako impozantná stavba ľudského ducha a pyramída myšlienok poskytuje rozumu široký priestor pre rozlet logických úvah, tušenia intuície pre štruktúry s ich vlastnosťami i dotyky s tajomným nekonečnom. Matematika ako najoriginálnejší výtvor myšlienkových pokusov a zápasov ukázala, že najväčšie abstrakcie sú tými pravými nástrojmi, ktorými kontrolujeme svoje uvažovanie o konkrétnych faktoch. Americký teoretický fyzik E. P. Wigner (1902–1995), nositeľ Nobelovej ceny (1963), konštatoval: *Zázračná vhodnosť matematického jazyka pre formuláciu fyzikálnych zákonov je skvelý dar, ktorý ani nechápeme, ani si ho nezaslúžime*. Profesor Ian Stewart uznáva, že matematické úvahy majú úžasnú moc odkryť nečakanú štruktúru aj tam, kde vládne zdanlivý chaos. *Odvtedy, ako sme sa pozreli na svet očami matematiky, objavili sme veľké tajomstvo. Prírodné modely ukazujú na podstatné princípy, podľa ktorých funguje celý vesmír.* Kurt Gödel (1906–1978), matematik a logik s najslávnejšími výsledkami 20. storočia, otriasol perspektívami matematiky odhalením, že v každom dostatočne rozvinutom formálnom systéme existujú obsahovo zrozumiteľné vety, ktoré sú v rámci danej sústavy formálne nedokázateľné. Napriek tomu, matematika ako zložitý a rozvetvený organizmus neustále mohutnie a produkuje kvalitné matematické výsledky. *Matematika je súčasťou všeobecnej kultúry* (M. Atiyah). Uznávaný teoretický fyzik Richard Feynman (1918–1988) vedel: *Ak vás zaujíma úplný obraz sveta, jediná cesta ako ho pochopiť, je pomocou matematického popisu... Nepoznať matematiku je výrazným obmedzením na ceste k pochopeniu sveta*. História i súčasnosť ukazujú, že matematická kultúra sa stala jednou z podstatných intelektuálnych hodnôt civilizovaného ľudstva.

Moderná matematická kultúra

Moderný filozof E. Cassirer (1874–1945) tiež uznal: *Číslo je nástrojom nášho prenikania do prírody a skutočnosti... Matematika je sprostredkujúcou sférou medzi zmyslovým a nadzmyslovým svetom... Matematický rozum je putom medzi človekom a svetom.* Dnes vieme: *Matematické objekty sú ideálnymi formami rôznych stránok reálnych objektov, prípadne ideálnych objektov nižších úrovní. Ich vzťah je, vďaka procesu idealizácie a presvitaniu ideálnych foriem z reálnych objektov, obojstranný, navyše často posilňovaný spätnou väzbou aplikácií. Popri prebývaní v ideálnom matematickom svete sú ideálne matematické objekty tiež súčasťou nášho kolektívneho vedomia. Práve táto kolektívnosť, všeobecnosť a použiteľnosť zakladá napriek (či vďaka) ich idealite ich objektívny charakter* (prof. P. Zlatoš). Ideálny matematický svet je otvorený slobode ľudskej duchovnej tvorby, ktorú obmedzuje iba spor s rozumom. Existencia objektov pre matematiku pochádza zo skutočnosti, uskutočniteľnosti a bezospornosti (podľa Tomáša Akvinského je zákonom sporu obmedzená i Božia moc). *Čistá matematika sa postupne stala vedou, ktorá skúma postupnosť a transformáciu symbolov, jazykom pre vyjadrenie rozumového obrazu reálneho i duchovného sveta. Matematiku možno vcelku chápať ako činnosť zameranú na konštruovanie symbolických systémov, ktoré sú vhodné na odhaľovanie skrytej informácie a na transformáciu súdov v rozličných oblastiach obsahového poznania. Matematika je teda metódou prechodu od pravdivých súdov k pravdivým, a prvým nevyhnutným predpokladom jej efektívnosti je logická neprotirečivosť* (Beľajev, Perminov). Štúdium matematiky možno ponúkať ako dotyk s ideálnom a nekonečnom, ako vnímavosť pre objekty nadčasové, stále a nemenné, ako svet otvorený pre slobodnú neohraničenú duchovnú tvorbu, ako životodarný prameň pre pravdu skrytú v prírode, ako prejav zušľachťujúcej harmónie sveta, v ktorom myslením vytvárame zmysluplné efektívne modely. Vzdelávanie matematikou môže byť príspevkom k rozvíjaniu osobnosti každého premýšľajúcim duchom obdareného človeka. *Matematika je veda, ktorá dáva najlepšiu príležitosť pozorovať proces myslenia a má tú prednosť, že pri jej pestovaní nadobúdame cvik v metóde rozumového uvažovania, ktorú môže byť potom používaná na štúdium ktoréhokoľvek predmetu* (G. Pólya, 1887−1985). Radosť z pochopenia súvislostí spoznaných matematickým myslením prebúdza v nás nadšenie aj naďalej uplatňovať všetky osvedčené ľudské duchovno-rozumové schopnosti pri odhaľovaní zákonov nášho bytia.

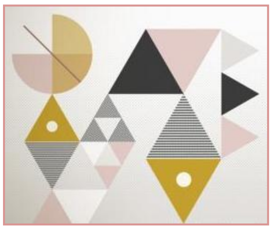
Celoživotné vzdelávanie ako súbeh viery a pravdy

Vzdelávanie na moderných, základných, stredných i vysokých, školách má za cieľ vytvárať študijné prostredie, v ktorom sa hľadá pravda o prírode i ľudskom spoločenstve. Má byť školou hlbokej a tvorivej ľudskosti, kde sa pestujú rôznorodé druhy poznania a pripravuje sa konštrukcia skutočných ľudských hodnôt. Tu sa môžu kresťanská viera a ľudský rozum spájať v pravde (konkrétnej prírodovednej, aj abstraktnej filozofickej). Kresťanskí učitelia majú aj zvláštnu úlohu svedectvom evanjelia nielen žiť v skutočnej dôvere v Boha a uplatňovať lásku k blížnym, ale aj tvorivo podporovať pochopenie prírodných javov a ich využitie pre životné potreby všetkých ľudí. Svoje úsilie nemôžu redukovať len na praktickú funkčnosť a užitočnosť svojich poznatkov, ale majú radostným príkladom slúžiť presahovaniu ľudskosti smerom k večnej zmysluplnosti. Humanizmus spočívajúci na nedeliteľných univerzálnych hodnotách ľudskej dôstojnosti, slobody, rovnosti a solidarity môže vytváraním vzájomného poznávania a ovplyvňovania odlišných kultúr pripravovať nové kritické interdisciplinárne myslenie smerujúce k hlbšiemu spolužitiu ľudského konštruktívneho rozumu i kritickej viery. *Pravda, ktorá pochádza zo Zjavenia, je súčasne pravdou, ktorú treba pochopiť vo svetle rozumu... svetlo rozumu i svetlo viery, pochádzajú od Boha, a preto si navzájom nemôžu protirečiť* (Ján Pavol II.).

K odvahe na spoločnej ceste a spolupráci vedy a viery nás možno povzbudia aj nasledujúce myšlienky. Významný nemecký fyzik M. Planck (1858–1947) bol presvedčený: *Nad vstupom do chrámu vedy je napísané: Musíte mať vieru… Človek potrebuje prírodné vedy pre poznanie, ale náboženstvo pre konanie.* Dominikánsky kazateľ H.D. Lacordaire ponúkol: *Rozum nás privádza až po samý okraj nekonečna, viera nám dáva veľkého Boha v celej jeho plnosti.* Americký filozof a logik Ch. S. Peirce (1839–1914), bol presvedčený, že *funkciou myslenia je dosiahnutie viery*. Jean Guitton (1901–1999, francúzsky filozof a spisovateľ) nám odkázal: *Vzdelaným ľuďom treba ukázať, že človek môže byť veriacim nie proti rozumu, ale vďaka dobrému a správnemu používaniu rozumu.*

Podiel matematickej kultúry na viere v ľudskú múdrosť

V prírode pozorujeme, že krása a racionálnosť sa dopĺňajú do symbiózy. Často práve akási funkčná závislosť naznačuje cestu k pravde (napr. príroda využíva výhody kruhu – pri danom obvode má najväčšiu plochu a gule – pri danom objeme má najmenší povrch). *M je štúdium stvoreného Božieho diela* (B. Peirce, 1809–1880). Naša moderná doba prináša dostatok argumentov pre úžas nad harmóniou prírodovedného systému, ktorý spracúvame naším myšlienkovým modelovaním, kde má nezastupiteľnú úlohu práve matematické uvažovanie. Ruský matematik Igor R. Šafarevič rozpoznal: *Boh tvorí dejiny ľudskými rukami*. Rozvážna náboženská viera i zodpovedná rozumová veda privádzajú ľudstvo k hlbokej zmysluplnosti sveta, v ktorom zápasíme o pochopenie diania okolo seba. Už od dôb stredovekých univerzít sleduje ľudské poznávanie prehlbujúci sa jednotný princíp na pozadí pestrosti foriem a javov, ktoré vnímame zmyslami a spracúvame tvorivým duchom. Vesmír sa javí fyzikom ako určitá informačná sieť so skrytým inteligentným systémom, v ktorom vedomie pozorovateľa zasahuje do existencie pozorovaného predmetu až tak, že sa stráca zásadná odlišnosť medzi hmotou, vedomím i duchom a splýva do jednotnej tajomnej interakcie. Siluetu týchto abstraktných podstát možno zachytiť len matematicky. Toto poznanie naznačuje, že *ten neznámy ukrytý za kozmom je prinajmenšom hypermatematickou inteligenciou ktorá kalkuluje a produkuje vzťahy, takže musí byť typom abstraktným a duchovným* (J. Guitton).



Poznámky na záver

Ak budú študijné zásady i výchovné postupy v našich školách vytvárané spoločenstvom osôb myšlienkovo spolupracujúcich vo vzájomnej úcte, spravodlivo a s láskou, môžeme očakávať, že aj kritický realizmus viery a vedy nás privedie k novej humanizácii nášho spoločenského života, ktorý sa v kresťanskom prostredí možno nazýva svätosťou. Tu sa dajú v skromnom napodobení opakovať slová Benedikta XVI.: *Veľké vedecké poznatky môžu viesť k tomu, že človek už buď nevidí za realitu, čo mu obmedzuje horizont, a tak hlúpne, alebo, že sa náš obraz Boha zväčšuje a potom stojíme pred Ním s ešte väčšou úctou, pokorou a obdivom*. Po dlhoročnom pedagogickom pôsobení cez didaktiku matematiky, som mierne presvedčený, že zušľachťovanie nášho myslenia matematickou kultúrou (a potom aj vedomého konania) je úžasnou príležitosťou pre odhaľovanie skrytej harmónie nielen vo vede, ale aj v náboženskej viere, vymoženosťou pre hlbšie, správnejšie a úplnejšie poznanie abstraktných súvislostí odrážajúcich sa z prírody a ľudskej spoločenskej činnosti do intelektu každého človeka, intuitívny dotyk s mohutnosťou Toho, ktorý je nevyhnutná podstata, prvá príčina i večný zmysel. *Ad maiorem Dei gloriam – Na väčšiu slávu Božiu.*

Základy logiky ako súčasť vzdelania

Úvod

Keď hovoríme logicky, má to byť každému prirodzene jasné. Logika sleduje zdôvodnené poznanie, formuluje pravidlá pre správne formálne myslenie, pre proces argumentácie. V dejinnom vývoji sa klasická logika rozvinula na vedu o správnom usudzovaní, kde platné úsudkové schémy umožňujú prenášať pravdivosť predpokladov na záver, ale aj nepravdivosť záveru na jeden z predpokladov. Logické postupy sa stali základom všeobecnej vedeckej metódy i teórie racionálnej kritiky. Moderná logika sa rozvíja v použití nielen pre prírodné, humanitné a sociálne vedy, ale aj pre výpočtovú techniku, informatiku a kybernetiku. Logistika sa rozvinula na teóriu symbolických systémov, ktorá umožňuje určovanie správnosti argumentov. Filozofická logika študuje vzťahy medzi matematickými systémami a jazykovým vyjadrením, medzi svetom a jazykom, vedou a štruktúrami dôkazov. Logika je aj o medziľudskom spôsobe presvedčovania. Matematická logika prispela k filozofickému zdôvodňovaniu matematiky. Rád pripomínam odkaz významného logika, filozofa a odvážneho mysliteľa Bernarda Bolzana (1781–1848): *Omnoho viac ako o šírenie užitočných právd sa musíme usilovať o to, aby sa cvičením u ľudí rozvinula schopnosť úsudku ... musíme ich naučiť samostatne rozpoznávať nesprávne úsudky.* Po dlhodobej pedagogickej praxi som presvedčený, že základy logiky, formálnej i neformálnej, by mali byť nielen trvalou súčasťou už stredoškolského vzdelania, ale aj povinným systematickým kurzom vo vzdelávaní vysokoškolskom. Vzdelanosť 21. storočia nesmie zanedbať túto podstatnú zložku. Už dlhšie sa vie, že *Bez učenia ani svätec nedokáže vynášať správne úsudky* (T. Campanella, 1568–1639). Veľmi pôsobivo vystihol časté chyby našej súkromnej logiky známy aforista F. Rochefoucauld (1613–1680): *Každý sa sťažuje na zlú pamäť, ale nikto sa nesťažuje na zlý úsudok.* Možno práve teraz bude vhodná aj myšlienka známeho francúzskeho filozofa a matematika: *Celá ľudská dôstojnosť spočíva v myslení. Snažme sa preto, aby sme mysleli správne; v tom je princíp mravnosti* (B. Pascal, 1623–1662).

Základy sú dávno známe

Klasická grécka filozofia v antických dobách (Platón, Aristoteles) prispela k poznaniu, že existujú myšlienkové (pojmové) spojenia, ktoré musia byť správne nezávisle od meniacej sa skutočnosti. Už Euklides z Alexandrie (asi 340–287 pred n. l.) vypracoval spis *Chybné úsudky (Pseudaria),* kde uvádzal rôzne typy nesprávnych úsudkov a chybných myšlienkových postupov. Možno, že táto jeho práca mala byť logickou prípravou pre štúdium jeho *Základov*. Aj na stredovekých univerzitách bola súčasťou trívia klasická aristotelovská logika. Zodpovedný študent musel bezpečne poznať zásady dvojhodnotovej logiky (princíp identity, princíp sporu, princíp vylúčenia tretieho, princíp dostatočného dôvodu), základné logické pojmy a vzťahy medzi nimi (logický štvorec) a vedieť riešiť úsudky – sylogizmy. Sú si všetci dnešní absolventi stredných a vysokých škôl istí v tom, že rozpoznajú korektné metódy usudzovania od zavádzajúcich (nedostatky v definovaní pojmov, nesprávnosť argumentácie a úsudkov)?

Oživiť korene

Hlavne v príprave budúcich učiteľov (humanitných i prírodovedných) by sa nemala zanedbávať zodpovednejšia pozornosť pre vnímanie logických súvislostí a úsudkovej argumentácie. Práve budúci pedagógovia potrebujú dobré znalosti základnej formálnej i neformálnej logiky preto, aby ich pred študentmi mohli zvýrazňovať a prakticky využívať ako účinné nástroje v procese vedeckého poznávania a pedagogického pôsobenia. Úlohou každej didaktiky poznávacieho procesu vo výskume i pri štúdiu je naučiť nielen odhaľovať nové obsahové vzťahy a súvislosti, ale aj vytvárať ďalšie myšlienkové štruktúry. Pre tento cieľ slúžia aj poznatky logiky ako jazyka modernej vedy. Súčasné vedecké disciplíny využívajú množinovo-logický jazyk i matematický formalizmus na presnejšie a jasnejšie vyjadrovanie svojich obsahových faktov a ich súvislostí do systémových štruktúr. Matematická logika ako filozoficko-metodologická disciplína pripravuje abstraktné nástroje pre formy myslenia a skúmania vo faktuálnych vedách.

Uplatňovať neformálne

Známy všestranný americký filozof a logik Ch. S. Peirce (1839–1914) vedel, že *ak sa nestaneme pustovníkmi, nevyhnutne si budeme vzájomne ovplyvňovať názory*. Málokto z nás je taký, že nepotrebuje zreteľne formulovať svoje myšlienky. Vedecké poznanie je založené na rozširovaní poznatkovej štruktúry a racionálnom rozhodovaní v súlade s pomerne prísnou logickou výstavbou. Aj moderná informatická činnosť s výpočtovou technikou vyžaduje jednoznačnú formuláciu pojmov a logických formúl. Právne systémy, spoločenské normy a predpisy, ale aj filozofické interpretácie vyžadujú kultiváciu myslenia a vyjadrovania, rozvoj logickej argumentácie i dôkazových postupov. Často však spoznávame, že naše predstavy sú v týchto súvislostiach akési problematické. Potrebujeme lepšie poznať „logické pozadie“, aby sme sa vyhli nielen nedostatkom vo formuláciách a odstraňovali významové nejednoznačnosti, ale aj predchádzali zrejmým sporom (súčasnej platnosti tvrdenia a jeho negácie). Skoro všetci tušíme zásadnú spoločensko-vedeckú nevyhnutnosť lepšieho poznania formálnej i neformálnej logiky. Aj keď sú základy výrokovej a predikátovej logiky jednoduchý teoretický systém, ktorý neopíše celé naše uvažovanie a myslenie, aj tak je užitočné, aby sme tieto logické zásady pre zodpovednú argumentáciu bezpodmienečne dobre poznali. Vážnejším cieľom logiky je systemizácia všeobecných metód úsudkov a dôkazových postupov pre usporadúvania a zdôvodňovanie poznatkových štruktúr. Uplatňovanie logicko-matematického prístupu umožňuje vidieť skúmané vzťahy v abstraktnejšej zovšeobecňujúcejšej a idealizovanej forme. To nám umožňuje naďalej pestovať tradíciu kritickej diskusie, lebo práve ona nás vedie bližšie k pravde. Uvedomovanie si základných princípov pre formu myslenia, argumentácie a komunikácie (záujem o logickú štruktúru jazyka a slovného vyjadrenia) je užitočné nielen pre metodológiu deduktívnych vied, ale aj pre každodenný spoločensko-právny život a zmysluplnú ľudskú spoluprácu.

