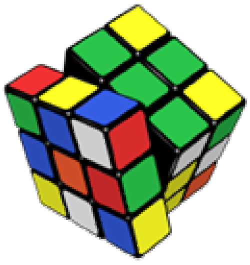
Didaktické poznámky pre školskú kombinatoriku

Dušan JEDINÁK

Úvod

Príprava na vyučovanie je pre učiteľa matematiky nezastupiteľnou didaktickou činnosťou, v ktorej môže prejaviť svoje odborné, pedagogické i výchovné schopnosti a vytvoriť si premyslenú a zdôvodnenú obsahovú štruktúru pripravovanej výchovno–vzdelávacej činnosti v škole. Nezanedbateľnou požiadavkou učiteľského pôsobenia je aj motivačná zložka spolu s historickými a popularizačnými impulzmi, výberom príkladov a úloh pre rôzne použitie, prehľadom odporúčanej knižnej i časopiseckej literatúry.

Ponúkané didaktické poznámky pre školskú kombinatoriku sú pomerne stručnou ukážkou podnetov v príprave na vyučovanie základov kombinatoriky v základnej i strednej škole. Naznačujem hlavne možnosti pre pestrý výber úloh a ich riešení, historických spomienok i didaktických postrehov. Nenavrhujem rôznosť foriem ich použitia, nezhŕňam praktické skúsenosti ani nepokrývam celú školskú kombinatorickú problematiku.



Školská kombinatorika je podstatná súčasť matematickej kultúry šírenej v základnom vzdelávaní. Kombinatorický spôsob myslenia je prípravou pre praktické využitie štatistických a pravdepodobnostných metód. Rôznorodé vhodné motivačné podnety podporujú hlbší vzťah ku systematickej kombinatorickej hre, ktorá je základom ďalších užitočných predstáv a postupov kombinatorickej analýzy v teoretických vedných odboroch i v technických a technologických aplikáciách.

Didaktické povzbudenie

Vhodnými motivačnými podnetmi, správnym didaktickým postupom možno zvýrazniť kombinatorické myslenie a hlbšie ovládať situácie, v ktorých analyzujeme počty prvkov podmnožín s danými vlastnosťami. Kombinatorické úlohy môžu byť vhodným podnetom pre radosť z poznania bez zvláštnych požiadaviek na rozsah predchádzajúcich vedomostí. Kombinatorika vhodne nadväzuje už na základné školské učivo, doplňuje a rozvíja množinové predstavy a poznatky z algebry. Uplatňované pojmy sú dobre pochopiteľné, úlohy majú často veľkú mieru zaujímavostí, aktuálnosti i dôležitých aplikácií. Školská výučba tejto časti matematiky má rozvíjať schopnosť hľadať a používať jednotlivé organizačné princípy, viesť kvantifikovať postupnosť skúmaných prvkov. Môžeme rozvíjať tvorivú činnosť na vedomostne primeranej úrovni, zvyšovať bádateľské napätie, rôznorodosť používaných prístupov a spôsobov riešenia. Nepriame metódy často umožnia aj nečakané elegantné postupy. Práca s kombinatorickými identitami umožňuje uplatniť účinné obraty a pôsobivé súvislosti.

Dôležitým úvodom k riešeniu kombinatorických úloh je pozorné vnímanie textu zadania a vhľad do situácie (niektoré zadania naozaj nemajú jednoznačný výklad). Základným postupom riešenia kombinatorických úloh je **vyhľadanie vhodného organizačného princípu**. Medzi osvedčené techniky jeho hľadania patria:

a) **znázornenie** (schéma, graf, diagram, tabuľka, štvorcové siete, strom logických možností);
b) **využitie kombinatorického pravidla súčtu a súčinu** (triedenie a rozklad do tried);
c) **gradovanie, využívanie rekurentných vzťahov;**
d) **dopĺňanie, zjednodušovanie, symetria vzťahov;**
e) **transformácia problému, preformulovanie a modifikácia úlohy, iný ekvivalentný pohľad, zámena kombinatorických modelov;**

f) experimentovanie a overovanie výsledkov (dôkaz matematickou indukciou).

V kombinatorickej analýze využívame aj výsledky iných matematických disciplín a ich poznatkov, napr. princíp zapojenia a vypojenia, Dirichletov princíp, mocninové rady, kombinatorickú geometriu.

Motivačne účinné je dosiahnutie primeranej schopnosti samostatného riešenia základných kombinatorických úloh. Preto treba rozvíjať vhľad do kombinatorických situácií a dôsledne ukazovať „ ako sme to robili“, v čom sú „oporné“ body riešenia, podstatné metódy i základné príklady.

Kombinatorická analýza vo vyučovaní matematiky prispieva k umeniu presne uvažovať a tvorivo myslieť. Otázky *Prečo?* a *Ako?* nám umožňujú konštatovať vzťahy a odhaľovať zákony. Prostredníctvom dôkazov založených na axiómach a logických zdôvodneniach skúšame poznať objektívnu matematickú pravdu.

Kombinatorické úlohy sú pôsobivou možnosťou na samostatné matematické uvažovanie. Tvorivý učiteľ matematiky má dávať primerané podnety na rozmýšľanie, pripravovať objavné situácie pre rozvoj matematických schopností svojich žiakov. ***Zdá sa, že podstatnou črtou produktívneho myslenia je kombinatorická hra*** (A. Einstein).

Súbor úloh pre motiváciu

(pestrosť a obsah tematiky, primeraná náročnosť, didaktická významnosť, aplikovateľnosť)

1. Učiteľ konštatoval: *Každý z mojich 31 žiakov si dopisuje s práve 15 spolužiakmi*. Ktosi vykríkol: *To je neuveriteľné*. Mal pravdu?
2. Hokejový zápas skončil výsledkom 5 : 3. Koľko rôznych priebehov (sled gólov pre obe družstvá) mohol mať, ak po prvej tretine bolo 1: 1?
3. Vo vrecku máme 9 očíslovaných lístkov (1–9). Koľko je rôznych možností pre výber štyroch lístkov (zapisujeme si čísla vytiahnutých lístkov), ak
   A. ich vyberáme postupne a lístky vraciame späť?
   B. ich vyberáme postupne, ale nevraciame späť?
   C. ak ich vyberieme naraz spolu?
4. Koľko je rôznych možností prideliť na kontrolu štyri rôzne televízory trom opravárom, ak požadujeme, aby
   A. každý televízor prekontroloval práve jeden opravár?
   B. každý opravár prekontroloval aspoň jeden televízor?
5. Koľko možností máme pre výber štvorčlennej posádky z desiatich kozmonautov, ak určití dvaja kozmonauti nemôžu letieť spolu?
6. Štyria hráči si rozdelia 28 (každému po sedem) rôznych doštičiek domina. Koľko je rôznych možností pre toto rozdelenie?
7. Máme práve n bielych rovnakých kociek a práve n iných navzájom rôznofarebných (nie bielych) tiež rovnakých kociek. Koľko je rôznych možností pre výber n kociek, ak záleží len na ich farbe. Koľko je rôznych možností pre usporiadanie všetkých $2n$ kociek (záleží len na ich farbe)?
8. Koľko máme možností pre rozdelenie 8 jabĺk trom deťom, ak záleží len na počte jabĺk pre jednotlivé deti?
9. Koľko dvojíc $[a, b]$, kde pre $a, b \in N$ platí $1 \leq a < b \leq 86$, má súčin $(a \cdot b)$ deliteľný tromi?
10. Množina L má n rôznych prvkov. Koľko existuje na množine L rôznych relácií:
   A. binárnych?
   B. reflexívnych?
   C. symetrických?

