KATEDRA DIDAKTIKY MATEMATIKY
MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA UNIVERZITY KARLOVY

CESTY K MATEMATICE IV

Sborník konference

18. až 20. května 2021

Jana Hromadová,
Antonín Slavík (ed.)

matfyzpress
NAKLADATELSTVÍ MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTY
UNIVERZITY KARLOVY

Autoři

Mgr. et Mgr. Filip Beran
Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.
Mgr. Jiří Břehovský, Ph.D.
RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D.
doc. RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.
doc. RNDr. Ing. Jana Kalová, Ph.D.
RNDr. Jindřich Michalik
Mgr. Karel Pazourek, Ph.D.
doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Mgr. Tomáš Zadražil

Recenzenti

doc. RNDr. Leo Boček, CSc.
RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.
RNDr. Pavla Pavlíková, Ph.D.
RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D.
doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
RNDr. Jakub Staněk, Ph.D.
RNDr. Petra Surynková, Ph.D.
RNDr. Martina Škorpilová, Ph.D.

ISBN 978-80-7378-442-3

ÚVODNÍ SLOVO

Ve dnech 18. až 20. května 2021 se koná 4. ročník celostátní konference *Cesty k matematice*, s ohledem na epidemickou situaci tentokrát netradičně v online podobě. Konferenci organizuje Katedra didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty UK[1], spolupořadatelem je Středočeská pobočka JČMF. Akce navazuje na konference *Jak připravit učitele matematiky*[2], *Matematika a reálný svět*[3] a *Cesty k matematice I*[4], *II*[5] a *III*[6] pořádané v letech 2010, 2012, 2014, 2016 a 2018.

Konference je určena pracovníkům fakult připravujících učitele matematiky, středoškolským učitelům matematiky, doktorandům a studentům vyšších ročníků, kteří se připravují na učitelskou profesi s aprobací matematika pro třetí stupeň, pracovníkům různých výzkumných institucí a dalším zájemcům o problematiku vzdělávání.

Konference je zaměřena na následující okruhy:

- kombinatorika, pravděpodobnost a statistika ve středoškolské matematice,
- výuka kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky na vysokých školách, příprava budoucích učitelů,
- souvislost a propojení kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky s dalšími oblastmi matematiky,
- zajímavé úlohy a motivace z tématu kombinatorika, pravděpodobnost a statistika.

Tento sborník obsahuje texty některých konferenčních příspěvků. Seznam účastníků a další materiály jsou k dispozici na webové stránce konference `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/konference2020/`.

Děkujeme programovému a organizačnímu výboru za přípravu konference, řečníkům za přednesení příspěvků a dodání jejich písemné verze a recenzentům za pečlivou kontrolu všech textů a řadu podnětných připomínek.

[1] Programový výbor: Jarmila Robová (předsedkyně), Leo Boček, Jana Hromadová, Vlasta Moravcová, Oldřich Odvárko, Antonín Slavík. Organizační výbor: Zdeněk Halas (předseda), Alena Blažková, Martin Rmoutil, Jakub Staněk, Petra Surynková, Martina Škorpilová, Jindřich Michalik, Jiří Vančura, Tomáš Zadražil.

[2] Texty příspěvků z této konference byly publikovány ve sborníku J. Bečvář, M. Bečvářová, A. Slavík (ed.): *Jak připravit učitele matematiky.* Matfyzpress, Praha, 2010. Jsou též k dispozici v elektronické verzi na webové stránce `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/konf-cd2/`.

[3] Viz elektronický sborník A. Slavík (ed.): *Matematika a reálný svět.* Matfyzpress, Praha, 2012, `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/konference2012/sbornik.pdf`.

[4] Viz elektronický sborník A. Slavík (ed.): *Cesty k matematice.* Matfyzpress, Praha, 2014, `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/konference2014/sbornik.pdf`.

[5] Viz elektronický sborník J. Hromadová, A. Slavík (ed.): *Cesty k matematice II.* Matfyz-Press, Praha, 2016, `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/konference2016/sbornik.pdf`.

[6] Viz elektronický sborník J. Hromadová, A. Slavík (ed.): *Cesty k matematice III.* Matfyz-Press, Praha, 2018, `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/konference2018/sbornik.pdf`.