Pre základy logiky a argumentácie

Medzi podstatné zložky užitočnosti matematickej kultúry nesporne patrí hospodárnosť úvah, logické zdôvodňovanie a argumentovanie (overovanie hypotéz, správnosť úsudkov, protipríklady). Naznačím preto aspoň stručnú osnovu kurzu *Základy argumentácie a logiky usudzovania*: *Úloha jazyka vo vedeckom poznávaní* (jazyk, myslenie, komunikácia; syntax, sémantika a pragmatika; logický rozbor jazyka; pojem – predstava, viacznačnosť, rovnoznačnosť; kritické myslenie). *O pojmoch a definíciách* (pojem, jeho obsah a rozsah, klasifikácia a triedenie pojmov, zmysel a denotát, semiotický trojuholník, pojmotvorný proces; definície – štruktúra, druhy a ich charakteristika, všeobecné pravidlá pri tvorbe definícií, chyby pri definovaní). *Základy výrokovej logiky* (výroky, funktory, tabuľky pravdivostných hodnôt, zákony a pravidlá, overovanie správnosti úsudkov). *Úvod do predikátovej logiky* (kvantifikované výroky a ich negácie, logický štvorec, usudzovanie, klasická sylogistika). *Deduktívna výstavba matematiky* (matematický jazyk, axiómy, pojmy, vety, nevyhnutná a postačujúca podmienka, metódy dokazovania, základné typy dôkazov). *O dôvodoch a argumentácii* (zdôvodňovanie, presvedčovanie, kladenie otázky, komplexná alebo prezumptívna otázka, zložky štruktúry argumentácie, kvaziargumentácia, chybné alebo chýbajúce argumenty, etika argumentácie). *Fragmenty z dejín logiky a teórie vedy*.

Literatúry je dosť

Uvediem aspoň niekoľko titulov, o ktorých viem, že ich možno študovať samostatne alebo uplatniť aj pri výučbe študentov:

AUSBERGEROVÁ, M. – FOLK, R.: *Rozvíjení myšlení žáků při vyučování*. Praha: PF UK, 1999.
BEHÚNOVÁ, V.: *Úvod do logiky pedagogického myslenia*. Prešov: PU, 1998.
BENDOVÁ, K.: *Sylogistika*. Praha: Karolinum, 1998.
BERKA, K.: *Stručné dějiny logiky*. Praha: 1994.
BERKA, K. – JAURIS, M.: *Logika*. Praha: SPN, 1978.
BERKA, K. – MLEZIVA, M.: *Co je logika?* Praha: NPL, 1962.
BIZÁM, G. – HERCZEG, J.: *Hra a logika v 85 príkladoch*. Bratislava: Alfa, 1979.

BIZÁM, G. – HERCZEG, J.: *Zaujímavá logika*. Bratislava: Alfa, 1982.
BOCHEŃSKI, J.M.: *Cesty k filosofickému myšlení*. Praha: Svoboda, 1994.
BOKR, J. – SVATEK, J.: *Základy logiky a argumentace*. Dobrá Voda: Čeněk, 2000.
CARROLL, L.: *Logika hrou*. Praha: ČTK, 1972.
CRYAN, D. a kol.: *Logika*. Praha: Portál, 2003.
CSONTOS, L.: *Úvod do logiky*. Bratislava: Dobrá kniha, 1995.
ČECHÁK, V. a kol.: *Co víte o moderní logice?* Praha: Horizont, 1981.
DOKULIL, M.: *Logika pro pedagogy*. Praha: SPN, 1970.
GAHÉR, F.: *Logické hádanky, hlavolamy, paradoxy.* Bratislava: Iris, 1996.
GAHÉR, F.: *Logika pre každého*. Bratislava: IRIS, 1998.
HROMEK, P.: *Logika v příkladech*. Olomouc: UP, 2002.
CHURCH, A.: *Úvod do matematické logiky*. Brno: UJEP, 1977.
JANÁK, V.: *Základy formální logiky*. Praha: SPN, 1973.
JAURIS, M.: *Logika*. Praha: SPN, 1976.

JAURIS, M, - ZASTÁVKA, Z.: *Základy neformální logiky*. Praha: S & M, 1992.
JIRKŮ, P. a kol.: *Miscellanea logica I*. Praha: Karolinum, 1998.
KOLÁŘ, P.: *Argumenty filosofické logiky*. Praha: Filosofia, 1999.
LIESSMANN, K. – ZENATY, G.: *O myšlení*. Olomouc: Votobia, 1994.
MATERNA, P.: *Viete logicky myslieť?* Bratislava: SPN, 1968.
MATERNA, P.: *Svět pojmů a logika*. Praha: Filosofia, 1995.
MATERNA, P. a kol.: *Logická analýza přirozeného jazyka*. Praha: Academia, 1989.
MATHÉ, S.: *Moderná logika*. Prešov: VMV 2005.
MLEZIVA, M.: *Neklasické logiky*. Praha: Svoboda, 1970.
OLEJÁR, M.: *Úvod do vedy*. Bratislava: Young Scientist, 2002.
PEREGRIN, J. (ed.): *Logika 20. století: medzi filosofií a matematikou*. Praha: Filosofia, 2006
POPPER, K.R.: *Logika vědeckého bádání*. Praha: Oikoymenh, 1997.
PRIEST, G.: *Logika (Průvodce pro každého)*. Praha: Dokořán, 2007.
SELUCKÝ, O.: *Logika pro střední školy*. Praha: Fortuna, 1995.
SOCHOR, A.: *Klasická matematická logika*. Praha: Karolinum, 2001.
SOCHOR, A.: *Logika pro všechny ochotné myslet*. Praha, UK, 2011.
SOUSEDÍK, P.: *Logika pro studenty humanitních oborů*. Praha: Vyšehrad, 1999, 2008.
SMUYLLYAN, R.M.: *Jak se jmenuje tahle knížka?* Praha: Mladá fronta, 1986.
SMUYLLYAN, R.M.: *Logika prvého rádu*. Bratislava: Alfa, 1979.
SVATEK, J.: *Úvod do logiky*. Praha: ČVUT, 1991.
SVOBODA, V. – PEREGRIN, J.: *Od jazyka k logice* (*Filozofický úvod do moderní logiky*). Praha: Academia, 2009.
SZOMOLÁNYI, J.: *Základné logické kalkuly*. Bratislava: FF UK, 1979.
ŠTĚPÁN, J.: *Klasická logika*. Olomouc: UP, 2001.
ŠTĚPÁN, J.: *Logika a logické systémy*. Olomouc: Votobia, 1992.
ŠTĚPÁN, J. – HRUBEŠ, J.: *Logika – terminologický a výkladový slovník*. Ostrava: Scholaforum, 1994.
ŠTĚPÁNEK, P.: *Matematická logika*. Praha: SPN 1982.
TARSKI, A.: *Úvod do logiky*. Praha, Academia, 1966.
TICHÝ, P.: *Logika*. Praha: SPN, 1964.
TUGENDHAT, E. – WOLFOVÁ, U.: *Logicko-sémantická propedeutika*. Praha: Rezek, 1997.
VARGA, T.: *Matematická logika pre začiatočníkov I, II.* Bratislava: Alfa, 1970.
VOLEK, P.: *Úvod do logiky a teórie vedy*. Bratislava: Update Studio, 1999.
WEINBERGER, O. – ZICH, O.: *Logika*. Praha: SPN, 1965.
QUINE, W.V.: *Od stimulu k vědě*. Praha: Filosofia, 2002.
ZASTÁVKA, Z.: *Vše, co není zakázáno, se nesmí (o logice formální i neformální)*. Praha: Radix, 1998.
ZICH, O.: *Logika pro praxi*. Praha: Práce, 1968.

ZICH, O. – KOLMAN, A.: *Zajímavá logika*. Praha: 1964.
ZOUHAR, M.: *Základy logiky pre spoločenskovedné a humanitné odbory*. Bratislava: Veda, 2008.

Náznak základných vedomostí

Naznačím, v niekoľkých testových otázkach, čo považujem za nevyhnutné v spomínanej oblasti najnižšej úrovne základnej logiky. Pochopiteľne je to len neúplný školský náznak, ale niekto ľahko vybadá, že ani s tým si nie je celkom istý.

1. Účastník zájazdu povedal: *Ak je dnes utorok, tak sme v Belgicku*. Vedúci poznamenal: *To nie je pravda*. Čo vlastne vedúci tvrdil?

2. Čo sa stalo, keď sa výrok *Ak niektorí prváci išli do kina, tak všetci druháci odišli do cirkusu,* ukázal nepravdivý?

3. Nech *A, C* sú pravdivé výroky a *B* nepravdivý výrok. Je potom výrok $[(A \vee C)' \Rightarrow B]$ pravdivý?

4. Učiteľka povedala žiakovi: *Ak budeš počas vyučovania hnevať, nedostaneš odmenu*.
Žiak *nehneval* a teraz *požaduje odmenu*. Je táto požiadavka oprávnená? Zdôvodnite.

5. Predpokladajme, že výrok ***A*** je pravdivý, výrok ***B*** je nepravdivý a o pravdivostnej hodnote výroku ***C*** nemáme informácie. Rozhodnite o pravdivostnej hodnote výroku $[\boldsymbol{A}' \Rightarrow (\boldsymbol{B}' \vee \boldsymbol{C}')]'$.

6. V dielni sú tri stroje, ktoré pracujú podľa týchto podmienok*: Keď pracuje prvý stroj, pracuje aj druhý stroj*. *Pracuje druhý alebo tretí stroj*. *Keď nepracuje prvý stroj, nepracuje ani tretí stroj*. Aké sú možnosti pre prácu tejto trojice strojov?

7. Rozhodnite o správnosti alebo nesprávnosti úsudku:
Všetky C sú A. *Niektoré B sú C. Preto niektoré C nie sú B.*

8. Nech sú *x, y* celé čísla. Je platnosť $[x \cdot y > 4]$ nevyhnutná alebo postačujúca podmienka pre platnosť $[x > 2 \wedge y > 2]$?

9. Vo veštiarni sedia vedľa seba tri bohyne: *Pravda, Lož a Múdrosť*. *Pravda* vždy hovorí pravdu, *Lož* vždy klame a *Múdrosť* hovorí tak aj onak (niekedy pravdu, niekedy lož). Zistite, v akom poradí sedia bohyne vedľa seba, ak postupne podľa poradia odpovedali na otázky takto:
Kto sedí vedľa teba? *Pravda*. Kto si? *Múdrosť*. Kto sedí vedľa teba? *Lož.* (Všímaj si pravdu!)

Záver

Racionálne ľudské správanie v každom ohľade vyžaduje poznanie základov logickej argumentácie. Formulácia myšlienok do jazykových výrazov musí spĺňať dohodnutú logickú formu. Správne a tvorivé myslenie je vo svojej formálnej stránke ukotvené v zákonitostiach logického usudzovania. Systémová štruktúra našich poznatkov a ich zdôvodňovania je uložená v základoch formálnej i neformálnej logiky. Ak chceme pripravovať a zvyšovať kultiváciu ľudského myslenia spolu so zodpovednou argumentáciou, nemožno obchádzať jej väzby s matematickou formalizáciou celého jednotného logického systému. Spoľahlivé narábanie so základmi klasickej logiky vyžaduje hlbšie zvnútornenie schém logických myšlienkových postupov. To sa dá dosiahnuť včasným, primerane zažitým a pravidelným používaním systematických základov logiky nielen v školách, ale aj v každodennom spoločenskom živote. Ak má byť vzdelanie hľadaním pravdy a užitočnej praxe, dialógom medzi zmysluplnými predstavami a trvalejšou istotou, tak sa podiel zodpovedného logického myslenia a systémovej argumentácie nemôže vynechať.

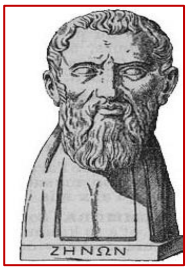
ZENÓN z Eley – medzi ilúziou a paradoxom protirečivého nekonečna

Nevyhnutnosť premýšľania

Medzi základné postavy západnej filozofie nesporne patrí *Táles z Milétu* (asi 624–547 pred n. l.), ktorého označil Aristoteles (384–322 pred n. l.) za prvého, kto začal systematicky myslieť. Prelomom v antickom uvažovaní bolo dielo o prírode, ktoré napísal *Parmenides z Eley* (asi 540–470 pred n. l.), kde sa priznáva, že zmyslové poznanie nie je postačujúce a na pochopenie existencie vecí a vysvetlenie javov potrebujeme rozumové užitočné pojmy. Pravdu o podstate sveta spoznávame myslením.

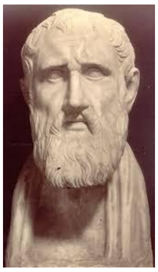
Symbol protirečení

Umeniu ako obhájiť alebo poprieť nejakú tému v polemike sa venoval Parmenidov žiak Zenón z Eley (asi 490–430 pred n. l.), zakladateľ dialektiky, preslávený svojimi apóriami (zdanlivo neprekonateľnými logickými problémami), ktorými ukazoval súkmeňovcom protirečenia v ich predstave nekonečného delenia pohybu. Aj keď sa od neho nezachovala žiadna písomná pamiatka, zostalo jeho meno trvalým symbolom ilúzii a prekvapení.



Elea bolo mestečko na pobreží neďaleko od Neapola. Zenón si v rodnom meste získal úctu ako človek rozvážny a múdry. Zápasil so svetskou nespravodlivosťou, vnímal ľudský život ako pohŕdanie smrťou, ku ktorej všetci dospejeme. Traduje sa aj tento príbeh: Ku koncu života sa Zenón zúčastnil sprisahania proti vládnucemu tyranovi a aby pri mučení neprezradil svojich spoločníkov, odhryzol si jazyk a vypľul ho do tváre krutého vládcu.

Vtedajší filozof *Parmenides* popieral mnohotvárnosť, zmenu i pohyb, lebo hľadal čosi stále, jednotné a nemenné. Mladý Zenón chcel podporiť úsilie svojho obdivovaného učiteľa. Ponúkal rôzne príklady úvah, ktorými pripravoval bezvýchodiskové situácie svojim oponentom. Navymýšľal ich okolo 40, ale zachovalo sa ich asi deväť. Chcel ukázať, že pohyb je vlastný iba premenlivému svetu zmyslov, ale cudzí skutočnému bytiu. Veril, že pri poznávaní podstaty je úloha zmyslov plná ilúzií. Premenlivosť a pohyb, ako si predstavoval Zenón, nie sú vlastné pravej podstate bytia. Vybadal, že zmyslové poznanie môže byť iné ako rozumové. Polarita medzi zmyslovým vnímaním a intelektuálnym spracovaním v pojmoch zostala od dôb Eleatov, tak sa volali súdobí myslitelia z okolia Parmenida a Zenóna, až po súčasnosť.



Antinómie, paradoxy

Uveďme jednoduché charakteristiky troch Zenónových apórií:

Dichotómia (zdvojovanie, rozpoľovanie). Nejestvuje pohyb, pretože pohybujúce sa musí prísť najskôr do polovice cesty, predtým do jednej štvrtiny, ešte predtým do jednej osminy celej cesty atď. Ak uznávame, že sa dajú postupne jednotlivé úseky cesty deliť na polovice až do nekonečna, tak pohyb nemôže vlastne ani začať.

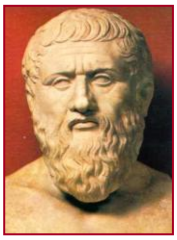
Letiaci šíp. Letiaci šíp pozorovaný v ktoromkoľvek jednotlivom momente svojho letu sa nachádza v určitom mieste priestoru, teda je v tom okamihu a v tom mieste svojho letu v pokoji. Čiže je v pokoji aj po celý čas letu. To znamená, že sa letiaci šíp nepohybuje, teda žiadny pohyb neexistuje.

Achilles a korytnačka. Rýchlonohý bežec *Achilles* dal primeraný náskok jednému z najpomalších tvorov, korytnačke. Lenže: Ak *Achilles* dobehne na miesto odkiaľ korytnačka vyštartovala, korytnačka už bude o kus ďalej. Ak príde *Achilles* zase tam, kde bola pred určitým časom, už tam korytnačka zase nebude, lebo sa za ten čas kúsok posunula, atď. Teda *Achilles* korytnačku podľa Zenónovej argumentácie nikdy nedobehne.

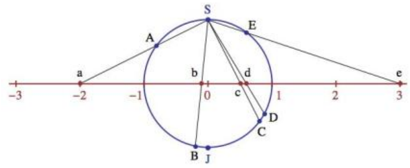
Záleží na interpretácii?

Zenón ukážkami slepých uličiek rozumu ponúkal názor, že vysvetlenie javov je zložitejšie ako sa na prvý pohľad zdá. Vytušil, že priestor a čas môžu byť klamom, skutočná podstata zmeny môže mať inú povahu. Zmyslami vnímateľný pohyblivý svet môže byť iba zdaním. Zenón naznačil, že zachádzanie s pojmom nekonečno vedie k zásadným problémom. Ukázal ťažkosti späté s pojmovo–logickým uchopením dialektiky bytia (vzťah pokoja a pohybu, jediného a mnohého, pretržitého a nepretržitého, konečného a nekonečného). Zvýraznil konflikt pojmov dotýkajúcich sa nekonečne malého a nekonečne veľkého. *Zenónove apórie* – paradoxné formy vysvetlenia zostávajú nesmrteľné.

Zenón z Eley poukazoval na dialektickú protirečivosť nášho formálno-logického myslenia



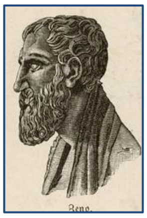
v niektorých pojmoch a vytušil neľahkú cestu za správnym poznávaním v konfrontácii protikladných názorov a ich neustálym postupným spresňovaním a prispôsobovaním. Anglický matematik a filozof *B. Russell* (1872–1970) to hodnotil slovami: *Možno tým charakterizoval myšlienkový zápas ľudstva o pochopenie sveta vecí a javov vlastným rozumom. Zdá sa, že dosahovanie pravdy nášho poznávania musí ísť cestou odstraňovania protirečení neustálym dialógom medzi rozumom a zmyslami.*



Jednoznačnosť je ohrozená

Aj pre našu dobu zostávajú otázky:

- Čo to znamená, že úsečka sa skladá z bodov?
- Je možné deliť čas, vzdialenosť, pohyb až do nekonečna?
- Možno považovať po *n*–tom delení (dosť početnom) to, čo získame, ešte za čas, vzdialenosť, pohyb?
- Je protirečenie v názorných pojmoch účinným prostriedkom k poznaniu reálnej pravdy?
- Pokiaľ majú naše otázky ešte zmysel a kde už tento zmysel strácajú?
- Zodpovedajú naše ľudské formy myslenia neustále tajomstvom zahalenej skutočnosti?
- *„Budeme hľadať tak, akoby sme mohli nájsť, ale nikdy nenájdeme tak, aby sme mohli prestať hľadať.“* Platia tieto slová Aurelia Augustína (354–430) stále znova?