Náznak riešenia a výsledky:

1. {$31\cdot 15$ nie je deliteľné dvomi bez zvyšku; áno} **2**. {$2\cdot C_2(6) = 30$} **3**. {9^4; $\frac{9!}{5!} = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$; $\frac{9!}{5!4!}$} **4**. {$V'_4(3) = 3^4$; 15^3} **5**. {$2\cdot C_3(8) + C_4(8) = C_4(10) - C_2(8) = C_4(9) + C_3(8) = 182$} **6**. {$C_7(28)\cdot C_7(21)\cdot C_7(14) = 28!/(7!)^4$} **7**. {vyberáme postupne niekoľko prvkové podmnožiny farebných kociek a do počtu *n* dopĺňame bielymi kockami, teda $C_0(n) + C_1(n) + \ldots + C_{n-1}(n) + C_n(n) = 2^n$; $\frac{(2.n)!}{n!}$} **8**. {$P'_{2,8}(10) = C_2(10) = C'_8(3) = 45$} **9**. {z čísel od 1 do 86 je ich deliteľných tromi práve 28, $C_2(86) - C_2(86-28) = 2002$} **10**. {$2^{n^2}$; $2^{n\cdot(n-1)}$; $2^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}$}

Poznámky z histórie

Výberom prvkov a ich usporiadaním sa zaoberáme skoro v každej ľudskej činnosti. Hazardné hry s kockami sú známe už z obdobia štyri tisíc rokov pred naším letopočtom. Pred niekoľkými tisícami rokov v Číne zostavovali magické štvorce a dávno pred naším letopočtom poznali permutácie. V starovekom Grécku hľadali rozličné kombinácie dlhých a krátkych slabík v básnických skladbách. Už pytagorejské skúmanie trojuholníkových a ďalších figurálnych čísiel možno považovať za príklad kombinatorických úvah. Úlohy z kombinatoriky vznikali pri hrách (šach, domino, kocky, karty), lúštení šifier a hlavolamov. **Boethius** (asi 480–525) v komentári k spisu gréckeho filozofa Porfyria (asi 233–304) slovne uvádzal aj vzťah pre počet dvojprvkových kombinácií vybraných z *n* prvkov. Neskôr sa postupne kombinatorická problematika objavovala v rámci poznatkov z aritmetiky i algebry. V Indii 12. storočia **Bhaskara** poznal vzorec pre počet kombinácií a permutácií bez opakovania. V čínskych učebniciach z roku 1303 sa objavuje schéma usporiadania kombinačných čísel. V Európe použil prvý raz binomickú vetu asi **M. Stifel** (1486–1567). **Nicolo Tartaglia** (asi 1500–1557) zostavil prvé tabuľky možných výsledkov pre hody niekoľkých hracích kociek. Termín *kombinácia* v súčasnom zmysle použil prvý raz (1653) **Blaise Pascal** (1623–1662). Spoznal aj vlastnosti usporiadania kombinačných čísel do schémy tvaru trojuholníka (1654) a publikoval ich v práci *Traité du triangle arithmétique* (*Pojednanie o aritmetickom trojuholníku*), ktorá vyšla až roku 1665. Tam je uvedené použitie týchto vedomostí (rozdelenie stávky, binomická veta), ale aj prvé zdôvodnenie metódy úplnej matematickej indukcie. **Ch. Huygens** (1629–1695) pripravil pojednanie *O výpočtoch v hazardných hrách* (1657), v ktorom zhrnul poznatky predchádzajúcich znalcov (**Pacioli, Cardano, Herigone, Galilei, Fermat**). Vedecký prístup k základom systematickej teórie pripravil **G. W. Leibniz** (1646–1716) v práci *Dissertacio de art combinatoria* (1666), kde je vybudovaná aritmetická náuka o spájaní a premiestňovaní prvkov i umení premýšľať (riešenie logicko–filozofických problémov). Celý život hľadal **Leibniz** univerzálne metódy, ktoré by umožňovali získavať poznatky a porozumieť podstate sveta. Matematika ako všeobecná veda ho priviedla aj k teórii permutácií, kombinácií a symbolickej logike. Vedel, že *analýza princípov slúži na vyjadrenie detailov*. Pojem permutácie prijal **Jakob Bernoulli** (1654–1705), v posmrtne vydanej práci (1713, napísanej už okolo roku 1685), v ktorej je už kombinatorika formulovaná ako samostatná matematická disciplína. Cenné nové postupy v kombinatorike pripravil **L. Euler** (1707–1783). Formuloval problém mostov mesta Kráľovca (1735), jednu z prvých úloh kombinatorickej topológie. Zaviedol symbol $\binom{n}{k}$ pre kombinačné čísla. V roku 1750 publikoval vetu o počte vrcholov, hrán a stien pravidelného mnohostena. **C. F. Gauss** (1777–1855) riešil kombinatorické úlohy o šachovnici. Symbol **n!** bol zavedený v roku 1808.

Rozvoj mnohých matematických disciplín v nasledujúcom období (napr. diferenciálny a integrálny počet, teória grúp) prispel aj k rozšíreniu kombinatorických úvah a aplikovaných výsledkov finitnej matematiky. Dnešný rozmach elektronických počítačov, ekonomických optimalizácií a efektívnych výrobných technológií nezadržateľne uplatňuje aj metódy kombinatorickej analýzy.

Úlohy s historickým podtextom

Už dávno vedeli

V 6. storočí pred naším letopočtom v Indii v jednom lekárskom spise sa uvádzalo, že so šiestimi rôznymi základnými chuťami možno dosiahnuť 63 prichutení. Viete to dnes zdôvodniť ?

Anagramy ako utajenie

Do 17. storočia neboli takmer nijaké vedecké časopisy, napísanie a vydanie kníh trvalo celé roky. Aby si vedci zabezpečili prioritu svojho objavu, formulovali jeho podstatu v krátkom výroku, v ktorom potom poprehadzovali písmená.. Zašifrovaný text rozoslali svojim kolegom (takéto texty sa nazývajú anagramy). Po vytlačení knihy s podrobným výkladom príslušného objavu, uviedli v nej aj rozlúštenie anagramu. Vtedy, keď **Christian Huygens** (1629–1695) objavil Saturnov prstenec, zostavil takýto anagram:

aaaaaaa, ccccc, d, eeeee, g, h, iiiiiii, lll, mm, nnnnnnnnn, oooo, pp, q, rr, s, ttttt, uuuuu.