OBSAH

Program konference

CESTY K MATEMATICE

Úterý 18. 5. 2021

15,00 – 15,05	Zahájení konference
15,05 – 16,00	J. Dvořák: *O dětech, čápech a kauzalitě*
16,00 – 16,30	K. Helisová: *Pravděpodobnost a geometrie*
16,30 – 17,00	D. Hlubinka: *Pravděpodobnost a podmíněná pravděpodobnost*
17,00 – 17,15	Přestávka
17,15 – 17,45	A. Jančařík: *Zkušenosti s výukou kombinatoriky v přípravě budoucích učitelů na PedF UK*
17,45 – 18,15	J. Staněk: *Výuka pravděpodobnosti na středních školách*
18,15 – 18,45	H. Kommová: *Pravděpodobnost a argumentace*
18,45 – 19,15	M. Hykšová: *Pravděpodobnost v učebnicích z 19. století z pohledu třetího tisíciletí*

Středa 19. 5. 2021

15,00 – 15,30	M. Litschmannová: *Vadí – nevadí? Aneb statistika kolem nás*
15,30 – 16,00	J. Michalik: *Základy magie pro učitele matematiky*
16,00 – 16,30	H. Šimková: *Jak (ne)vážit spravedlnost*
16,30 – 17,00	P. Martinková: *Od grafů rozdělení četností k normálnímu rozdělení a centrální limitní větě: Praktické příklady pro výuku*
17,00 – 17,15	Přestávka
17,15 – 17,45	D. Bímová, J. Břehovský: *Využití GeoGebry k rozvoji kombinatorického myšlení*
17,45 – 18,15	A. Slavík: *Krájení koláče a jiné úlohy*
18,15 – 18,45	J. Kalová, K. Pazourek: *Popisná statistika v příkladech a zamyšlení*
18,45 – 19,15	F. Beran: *Dvojí pojetí permutací*

Čtvrtek 20. 5. 2021

15,05 – 16,00	J. Fiala: *O jistých kombinatorických úlohách*
16,00 – 16,30	M. Rmoutil: *Kombinatorika konečná i nekonečná, zábavně a barevně*
16,30 – 16,45	Přestávka
16,45 – 17,15	J. Vančura: *Co učit na střední škole ze statistiky?*
17,15 – 17,45	J. Hromadová: *Využití GeoGebry při výuce statistiky na střední škole*
17,45 – 18,15	T. Zadražil: *Variace KoncepTestů z kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky*

DVOJÍ POJETÍ PERMUTACÍ

Filip Beran

V příspěvku představíme rozdíl mezi středoškolským a vysokoškolským pojetím permutací. Permutacemi se ve středoškolské matematice obvykle rozumějí uspořádané n-tice z daných prvků; můžeme je však také chápat jako zobrazení na množině těchto prvků, a tak je vzájemně skládat nebo určovat jejich samodružné neboli pevné body. Na praktických úlohách – tzv. problému šatnářky a popisu symetrií – ukážeme, že i toto pokročilejší pojetí může už na střední škole dávat dobrý smysl a otevírat studentům cesty ke složitější matematice.

1 Co je to permutace?

Ve středoškolských učebnicích obvykle narazíme definici permutace coby **uspořádané n-tice prvků**: „Permutace z n prvků je uspořádáná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou." (např. [5, str. 17]). Tato definice přitom navazuje na předchozí výklad variací: „Permutace z n prvků je každá n-členná variace z těchto prvků." Například všemi permutacemi ze tří prvků a, b, c jsou uspořádané trojice (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).

Oproti tomu ve vysokoškolských učebnicích, typicky algebry nebo diskrétní matematiky, se spíše setkáme s pojetím permutace coby zobrazení: „Permutací na množině X rozumíme bijekci (vzájemně jednoznačné zobrazení) $X \to X$." (Např. [10, str. 95], [7, str. 72] či [3, str. 341].)[1]

Na první pohled není těžké mezi sebou tyto dvě definice propojit. Pokud zvolíme za X konečnou množinu o n prvcích, její prvky označíme např. a_1, a_2 až a_n a příslušné bijektivní zobrazení f, pak uspořádanou n-tici z první definice dostaneme coby uspořádanou n-tici obrazů těchto prvků, tj. $(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$. Každému zobrazení f přitom odpovídá právě jedna uspořádaná n-tice, a naopak, pro každou uspořádanou n-tici nalezneme právě jedno takové zobrazení.

Ve středoškolských úlohách však obvykle nevypisujeme všechny možné permutace nějaké n-prvkové množiny, nýbrž především určujeme jejich počet. Ten je $n!$; to bychom si ale ještě moc nezapočítali, takže často přidáváme omezující podmínky, kterými některé n-tice vyloučíme. Typická je např. tato úloha [5, str. 20]:

[1] Historickou zajímavostí může být, že zatímco Otakar Borůvka v *Úvodu do teorie grup* definuje permutace již tímto „vysokoškolským" způsobem [4, str. 15–23], Václav Vodička v prakticky zaměřené „příručce pro inženýry a fysiky" *Determinanty a matice v theorii a praxi* zavádí permutaci jako uspořádanou řadu čísel, potažmo prvků [12, str. 6–8].

Nástup. Určete, kolika způsoby může n táborníků při nástupu na ranní rozcvičku nastoupit

(a) do řady;

(b) do řady v níž je táborník A na kraji;

(c) do řady, v níž táborníci A, B nestojí vedle sebe;

(d) do kruhu, v němž záleží jen na vzájemném rozmístění, nikoli na umístění vzhledem k okolním předmětům.