Zmysly a rozum

Zenón z Eley ako prvý formuloval vo svojich apóriach hlboko filozofické otázky o podstate priestoru, času a pohybu. Spoznal protirečenie medzi zmyslovou intuíciou a rozumovo–matematickým vyjadrením pohybu. Pohyb je prechod možnosti v skutočnosť, predstavuje nepretržitý proces, ktorý nemožno poznávať pomocou diskrétnych postupov. Naznačil problémy vzájomného vzťahu aktuálnej a potencionálnej nekonečnosti, viacznačnú úlohu zmyslov a rozumu pri poznávaní podstaty. *Zenónove apórie* sú spojené s problémami nekonečnosti, s možnosťou neustále deliť dráhu i čas. Ukazujú, že popis pohybu v logike ponúkaných pojmov je problematický, keď priestor i čas možno zostaviť z diskrétnych, už ďalej nedeliteľných úsekov „tu“ a „teraz“. Zenón presviedčal, že vysvetlenie pohybu nie je možné ani vtedy, keď vnímame v dohodnutých pojmoch priestor a čas ako spojitý, ani vtedy, keď ich pokladáme za diskrétny.

Už *Aristoteles* (384–322 pred n. l.) upozorňoval, že Zenón zamieňa dva pojmy – nekonečnú deliteľnosť a nekonečnú veľkosť, že nerozlišuje myslené a faktické delenie. Neplatí, že vzdialenosť je nekonečná, pretože je nekonečne deliteľná. Chybu videl v predpoklade, že čas sa skladá z jednotlivých „teraz“.

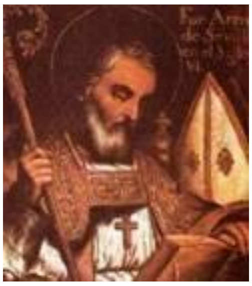
Bolestivé špekulácie

Zdá sa, že pohybom sa uskutočňuje myslené aktuálne nekonečno. Uznávame, že pohyb je vo všetkom, zmena je život prírody i myslenia. Moderná matematika ponúka nové a nečakané skúsenosti s nekonečnými množinami. Popis pohybu je asi protirečivá skutočnosť s pojmami, ktoré doteraz používame. Nielen historické *Zenónove apórie* prinášajú trvalé otázky, ale aj ďalšie protirečenia jazyka, spôsobu myslenia i argumentácie robili, robia a asi ešte budú vo svojich dôsledkoch robiť intelektuálne starosti nielen generáciam logikov, matematikov i filozofov, ale aj všetkým špekulatívne premýšľajúcim ľuďom. Možno nestačí sa iba dívať a premýšľať, ale treba vytvárať a overovať ponúkané modely. Netreba len rozmýšľať, ale sa aj pohnúť, skutkom prejaviť myslený názor, myšlienkou vyhodnotiť čin.

IZIDOR zo Sevilly – encyklopedista raného stredoveku

Význam nielen pre Španielsko

Na Pyrenejskom polostrove poznajú skoro všetci ľudia osud človeka s menom Isidoro de Sevilla (asi 560/70 – 4 .4. 636). Tento španielsky učenec, teológ, filozof, polyhistor a encyklopedista sprostredkoval začiatkom stredoveku pre túto zem antické vzdelanie. Zhromažďoval, spracúval a spisoval náučné, náboženské i historické pojednania. Vychádzal z pôvodného významu slov, zozbieral základné poznatky oživej i neživej prírode, o udalostiach Starého i Nového zákona. Zaslúžil sa o záchranu podstatných starovekých kultúrnych hodnôt, prispel k udržaniu ľudskej múdrosti v toku dejín, vytváral intelektuálny most od patristiky k stredovekej civilizácii „na česť a slávu Božiu“. Zosúladil svoje žitie v rovnováhe medzi aktívnym občianskym (milovať blížneho v skutkoch) a kontemplatívnym (dialóg s Bohom v modlitbe) životom.



Život siroty

Už v detstve mu zomreli obaja rodičia (významná španielsko–rímska rodina) a tak sa o neho staral o veľa rokov starší brat Leander. Izidor často študoval staré spisy v kláštornej knižnici. Zvolil si duchovné povolanie. Roku 599 bol zvolený za biskupa. Svojím kresťanským životom ponúkal sebazapieranie i poníženosť. S pokorou vykladal základné pravdy katolíckej viery. Podporoval budovanie škôl, pestoval dobročinnosť. Vystupoval aj na synodách miestnej cirkvi v Seville a v Tolede, vysvetľoval liturgické praktiky, mníšsku tradíciu i základné odpovede na morálne problémy. Po mnohých rokoch služby sa pokorne rozlúčil s tými, ktorým ukazoval cestu za zmysluplným kresťanským životom. Po smrti (4. apríla 636) získal úctu španielskeho ľudu i označenie cirkevného učiteľa (1722).

Vysvetľovať od základu

V histórii ľudstva boli, sú a možno aj budú veľmi obľúbené stručne formulované „základné vety“, sentencie z diel význačných osobností. Jednou z prvých uznávaných zbierok duchovného dedičstva otcov a najväčším literárnym dielom Izidora Sevilského je 20–zväzková encyklopédia *Etymologiae* (*Origenes*; počiatky). *Znalosť etymológie je často nevyhnutná pre výklad slov. Ak poznáš, aký je pôvod slova, pochopíš skôr jeho význam.* Táto práca obsahuje prehľad vtedajších náboženských i svetských vedomostí, je možno prvou svetovou encyklopédiou. Bola pomôckou pre pamäť a útechou pre dušu. Poukazovala na spojene slov a ich zmyslu, dôležitosť pomenovania aj s jeho významom, vytvorenie správnej predstavy o skutočnej veci alebo jave.

Aj matematická kultúra

Tretia časť spomínaného diela je venovaná matematike: *Matematika je teoretická veda, ktorá má za svoj predmet abstraktné množstvo. Abstraktné množstvo je to, o ktorom pojednávame iba uvažovaním, oddeľujúc ho rozumom od látky... Skrz číslo sa učíme nedať sa zmiatnuť. Ak odstrániš zo všetkého číslo, všetko zanikne. Odober ľudstvu počítanie a všetko zachváti slepá nevedomosť a nebude možné odlíšiť človeka od ostatných živočíchov.*

Možno vás zaujme ako Izidor uviedol definície priemerov dvoch čísiel, to znamená ich *aritmetický*, *geometrický* a *harmonický* stred: *Rozdiel medzi aritmetikou, geometriou a hudbou je v spôsobe ako sa v nich hľadajú stredy. V aritmetike ich hľadáš takto: sčítaš krajnosti a rozdelíš to na polovice... Podľa hudby hľadáš stred takto: Akým pomerom stred prevyšuje prvé, takým istým* *pomerom je stred prevýšený posledným... Podľa geometrie hľadáš stred takto: vynásobíš krajnosti a výsledok je ako keď sa vynásobia stredy...*

Dnešný zápis a príslušná definícia *harmonického priemeru* (podľa hudby) by sa dala zapísať takto: Nech prvé je *p*, posledné *r* a prostredné so zmienenou vlastnosťou je *s*. Potom platí (sleduj obrázok):

$$\frac{s-p}{p}=\frac{r-s}{r}$$

Pomer prevýšenia prvého (p) stredom (s) {teda $s – p$} k prvému (p) {teda $\frac{s-p}{p}$} je taký istý ako pomer prevýšenia stredu (s) posledným (r) {teda $r – s$} k poslednému (r){teda $\frac{r-s}{r}$ }.

Po úprave vzťahu $\frac{s-p}{p}=\frac{r-s}{r}$ dostaneme:

$r – p \cdot r = r \cdot p – p \cdot s \Rightarrow s \cdot (r + p) = 2 \cdot r \cdot p \;\; \Rightarrow \; s=\frac{2p{\cdot}r}{p+r}$ a to je náš *harmonický priemer* čísel p, r, teda prevrátená hodnota aritmetického priemeru prevrátených hodnôt, to znamená $\frac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{r}}=\frac{2p{\cdot}r}{p+r}$.

Z hudby cez *harmonický stred* vnímame náš *harmonický priemer*.

Hodnoty poznania i morálky

Svojím životom i dielom (napr. *Kronika* – snažil sa historicky zachytiť všetko od stvorenia sveta do roku 615, *O prirodzenosti vecí* alebo *O slávnych mužoch,* spracoval aj dejiny Vizigótov) ovplyvnil Izidor zo Sevilly celý nasledujúce obdobie stredoveku. Ukázal, že zmysluplné štúdium a pravdivé svetské vedomosti prispievajú aj k trvalým kresťanským hodnotám. *Každý pokrok pochádza z čítania a rozjímania. Čo nepoznáme, naučíme sa čítaním, čo sme sa však už naučili, rozjímaním si zachováme...* Ponúkal dialektiku ako náuku o výklade príčin vecí a javov. Logiku chápal ako podstatnú rozumovú schopnosť definovať, skúmať a vykladať, formou rozpravy rozpoznávať pravdivé od nepravdivého. Jeho ústredné literárne dielo, v ktorom zhrnul súdobé filozofické i teologické poznatky, patrilo k pokladom kláštorných knižníc a zachovalo sa z neho asi tisíc exemplárov. *Ak chce byť niekto stále s Bohom, musí sa často modliť, ale tiež často čítať.* Zapísal sa medzi tých, ktorí prispeli k rozvoju západnej civilizácie.

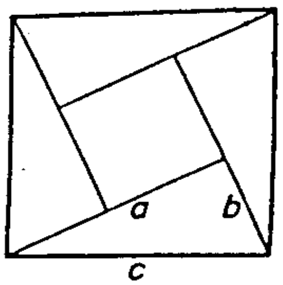
Porovnania a pripomienky

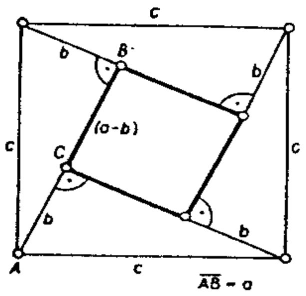
V dejinách ľudskej civilizácie bol neobyčajne osobne vzdelaný Izidor zo Sevilly porovnávaný v myšlienkovom vzlete s Platónom, v poznaní s Aristotelom, v rečníctve s Ciceróm, vo vyučovaní s Augustínom. Nezatracoval nič z toho podnetného, čo priniesli dejiny pohanstva, židovstva i kresťanstva. V histórii bol často považovaný za najvýznamnejšie učenca svojej doby, za rozširovateľa antického poznania, za jedného z veľkých učiteľov stredoveku, za úspešného mysliteľa ranej patristiky. V súčasnej dobe je považovaný aj za patróna užívateľov internetu a počítačových programov.

Zo stredovekej matematiky

Matematika v Indii

Môžete hádať, kde a kto označil matematiku za krásavicu – *Lílávatí*. Bolo to v krajine, ktorá má zachovaný spis *Šalvasútra* už z polovice prvého tisícročia pred n. l., v ktorom sú zaznamenané pravidlá pre vymeriavanie a výstavbu chrámov a obetných oltárov. To milé označenie pre matematiku použil indický matematik a astronóm Bháskara II. (asi 1115–1183), ktorý v knihe *Koruna vedy* predviedol na obrázku dôkaz Pytagorovej vety iba komentárom ***Pozri***.





Vidíte a chápete o čo sa jedná? [($c^2 = 4\cdot(a\cdot b/2) + (a - b)^2 = 2a\cdot b + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2$)]. Až do dnešných dní si možno pamätať vyjadrenie Bháskaru II.: *Hlboko si vážim matematiku, lebo tí, ktorí sa s ňou oboznámili, v nej vidia prostriedok pre pochopenie všetkého existujúceho*.

Zaujímavá postupnosť z chaosu k poriadku

Skúste doplniť ďalšie čísla do postupnosti 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Ak ste odhalili, že počínajúc tretím členom sú ostatné členy vytvárané súčtom predchádzajúcich dvoch, možno to potešilo aj vás. Asi budete mať problém, ak by ste mali určiť hneď ľubovoľný, t. j. n–tý člen (napr. stý člen) tejto známej postupnosti, ktorú francúzsky matematik *E. Lucas* (1842–1891) pomenoval na *Fibonacciho postupnosť*. Leonardo Pisánsky (asi 1170–1240), prezývaný *Fibonacci* (syn dobráka), vo svojom diele *Liber abaci* (*Kniha o abaku*) zaviedol do Európy indické cifry a nulu, vysvetlil desiatkovú pozičnú sústavu i arabské poznatky z aritmetiky aj algebry. Ak chcete priamo určovať n – tý člen Fibonacciho postupnosti, tu je hľadaný vzorec (objavený až v 19. storočí):

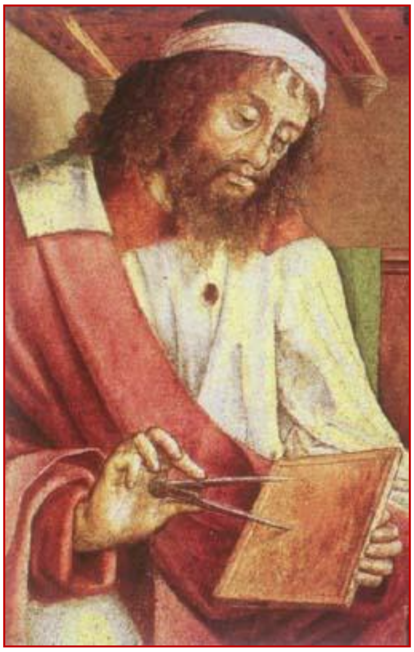
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Pomer dvoch po sebe nasledujúcich členov tejto postupnosti sa s rastúcim n stále viac približuje tzv. pomeru zlatého rezu. Nečakanou skutočnosťou je, že aj pri skúmaní štruktúr prírodných telies i niektorých biologických javov sa ukazuje *Fibonacciho postupnosť* i pomer zlatého rezu. Ako keby boli symbolom vzniku poriadku z chaosu.

Stredoveká zbierka úloh

Ani v „temnom“ stredoveku nebola matematika mŕtva. Na dvore Karola Veľkého v Aachene okolo roku 775 sa používala jedna z prvých zbierok zaujímavých úloh z matematiky s podnetným názvom *Úlohy na cibrenie umu mladých*. Jej autorom bol učiteľ, filozof i básnik Alcuin z Yorku (asi 735–804, pôvodným keltským menom Alh-win, t. j. priateľ chrámu). Už v tejto učebnici sa vyskytuje známa úloha o pltníkovi, vlkovi, koze a kapuste. Skúste zdokonaliť svoje myslenia vyriešením úlohy: Ako rozdeliť 100 mincí medzi 100 osôb, aby muži dostali po troch, ženy po dvoch a každé dve deti spolu po jednej minci. Už vo svojej dobe vzdelanec Alcuin vedel:

Rozumne sa pýtať, znamená vyučovať.



To vedel už Euklides

Už od čias antických Grékov sa za dokonalé čísla považujú tie prirodzené čísla, pre ktoré platí, že súčet všetkých ich deliteľov sa rovná dvojnásobku daného čísla. Alebo takto: Prirodzené číslo ***n*** je dokonalé, ak sa rovná súčtu všetkých svojich *vlastných* (t.j. menších ako ***n***) deliteľov. Napríklad: Číslo 6 (= 1 + 2 + 3) je dokonalé číslo; aj 28 (= 1 + 2 + 4 + 7 + 14) a 496 (preverte si to) sú dokonalé čísla. Euklides (asi 340 – 287 pred n. l.) v IX. knihe *Základy* v časti XXXVI dokázal: *Ak sú postupne od jednotky dané čísla v pomere 1:2, až sa ich súčet stane prvočíslom a ak sa tento súčet vynásobí posledným z týchto čísel, tak takto vzniknuté číslo bude dokonalé.*

Naznačme si toto tvrdenie na príklade:

$$\underbrace{(1 + 2 + 4 + 8 + 16)}_{\mathbf{31}\ \text{je prvočíslo}} \cdot 16 = 496 \ (= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248) \text{ je dokonalé.}$$

Dokážeme vetu:

Ak sú p aj $(2^p – 1)$ prvočísla, tak $2^{p-1} \cdot (2^p – 1)$ je dokonalé číslo.

Nech p je prvočíslo. Ak je $(2^p – 1)$ tiež prvočíslo, tak *vlastní* delitelia čísla

$2^{p-1} \cdot (2^p – 1)$ sú čísla $1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{p-1}, (2^p – 1), 2\cdot(2^p – 1), 4\cdot(2^p – 1), 8\cdot(2^p – 1), \ldots,$

$2^{p-2} \cdot (2^p – 1)$.