Ak sa písmená patrične usporiadajú, dostaneme túto správu:

Annulo cingitur tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato.

(*Obklopený prstencom tenkým, plochým, nikde nezaveseným, nakloneným k ekliptike.*)

Vypočítajte, koľko rôznych permutácií s opakovaním možno utvoriť z písmen v anagrame?

Zvedený matematikou

Slávny astronóm, matematik a fyzik **Galileo Galilei** (1564–1642) raz dostal od hráča, vtedy obľúbenej hry *passe– dix* (prekročenie desiatky), otázku: Ako to, že pri tejto hre sa častejšie vyhráva súčtom 11 ako 12, hoci každý súčet môže nastať len šiestimi trojicami možností ? Galilei vedel, že v tejto spravodlivej hre sa hádžu tri hracie kocky a hráč vyhráva vtedy, ak súčet bodov na nich je väčší ako desať. Možno Galileo Galilei odpovedal hneď, možno sa zamýšľal dlhšie. Pravdou zostáva, že v spise, ktorý vyšiel až v r. 1718, Galilei túto otázku správne zodpovedal, možno takto:

Platí síce **11** = 6 + 4 + 1 = 6 + 3 + 2 = 5 + 5 + 1 = 5 + 4 + 2 = 5 + 3 + 3 = 4 + 4 +3

12 = 6 + 5 + 1 = 6 + 4 + 2 = 5 + 5 + 2 = 5 + 4 + 3 = 4 + 4 + 4 = 6 + 3 + 3,

ale napríklad rozklad 6 + 4 +1 možno realizovať 3! = 6 spôsobmi, zatiaľ čo napr. 5 + 5 + 1 len tromi spôsobmi a súčet 4 + 4 + 4 dokonca len jedným spôsobom. Preto hráč má vlastne 27 = 6 + 6 + 3 + 6 + 3 + 3 možností na výhru súčtom **11** (pravdepodobnosť výhry je 27/216 = 0,125), ale len 25 = 6 + 6 + 3 + 6 + 1 + 3 možností na výhru súčtom **12** (pravdepodobnosť výhry je 25/216 = 0,116). Galilei spoznal, že matematika ponuka prostriedok poznávania a presného popisu prírodných javov. Už vtedy vedel, že ***dve pravdy si nemôžu nikdy odporovať***.

Náznak významu a použitia

Kombinatorika je veda o rozmiestnení, výbere, poradí a počte podmnožín nejakej množiny. Zahŕňa najrozmanitejšie objekty a vlastnosti. *Kombinatorická analýza* aj so svojimi základmi v klasickej školskej kombinatorike má dôležitú úlohu pri rozvoji logického myslenia a tým je dôležitou súčasťou matematického vzdelania, ktoré má vytvárať štruktúru vedomostí, zaujatie pre ďalšie poznávanie a nové osobné objavy.

Ukážkou použitia kombinatorických úvah sú napr. *teória pravdepodobnosti a štatistika, teória grúp, topológia, kombinatorická geometria, teória hier, teória grafov (napr. orientovaným grafom môžeme znázorniť priebeh hry, výrobný proces, výpočtový postup, dopravné siete, sociologické vzťahy), optimalizačné systémy*. Výsledky kombinatorickej analýzy sa uplatňujú v chémií (štruktúrne vzorce organickej chémie), v genetike, v ekonomike. Mnohé praktické otázky optimálneho spojenia v telekomunikačnej sieti aj v preprave tovarov sú úlohami kombinatorického charakteru. Ich riešenia sú často založené na algoritmických metódach, dnes už patriacich do informatiky. Rozvoj matematickej informatiky je spojený so základmi kombinatorickej analýzy, ktorá sa stala rušným staveniskom matematiky.

Štandardný výber úloh z kombinatoriky

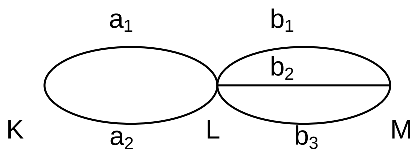
Jednou z možností ako prispieť k obľube klasickej kombinatoriky je presvedčiť sa o pochopení jej základných pojmov a presvedčivo vedieť riešiť s patričným nadhľadom základné typy kombinatorických úloh. Na tento účel ponúkam zdôvodnený výber zadaní, ktorý umožní vyskúšať si vyberanie a usporadúvanie objektov požadovaných vlastností a postup pre určenie ich počtu.

Vypisovanie možností, systém

1. Vypíšte všetky trojciferné čísla, ktorých ciferný súčet je štyri.
2. Vypíšte možnosti, ktoré majú dve dievčatá, vybrať si do tanca z piatich chlapcov.

Pravidlá súčtu a súčinu

1. Na obr. sú vyznačené cesty medzi mestami K, L, M.



   Koľkými rôznymi cestami sa možno dostať z L buď do K alebo do M? Koľkými rôznymi cestami sa možno dostať z K do M?
2. Koľkými rôznymi spôsobmi sa dá zafarbiť kocka dvomi rôznymi farbami, ak má byť každá stena jednofarebná?
3. Koľko rozličných dvojíc pohľadnica – známka možno zostaviť z piatich druhov pohľadníc a štyroch druhov známok?
4. Koľkými spôsobmi sa dá rozdeliť 6 detí na tri dvojice (nezáleží na poradí)?

Variácie bez opakovania prvkov

1. Koľko rôznych umiestnení môže byť na prvých troch miestach v súťaži, ktorej sa zúčastňuje osem družstiev?
2. V triede je m miest. Koľko rôznych možností máme pre ich obsadenie p žiakmi ($p \leq m$)?

Variácie s opakovaním prvkov

1. Koľko trojciferných čísel sa dá napísať pomocou nepárnych číslic?
2. Koľko značiek z Morseovej abecedy (· ; –) možno utvoriť, keď zostavujeme bodky a čiarky do skupín s jedným až štyrmi prvkami?

Permutácie bez opakovania prvkov

1. Koľko je rôznych možností, pre zoradenie ôsmich ľudí vedľa seba?

2. Medzi ôsmimi rôznymi knihami sú tri rôzne romány. Koľko je možností pre ich usporiadanie vedľa seba, ak požadujeme, aby historické romány boli vedľa seba?

Permutácie s opakovaním prvkov

1. Krotiteľ má pripravené vystúpenie so štyrmi levmi, dvomi tigrami a tromi leopardami. Koľkými rôznymi zástupmi (záleží len na druhu zvierat) ich môže priviesť do arény?
2. Koľko rôznych desať písmenových slov možno zostaviť pri použití všetkých písmen slova MATEMATIKA?