Ak určíme súčet všetkých týchto *vlastných* deliteľov dostaneme

$$\underbrace{(1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{p-1})}_{(2^p - 1)} + \underbrace{(1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{p-2})}_{(2^{p-1} - 1)} \cdot (2^p – 1) = \quad \{\text{je to súčet geometrického radu}\}$$

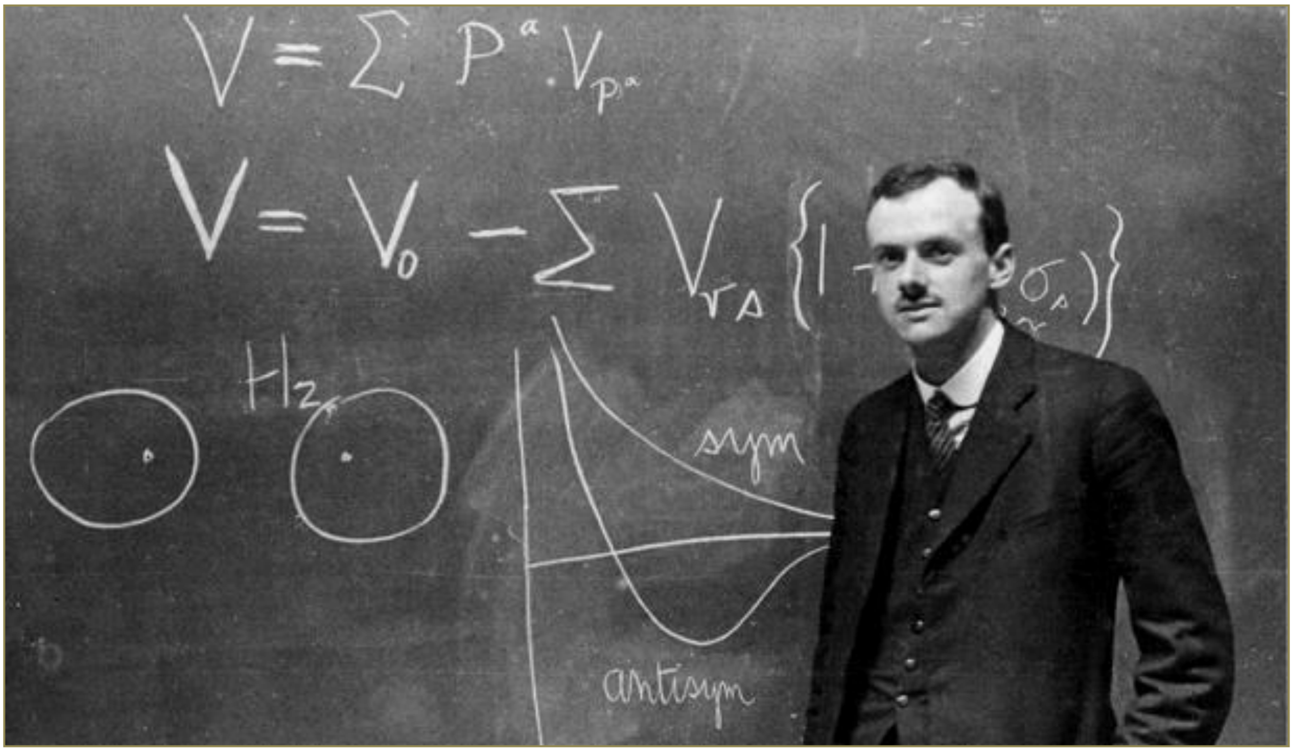
$$= (2^p – 1) + (2^{p-1} – 1) \cdot (2^p – 1) = [1 + (2^{p-1} – 1)]\cdot(2^p – 1) = 2^{p-1} \cdot (2^p – 1),$$

teda je splnená definícia dokonalého čísla.

Euklides poznal štyri dokonalé čísla: 6, 28, 496, 8128. Ďalšie dokonalé číslo (33 350 336) objavil asi J. Müller–Regiomontanus (1436–1476). Leonhard Euler (1707–1783) určil ďalšie tri dokonalé čísla a dokázal, že každé **párne dokonalé** číslo má tvar podľa Euklida $2^{p-1} \cdot (2^p – 1)$, kde p aj $(2^p – 1)$ sú prvočísla. Ešte stále nevieme, či existuje nepárne dokonalé číslo, ani či je dokonalých čísel konečný alebo nekonečný počet.

Ľudia, ktorí si osvojili princípy matematiky,
majú o jeden zmysel viac než obyčajní smrteľníci.

Charles DARWIN (1809 – 1882)

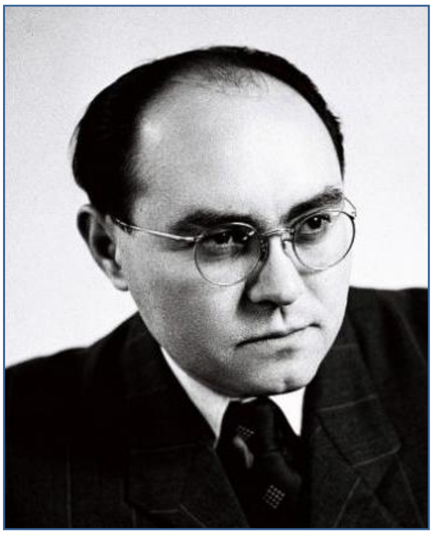


Matematika je prostriedok špeciálne prispôsobený na osvojenie si
rôznych abstraktných pojmov, a čo sa toho týka,
jej moc je neohraničená.

Paul Adrien DIRAC (1902– 1984)

Pokroky matematiky, fyziky a astronómie, ročník 52 (2007), č. 4

(Prepis rozhlasového prejavu prof. Štefana Schwarza (1914-1996) z 20. októbra 1945.)



Zmysel matematiky je v hľadaní a odvodzovaní platných viet a pončiek pomocou dovolených logických úvah, a to z daných faktov, ktoré samy o sebe sú nedokázateľné. Axiómy, z ktorých vychádzame, berieme z každodennej skúsenosti, z empirických poznatkov, alebo často tiež len z čisto fiktívnych úvah. Cieľom je vytvoriť uzavretý systém navzájom si neodporujúcich viet a pončiek.

Vývoj matematiky, smerujúci do šírky i do hĺbky, nie je dnes ani zďaleka ukončený. Sprevádza ho rastúci kriticizmus základných pojmov a paralelne s touto tendenciou rozrástlo sa použitie matematiky na celú skupinu vied na míle vzdialených od pôvodného zememeračstva. Človek nikdy neustrnul na tých problémoch, ktoré mu bezprostredná životná prax ponúka. Každý fyzikálny či technický problém, ktorý sa podarilo časom rozriešiť, dal priamo i nepriamo podnet k celkom novým matematickým disciplínam. Tak sa vyvíja i tá časť matematiky, ktorá sa pri svojom zrodení nestará o bezprostredne praktické použitie. Napriek tomu viedol tento čistý l'art pour l'artizmus vždy k novým a novým zdokonaleniam v technických a prírodných vedách. Ba možno povedať, že rozvoj fyziky a technických vied bol umožnený iba rozvojom matematických pomôcok.

Význam matematiky je však nielen vo viditeľných praktických použitiach. Je to predovšetkým význam formálne vzdelávací a výchovný. Učí tvoriť presnými logickými úvahami platné závery. Núti k presnému a účelnému mysleniu. Preto je od najstarších čias podkladom vyučovania na všetkých typoch škôl. Typicky je prípad v technike. Technik, ktorý je teoreticky, a teda predovšetkým matematicky školený, užíva nevedomky stále matematického spôsobu myslenia, i keď neoperuje vzorcami.

A potom je tu význam etický. Učí zmyslu pre pravdu, dôkladnosti a skromnosti. V matematike neplatí a nepomôže povrchné nafukovanie sa. Nepomôžu plané frázy. Pravda je tu, našťastie, len jediná. A ten, kto pochopí, aký zlomok toho, čo vytvorili jeho predchodcovia, sa možno naučiť za celý ľudsky život, stane sa nevyhnutne skromným.

Na druhej strane vychováva matematika k správnemu sebavedomiu. Lebo ten, kto ovláda niektorú z jej partií, si uvedomí, kam sa možno vypracovať pomerne malými prostriedkami a z pomerne malého počtu predpokladov prácou ľudského mozgu. Výsledky matematiky viedli k novým myšlienkam filozofickým od čias Descartových cez pozitivizmus až k dnešným filozofickým smerom, silne ovplyvneným teóriou relativity a vlnovou mechanikou.

Často sa hovorí, že matematika ako veda je suchopárna a ľudia, ktorí ju pestujú, tiež. Tieto lacné frázy pochádzajú od neinformovaných. Ako môže byť skostnateným ten, kto k svojmu jestvovaniu potrebuje vycibrené schopnosti rozlišovania a vždy pružný a svieži mozog? Jeden z najslávnejších matematikov 19. storočia Evarist Galois padol v súboji z milostných pohnútok. Bohatým citovým životom žila slávna ruská matematička Soňa Kowalewská, mnoho slávnych matematikov bolo literárne, poeticky a hudobne činných. A neboli to diletanti. Slávny nemecky matematik Weierstrass povedal: *Matematik, v ktorom neväzí kus básnika, nebude nikdy dokonalým matematikom.* Chcel tým naznačiť, že bez fantázie a obrazotvornosti niet vedeckej práce.

„***Matematika bude vždy meradlom hĺbky ľudského myslenia***".

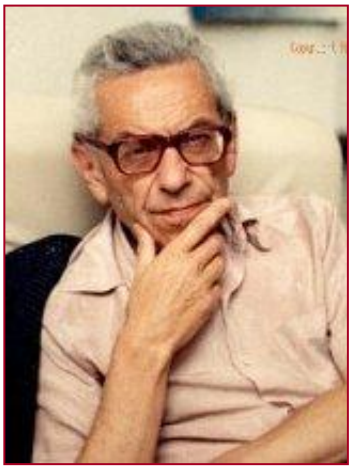
Paul ERDÖS – trvale hosťujúci profesor matematiky

Nezmar spolupráce

Publikoval okolo 1500 odborných prác asi v sedemnástich matematických oblastiach, väčšinou s spoluautorstve s ľuďmi, s ktorými sa stretol na svojich cestách (niekedy aj 11 mesiacov za rok; navštívil okolo 25 krajín). Pre okruh spoluautorstva sa zaužívalo označenie Erdösovym číslom. Ak je to číslo 1, tak autor napísal príspevok v spolupráci s P. Erdösom. Ak je číslo väčšie, potom vyjadruje ďalšie vrstvy spoluautorstva so spoluautormi P. Erdösa. Ak autor napísal príspevok s autorom s číslom n, má Erdösovo číslo $n+1$. Hovorí sa, že 472 matematikov má Erdösovo číslo 1. Z toho 188 autorov publikovalo s Erdösom dva a viac článkov. Zo slovenských matematikov má Erdösovo číslo 1 napr. J. Bosák, P. Horák, J. Širáň, z českých V. Jarník, Z. Hedrlín, J. Nešetřil, V. Rödl. Erdösovo číslo 2 má asi 5000 autorov, z nich je 62 svetoznámych matematikov, dokonca deväť držiteľov Fieldsovej medaily. Asi žiadny matematik doteraz nenapísal toľko vedeckých príspevkov a nemal toľko spoluautorov ako Paul Erdös (1913–1996), pútnik neohraničeným svetom matematiky.

Jeho rodičia boli učiteľmi matematiky. Paul sám priznal, že si matematiku obľúbil vďaka svojej matke, ktorá ho zabávala počtárskymi úlohami. Trojročný vedel násobiť „z hlavy" trojciferné čísla. Základné vzdelanie získalo doma. Otec ho naučil mnohému v gymnaziálnych rokoch. *Od detstva sa mi na matematike páči veľké množstvo veľmi zaujímavých problémov. Ich riešenie mi oddávna prináša neopísateľnú radosť.* Dvadsaťročný Erdös objavil elegantný dôkaz Čebyševovej vety z teórie čísel a získal aj akademický titul PhD. Tridsaťročný už patril medzi najlepších matematikov na svete. Roku 1949 podal dôkaz vety o prvočíslach elementárnou formou. Odvtedy nielen produkoval nečakané nápady a účinné návody ako zdolávať matematické problémy, ale aj videl nové a podnetné matematické otázky a mal schopnosť inšpirovať pre ich riešenie. *Urobme spolu nejaký dôkaz. Tým získate vlastnú skúsenosť.* Matematika bola pre neho svetom fascinujúcich problémov, ktorých riešenie spravuje Boh vo *Veľkej knihe najelegantnejších dôkazov*.

Spolužitie s matematikou

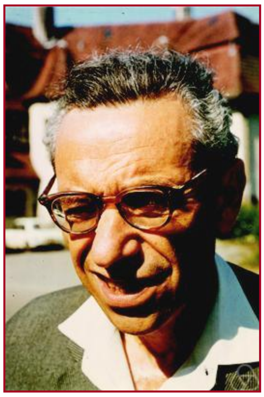


Paul Erdös (26. 3. 1913 – 20. 9. 1996) sa stal nestorom diskrétnej matematiky vo svete. Vyriešil viac matematických problémov než ktokoľvek pred ním. V čase mimoriadnej aktivity vyprodukoval dve vedecké práce mesačne. Existuje až 700 recenzií s jeho podpisom. Ročne sa zúčastňoval desiatok kolokvií a matematických konferencií. Publikoval nové poznatky z oblasti teórie čísel, kombinatoriky, teórie množín, teórie grafov, teórie grúp, teórie pravdepodobnosti, teórie aproximácií i geometrie. Nebol vedecká primadona. Chcel, aby sme sa dozvedeli pravdu. O matematických problémoch hovoril s uznávanými kapacitami rovnako ako s nadanými študentmi. Získal cenu Americkej matematickej spoločnosti (1951) aj Wolfovu cenu (1983). Vždy videl dostatok nevyriešených problémov, netúžil po vytvorení elegantných teórií: *Vyriešenie niektorých otvorených problémov, môže mať pre ďalší rozvoj rozhodne aspoň taký význam ako vypracovanie novej teórie.* Zasypal svet matematiky novými úlohami i pôsobivými riešeniami. Prenášal na ľudí vášeň pre matematiku. Zdalo sa mu, že ani v manželskej spálni sa nič iné ako matematika nedá aj tak robiť. Stal sa učiteľom matematickej spolupráce. *Je tak veľa problémov a tak málo času.* Aj po jeho smrti budú vychádzať články s jeho menom ako spoluautorom.

Excentrický mních matematickej kultúry

Jeho životný štýl bol neštandardný. Žil ako matematický nomád. Prakticky bez domova, bez majetku, ktorý by užíval, bez rodiny. Vlastníctvo chápal ako príťaž. Schádzaval sa s tvorivými matematikmi po celom svete, dopisoval si s nimi, diskutoval. Snažil sa nerobiť kompromisy vo vzťahu k sebe, ani vo vzťahu k iným. Získal nezávislosť svetoobčana. *Som natoľko nezávislý, že sa nemusím nikomu zodpovedať za to, čo kedy urobím.*

Tak prosím, moja hlava je vám k dispozícii. S kusom papiera a perom ponúkal spoznanie princípov i podstatných zákonitostí matematického sveta. *Viem, že čísla sú krásne. A ak krásne nie sú, tak nie je krásne nič.* Formuloval také matematické hypotézy, ktorých vyriešenie bolo primerané súdobej úrovni matematiky. Skúmal tajomné vlastnosti prvočísiel, vypisoval aj finančné odmeny za vyriešenie predložených problémov. Ukazoval svoj spôsob vnímania matematických súvislostí, povzbudzoval pre ich odhalenie. Najviac zaujímavých problémov objavil v kombinatorike a teórii grafov. Hovorieval: *Každý nevyriešený matematický problém starší než sto rokov je pravdepodobne problémom teórie čísel.* Veril, že musí existovať záznam všetkých jednoduchých a elegantných dôkazov matematických tvrdení a my občas do neho môžeme svojim rozumom duchovne nielen nazrieť, ale aj pravdivo uvidieť. Snažil sa pomerne presne odhadnúť naše tvorivé, až možno nadľudské schopnosti.



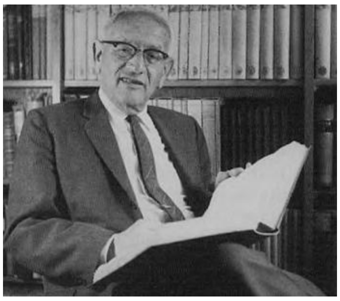
Erdös sa nezaujímal o svetskú slávu ani o materiálne zabezpečenie. Súkromný majetok je podľa neho asi aj na obtiaž. Získanú finančné ocenenia často rozdal do nadácií pre výskum alebo podporu študentom. Bol ale citlivý na osobnú slobodu a slobodu názorov. Hľadanie elegantných matematických dôkazov sa stalo zmyslom jeho života. *Záleží na tom, či budú ľudia poznať moje matematické výsledky aj po 500 rokoch.*

Rozhodne vzťah k večnosti

Ani používanie elektronických počítačov v súčasnej dobe neuberá na užitočnosti efektívnej matematickej myšlienky. Systematická matematická analýza spolu s využitím výpočtovej techniky bude vždy veľmi užitočným metodickým postupom. *Očakávam veľmi výrazný vplyv počítačov a ich výskumu na matematiku... Počítačom vďačí matematika za mnohé svoje naozaj užitočné aplikácie... Počítače výrazne pomáhajú matematike začleniť sa do širšie chápaného kultúrneho povedomia ľudí.* Erdös vycítil, že spoločenská prestíž matematiky vedie aj cez uplatnenie výsledkov matematických výskumov v iných oblastiach aj prostredníctvom výpočtovej techniky.

Všetko je trocha zložitejšie... niektoré veci nemôže namiesto času rozhodnúť nik... nič nám neostáva, iba byť trpezlivými. Paul Erdös, posadnutý vznešenou túžbou po matematickej pravde, zanechal aj pre budúce generácie úsudky svojho rozumu, ktoré vedú k hlbšej podstate idealizovaných javov a bezčasových skutočností. A*k vyšetríme starostlivo vybrané stromy, nájdeme celý les.*

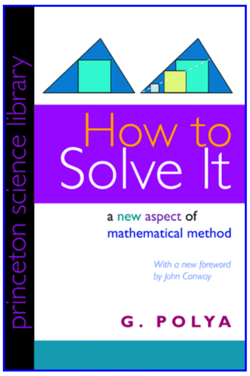
György PÓLYA
(13.12.1887–7.9.1985)



Už po skončení strednej školy, v ktorej často obsadzoval popredné umiestnenia v matematických súťažiach nadaných študentov, sa rozhodol pre profesiu matematika. *Nepokladal som sa za dosť dobrého pre fyziku a bol som príliš dobrý pre filozofiu. Matematika bola uprostred.* Univerzitné štúdia dokončil v Budapešti (1912). Počas vysokoškolského štúdia i po ňom (1912–1914) bol určitý čas na študijných pobytoch na univerzitách v Paríži, Viedni i v Göttingene. Pôsobil v Polytechnickej škole v Zürichu (1914–1940), stal sa vysokoškolským profesorom (1928). Poriadal prednášky a kurzy na rôznych univerzitách v Európe i v Amerike. V roku 1940 odišiel natrvalo do USA. Tam pôsobil na Stanfordskej univerzite v Kalifornii až do odchodu na penziu (1953). Ešte ako 90–ročný aktívne pracoval so študentmi. Mal všestranné záujmy, vrodenú čulosť povahy, sympatickú láskavosť k ľuďom. Rozvinul kombinatorickú analýzu, dosiahol úspešné výsledky vo funkcionálnej analýze, matematickej štatistike i v teórii čísel. Podstatne ovplyvnil postavenie matematickej fyziky. Teoreticko-pravdepodobnostnými výsledkami a prácami z oblasti nerovností prispel k novým aplikáciám mnohých matematických disciplín. Za výsledky svojich matematických prác, napísal viac než 230 pojednaní, sa stal členom americkej akadémie vied v Bostone i Národnej akadémie vo Washingtone. Bol zahraničným členom akadémií v Maďarsku a vo Francúzsku. Z viacerých vedeckých ocenení spomeňme, že od Americkej matematickej spoločnosti získal cenu Za mimoriadne zásluhy v matematike (1963).

Z myšlienok

- *Matematika je veda, ktorá dáva najlepšiu príležitosť pozorovať proces myslenia a má tú prednosť, že pri jej pestovaní nadobúdame cvik v metóde rozumového uvažovania, ktorú môže byť potom používaná na štúdium ktoréhokoľvek predmetu.*
- *Matematika je vtedy zaujímavá, ak živí našu vynachádzavosť a zdatnosť usudzovania.*
- *Čo to znamená ovládať matematiku? Riešiť úlohy a to nielen štandardné, ale aj také, ktoré vyžadujú určitú nezávislosť myslenia, tvorivý rozum, originálnosť, vynaliezavosť.*
- *Radosť z objavu je najlepší podnet pre ďalšiu prácu.* ***Najlepšia cesta ako sa niečo naučiť je, objaviť to...*** *Krása matematiky je v tom, nachádzať pravdu bez ťažkostí.*
- *Učenie začína činnosťou a jednaním, postupuje k slovám a predstavám a malo by končiť žiadanými algoritmami rozumového uvažovania.*
- *Čo je to dobre učiť? Dávať študujúcemu príležitosť, aby objavoval veci sám, z vlastnej iniciatívy... Štúdium umenia riešiť úlohy je výchovou vôle.*
- *Nechajte svojich študentov klásť otázky alebo sa pýtajte tak, ako sa oni môžu pýtať. Nechajte svojich študentov odpovedať alebo dávajte odpovede, ktoré oni môžu dávať. Vyhýbajte sa odpovediam na otázky, na ktoré sa nik nepýtal, ani vy sami.*
- *Vyučovanie má žiaka pripraviť pre objavy alebo vo väčšej miere dať niektoré predstavy o objavoch...* ***Veľký objav rieši veľký problém, ale zrnko objavu je v každom probléme.***



Ak sa chcete naučiť plávať, smelo vojdite do vody; ak sa chcete naučiť riešiť úlohy, riešte ich. Matematika je riešenie problémov. Učte žiakov rozmýšľať. Pre dômyselnosť a dôvtip musí byť v matematike miesto.

Treba motivovať nie vynútením, askézou, ale zaujatím a podaním problému zvnútra.

Vyučovanie nie je veda; to je umenie. Ak by vyučovanie bola veda, tak bude obsahovať najlepší spôsob vyučovania a každý človek by sa musel učiť tým spôsobom. Vyučovanie nie je veda, je tam veľa možností pre osobné rozdiely...

Tlieskajme Bolzanovi

Životný osud

V Čechách prežil celý svoj život. Narodil sa v Prahe 5. októbra 1781 ako štvrté dieťa z dvanástich. Matka bola pražská Nemka, starostlivá a zbožná. Otec pochádzal z Talianska, venoval sa obchodu so starožitnosťami a umeleckými predmetmi. Nadaný Bernard navštevoval nemeckú základnú školu a piaristické gymnázium, súkromne študoval taliančinu, francúzštinu a gréčtinu. Pri štúdiu filozofie (1796–1799) na pražskej univerzite objavil netradičné súvislosti medzi matematikou, logikou a filozofiou. Filozofickú fakultu absolvoval s vyznamenaním a rozhodol sa ešte pre štúdium teológie (1800–1804). Absolvoval aj prísne skúšky z matematiky a fyziky, získal doktorát filozofie, stal sa kňazom (1805). Bol menovaný za univerzitného učiteľa náboženstva (1806), napriek tomu, že mal povesť talentovaného matematika a uchádzal sa o profesúru v tomto odbore. Bolzano aj na poste univerzitného katechétu učil študentov kriticky a nezaujato myslieť. *Omnoho viac ako o šírenie užitočných právd sa musíme usilovať o to, aby sa cvičením u ľudí rozvinula schopnosť úsudku... musíme ich naučiť samostatne rozpoznávať nesprávne úsudky.* Bol členom matematickej sekcie Kráľovskej českej spoločnosti náuk (1815), neskôr (1841–1848) aj sekretárom jej matematickej a filozofickej sekcie i dekanom filozofickej fakulty (1818). Odklon od úradne stanovených osnov pre vyučovanie náboženstva ho priviedol k sporu s vrchnosťou v Prahe i vo Viedni. Za niektoré názory z jeho kázní, ktoré boli označené za neprispôsobené vieroučným pojmom a potrebám vtedajšej cirkevnej a vládnej moci, ho zosadili z miesta univerzitného učiteľa (1819), poslali ho do výslužby a zakázali mu verejnú činnosť. Bol prinútený orientovať sa na vedné odbory, v ktorých možno slobodne argumentovať a dokazovať – matematiku a logiku. V tichom prostredí Těchobuzi na Pacovsku (1823–1841) žil skromne v rodine priateľa J. Hoffmanna, čo mu umožnilo venovať sa aj úvahám o všeobecnom ľudskom poznaní, o spravodlivejšom spoločenskom poriadku. Písal po nemecky, jeho práce vydali žiaci a prívrženci. Chatrné zdravie a tuberkulózne chrlenie krvi mu sťažovalo život. Z jeho jedenástich súrodencov sa dospelého veku dožil iba jeden. V rodine brata Jána, v pražskej Celetnej ulici, strávil Bernard Bolzano posledné roky života. Trápený dlhodobou chorobou, zomrel na ťažký zápal pľúc 18. decembra 1848. Za veľkej účasti pražského ľudu ho pochovali na Olšanskom cintoríne v Prahe.

Prenikavá logika pojmov

Profesor pražskej univerzity, ukázal nové možnosti pre zosúladenie pojmovej usporiadanosti so skutočnými formami pravdy vo svete. Zapísal sa do kultúrnych dejín ako významný matematik, logik, filozof i sociálny mysliteľ. Stal sa príkladom korektného vedeckého záujmu i ušľachtilej ľudskosti mravnej autority. Ako nezabudnuteľná učiteľská osobnosť viedol študentov ku kritickému a nezaujatému mysleniu, k odvahe sa slobodne vyjadrovať a správne argumentovať. V *Paradoxoch nekonečna* vystihol niektoré zásadné myšlienky modernej teórie množín. Medzi prvými pochopil význam aktuálneho nekonečna v matematike. V oblasti sémantickej logiky v práci *Vedoslovie* kriticky a originálne zameral svoju pozornosť na precízne definovanie základných pojmov rôznych vedných odborov. Pozoruhodným spôsobom predvídal celý rad zásadných problémov modernej formálnej logiky a teórie vedy. Svoje utopické predstavy o riadení spoločnosti zverejnil v práci *O najlepšom štáte*. Vždy sa snažil zabrániť zlu a trápeniu, chcel spojiť rozum a moc. Bolzano zdôrazňoval úlohu celoživotného štúdia, lebo vzdelanie považoval za účinný nástroj formovania rozumu.

Súlad slov a skutkov

Z odkazu významných učiteľov, ktorí dokázali zosúladiť slová so skutkami a osobným životom,

zostane vždy niečo pozitívne vo vedomí ich žiakov, aj keď sa ich cesty rozídu. Profesor Bernard Bolzano, si ešte ako začínajúci vychovávateľ predsavzal: *Mojou prvou povinnosťou musí byť, aby som si získal lásku svojich žiakov.* Jeho prednášky mali cieľavedomú nadväznosť a logickosť s hlboko ľudským prístupom k študentom ... *aby to, čo možno bolo povedané nejasne, bolo vysvetlené jasnejšie, to, čo je úplne nesprávne, bolo odvolané, ale všetko správne a pravdivé, aby čo najskôr bolo všeobecne prijaté.*
K tomu patrí aj skromné, dôstojné a láskavé vystupovanie v škole i na verejnosti. *Múdry človek nie je nikdy pyšný a spupný; skôr o sebe zmýšľa skromnejšie ako iní... nechce panovať nad inými, ale nechce tiež byť ich sluhom...*

Nielen študentom, z odkazu B.B.

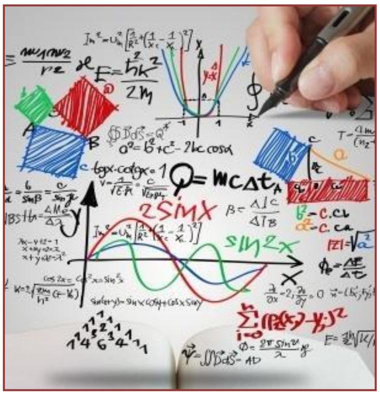
- *Zo všetkých možných spôsobov jednania vyber vždy ten, ktorý po uvážení všetkých dôsledkov najviac prispeje k blahu celku.*
- *Musíme byť rozhodní. Priľnúť k pravde, k dobrej veci ľudstva, a nie sa chcieť zapáčiť nejakej strane, nejakej ľudskej stolici.*
- *Priznajme sa pred celým svetom, že potrebujeme lásku, milovať a byť milovaní. Nehanbime sa za to, že sme ľudia!*
- *Nič nemôže zabrániť tomu, aby sme neodvodili z najpravdivejších tvrdení, ak ich spojíme s nepravdivými predpokladmi – najzvrátenejšie a najhanebnejšie závery.*
- *Viera nás nezbavuje povinnosti používať vlastný rozum a naopak.*
- *Filozofiu môže s úžitkom sledovať len ten, kto má solídne matematické vzdelanie.*
- *Pravá veselosť neuberá z dôstojnosti ľudskej, ale je aj podstatnou podmienkou jej dokonalosti.*
- ***Byť šťastný a iných obšťastňovať – to je pravé poslanie človeka... Podstatné je ctiť v každom človeku dôstojnosť ľudskej prirodzenosti.***
- *Bez toho, že by sme preceňovali hodnotu, ktorú poznanie má, musíme všetci uznať, že nevedomosť a omyl pôsobí celému ľudstvu nesmierne zlo... každý človek, pokiaľ je živý, má pokračovať vo svojom vzdelávaní...*
- *Nič na svete nesmieme mať za istejšiu a nepochybnejšiu ako zásadu, že všetci pozemšťania sa vyznačujú v podstate rovnakou prirodzenosťou a majú v podstate rovnaké práva... Každý boháč namiesto toho, aby si robil nárok na zvláštne prejavy úcty, by mal cítiť kvôli svojmu bohatstvu potrebu ospravedlnenia a obhajoby.*

Žije v našich predstavách

Múdry a ušľachtilý Bernard Bolzano zostane dejinách zapísaný ako úprimný človek, ktorý svoje presvedčenie, vedecké i humanistické, nielen hlásal, ale aj žil. Podarilo sa mu vytvoriť obdivuhodné dielo zjednocujúce morálne ideály s prísnou vedeckou metódou, praktické postupy bádania s teoretickou logikou, oduševnenie pre pojmovú usporiadanosť so skutočnými formami pravdy a sveta. Myšlienka Isokratova, použitá ako motto jeho prvej vedeckej práce, je výstižnou charakteristikou i podnetným impulzom: *Vo vedách i vo všetkých ostatných oblastiach neprinášajú pokrok tí, ktorí kŕčovite zotrvávajú na ustálenom stave vecí, ale tí, ktorí sa usilujú o lepšie, tí, ktorí sa odvážia stále meniť všetko, čo nie je v poriadku.* Osobnosť a činnosť Bernarda Bolzana charakterizoval, výstižne a stručne, J. Loužil: *Výnimočná ľudská osobnosť a charakter, zbožňovaný učiteľ mládeže, láskavý k druhým a prísny k sebe, príklad neúplatného mysliteľa, povzneseného nad oficiálne pocty a pochybnú slávu, neúnavný hlásateľ vzájomného porozumenia a spolupráce, apoštol najvyššieho mravného zákona všeobecného prospechu.* Ako nezabudnuteľná učiteľská osobnosť zostane Bernard Bolzano zapísaný nielen medzi najprenikavejších mysliteľov 19. storočia v Čechách, ale aj do množiny nezabudnuteľných postáv európskej kultúrnej civilizácie.

Zaslúži si aj náš potlesk.

K provozování matematiky potřebujeme nejprve přirozený jazyk, pomocí kterého základní mantinely matematiky definujeme. V rámci přirozeného jazyka tedy konstruujeme jazyk matematiky, tj. výrokovou a predikátovou logiku, pomocí které technizujeme pojem pravdy



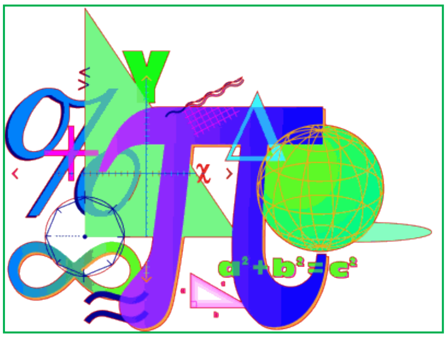
a důkazu. Při konstrukci formulí a odvozování jejich základních vlastností se přitom neobejdeme bez „přirozených“ přirozených čísel, tj. bez nějakého intuitivního uchopení přirozených čísel a principu indukce. Stejně tak při konstrukci matematického jazyka používáme logické principy, které považujeme za přirozeně pravdivé (důkaz rozborem případů, zákon sporu apod.). Teprve potom pomocí matematického jazyka postulujeme axiomy teorie množin a konstruujeme „matematická“ přirozená a reálná čísla. Ve světě takto vytvořené matematiky pak pracujeme, přičemž se pokoušíme vydobyté poznatky o zkonstruovaném světě uvést do vztahu s přirozeným světem (tj. aplikovat je).

Z výše uvedeného popisu matematické praxe je vidět, že v rámci přirozeného jazyka základní pravidla matematiky tvoříme, tj. syntaxi a sémantiku jazyka matematiky volíme stejně jako matematické axiomy. Tímto procesem tvoříme umělý svět „technické matematiky“. Nicméně po zvolení základních parametrů lze říci, že v takto stvořeném světě již matematické pravdy v jistém smyslu objevujeme: to, že spojitá reálná funkce na kompaktu je omezená, je asi spíše objev, i když objev vyplývající z pravidel, která jsme postulovali. Ale i zde je rozdíl mezi objevem a tvorbou dosti rozmazaný… Jako by stvořený matematický svět v sobě obsahoval objekty formálně neexistující, jejichž možné bytí však zpozorujeme a k existenci posléze konstrukcí přivedeme. Tento úhel pohledu by odpovídal náhledu, že formulováním jazyka, základních objektů matematiky a vztahů mezi nimi jsme jedním tvůrčím aktem stvořili svět, v rámci kterého již nyní vytvořené entity a vztahy mezi nimi objevujeme.

… typ bytí čísel zásadním způsobem závisí na pozorovací mřížce, kterou při manipulaci se světem zvolíme. Považujeme-li svět pouze za odraz světa idejí, jsou čísla základní entitou a my je objevujeme. Přijmeme-li tezi, že ideje ze světa pomocí abstrakce získáváme, jsou čísla spíše užitečným nástrojem k popisu světa a my je tak konstruujeme.

Když se přikloníme k názoru, že matematika je lidský konstrukt – nástroj stvořený k zacházení se světem, vynoří se otázka, jak to, že je tento nástroj tak úžasně účinný. Kódování přírody pomocí matematiky vidíme prakticky všude a přístroje konstruované na základě matematiky fungují s účinností až zázračnou. Tato fantastická funkčnost při aplikaci technické, zkonstruované matematiky v přirozeném světě ukazuje směrem k jistému druhu existence přirozených matematických entit, které jsou na člověku nezávislé. Z tohoto úhlu pohledu tedy lidé za pomoci zkonstruované technické matematiky přirozené matematické objekty objevují, přičemž konstruovaná matematika je mřížka, kterou se snažíme co nejvíce zjemnit a pečlivým přikládáním ke světu přirozené matematické objekty zpozorovat.

… pojmy objevu a tvorby jsou při uchopování takřka jakéhokoliv výseku světa, a tedy i matematiky, extrémně užitečné,
takže zbavovat se jednoho na úkor druhého by byla chyba.



… zájemce o odpověď se stejně nakonec neobejde bez aktu volby, tedy bez toho, aby se sám rozhodl, jak vidí svět, sebe sama a svůj vztah ke světu.

doc. RNDr. Jiří SPURNÝ, Ph.D., Katedra matematické analýzy, MFF, Univerzita Karlova v Praze

http://www.matfyz.cz/clanky/207-mezi-nami-matematici-matematiku-objevuji-anebo-tvori

Výsledky vlastného premýšľania sú hodnotnejšie ako všetka získaná cudzia múdrosť.
(C.F. Gauss, 1777–1855)

M ÚLOHY pre G

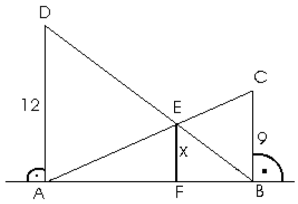
(úlohy aj pre gymnazistov)

1. Nech sú $a, b, c \in R$, pre ktoré platí: $a + b + c = 0 \wedge a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Vypočítajte hodnotu výrazu $a^4 + b^4 + c^4$. (1/2)

2. Nájdite čo najmenšie $x, y \in N$, pre ktoré platí $28x^2 = 75y^3$. ($x = 1260$; $y = 84$)

3. Stanovte, koľko je párnych prirodzených čísel, v ktorých zápise sa vyskytujú iba cifry 2, 3, 4, 5, a pritom každá najviac raz. (32)

4. Vypočítajte veľkosť x podľa údajov na obrázku:



(36/7)

5. Vyriešte nerovnicu v R: $(x - 3)/(x + 5) < x$. ($P = (-5;-3) \cup (-1;\infty)$)

6. Koľko percent vody obsahujú sušené huby, ak čerstvé huby obsahujú 90 % vody a po vysušení sme zo 44 *kg* čerstvých dostali 5 *kg* sušených? (12 %)

7. Koľko rôznych slov možno získať zámenou poradia písmen slova PROTOPLAZMA, ak žiadne dve samohlásky nesmú byť vedľa seba?

$$\frac{7!}{2!}\cdot\binom{8}{4}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}=1058400$$

8. Vypočítajte, z akej výšky nad Zemou ($R_z = 6370$ *km*) vidí kozmonaut 10 % zemského povrchu (obsah guľového vrchlíka = $2\pi\cdot R\cdot v$). (približne 1592 km)

9. Vypočítajte hustotu materiálu plávajúcej gule ponorenej vo vode do 60 % svojho priemeru. (približne 648 $kg\cdot m^{-3}$)

10. Stanovte vzdialenosť priesečníka priamok určených rovnicami $2x + 3y - 18 = 0$ a $3x - y - 5 = 0$ od začiatku súradnicovej sústavy. (5)

11. Vypočítajte vzdialenosť priamok DF, BG kocke $ABCDEFGH$ (kde $|AB| = 1$). ($\sqrt{6}/6$)

12. Stanovte, koľko litrov vody zostane v polguľovitej nádobe úplne naplnenej vodou, ak po naklonení o 30° sa z nej vyleje jedenásť litrov vody. (5 litrov)

Dôkazy z M
(pre gymnaziálnych seminaristov)

Jediný spôsob na zachovanie toho,
čo sme študentov naozaj naučili, je vymenovať úlohy,
ktoré po takejto výučbe musia vedieť riešiť.
(ruský matematik
V.I. Arnold, 1937-2010)

Dokážte:

- Prvočísiel nie je konečne veľa.
- Druhá odmocnina z dvoch nie je racionálne číslo.
- Aspoň jeden prvočíselný deliteľ d zloženého čísla $n \in N$ vyhovuje vzťahu $d \leq \sqrt{n}$.
- Ak je ciferný súčet prirodzeného čísla deliteľný tromi, tak číslo je deliteľné tromi.