Kombinácie bez opakovania prvkov

1. Koľko rôznych odtieňov môžete získať z deviatich rôznych farieb, ak zmiešate v tom istom pomere buď dve alebo tri farby?
2. Koľko je možností pre rozdelenie pätnástich pacientov na operácie do troch rôznych nemocníc, ak v každej nemocnici má byť na operáciu rovnaký počet pacientov?

Kombinácie s opakovaním prvkov

1. Koľko možností máme pre výber dvanástich pohľadníc z deviatich druhov (z každého druhu je dostatok pohľadníc)?
2. Koľko je možností rozdeliť 13 banánov štyrom chlapcom (záleží im len na počte banánov) tak, aby každý z nich dostal aspoň dva banány?

So štipkou vtipu

1. Koľko je rôznych možností pre postavenie piatich rôznych figúrok na šachovnicu (8 x 8), aby dve boli na bielych a tri na čiernych políčkach?
2. Koľko možností je pre osvetlenie miestnosti, v ktorej je sedem rozličných lámp so samostatnými vypínačmi?
3. Koľko je možností pre rozdelenie 8 chlapcov a 4 dievčat do dvoch družstiev po 6, ak v každom družstve má byť aspoň jedno dievča?
4. Koľko máme rôznych možností prideliť na kontrolu štyri rôzne televízory trom opravárom, ak chceme, aby každý televízor prekontroloval aspoň jeden z nich?
5. Koľko je rôznych možností rozsadiť okolo okrúhleho stola s očíslovanými miestami päť mužov a päť žien tak, aby žiadne dve osoby rovnakého pohlavia nesedeli vedľa seba?
6. Koľko je rôznych možností ako rozložiť 10 rôznotitulových kníh vedľa seba na päť políc (na každú policu sa zmestia aj všetky knihy)?
7. Koľko rôznych riešení má rovnica $x + y + z = 4$ v Z_0^+ ?
8. Koľko je možností usporiadať vedľa seba n čiarok a m bodiek tak, aby žiadne dve bodky neboli bezprostredne vedľa seba?
9. Na pošte sa triedia listy podľa mesta určenia do ôsmich priehradiek. Koľko je rôznych možností roztriedenia pre 12 listov (záleží len na počte listov do rôznych priehradiek)?

Z didaktického hľadiska riešenie úloh z kombinatoriky často spočíva v umení organizovať prvky do prehľadných tabuliek, grafov, schém a zoznamov, v odhalení vhodného organizačného princípu, systematickom vyčíslení počtu jednotlivých možností s využitím pravidla súčtu a súčinu. S kombinatorikou sa naučíme robiť si vo svojich veciach poriadok. Pre povzbudenie do činorodej práce so školskou kombinatorikou pripomínam ruské príslovie: *Boh nám dáva orechy, ale ich neroztĺka.*

Kombinatorika – možnosť viacerých správnych postupov

Ponúkam šesť zaujímavých úloh aj s riešeniami, ktoré majú poslúžiť ako podnet pre pestré i tvorivé kombinatorické uvažovanie v školskom prostredí.

Jablká pre deti

Úloha: Koľko je rôznych možností pre rozdelenie 8 jabĺk trom deťom, ak záleží len na počte jabĺk pre jednotlivé deti?

Riešenie:
A. rozpíšme systematicky jednotlivé možnosti pre jednotlivé deti A, B, C :

	A	B	C	
počet	0	0 – 8	čo zostane	9 možností
	1	1 – 7	čo zostane	8 možností
	2	2 – 6	čo zostane	7 možností
	.	.		.
	.	.		.
	.	.		.
	8	0	0	1 možnosť

sčítaním všetkých možností dostávame počet 45.

B. Ak si označíme každé jablko menom dieťaťa, ktorému ho chceme dať, tak dostaneme napr. A A B B C C C C, teda jednotlivé kombinácie ôsmej triedy z troch prvkov s opakovaním. Ich počet je $C_8'(3) = \binom{10}{8} = \binom{10}{2} = 45.$

C. Osem jabĺk môžeme oddeliť dvomi značkami na tri skupiny (pre A, B, C), napr. Ȯ Ȯ Δ Ȯ Ȯ Δ Ȯ Ȯ Ȯ Ȯ , takých možností je toľko, ako rozmiestniť dve značky na 10 polí, t.j. $C_2(10) = 45.$

D. Predchádzajúci počet možností môžeme určiť aj ako počet možností rozdeliť dva druhy prvkov s počtom 8 a 2 do 10 políčok, t.j. ako počet permutácií 10 prvkov s opakovaním z dvoch druhov s počtom 8 a 2 prvky: $P'_{8,2}(10) = 45$.

E. Rozpis s pochopením:

A	B	C	
8	0	0	3 možnosti
7	1	0	6 možností
6	2	0	6 možností
5	3	0	6 možností
4	4	0	3 možnosti
6	1	1	3 možnosti
5	2	1	6 možností
4	3	1	6 možností
4	2	2	3 možnosti
3	3	2	3 možnosti

spolu 45 možností.

Riešenie úlohy nám umožnilo použiť rozpis, poznatky o kombináciách bez opakovania i s opakovaním prvkov, aj permutácie s opakovaním prvkov.

Usporiadajte si svoje kruhy

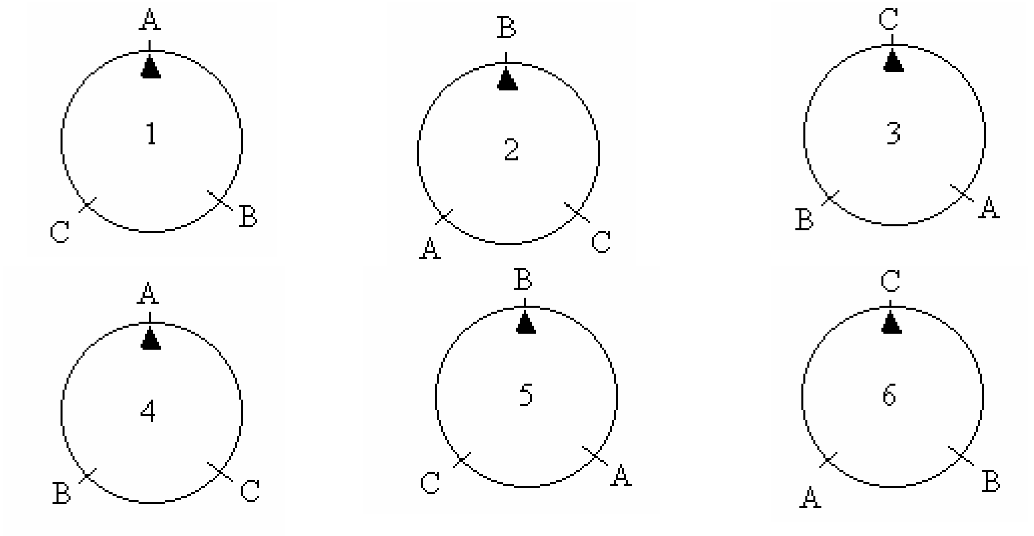
Úloha 1: Za kruhový stôl rozsaďme *p* ľudí. Koľko rôznych rozsadení môžeme vykonať ak:

a) záleží aj na mieste vzhľadom k stolu;

b) nezáleží na mieste vzhľadom k stolu, ale len na bezprostredných susedoch zľava a sprava;

c) nezáleží na mieste vzhľadom k stolu, ale ani nerozlišujeme zvlášť susedov zľava a sprava (len ich bezprostrednú susedskosť);