$\forall \quad a, b \in N;\ 0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

$\forall \ a, b \in R^+;\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

$\forall \ n \in N;\ 3 / (n^3 + 2n)$

$\forall \ n \in N;\ 6 / (n^3 - n)$

$\forall \ n \in N;\ 5 / (n^2 + 1) \Rightarrow$ n nie je deliteľné piatimi

$\forall \ n \in N;\ 16 / (n^2 + 4n) \Rightarrow 2 / n$

- Existuje práve jedno prvočíslo p, pre ktoré je $(p^2 + 1)$ tiež prvočíslo.
- Neexistujú celé čísla x, y, aby platilo $x^3 + y^3 = 13 \cdot x \cdot y + 2$
- Neexistujú prirodzené čísla x, y, pre ktoré by platilo $x^2 - 5y + 8 = 0$
- Pre každé $n \in N$ číslo $p_n = (2^n \cdot 5^{n+1} + 1)$ nie je prvočíslom.
- Pre každé prvočíslo $p > 3$ je číslo $(p^2 - 1)$ deliteľné číslom 24.
- Súčet vnútorných uhlov v každom trojuholníku je uhol priamy.
- Všetky obvodové uhly nad priemerom kružnice sú pravé (Tálesova veta).
- Euklidove vety o výške a odvesne pravouhlého trojuholníka.
- Súčet obsahov štvorcov nad oboma odvesnami... (Pytagorova veta).
- Výšky každého ostrouhlého trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.
- Ťažnice každého trojuholníka sa pretínajú v jednom bode, ktorý ich rozdeľuje v pomere 1 : 2.
- Každý trojuholník je ťažnicami rozdelený na šesť častí s rovnakým obsahom.
- V ľubovoľnom trojuholníku rozdelí os vnútorného uhla protiľahlú stranu v pomere strán priľahlých.
- Existuje trojuholník s výškami menšími ako1cm a obsahom väčším ako10^6 cm^2.
- Neexistuje trojuholník s výškami veľkostí 1, 2, 3.
- V každom pravouhlom trojuholníku je súčet dĺžok odvesien rovný súčtu dĺžok priemerov kružníc trojuholníku opísanej a vpísanej.

Neuvádzam dôkazy svojich tvrdení,
aby každý mohol pocítiť radosť a uspokojenie
z ich vlastného objavovania.
(Archimedes, asi 287–212 pred n. l.)

Predstava, odvodenie, dôkaz

Úloha:

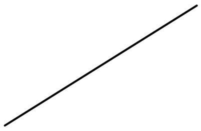
Stanovte, na aký počet častí rozdelí *n* vzájomne rôznobežných priamok, z ktorých žiadne tri neprechádzajú jedným bodom, danú rovinu.

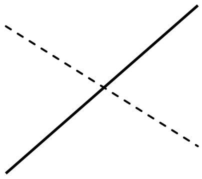
Odôvodnite a dokážte to.

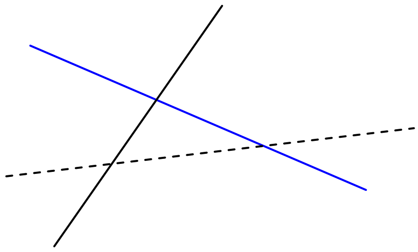
Riešenie:

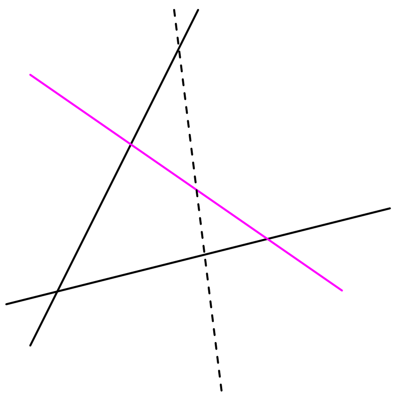
A.

Predstavme si problematiku postupne {*n* je počet priamok, $p(n)$ je počet častí roviny}

$n = 1$  $p(1) = 2$

$n = 2$  $p(2) = 4$

$n = 3$  $p(3) = 4 + 3 = 7$

$n = 4$  $p(4) = p(3) + 4 = 11$

k pôvodným siedmim častiam pribudli 4 nové, nová priamka bola pôvodnými tromi priamkami rozdelená na 4 časti a každá prispela k ďalšiemu „rozpoleniu“;

.

.

.

n $p(n) = p(n–1) + n,$

pretože pridaním *n*-tej priamky ku $(n– 1)$ pôvodných priamok, sa *n*-tá priamka rozdelí $(n – 1)$ priesečníkmi s pôvodnými priamkami na *n* častí a každá z nich prispeje k „rozpoleniu“, teda k pôvodnému počtu častí $p\cdot(n-1)$ sa pridáva n nových častí.

Ak sčítame

$$\left.\begin{array}{l} p(1) = 2 = 1 + 1\\ p(2) = p(1) + 2\\ p(3) = p(2) + 3\\ .\\ .\\ .\\ p(n) = p(n-1) + n \end{array}\right\} +$$

dostaneme

$$p(1) + p(2) + \ldots\ldots\ p(n) = 1 + p(1) + \ldots + p(n-1) + (n+1)\cdot n/2$$

$$p(n) = \frac{n^2+n}{2} + 1$$

$$p(n) = \frac{n^2+n+2}{2}$$

B.

Dôkaz matematickou indukciou:

1. pre $n = 1$ je $p(1) = 2$, vzťah platí;
2. nech vzťah platí pre $n = k$, t.j.

$$p(k) = \frac{k^2+k+2}{2}$$

pre $p(k+1) = p(k) + (k+1)$ odvodíme

$$p(k+1) = \frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 = \frac{k^2+k+2+2k+2}{2} = \frac{k^2+3k+4}{2} = \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}$$

$$p(k+1) = \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}$$

teda vzťah platí aj pre $n = k + 1$.

Záver: pre každé $n \in \mathrm{N}$ platí

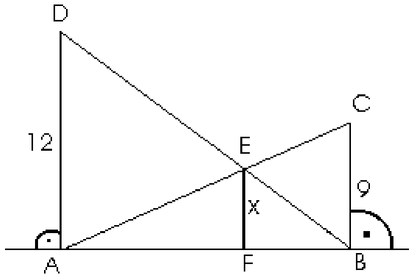
$$p(n) = \frac{n^2+n+2}{2}$$

Vhodnou úvahou sme odvodili a dôkazom sme sa presvedčili, že n priamok, z ktorých žiadne tri neprechádzajú jedným bodom,

rozdelí danú rovinu na $\frac{n^2+n+2}{2}$ častí.

ÚLOHY O PODOBNOSTI TROJUHOLNÍKOV

Vypočítajte veľkosť *x* (údaje sú na obrázku):

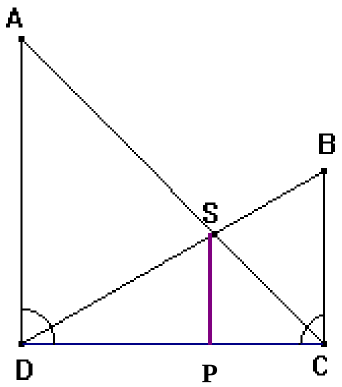


Riešenie:

Označme si $|AF|$ ako p a $|AB|$ ako s. Potom $|FB| = s - p$.
Pretože $\Delta\, ABC$ je podobný $\Delta\, AFE$, tak platí $9/x = s/p$.
Pretože $\Delta\, ABD$ je podobný $\Delta\, FBE$, tak platí $12/x = s/(s - p)$.
Z toho vyplýva $9p = s \cdot x$ a $12s - 12p = s \cdot x$
a teda $21p = 12s$ a tým aj $p/s = 4/7$.
Potom je zrejmé aj $x/9 = p/s = 4/7$ a z toho $\boldsymbol{x} = 36/7$.

Pre vzdialenosti na obrázku platí: $|AD| = 9{,}6$ cm; $|DC| = 2{,}4$ cm; $|CB| = 3{,}2$ cm. Vypočítajte dĺžky úsečiek *DS*, *SB*, aj vzdialenosť bodu *S* od priamky *DC*.

Riešenie:



Priamky *AD*, *BC* sú rovnobežné, uhly *SCB*, *SAD* sú striedavé a preto $|\angle SCB| = |\angle SAD|$. Ďalej uhly *BSC*, *ASD* sú vrcholové a tak $|\angle BSC| = |\angle ASD|$. Odtiaľ vyplýva, že trojuholníky *ASD*, *CSB* sú podobné a $|AD| : |BC| = |DS| : |SB|$, t.j. 9,6 :3,2 = $|DS| : |SB|$.

Teda $|DS| = 3|SB|$. Trojuholník *DCB* je pravouhlý a podľa Pytagorovej vety

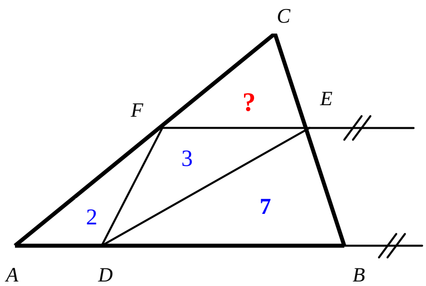
$|DC|^2 + |CB|^2 = |DB|^2 \Rightarrow |DB| = \sqrt{(3{,}2)^2 + (2{,}4)^2} =$ 4 cm. Avšak $|DB| = |DS| + |SB| = 3|SB| + |SB| = 4|SB|$,

potom $|SB| = 1$ cm, $|DS| = 3$ cm. Trojuholníky *DPS*, *DCB* sú podobné,

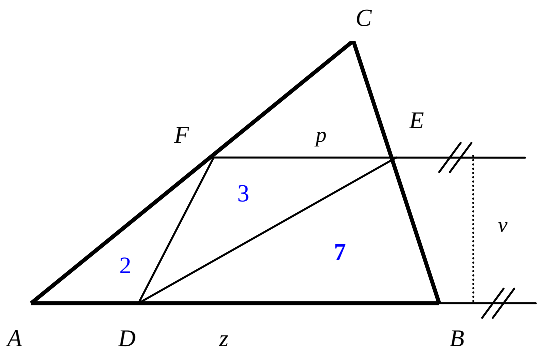
$$|SP| : |SD| = |BC| : |BD| \Rightarrow |SP| = 3 \cdot \frac{3{,}2}{4} = \mathbf{2{,}4\ cm}.$$

Podobnosť a odhalený pomer

Stanovte obsah trojuholníka *ABC*, ak poznáte obsahy trojuholníkov *ADF*, *DEF*, *DBE*, podľa zadania na obrázku (*AB // FE*).



Riešenie:



Označme $|FE| = p$, $|AB| = z$, potom $p = z/3$, lebo ak si označíme vzdialenosť rovnobežiek (*AB // FE*) ako *v*, tak podľa situácie zadanej na obrázku platí pre dané obsahy $\frac{z \cdot v}{2} = 9$ a tiež $\frac{p \cdot v}{2} = 3$.

Ak to dáme do pomeru, tak z toho vyplýva, že $\frac{z}{p} = 3$ t.j. $p = \frac{z}{3}$.

Pretože trojuholníky *ABC* a *FEC* sú podobné podľa vety (*u*, *u*) s koeficientom 1/3, tak pre ich obsahy (označme obsah trojuholníka *FEC* ako *x*) platí $x = \frac{1}{9} \cdot (x + 12)$. Z toho vyplýva, že $x = 3/2$. Obsah trojuholníka *FEC* je 1,5. Obsah trojuholníka *ABC* je 13,5.

Úlohy riešené vhodným (matematickým) prieskumom

Jednou z metód riešenia školských matematických úloh je skúmať, ako sa prípadné riešenie vyvíja v závislosti na jednotlivých zmenách premenných či parametrov, ako sa postupne odhaľuje príslušná zákonitosť. Takýto postup nazývame experimentovanie, modelovanie skúmanej situácie, objavný prieskum. Pri takýchto simuláciách môžeme vysloviť určitú hypotézu a tú sa potom snažiť dokázať alebo vyvrátiť.

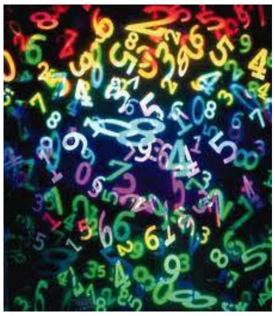
Ponúkam niektoré úlohy, ktoré naznačujú spomínaný postup generovania riešenia.

Prehľadné modelovanie problému

- Stanovte, pre ktoré prirodzené čísla n je číslo $G = (1^n + 2^n + 3^n + 4^n)$ deliteľné piatimi.

Riešenie: Vyznačme si ako sa G vytvára pre jednotlivé $n \in N$:

	1^n	+	2^n	+	3^n	+	4^n	G
$n = 1$	1		2		3		4	10
$n = 2$	1		4		9		16	30
$n = 3$	1		8		27		64	100
$n = 4$	1		16		81		156	254
$n = 5$	1		32		243		624	900
$n = 6$	1		64		729		2496	3290
:								



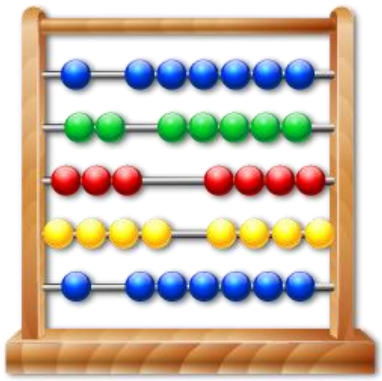
Ak si uvedomíme, že v číslach tvaru
2^n sa na posledných miestach pravidelne striedajú cifry 2, 4, 8, 6;
3^n sa na posledných miestach pravidelne striedajú cifry 3, 9, 7, 1;
4^n sa na posledných miestach pravidelne striedajú cifry 4, 6, 4, 6;
uznáme, že na poslednom mieste súčtu $(1^n + 2^n + 3^n + 4^n)$ pre $n = 1, 2, 3$; 5, 6, 7; 9, 10, 11; ... (vynechávali sme násobky štyroch) je vždy 0 a to znamená že číslo G je deliteľné piatimi.
Pre $n = 4, 8, 12, 16, ...$ sa tak nestane (na konci čísla G bude vždy cifra 4).
To znamená, že číslo $G = (1^n + 2^n + 3^n + 4^n)$ je deliteľné piatimi pre všetky prirodzené čísla n, ktoré nie sú deliteľné štyrmi.

Úloha, ktorú ponúkol J.J. Sylvester (1814-1897, anglický matematik)

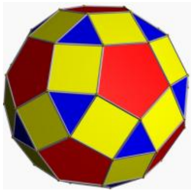
- *Z dostatočne veľkého počtu poštových známok s hodnotami 5 a 17 sa dajú skladať rôzne hodnoty. Stanovte najväčšiu hodnotu, ktorá sa nedá vytvoriť kombináciou týchto dvoch hodnôt.*

Riešenie: Generujme systematicky tabuľku hodnôt, ktoré dostávame postupným sčítavaním jednotlivých hodnôt:

	5	10	15	20	25	...
17	22	27	32	37	42	...
34	39	44	49	44	49	...
51	56	61	66	71	76	...
68	73	78	83	88	93	...
:						



Vidíme, že vieme vytvoriť číselné hodnoty
na konci s číslicou 0 pre čísla ≥ 10;
na konci s číslicou 5 pre čísla ≥ 5;
na konci s číslicou 7 pre čísla ≥ 17;
na konci s číslicou 2 pre čísla ≥ 22;

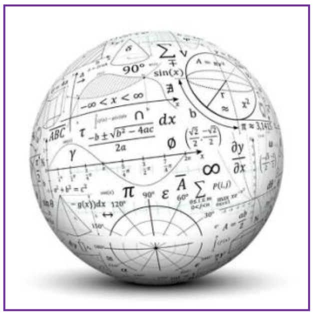


na konci s číslicou 4 pre čísla $\geq$ 34;
na konci s číslicou 9 pre čísla $\geq$ 39;
na konci s číslicou 1 pre čísla $\geq$ 51;
na konci s číslicou 6 pre čísla $\geq$ 56;
na konci s číslicou 8 pre čísla $\geq$ 68;
na konci s číslicou 3 pre čísla $\geq$ 73;
teda najväčšou hodnotou, ktorá sa nedá z daných hodnôt vytvoriť je 63.

Pohyblivá logika

- Ak v štvorcovej tabuľke prirodzených čísiel 1 – 49 (pozri schému)

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

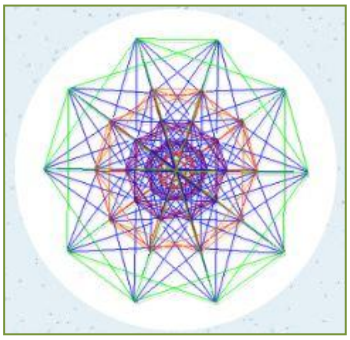


vyberieme sedem čísiel tak, že v každom riadku a v každom stĺpci je vybrané práve jedno číslo, potom súčet vybraných čísiel je vždy rovnaký.
Dokážte toto tvrdenie a stanovte ten súčet.

Riešenie: Predstavme si, že na každé číslo v prvom riadku tabuľky položíme značky. Súčet označených čísiel by bol 1 + 2 + 3 + 4 +5 + 6 + 7 = 28, ale treba, aby práve jedna značka bola v každom riadku i v každom stĺpci. To dosiahneme tak, že značky posúvame v smere stĺpcov, aby v každom riadku bola práve jedna. Pri posune značky do 2. riadku sa číslo zväčší o 7, pri presune do 3. riadku o 14 atď. Preto pri presune značiek do jednotlivých riadkov (do každého práve jedna) sa súčet príslušných čísiel zväčší o (1 + 2 + 3 +4 + 5 + 6) · 7 = 147. V požadovanom rozdelení, podľa textu úlohy, je teda celkový súčet označených čísel vždy 28 + 147 =75.
Logická predstava o pohybe značiek bola užitočná a presvedčivá.

Nielen radosť z experimentovania

- Stanovte, pre ktoré $n \in N$ je $1! + 2! + 3! + 4! + ... + n! = p^2$, kde p je prirodzené číslo.



Riešenie: Kto skúsi postupne dosadzovať, vybadá:

$1! = 1 = 1^2$
$1! + 2! = 3$
$1! + 2! + 3! = 9 = 3^2$
$1! + 2! + 3! + 4! = 33$
$1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 153$
$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! = 873$

Zadaniu vyhovujú zatiaľ iba $n = 1$, $n = 3$. Zdá sa, že od $n = 4$ je posledná číslica tých jednotlivých súčtov vždy 3. Prečo? Pre $k \geq 5$ už všetky $k!$ majú poslednú číslicu vždy nula (je tam vždy súčin $2 \cdot 5$) a teda príslušné súčty končia už vždy číslicou 3. Ale druhá mocnina žiadneho prirodzeného čísla nikdy nekončí číslicou 3 (pretože $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ atď.).
Danej úlohe vyhovujú len čísla 1 a 3.

Experimentovanie často ponúkne hypotézu, ktorú keď dokážeme, riešenie úlohy je zaručené.

Precvičte si deliteľnosť

Rozložte číslo (2^{18} – 1) na súčin prvočísiel.

$(2^{18} - 1) = (2^9 + 1) \cdot (2^9 - 1) = 513 \cdot 511 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 7 \cdot 73 = \mathbf{3^3 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 73}$

❖ Stanovte počet kladných celočíselných deliteľov čísla 9 faktoriál.

$9! = 9{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2 = 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot 2{\cdot}3 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$
Počet kladných celočíselných deliteľov je $8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 =$ **160**.

➢ Stanovte najmenšie aj najväčšie päťciferné prirodzené číslo, ktoré je deliteľné číslom 36, doplnením číslic *p*, *q*, v čísle 67*p*3*q*.

Aby spomínané päťciferné číslo bolo deliteľné číslom 36 musí byť deliteľné číslami 4 aj 9. Aby bolo deliteľné číslom 4 musí byť jeho posledné dvojčíslo deliteľné číslom 4. Teda q môže byť buď 3 alebo 6 (len dvojčísla 32 a 36 sú deliteľné štyrmi). Zároveň musí byť ciferný súčet spomínaného čísla deliteľný 9. Tento ciferný súčet musí byť násobkom čísla 9, teda $6 + 7 + p + 3 + q =$ $= 16 + p + q = k \cdot 9$, teda iba 18 alebo 27 (súčet $p + q$ môže byť najviac 18; p, q sú cifry od 0 do 9). To znamená, že $p + q$ môže byť iba 2 alebo 11.
Ak $q = 2$, tak $p = 0$ alebo $p = 9$; ak $q = 6$, tak $p = 5$.
Do úvahy pripadajú čísla 67 032, 67 932, 67 536.
Najmenšie číslo s požadovanými vlastnosťami je **67 032** a najväčšie je **67 932**.

- Nájdite všetky trojciferné prirodzené čísla, ktoré po vydelení číslom 15 majú zvyšok 12 a po vydelení číslom 11 zvyšok 9.

Hľadané čísla X musia vyhovovať podmienkam:
(1) $X = 15 \cdot k + 12$ (2) $X = 11 \cdot t + 9$ (3) $100 \le X \le 999$
Ak by sme začali vypisovať postupne X pre k a t od 0, 1, ... uvidíme, že prvým číslom, ktoré vyhovuje prvým dvom podmienkam je číslo 42. Pretože najmenší spoločný násobok čísel 11 a 15 je 165, tak podmienkam úlohy vyhovujú čísla $X = 42 + 165 \cdot m$. Aby bola splnená tretia podmienka treba nájsť prirodzené čísla m, ktoré vyhovujú vzťahu $100 \le 42 + 165 \cdot m \le 999$. Tejto nerovnici vyhovujú $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, teda hľadanými číslami sú **207**, **372**, **537**, **702** a **867**.

✓ Nájdite najväčšie štvorciferné prirodzené číslo s ciferným súčinom 420.

Rozložením čísla 420 na súčin prvočísiel vidíme: $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.
Teda najväčšie číslo s požadovanou vlastnosťou je **7652**.

- Nájdite najmenšie päťciferné prirodzené číslo s ciferným súčinom 1080.

Rozložením čísla 1080 na súčin prvočísiel vidíme: $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$.
Teda najmenšie číslo s požadovanou vlastnosťou je **13589**.

Uplatnite poznatky z pravdepodobnosti

Školská teória pravdepodobnosti je napojená na základné poznatky z kombinatoriky a má svoje opodstatnenie už v elementárnom vzdelávaní, lebo využíva a rozvíja logické myslenie (indukciu, dedukciu, schopnosť hľadať a používať jednotlivé organizačné princípy, vedieť kvantifikovať hľadané prvky s požadovanými vlastnosťami), vzbudzuje záujem pestrosťou svojich úloh aj ich praktickým uplatnením. Elementárne úlohy na použitie základných poznatkov z pravdepodobnosti sú pôsobivou možnosťou aj na samostatné matematické uvažovanie.
Skúste uplatniť svoje poznatky zo strednej školy a porovnať ich so správnymi výsledkami (symbol ≈ znamená približne sa rovná).

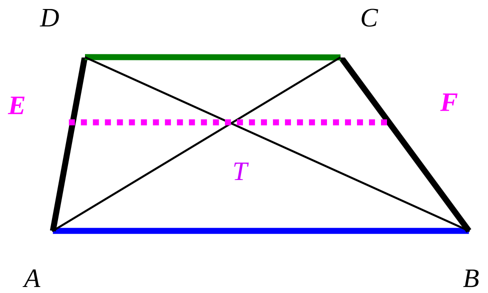
1. Stanovte pravdepodobmosť, že náhodne vybrané dvojciferné prirodzené číslo (zo všetkých dvojciferných prirodzených čísel) je deliteľné siedmimi.
2. Stanovte pravdepodobnosť, že pri hode štyroch hracích rôznofarebných kociek (s označením 1 až 6) padne práve jedno z čísel 1, 6 (buď 1 alebo 6).
3. Z 52 žolíkových kariet (4x13; 4 farby, tj. 4 esá) je jedna farba tromfová. Stanovte pravdepodobnosť, že náhodne vytiahnutá karta je eso alebo tromf.
4. Desať ľudí si náhodne sadne okolo okrúhleho stola. Stanovte pravdepodobnosť, že určití dvaja ľudia budú sedieť vedľa seba.
5. Z 32 hracích kariet (4x8; 4 farby) vyberieme päť. Stanovte pravdepodobnosť, že práve tri z nich budú zelene.
6. V predajni sa vysypalo z desiatich škatúl desať párov rovnakej obuvi. Predavačka ich naházdala naspäť len tak napochytre, náhodne. Stanovte pravdepodonosť, že v každej škatuli bude práve jedna pravá a jedna ľavá topánka.
7. V tombole je 100 žrebov a 10 výhier. Máme dva žreby. Stanovte pravdepodobnosť, že výhra pripadne aspoň na jeden náš žreb.
8. Štyria páni si odložia v šatni štyri rôzne klobúky. Stanovte pravdepodonosť, že pri náhodnom vrátení dostane aspoň jeden pán naspäť svoj klobúk.
9. Chlapec a dievča sa dohodli, že sa stretnú na obľúbenom mieste medzi sedemnástou a osemnástou hodinou večer. Ten, kto príde prvý, počká toho druhého práve 20 minút a potom odíde. Stanovte pravdepodobnosť, že sa stretnú, ak ich príchody sú v danom časovom intervale náhodné a navzájom nezávislé.
10. Pravdepodobnosť, že študent získa zápočet je 2/3. Pravdepodobnosť, že študent získa zápočet a zároveň urobí skúšku je 1/2. Stanovte pravdepodobnosť, že študent urobí skúšku za podmienky, že už má zápočet.
11. Stanovte pravdepodobnosť, že medzi štyrmi súrodencami sú práve dvaja chlapci, ak vieme, že pravdepodobnosť narodenia chlapca je 0,515 a pravdepodobnosť narodenia dievčaťa je 0,485.
12. Kocku (1 – 6 bodov) hodíme 10 krát. Stanovte pravdepodobnosť, že päťka (5 bodov) padne práve 6 krát.
13. Test má 10 otázok a ku každej sú uvedené tri možné odpovede, z ktorých práve jedna je správna. Stanovte pravdepodobnosť, že študent odpovie správne aspoň na polovicu otázok, ak odpovede volí úplne náhodne.
14. Stanovte najmenej koľkokrát treba hodiť kockou, aby pravdepodobnosť, že padne aspoň jedna šestka, bola väčšia než 70 percent.
15. Stanovte aspoň koľko osôb musíme náhodne vybrať, aby pravdepodobosť, že aspoň dve z týchto osôb majú v ten istý deň roka (365 dní) narodeniny, bola väčšia ako 0,5.
16. V našej triede je 60 % chlapcov a 40 % dievčat. Vieme, že 10 % chlapcov a 25 % dievčat píše básne. Stanovte pravdepodobnosť, že náhodne vybraná osoba z tejto triedy, ktorá píše básne je chlapec.

Správne výsledky a hodnotenie nájdete aj na webstránke
http://www.era.topindex.sk/testy-s-matematickou-tematikou/

Uvidieť harmonický priemer

Úloha:
Ukážte, že veľkosť priečky lichobežníka, ktorá prechádza priesečníkom jeho uhlopriečok a je rovnobežná so základňami, je **harmonickým** priemerom veľkostí oboch jeho základní.

Riešenie:
Označme patričné body ako na obrázku, kde $|AB| = \boldsymbol{a}$, $|CD| = \boldsymbol{c}$.



Trojuholníky *ABT* a *CDT* sú podobné (podľa vety *uu*, rovnobežky preťaté priečkou – striedavé uhly). Potom platí $|AT| : |TC| = \boldsymbol{a} : \boldsymbol{c}$, t.j. $|TC| = \frac{c}{a} \cdot |AT|$.

Trojuholníky *TFC* a *ABC* sú tiež podobné (podľa vety *uu*) s koeficientom podobnosti

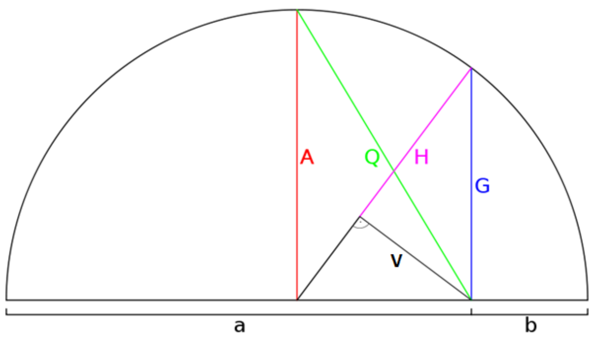
$\frac{|TC|}{|AC|} = \frac{|TF|}{|AB|}$. Teda môžeme vyjadriť $|TF| = \frac{|TC|}{|AC|} \cdot |AB|$,

t.j. $|TF| = \frac{c}{a} \cdot \frac{|AT| \cdot |AB|}{|AT| + |TC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + |TC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + \frac{c}{a} \cdot |AT|} = \frac{c}{1 + \frac{c}{a}} = \frac{a \cdot c}{a + c}$.

Podobne pre trojuholníky *TEA* a *CDA* s koeficientom podobnosti $\frac{|AT|}{|AC|} = \frac{|ET|}{|DC|}$ platí

$$|ET| = \frac{c \cdot |AT|}{|AC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + |TC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + \frac{c}{a} \cdot |AT|} = \frac{c}{1 + \frac{c}{a}} = \frac{a \cdot c}{a + c}.$$

Potom platí $|EF| = |ET| + |TF| = 2 \cdot \frac{a \cdot c}{a + c} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}$ a to je **harmonický priemer** $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$.



Nech sú ***a, b*** kladné reálne čísla, $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$.

A $= (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})/2$ je **aritmetický priemer** ***a, b***.

G $= \sqrt{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})}$ je **geometrický priemer** ***a, b***.

H $= \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ je **harmonický priemer** ***a, b***.

Q $= \sqrt{[(a^2+b^2)/2]}$ je **kvadratický priemer** ***a, b***.

Platí: **H** < **G** < **A** < **Q**

Zaujímavá vlastnosť pytagorovských čísiel

Úloha:

Dokážte vetu: **Pre každé $a, b, c \in N$ platí: ak $a^2 + b^2 = c^2$, tak $5/(a \cdot b \cdot c)$.**

Riešenie:

Predpokladajme, že platí negácia dokazovaného tvrdenia:
$\exists\, a, b, c \in N;\ a^2 + b^2 = c^2 \ \wedge\ 5$ nedelí $(a \cdot b \cdot c)$

Pre druhé mocniny prirodzených čísiel a ich deliteľnosť piatimi platí, že zvyšky po delení piatimi sú tieto:
$(5k)^2 = 25k^2 = 5\cdot(5k^2) \quad \Rightarrow$ zvyšok 0
$(5k + 1)^2 = 25k^2 + 10k + 1 \quad \Rightarrow$ zvyšok 1
$(5k + 2)^2 = 25k^2 + 20k + 4 \quad \Rightarrow$ zvyšok 4
$(5k + 3)^2 = 25k^2 + 30k + 9 \quad \Rightarrow$ zvyšok 4
$(5k + 4)^2 = 25k^2 + 40k + 16 \Rightarrow$ zvyšok 1

Je zrejmé, že každá druhá mocnina prirodzeného čísla dáva pri delení piatimi zvyšok $0 \vee 1 \vee 4$.

Ak 5 nedelí $(a \cdot b \cdot c) \ \Rightarrow\ 5$ nedelí $a \wedge 5$ nedelí $b \wedge 5$ nedelí c, teda a, b, c sú tvaru buď $5k + 1$ alebo $5k + 2$ alebo $5k + 3$ alebo $5k + 4$ a po umocnení $/^2$ majú vždy zvyšok $1 \vee 4$.
Potom $a^2 + b^2$ môže mať zvyšky $5 \vee 8 \vee 2$, t.j. $a^2 + b^2$ môže mať po vydelení piatimi zvyšky $0 \vee 3 \vee 2$; c^2 môže mať zvyšok $1 \vee 4$.
Teda vždy $a^2 + b^2 \neq c^2$, ale to je spor s predpokladom. Naša predpokladaná negácia dokazovaného výroku neplatí, tak platí výrok pôvodný, ktorý sme mali dokázať.

Zmena na priamy dôkaz:

Nech pre $a, b, c \in N$ platí $a^2 + b^2 = c^2$, teda na každej strane rovnosti musí byť rovnaký zvyšok voči deliteľnosti 5 (možné sú len 0, 1, 4), to znamená jednotlivé zvyšky, ktoré vyhovujú sú:

$$\left.\begin{array}{l} \text{buď} \quad 1 + 4 = 0 \Rightarrow 5/c \\ \text{alebo} \quad 4 + 1 = 0 \Rightarrow 5/c \\ \text{alebo} \quad 0 + 0 = 0 \Rightarrow 5/a \wedge 5/b \wedge 5/c \\ \text{alebo} \quad 0 + 1 = 1 \Rightarrow 5/a \\ \text{alebo} \quad 1 + 0 = 1 \Rightarrow 5/b \\ \text{alebo} \quad 0 + 4 = 4 \Rightarrow 5/a \\ \text{alebo} \quad 4 + 0 = 4 \Rightarrow 5/b \end{array}\right\} \Rightarrow 5/(a \cdot b \cdot c)$$

Prirodzené čísla a, b, c, ktoré vyhovujú vzťahu $a^2 + b^2 = c^2$ voláme *pytagorovské* trojice čísiel.

Všetky riešenia rovnice $a^2 + b^2 = c^2$,
sú dané vzorcami $a = 2 \cdot x \cdot y \cdot k$, $b = (x^2 - y^2) \cdot k$, $c = (x^2 + y^2) \cdot k$,
kde x, y, k sú prirodzené čísla a platí $x > y$.

Zmes úloh z kombinatoriky

a) Stanovte počet šesťciferných prirodzených čísiel neobsahujúcich číslice 2 ani 7.
b) Koľko je možností vybrať zo sedem mužov a štyroch žien šesťčlennú skupinu, v ktorej sú aspoň tri ženy?
c) Koľko je možností usporiadať vedľa seba päť dievčat a štyroch chlapcov tak, aby žiadni dvaja chlapci neboli bezprostredne vedľa seba?
d) Koľko je možností pre rozdelenie siedmych ruží a piatich tulipánov trom dievčatám (záleží len na počte z jednotlivých druhov pre rôzne dievčatá)?
e) Koľko možností máme pre výber štvorčlennej posádky z 10 kozmonautov, ak určití dvaja kozmonauti nemôžu letieť spolu?

Riešenie:

a) Na prvé miesto je sedem možností $\{1,3,4,5,6,8,9\}$ na ďalších piatich miestach toľko, koľko je $V_5'(8)$. Teda všetkých možností je $7 \cdot 8^5 = 229\,376$

b) ak práve tri ženy: $C_3(4) \cdot C_3(7)$
ak práve štyri ženy: $C_2(7)$
spolu: $C_3(4) \cdot C_3(7) + C_2(7) = 161$.

c) Rozsaďme dievčatá $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$ tak, aby boli medzi nimi jednomiestne medzery. To môžeme urobiť $5! = 120$ spôsobmi. Do medzier (sú štyri) a na dve miesta „zvonku“ môžeme rozsadiť štyroch chlapcov, takých možností je $V_4(6) = 360$. Obe rozsadenia sú nezávislé; možností, ktoré spĺňajú zadanie je $5! \cdot V_4(6) = 120 \cdot 360 = 43\,200$.