Riešenie:
Vytvorme si najprv jednoduchú predstavu (na obr.1) pre tri prvky A, B, C: je 3! = 6 možností



v strede stola sme ich očíslovali, „vrch stola“ sme označili ▲

a) ak záleží na polohe vzhľadom k „vrchu stolu“ je 3! = 6 rozsadení (č.1 – 6)

b) ak záleží len na susedoch (s ohľadom či zľava alebo sprava) je $\frac{3!}{3} = 2!$ možností, lebo obr. 1 – 2 – 3 aj 4 – 5 – 6 sú len „pootočené“.

c) ak nezáleží na tom, či je ten istý sused zľava alebo sprava, tak rozsadení je $\frac{2!}{2} = 1$, (polovicu z takých čo b.), lebo obr. 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 majú všetci tých istých susedov.

Zovšeobecnenie: a) $p!$ b) $\frac{p!}{p} = (p-1)!$ c) $\frac{(p-1)!}{2}$

Úloha 2:
Sedem dievčat tancuje v „kole“. Koľko je rozličných možností pre ich rozmiestnenie?
Riešenie:
Ak tancujú v „kole“, nezáleží na polohe vzhľadom ku „kolu“, t.j. počet možností je 6!.

Úloha 3:
Koľko rozličných náramkov sa dá vyrobiť zo siedmych rôznofarebných guliek?
Riešenie:
Pri náramku nerozlišujeme susedov zľava – sprava (náramok sa dá „obrátiť“), teda počet možností je $\frac{6!}{2}$.

Úloha 4:
Sedem chlapcov a sedem dievčat tancuje v kole tak, že sú usporiadaní striedavo (ch – d). Koľko je rôznych možností usporiadať takéto kolo?
Riešenie:
Počet usporiadaní chlapcov je 6! (nezáleží na poradí vzhľadom ku kolu). Medzi nich umiestniť 7 dievčat, to sa dá 7! spôsobmi (záleží na poradí vzhľadom k chlapcom).
Teda je 6! · 7! možností pre takéto kolo.

Študenti a učitelia

Úloha: Koľko je možností prideliť štyroch študentov na preskúšanie trom učiteľom, ak požadujeme:

a) aby každý študent bol preskúšaný **aspoň jedným** učiteľom;
b) aby každý študent bol preskúšaný **práve jedným** učiteľom;
c) aby každý učiteľ preskúšal **aspoň jedného** študenta;
d) aby každý učiteľ preskúšal **práve jedného** študenta.

Riešenie:
Označme si študentov A, B, C, D a učiteľov P, Q, R. Potom

a) študenta A môže preskúšať P, Q, R, PQ, PR, QR, PQR, to je 7 možností; pre študenta B je to tiež týchto 7 možností, podobne aj pre C i D. Tieto javy sú pre každého z nich nezávislé, tak všetkých možností spolu je $7^4 = 2401$.

b) naznačme jednotlivé možnosti pre každého študenta do tabuľky:

A	**B**	**C**	**D**
P	P	Q	R
R	R	R	R
Q	R	P	P
.			
.			

v jednotlivých riadkoch sú variácie štvrtej triedy (štyria študenti) z troch prvkov (traja učitelia) s opakovaním. Ich počet je $V'_4(3) = 3^4 = 81$.

c) učiteľ P môže preskúšať A, B, C, D, AB, AC, AD, BC, BD, CD, ABC, ABD, ACD, BCD, ABCD, teda 15 možností. Podobne 15 možnosti je pre Q aj pre R. Tieto javy sú pre každého z nich nezávislé a tak spolu je možnosti $15^3 = 3375$.

d) rozpíšme jednotlivé možnosti pre každého učiteľa do tabuľky:

P	**Q**	**R**
A	A	A
A	B	B
B	B	A
B	C	D
D	C	B
D	D	D
.		
.		

to sú variácie tretej triedy (traja učitelia) zo štyroch prvkov (štyria študenti) s opakovaním a ich počet je $V'_3(4) = 4^3 = 64$.

Manželské páry – vyberajte vhodným postupom

Úloha: Z desiatich manželských párov (m – ž) vyberáme päť osôb.
Koľko je všetkých takých pätíc, že v nich nie je ani jeden manželský pár (postup zdôvodnite).

Riešenie:
Budeme si predstavovať, akým postupom požadované podmienky splníme:

A. Vyberieme päť párov z desiatich manželských párov, to sa dá urobiť $C_5(10) = 252$ spôsobmi. Potom vyberieme z každej manželskej dvojice jedného, pre tento výber je $V'_5(2) = 2^5 = 32$ možností. Uplatnením princípu násobenia (spomínané výbery sú nezávislé ku každému prechádzajúcemu výberu) dostávame, že požadovaných pätíc tak, aby v nich nebol ani jeden manželský pár, je $C_5((10) \cdot V'_5(2) = 252 \cdot 32 = 8064$.

B. Určíme počet pätíc v možných zloženiach podľa pohlavia:
Samí muži (5 m). To je $C_5(10) = 252$ možností.
Pre výber pätíc samých žien (5 ž) je tiež 252 možností.
Ďalej určíme počet pätíc v zložení :
1 m + 4 ž ..... $C_1(10) \cdot C_4(9) = 10 \cdot 126 = 1260$
1 ž + 4 m ..... $C_1(10) \cdot C_4(9) = 10 \cdot 126 = 1260$
2 m + 3 ž ..... $C_2(10) \cdot C_3(8) = 45 \cdot 56 = 2520$
2 ž + 3 m ..... $C_2(10) \cdot C_3(8) = 45 \cdot 56 = 2520$
To znamená spolu (sčítaním) 252 + 252 + 1260 + 1260 + 2520 + 2520 = 8064 možností.

C. Budeme postupne vyberať do pätíc tak, aby boli splnené požiadavky:
Prvý môže byť hocikto z dvadsiatich, teda 20 možností.
Druhý môže byť každý z tých, čo zostali, okrem vybraného manželského druha, teda 18 možností.
Tretí môže byť každý z tých, čo zostali, okrem vybraných manželských druhov, teda 16 možností.
Štvrtý môže byť každý z tých, čo zostali, okrem vybraných manželských druhov, teda 14 možností.
Piaty môže byť každý z tých, čo zostali, okrem vybraných manželských druhov, teda 12 možností.
Spolu (princíp násobenia) je to $20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12 = 967680$ možností, ale medzi nimi sa niektoré pätice opakujú, z každých 5! = 120 zostane iba jedna, teda všetkých požadovaných pätíc je

$$\frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12}{5!} = \frac{967680}{120} = 8064.$$

D. Vyberieme päť ľudí z dvadsiatich, na to máme $C_5(20) = 15504$ možností. Tam však budú aj pätice, v ktorých bude jedna alebo aj dve manželské dvojice (tieto možnosti musíme z daného počtu odčítať). Určíme, koľko zo spomínaných pätíc obsahuje
a) práve jednu manželskú dvojicu: takých možností je

$$C_1(10) \cdot [C_3(9) + C_3(9) + 9 \cdot C_2(8) + 9 \cdot C_2(8)] = 10 \cdot 672 = 6720$$
{manž. dvoj. 3m 3ž m a 2ž ž a 2m}

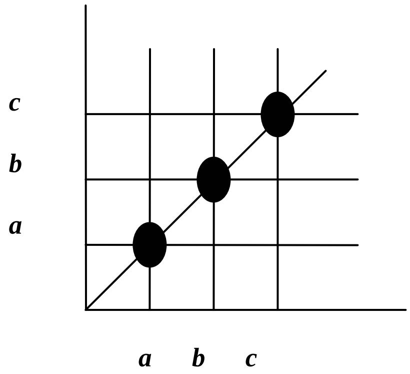
b) práve dve manželské dvojice.
$C_2(10) \cdot 16$, pretože ku každej z dvoch vybraných manželských dvojíc možno ešte priradiť jedného človeka zo (20 – 4) = 16. Pätíc s dvomi manželskými dvojicami je 720.
Teda po odčítaní nevhodných možností (6720 + 720) dostaneme 15504 – (6720 + 720) = 8064 požadovaných dvojíc spĺňajúcich požiadavky úlohy.

Poznať definíciu a vedieť kombinovať

Úloha: Množina L má n rôznych prvkov.
a) Koľko existuje na L binárnych relácií?
b) Koľko existuje na L reflexívnych relácií?
c) Koľko existuje na L symetrických relácií?

Riešenie:
a) Binárna relácia je každá podmnožina karteziánskeho súčinu L x L. Ak má množina L počet prvkov n, tak počet prvkov L x L je n^2. Z n^2 prvkov môžeme vytvoriť 2^{n^2} rôznych podmnožín. Na množine L, ak má n prvkov existuje 2^{n^2} binárnych relácií.

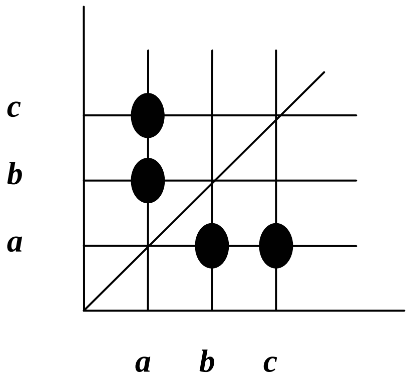
b) Relácia ρ je na L reflexívna, ak pre každý prvok $x \in L$ platí $x \,\rho\, x$.
Naznačme si to (napríklad pre $n = 3$) na obrázku č.2



obr. 2

V reflexívnej relácii musia byť „prvky z uhlopriečky“.
A_r : $[x, x]$, $[y, y]$..., týchto je pre n – prvkovú množinu práve n.
K nim môžeme pridať niektoré zo zostávajúcich prvkov z L x L; tých je $n \cdot n - n = n \cdot (n-1)$.
Teda z nich vytvárame ľubovolné podmnožiny. Na množine L (n – prvkovej) existuje $2^{n\cdot(n-1)}$ reflexívnych relácií.

c) Relácia ρ je na L symetrická, ak platí pre každé $x, y \in L : x \,\rho\, y \Rightarrow y \,\rho\, x$.
Predstavme si to na obrázku č.3 pre $n = 3$.
Je to „symetria podľa uhlopriečky“.



obr. 3

Takých prvkov (dvojíc) je $\dfrac{n \cdot n - n}{2} + n = \dfrac{n^2 - n + 2n}{2} = \dfrac{n^2 + n}{2} = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$

Z nich počet podmnožín je $2^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}$.

Počet všetkých možných symetrických relácií pre množinu L, ktorá má n prvkov, je $2^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}$.

Správna predstava, úspech zaručený

Úloha: Stanovte počet riešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k = n$, pre $x_i \in N_0$ a $n \in N$.

Riešenie:
Predstavme si napríklad konkrétne rovnicu $x_1 + x_2 + x_3 = 5$, t.j. $k = 3$, $n = 5$.

Môžeme si rozpísať riešenia do tabuľky

x_1	x_2	x_3	
5	0	0	3 riešenia (môžeme zamieňať)
4	1	0	6 riešení
3	2	0	6 riešení
3	1	1	3 riešenia
2	2	1	3 riešenia, teda spolu je 21 riešení.

Môžeme uvažovať aj takto:

Treba rozmiestniť päť jednotiek a dve značky, napr. 1 1 ⌂ 1 1 ⌂ 1

(to predstavuje riešenie 2 + 2 + 1 = 5). To môžeme urobiť $C_2(7) = P'_{5,2}(7) = 21$ spôsobmi.

Ak našu úvahu zovšeobecníme pre $k, n \in N$, počet riešení danej rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k = n, \quad \text{pre } x_i \in N_0 \text{ a } n \in N$$

bude $C_{k-1}(n + k - 1)$, teda ako počet rozdelení $(k - 1)$ značiek na $(n + k - 1)$ polí.

Jednoduchý test z kombinatoriky

Školská kombinatorika má svoje opodstatnenie už v elementárnom vzdelávaní, lebo využíva a rozvíja logické myslenie (indukciu, dedukciu, schopnosť hľadať a používať jednotlivé organizačné princípy, vedieť kvantifikovať hľadané prvky s požadovanými vlastnosťami), vzbudzuje záujem pestrosťou svojich úloh aj ich praktickým uplatnením. Kombinatorické úlohy sú pôsobivou možnosťou na samostatné matematické uvažovanie. Skúste uplatniť nielen poznatky zo základnej a strednej školy, ale aj tvorivé bádateľské úsilie a vytrvalosť, rôznorodosť používaných prístupov a spôsobov riešenia.