○ d_1 □ d_2 □ d_3 □ d_4 □ d_5 ○

d) Predstavme si to na schéme:

ruže tulipány

a vpisujeme mená troch dievčat (zvlášť pre ruže a zvlášť pre tulipány). Vytvárame teda kombinácie s opakovaním (nezáleží na poradí) siedmej alebo piatej triedy z troch prvkov (tri mená dievčat). Ku každému rozdeleniu ruží patrí iné rozdelenie tulipánov. Všetkých spôsobov rozdelenia podľa zadania úlohy je: $C_7'(3) \cdot C_5'(3) = \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{2} = 36 \cdot 21 = 756$.

e) Je zrejmé, že sa jedná o vytvorenie posádky bez ohľadu na ich technické či veliteľské funkcie, t.j. vytvárame z nich štvorčlenné kombinácie bez opakovania (bez ohľadu na poradie v nich).
Uvedieme tri rôzne postupy pre vyriešenie úlohy:

A. Ak z tých dvoch neznášanlivých, ktorí nemôžu letieť spolu, nevyberáme, máme $C_4(8)$ možností výberu. Ak vyberáme posádku s práve jedným z neznášanlivých, máme $2 \cdot C_3(8)$ možností. Spolu (lebo sú dve skupiny priaznivých možností) máme $C_4(8) + 2 \cdot C_3(8) = 70 + 112$, to znamená 182 možností.

B. Pri výbere štvorčlennej posádky bez ohľadu na dvoch neznášanlivých máme $C_4(10)$ možností. Tých možností, kde sa vyskytnú obaja neznášanlivci spolu, je $C_2(8)$, pretože sú tam dvaja z ôsmich, ktorí sa znášajú. Požadovaných možností podľa textu úlohy je teda $C_4(10) - C_2(8) = 210 - 28 = 182$ možností.

C. Predstavme si vyberané možnosti z hľadiska jedného z neznášanlivcov. Ostatných kozmonautov je pre neho deväť. Z nich sa dá vybrať požadovaná posádka s $C_4(9)$ možnosťami. Ak má byť náš neznášanlivec tiež v posádke, ten druhý tam byť nesmie, tak je možností výberu $C_3(8)$, lebo treba k nášmu neznášanlivcovi vybrať troch z 8 znášanlivých. Pretože takto máme dve skupiny priaznivých možností (náš neznášanlivec v posádke buď je alebo nie je), tak požadovaných výberov posádok je $C_4(9) + C_3(8) = 126 + 56 = 182$.

Viac než 365 úloh z počtov a merby

stručná informácia o publikácii

Tlustý, P.: *Každý den s matematikou*. Plzeň: Fraus, 2018.

Možno to nie je úplne „strelené“, vypočítať si denne aspoň jednu úlohu z „počtov a merby“. Kde hľadať „primerané“ zadania, vždy mať „po ruke“ papier na príslušný zápis, ba pre svoju kontrolu porovnať si výsledky. Takúto príležitosť na každý deň v roku ponúka spomínaná publikácia. Sú tam úlohy (logické, grafické, výpočtové) z oblasti: čísla a ich vlastnosti, úprava matematických výrazov a zostavovanie rovníc, jednoduché geometrické zadania, postupnosti čísel, využitie vlastností kalendára, určovanie počtu možností (základná kombinatorika). Zadania úloh sú usporiadané podľa kalendárnych dní (tri úlohy na jednu knižnú stránku, s možnosťou vpisovať riešenie priamo za text úlohy). V úvode knižky je vyriešených niekoľko „typových“ úloh.
Obsahová úroveň zadaní patrí do 2. stupňa základných škôl s rozšíreným vyučovaním matematiky. Podobné úlohy nájdete v súťažiach Pytagoriáda alebo Klokan.

Intelekt ľudskej bytosti sa overuje, hlavne v školách, aj úlohami od učiteľov počtov a merby. **Ponúkam trojicu zadaní pripravenú pre rok 2019:**

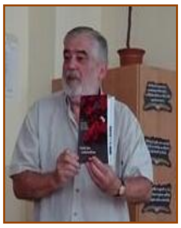
Stanovte zvyšok po vydelení čísla $(2019^3 + 3^{2019} + 2019)$ číslom 9.

Stanovte poslednú číslicu čísla $(2^{2017} \cdot 3^{2018} \cdot 7^{2019})$.

Stanovte číselnú hodnotu zlomku $\frac{2018^2}{(2019^2-2017^2)}$.

Matematika je široká nádherná krajina, otvorená pre všetkých, ktorým myslenie prináša skutočnú radosť (W. Fuchs).

Treba však začínať od „počtov a merby“.



- Matematik zorganizoval loterii, kde hlavní výhrou bylo nekonečné množství peněz. Když byl tažen vítězný tiket a šťastný výherce si přišel pro výhru, vysvětlil matematik způsob vyplacení: "*1 korunu hned, 1/2 koruny příští týden, 1/3 koruny přespříští týden…*“

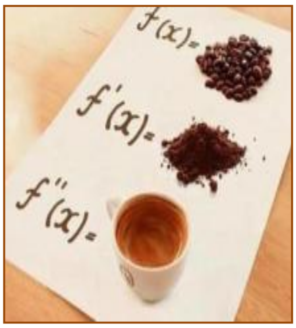
- Matematik stojí zmaten před kopírovacím strojem: "*Zmáčkl jsem Jednostranná kopie a vylezl mi Möbiův list...*"

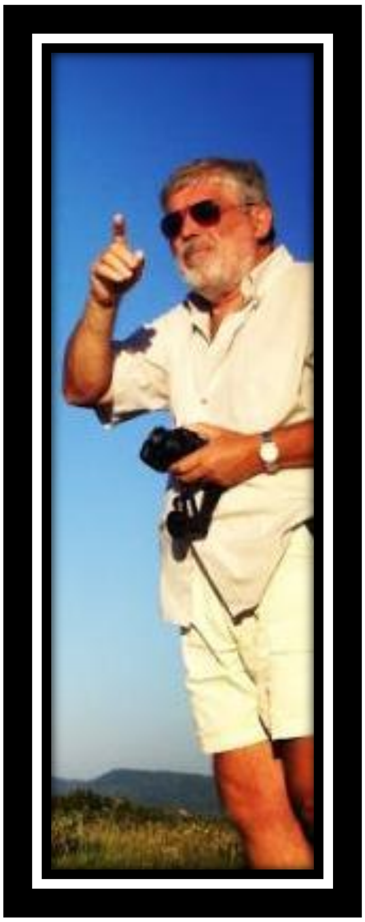
- Zlaté pravidlo učitele matematiky: "*Budu mluvit pravdu, nic než pravdu, ale ne celou pravdu.*"

Priateľom z mokrej štvrte o matematickej kultúre

Ako emeritný učiteľ počtov a merby mám neodškriepiteľnú povinnosť ukazovať M-kultúru ako podstatnú a nenahraditeľnú zložku všeobecnej civilizácie, ako medzisvet porozumenia vybudovaný medzi prírodou a človekom. Matematický spôsob myslenia, usudzovania, dokazovania i argumentácie ponúka *objav právd, ktoré sú bez účasti rozumu nedostupné* (Platón; 427–347 pred n. l.). Známy matematik a šíriteľ matematickej kultúry György Polya (1887–1985) charakterizoval matematické rozvažovanie ako najlepšiu **príležitosť pozorovať proces ľudského myslenia**. Spoznal, že matematikou nadobúdame cvik v metóde rozumového uvažovania, ktoré potom môžeme použiť na štúdium ktoréhokoľvek predmetu. Chcem upozorniť predovšetkým tých, ktorým šírim svoje „bubliny“, na zaujímavú a podnetnú knižnú produkciu. Uvádzam orientačný výber (od r. 2008):

ACZEL, A.D.: *Náhoda – příručka pro hazardní hráče, ...* Praha: Dokořán, 2008.
ASKEV, M. – EBBUTTOVÁ, S.: *Geometrie bez (m)učení.* Praha: Grada Publishing, 2012.
BALL, K.: *Podivuhodné křivky, počítání králíků a jiná dobrodružství.* Praha: Argo/Dokořán, 2011.
BARROW, J. D.*: Sto důležitých věcí, které nevíte (a ani nevíte, že je nevíte).* Praha: Dokořán, 2017.
BARROW, J. D.*: Sto důležitých věcí o umění a matematice, které nevíte*. Praha: Dokořán, 2017.
BELLOS, A.: *Alexova dobrodružství v zemi čísel.* Praha: Dokořán, 2015.
BELLOS, A.: *Alex za zrcadlem (Jak se čísla odrážeji v životě...).* Praha: Dokořán, 2016.
BENTLEY, P. J.: *Kniha o číslech (Tajemství čísel…). Dobřejovice*: ReboProductions, 2013.
BOALEROVÁ, J. *Matematické cítenie.* Bratislava: Tatran, 2016.
CRILLY. T.: *Matematika – 50 myšlienok, ktoré by ste mali poznať.* Bratislava: SLOVART, 2011.
CRILLY. T.: *Matematika (Velké otázky).* Praha: Euromedia Group – Knižní klub, 2012.
ČIŽMÁR, J.: *Dejiny matematiky: Od najstarších čias po súčasnosť*. Bratislava: Perfekt, 2017.
GHYKA, M. C.: *Zlaté číslo.* Praha: Argo/Dokořán, 2008.
GOLDSMITH, M.: *Od nuly do nekonečna (M trochu inak).* Bratislava: Fortuna Libri, 2013.
GRACIÁN, E.: *Prvočísla: dlouhá cesta do nekonečna.* Praha: Dokořán, 2017.
JACKSON, T.: Matematika – *100 objevů…* Praha: Slovart, 2013.
KAPLAN, R. – KAPLANOVÁ, E.: *Umění nekonečna – náš ztracený jazyk čísel*. Praha: Triton, 2010.
KLÁN, P.: *Čísla (vztahy, vhledy a věčné inspirace)*. Praha: Academia, 2014.
KOLMAN, V.: *Filosofie čísla.* Praha: Filosofia, 2008.
KOLMAN, V.: *Idea, číslo, pravidlo.* Praha: Filosofia, 2011.
KŘÍŽEK, M. a kol.: *Kouzlo čísel.* Praha: Academia, 2009, 2011.
KUŘINA, F. a kol.: *Matematika a porozumění světu.* Praha: Academia, 2009.
KUŘINA, F: *Elementární matematika a kultura*. Hradec Králové: Gaudeamus, 2012.
LIVIO, M.: *Je Bůh matematik?* Praha: Dokořán, 2010.
LIVIO, M.: *Neřešitelná rovnice*. Praha: Argo/Dokořán, 2008.
LIVIO, M.: *Zlatý řez*. Praha: Argo/Dokořán, 2008, 2011.
MARTINEAU, J. a kol.: *Kvadrivium (čtyři svobodná umění).* Praha: Dokořán, 2015.
MAZUR, J.: *Kde se vzali symboly (historie matematického zápisu).* Praha: Euromedia, 2017.
NAVARRO, J.: *Tajemné π*. Praha: Dokořán, 2018.
OLSEN, S.: *Záhadný zlatý řez.* Praha: Dokořán, 2009.
O´SHEA, D.: *Poincarého domněnka*. Praha: Academia, 2009.
PAENZA, A.: *Matematiko, jsi to ty?* Zlín: Kniha Zlín, 2010.
POLSTER, B.: *Q.E.D. Krása matematického důkazu*. Praha: Dokořán, 2014.
PICKOVER, C. A.: *Matematická kniha.* Praha: Argo/Dokořán, 2012.
ROONEY, A.: *Příběh matematiky*. Praha: Dobrovský, 2017.
ROSENTHAL, J.S.: *Zasažen bleskem (...svět pravdepodobností).* Praha: Academia, 2008.
SINGH, S.: *Velká Fermatova věta*. Praha: Argo a Dokořán, 2010.
SMULLYAN, R.: *Dáma s tygříkem a další logické hrátky*. Praha: Argo a Dokořán, 2017.
SOCHOR, A. *Logika pro všechny ochotné myslet.* Praha: Karolinum, 2011.
STEWART, I.: *Hraje Bůh kostky*? Praha: Argo/Dokořán, 2009.
STEWART, I.: *Jak rozkrájet dort a další matematické záhady.* Praha: ARGO a Dokořán, 2009.
STEWART, I.: *Kabinet matematických kuriozit…* Praha: Dokořán, 2013.
STEWART, I.: *Krocení nekonečna (Příběh matematiky...).* Brno: CPress, 2014.
STEWART, I.: *Truhlice matematických pokladů…* Praha: Dokořán, 2013.
STROGATZ, S.: *Radost z x*. Praha: Dokořán, 2014.
SUTTON, A.: *Pravítko a kružítko (prakt. geom. konstrukce).* Praha: Dokořán, 2017.
TLUSTÝ, P.: *Každý den s matematikou*. Plzeň: Fraus, 2018.
VORÁČOVÁ, Š. a kol.: *Atlas geometrie (Geometrie krásna a užitečná).* Praha: Academia, 2012.
WILLERS, M.: *Algebra bez (m)učení.* Praha: Grada Publishing, 2012.
ZIEGLER, G. M.: *Matematika vám to spočíta.* Praha: Euromedia Group – Knižní klub, 2011.





Prečo píšem? *Aby sme všetci boli ľudskejší. Aby sa pre tých, čo prídu po nás, zachovala stopa, že sme túžili po pravde a dobre, a ... hľadali spravodlivosť, ktorej meno je Láska.*
Aby sme nezabudli, že svet je oveľa krajší,
než ako si ho predstavujeme
i v najkrajšom vypätí fantázie...
(Karol STRMEŇ; 1921–1994).

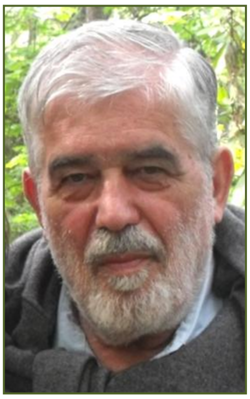
Vzdelanie je pestovanie všetkých schopností človeka, duchovných
i mravných, aj telesných... Čím ťažšie je byť spravodlivým,
tým viac sa musí profesor usilovať, aby ním bol
(Dominik PECKA; 1895–1981).

Život je možné prežívať len smerom vpred
a chápať len smerom vzad (Jack WELCH).

Svojim žiakom som chcel umožňovať radosť z premýšľania, podnecovať ich pre nadšenie i zápas o pochopenie zmyslu a príčin javov, ktoré nás obklopujú. Ponúkal som presvedčenie, že šťastie a pokoj možno hľadať v našich myšlienkach, v spolupráci na duchovných hodnotách každého z nás. Vyznával som, že najvyšším prejavom ľudskosti je vzájomné láskavé porozumenie a obetavá nezištnosť spolupráce. Chcel som rozsievať ideály, myšlienky pravdy, lásky a dobra, pre slobodných ľudí so zodpovedným svedomím, mravným zázemím a zmysluplným pochopením. Po 50 ročnom pôsobení v učiteľských službách neskromne opakujem: ***Nemôžete nikoho nič naučiť. Môžete mu prinajlepšom pomôcť, aby to sám v sebe našiel*** (G. Galilei, 1564 – 1642).

INŠPIROMAT (súbor myšlienok nielen pre učiteľov matematiky)
je na adrese http://www.era.topindex.sk/files/s208.pdf

Rád a často citujem:
Tajomstvo šťastného života spočíva v tom, s akou eleganciou dokážeme prijať zmenu (E. A. Poe).
Najkrajšia mladosť je mladosť ducha vo chvíli, keď už nie sme mladí (L. N. Tolstoj).
Dobrá pamäť je dobrom, ale schopnosť zabúdať,
je často ešte lepším darom od Pána Boha (G. Ch. Lichtenberg).



Zadávam poslednú úlohu:
V roku 2007 súčet prvého dvojčísla a posledného dvojčísla roku môjho narodenia vyjadril môj vek. Stanovte, v ktorom roku 20. storočia som sa narodil.

Zdá sa mi, *že učiteľský život je aj konfrontáciou so zázrakmi...*
Spoznávaním rozmanitých stránok prírody i spoločenského života odhaľujeme až neuveriteľnú harmóniu pravdy o duchovnej podstate sveta i života, v ktorom môžeme spracúvať informácie, vytvárať myšlienkové modely a očakávať aspoň intuitívny dotyk s mohutnosťou Toho, ktorý je nevyhnutnou podstatou, prvou príčinou i večným zmyslom.
Dušan JEDINÁK

Dušan JEDINÁK, absolvent MFF UK v Prahe (1968), pôsobil ako učiteľ matematiky a fyziky, neskôr aj informatiky, na Gymnáziu v Topoľčanoch, tam bol aj riaditeľom (1990–1991), potom sa stal úradníkom (1991−1992) MŠMŠ i školským inšpektorom (1992−1996) ÚIC v Bratislave. V rokoch 1997−2008 sa venoval príprave budúcich učiteľov matematiky na Pedagogickej fakulte Trnavskej univerzity. V závere učiteľského pôsobenia viedol (v počtoch a merbe) niektorých talentovaných žiakov ZŠ Tribečská ul. v Topoľčanoch. Dlhodobo sa zaujímal **o motiváciu a popularizáciu školskej matematiky**, snažil sa približovať aj verejnosti matematickú kultúru. Publikoval odborné príspevky z didaktiky školskej matematiky, histórie fyziky i dejín matematického myslenia.

Bol „zaťažený“ na citáty. Tlačou vydal a rozdával „bubliny“: *Múdre slová namiesto darov*, *Medzi matematikou a etikou*, *Koreniny*, *Z hlbín storočí*, *Zrkadlo 20. storočia*, *Z mora prísloví*, *Jarmok myšlienok.* Zostavil *Trilógia spomínania* (*Ozveny osobností*, *Echá charakteru* a *Potecha pútnika*). Publikoval životopisné medailóny o matematikoch (*Etudy*, *Eseje*, *Epizódy*, o starovekých, stredovekých a ruských matematikoch). Pozri na: http://www.era.topindex.sk/dejiny-matematiky/

http://www.era.topindex.sk/

MMXVIII