1. Koľko je rôznych možností pre rozmenenie desať–eurovky pomocou jedno–euroviek, dvoj–euroviek a päť–euroviek?
A) 5 B) 8 C) 10 D) 14

2. Koľko je rôznych možností pre zafarbenie všetkých stien kocky dvomi rôznymi farbami, ak má byť každá stena jednofarebná?
A) 6 B) 10 C) 12 D) 16

3. Koľko trojciferných čísel sa dá napísať pomocou nepárnych číslic?
A) 999 B) 225 C) 125 D) 25

4. Na turnaji súťažilo päť družstiev A, B, C, D, E. V koľkých prípadoch zo všetkých možných rôznych poradí sa družstvo A mohlo umiestniť medzi družstvami B a C?
A) 12 B) 24 C) 40 D) 60

5. Koľko je rôznych možností pre rozsadenie vedľa seba piatich dievčat, ak práve dve z nich sú sestry, ktorým vyhovieme, aby sedeli vedľa seba?
A) 120 B) 60 C) 24 D) 48

6. Koľko je šesťmiestnych prirodzených čísel neobsahujúcich cifru 2 ani 4?
A) 262144 B) 888888 C) 32768 D) 229376

7. Medzi ôsmimi rôznymi knihami sú tri rôzne romány. Koľko je rôznych možností pre usporiadanie týchto 8 kníh vedľa seba, ak požadujeme, aby tie 3 romány boli vedľa seba?
A) 5040 B) 4320 C) 1440 D) 720

8. Na tanečnom večierku je dvanásť dievčat a pätnásť chlapcov. Koľko je možností pre výber štyroch párov (chlapec – dievča) na tanec?

A) 180 B) 720 C) 675675 D) 16216200

9. Koľko prirodzených čísel menších ako 100000 možno napísať len pomocou cifier 7 alebo 9?

A) 62 B) 32 C) 77777 D) 99999

10. Koľko je možností pre výber troch rôznych polí na hracej šachovnici (8x8) tak, aby nemali všetky tri naraz rovnakú farbu?

A) 496 B) 15872 C) 31744 D) 63488

11. Koľko je možností, aby pri hode šiestich rôznofarebných hracích kociek (s číslami 1 až 6) padli práve štyri rovnaké čísla?

A) 2250 B) 2500 C) 375 D) 1500

12. Koľko rôznych odtieňov môžete získať z deviatich rôznych farieb, ak zmiešate v tom istom pomere buď dve alebo tri rôzne farby?

A) 36 B) 84 C) 120 D) 3024

13. Koľko je šesťciferných prirodzených čísel, ktorých ciferný súčet je 4?

A) 4 B) 12 C) 28 D) 56

14. Koľko je rôznych možností ako rozdeliť sedem ruží a päť tulipánov trom dievčatám, keď im záleží len na počte jednotlivých druhov?

A) 35 B) 126 C) 756 D) 1155

15. Koľko máme možností pre rozdelenie 8 jabĺk trom deťom, ak záleží len na počte jabĺk pre jednotlivé deti?

A) 12 B) 45 C) 336 D) 40320

16. Koľko rôznych desať–písmenových slov možno zostaviť pri použití všetkých písmen slova MATEMATIKA?

A) 75600 B) 151200 C) 302400 D) 3628800

Prezradíme aj správne odpovede: 1. C; 2. B; 3. C; 4. C; 5. D; 6. D; 7. B; 8. D; 9. A; 10. C; 11. A; 12. C; 13. D; 14. C; 15. B; 16. B;

Výber publikácií s tematikou školskej kombinatoriky

BÁLINT, Ľ.: *Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika*. Bratislava: SPN, 1998.
BOSÁK, J.: *Latinské štvorce*. Praha: Mladá fronta, 1976.
BUKOVSKÝ, L. – KLUVÁNEK, I: *Dirichletov princíp*. Praha: Mladá fronta, 1970.
BURJAN, V.: *Matematika – opakovanie pre gymnázium s triedami zameranými na matematiku* (*Kombinatorika*, s. 172–183). Bratislava: SPN, 1989.
CALDA, E. – DUPAČ, V.: *Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika.* Praha: Prometheus, 2003.
ČULÍK, K. – FIEDLER, M. – DOLEŽAL, V.: *Kombinatorická analýza v praxi*. Praha: SNTL, 1967.
HECHT, T. a kol.: *Matematika pre 1. roč. gymnázií a SOŠ – Kombinatorika*. Bratislava: Orbis Pictus, 1996.
HECHT, T. – SKLENÁRIKOVÁ, Z.: *Metódy riešenia matematických úloh*. Bratislava: SPN, 1992.
HEJNÝ, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN, 1990.
HEJNÝ, M. – STEHLÍKOVÁ, N.: *Elementární matematika*. Praha: UK, 1995.
JODAS, V.: *Propedeutika kombinatoriky*. Bratislava: MCMB, 1998.
KAC, M. – ULAM, S. M.: *Matematika a logika*. Praha: SNTL, 1977.
KAUCKÝ, J.: *Kombinatorické identity*. Bratislava: Veda, 1975.
KEMENY, J.G. a kol.: *Úvod do finitní matematiky*. Praha : SNTL, 1971.
KOLBASKÁ, V.: *Kombinatorika pre ZDŠ a osemročné gymnáziá*. Bratislava: MC, 1998.

MATOUŠEK, J. – NEŠETŘIL, J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky*. Praha: Karolinum, 2000.
ODVÁRKO, O. a kol.*: Metody řešení matematických úloh*. Praha: SPN, 1990.
NEČAS, J. *: Grafy a jejich použití*. Praha: SNTL, 1978.
NEŠETŘIL, J.: *Teorie grafů*. Praha: SNTL, 1980.
SEDLÁČEK, J.: *Faktoriály a kombinační čísla*. Praha: MF, 1964, 1985.
SEDLÁČEK, J.: *Kombinatorika v teorii a praxi. (Úvod do teorie grafu)*.Praha: NČSAV, 1964; Academia, 1977.
SCHWARTZOVÁ, E.: *Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika I, II, III*. Prešov: MC, 1998, 1999.
VILENKIN, N. J.: *Kombinatorika*. Praha: SNTL, 1977.
VRBA, A.: *Kombinatorika*. Praha: Mladá fronta, 1980.
VRBA, A.: *Kombinatorika, pravdepodobnosť, matematická indukcia.* Bratislava: SPN, 1995.
ZÍTEK, F.: *Vytvořujíci funkce*. Praha: Mladá fronta, 1972.

Výber časopiseckých príspevkov s tematikou školskej kombinatoriky

(**MFvŠ** – Matematika a fyzika ve škole, **RMF** – Rozhledy matematicko-fyzikální,
MFI – Matematika, fyzika a informatika, **PMFA** – Pokroky matematiky, fyziky a astronómie)

BICAN, L: - HORA, J.: *Permutace, cykly, znaménko permutace.* RMF 67/88–89, č. 6.
BUŠEK, I.: *Krevní skupiny a kombinatorika*. RMF 62/83–84, č. 10.
Určování maximálního členu binomického rozvoje. RMF 62/83–84, č. 6.
CALDA, E.: *Aritmetické postupnosti s kombinačními čísly*. MFI č. 1/95–96.
Cesty ve čtvercové síti a fronta před pokladnou. RMF 69/90–91, č. 7–8.
Faktoriály a subfaktoriály. RMF roč. 75–76, č. 4.
Fibonacciova čísla a Pascalúv trojuhelník. RMF 71/93–94, č. 1.
Ješte jednou fronta před pokladnou. RMF 70/92, č. 1.
Kombinace a vytvořujíci funkce na střední škole. MFvŠ 1986–87, č. 4.
Kombinace s omezujícími podmínkami. MFI roč. 9, 1999/2000 .
Kombinatorická úloha o trezoru a klíčích. MFI roč. 10, 2000/2001.
Kombinační čísla a cesty ve čtvercové síti. RMF roč.69/90–91, č. 6.
Princip inkluze a exkluze. RMF 74/75, č. 8.
Subfaktoriály v kombinatorických úlohách. RMF 75/76, č. 5.
Znovu o kombinacích s omezujícími podmínkami. MFI roč. 9, 1999/2000.
CALDA, E. - DUPAČ,V.: *Kombinatorika, pravdepodobnosť, statistika*.MFI, č. 10/ 1994–95.
DOMÁNYOVÁ, M.: *Súčty, sumy a kombinačné čísla*. RMF roč. 64/ 85–86, č. 9.
DUCHOŇ, M.: *Kombinatorika a krvný systém ABO*. Matematické obzory, zv. 40/1993.
FERJENČÍK, L.: *Ješte o součtech mocnin, mnohočlenech a kombinatorice*. RMF 74/75, č. 8.
HEJNÝ, M.: *Problémy s kombinatorikou*. MFvŠ roč. 16, č. 6 / 1985–86.
HORÁLKOVÁ, J.: *Elementy kombinatorické geometrie v 9.roč. ZDŠ*. MFvŠ 1975/76, č. 1.
HOUSKA, J.- LIEBL, P.: *Proč je kombinační číslo celé?* MFvŠ roč. 11, 1980/81, č. 5.
HRUBÝ, D. – HÁLKOVÁ, M.: *O jedné vlastnosti faktoriálu*. RMF 69/90–91, č.6.
ILAŠ, Š.: *O niektorých pojmoch kombinatorickej topológie*. MFvŠ 1971–72, č. 7.
JANÁČKOVÁ, M.: *Malá sonda do kombinatorického myslenia žiakov na SŠ*. Zborník z konferencie “Matematika v škole dnes a zajtra”, KU: Ružomberok, 2003.
JANEČEK, F: *Vlastnosti Pascalova trojuhelníku*. RMF roč. 61/ 82–83, č. 8.
Zobecnění kombinačních čísel. MFvŠ roč. 18, 1987/88, č.10.
JANKŮ, M. – URBANOVÁ, J.: *Z varšavské konference o kombinatorice a pravděpodobnosti v počáteční škole*. MFvŠ, 1984, č. 5.
JEDINÁK, D.: *Kombinatorika pre budúcich učiteľov matematiky*. MATEMATIKA–FYZIKA–INFORMATIKA (časopis pro výuku na ZŠ a SŠ) roč. XVI, č.10 s.583-591. Praha: JČMF – Prometheus, 2007.
KMEŤOVÁ, M.- ŠALÁT , T.: *Metóda mrežových bodov v kombinatorike*. Matematické obzory zv. 40/1993.
KOČANDRLE, M.: *Kombinatorika na šachovnici*. RMF roč. 69/90–91, č. 6.
KOMAN, M.: *Korespondenční seminár z kombinatoriky*. RMF 76/77, č. 7.
Metody řešení kombinatorických úloh. MFvŠ roč. 9/1978–79, č. 5 a 6.
O pojetí kombinatoriky na základní a střední škole v budoucnosti. MFvŠ roč. 17 /1966–67.
Pět úloh z kombinatoriky. RMF roč. 55/1977, č.7.
KRIŽALKOVIČ, K.: *Prvky kombinatoriky a pravdepodobnosti v 1. – 4. ročníku základnej školy v PLR.* MFvŠ roč. 10/1079–80, č. 5.
KOSMÁK, L.: *Kombinatorika na gymnáziu*. Matematické obzory zv. 15/1980.
MANN, J.: *Obdoby Pascalova trojuhelníku*. RMF roč. 65/86–87, č. 1.
MARTINOVIČOVÁ, E.: *Motivácia kombinatoriky*. MFvŠ roč. 11, č. 1 /1980–81.

MÍDA, J.: *Zamyšlení nad jízdenkou MHD*. RMF 63/84–85, č. 8.
MIŠOŇ, K.: *Permutace*. RMF 1975/76, č. 3.
NEČAS, J.: *Zamyšlení nad delitelností faktoriálu*. RMF 61/82–83, č. 7.
NEŠETŘIL, J.: *Kombinatorické konstrukce , jejich složitost a praktický význam*. PMFA roč.1978, č. 1.
ODVÁRKO, O.: *Sčítat nebo násobit*. RMF 1973/74, č .7.
PŮLPÁN, Z.: *Kombinace nebo variace s opakováním*. MFŠ roč. 17, 1986/87, č. 5.
SEDLÁČEK, J.: *Částečné součty rad s polynomickými členy*. RMF 77/78, č.5.
Pascalovské trojuholníky. RMF 77/78, č.8.
SCHOLTZOVÁ, I.: *Elementy riešenia úloh z kombinatoriky*.
Zborník z konferencie "Matematika v škole dnes a zajtra", KU: Ružomberok, 2003.
SKUHRA, J.: *Problém divokých kachen a kombinatorické výpočty*. RMF 73/74, č. 6–8.
ŠTEPÁNOVÁ, I. – ŠTEPÁN, J .: *Osm úloh o kombinatorické pravdepodobnosti*. MFI 93/94 č.8–10, 94/95 č. 1.
ŽILKOVÁ, M.: *Kombinatorické hry v školskej matematike*. Zborník z konferencie "Matematika v škole dnes a zajtra", KU: Ružomberok, 2003.

Záver

Didakticky vhodne usmernený výber úloh a postupov ich riešenia, hlbšie súvislosti kombinatorického myslenia a argumentácie, tvorivejší a pravidelnejší spôsob organizácie vyučovacej i študijnej činnosti môžu prispieť k dôraznejšiemu formovaniu poznávacej myšlienkovej aktivity rozvíjajúcich sa osobností našich žiakov. Takto pochopené a motivačne podchytené i realizované vyučovanie školskej kombinatoriky je smerovaním k efektívnejším postupom v pedagogickej praxi aj na vyučovacích hodinách matematiky.