Výsledky jsou po řadě $n!$, $2(n-1)!$, $(n-1)!(n-2)$ a $(n-1)!$. K poslednímu bodu poznamenejme, že výsledek může být také poloviční, tj. $\frac{(n-1)!}{2}$, pokud za stejná budeme považovat nejen umístění lišící se pouze otočením kruhu, nýbrž i jeho „překlopením" čili orientací. Složitější permutační úlohy, kde hledáme počet řešení až na nějaké předem dané symetrie, vedou později až k použití tzv. Burnsideovy věty, která bývá součástí vysokoškolských kurzů algebry – viz např. [10, str. 102–107] či [3, str. 382–385].

Zdá se, že pro podobné úlohy plně dostačuje první uvedené pojetí permutace coby uspořádané n-tice; mohli bychom se sice např. ptát, kolika způsoby můžeme přemístit n táborníků, ale to by na řešení nic moc nezměnilo, pouze bychom mohli odečíst výchozí postavení coby tzv. identickou permutaci. V následujících odstavcích však rozebereme středoškolsky řešitelné úlohy, kde se naopak pojetí permutací coby zobrazení ukazuje jako elegantní nástroj pro jejich uchopení. Představíme při tom dva důležité koncepty: *pevné body* a *skládání permutací.*

2 Pevné body: Problém šatnářky

Problém šatnářky (*hat-check problem*, *derangement problem*) je snadno představitelná úloha, která přirozeně vede k pojetí permutace coby zobrazení, přičemž vykazuje další nečekané matematické souvislosti. Uveďme jej ve znění z [7, str. 105]:

Problém šatnářky. Ctihodní pánové v počtu n přijdou na shromáždění, všichni v kloboucích, a odloží si své klobouky do šatny. Při odchodu šatnářka, možná ten den velmi roztržitá, možná dokonce z mizerného osvětlení oslepla, vydá každému z pánů náhodně jeden z klobouků. Jaká je pravděpodobnost, že žádný pán nedostane od šatnářky zpět svůj klobouk?

Pro účely výuky jsem toto zadání mírně upravil a doplnil o návodné a související otázky. (Reformulace úlohy mě napadla na vánočním večírku gymnázia, kde skutečně takto popsaná tombola proběhla. Účastníků bylo kolem 70 a nevím o nikom, kdo by si vlastní věc odnesl.) Úlohu tak současně popíšeme poněkud podrobněji, více z hlediska středoškolského studenta a učitele; stručnější řešení, ovšem s nutností využití tzv. *principu inkluze a exkluze* mohou čtenáři najít v [7, str. 105–106], popř. včetně souvisejících úloh v pěkné a on-line dostupné diplomové práci [16].

Tombola. Každý přispěje do tomboly nějakou věcí a každý si zakoupí výherní lístek. Jaká je pravděpodobnost, že:

(a) vy si odnesete věc, kterou jste přispěli?

(b) každý si odnese vlastní věc?

(c) nikdo si neodnese vlastní věc?

Odpovědi pro 3, 4, 5 a obecně n účastníků nejprve odhadněte a následně přesně vypočítejte! Výsledky shrňte do přehledné tabulky.

Na první dvě otázky není těžké odpovědět rovnou pro obecné n. Vlastní věc si odnesu s pravděpodobností $\frac{1}{n}$, neboť jsem právě jedním z n účastníků a je mi dále lhostejné, komu připadnou ostatní věci.[2] Dále, očíslujeme-li účastníky po řadě 1, 2, ... , n a stejně tak i jimi přinesené věci, losování tomboly si můžeme představit právě jako permutaci těchto čísel. Každý si tedy odnese svoji věc jedině v tom případě, kdy pořadí zůstane nezměněno, tedy s pravděpodobností $\frac{1}{n!}$; k témuž výsledku můžeme dospět postupným součinem pravděpodobností $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n-1}$, $\frac{1}{n-2}$ atd., jak se věci postupně rozdělují.

Co ale poslední otázka? Nakonec, právě při tombole, na rozdíl od šatnářčina zmatení klobouků, je takový výsledek vítaný – nepřispíváme do tomboly dárkem proto, abychom si ho pak odnesli zpět domů, ale těšíme se na nějaké překvapení.

První nápad může být, že řešením bude doplněk výsledku (b) do 1, tedy pravděpodobnost $1 - \frac{1}{n!}$; vždyť výrazy *každý* a *nikdo* chápeme v běžné řeči jako slova opačného významu, tak jednoduše dopočítáme pravděpodobnost opačného jevu. Nemusíme ale ani zabíhat do výrokové logiky, abychom studenty přesvědčili o tom, že takhle snadné to nebude. Mezi výsledky (b) a (c) se rozprostírá ještě široká „šedá zóna“: může se stát, že někdo si vlastní věc odnese a někdo jiný zase ne.[3] (Za úvahu stojí, že jediné, co se jistě stát nemůže, je situace, kdy by si vlastní věc neodnesl právě jeden účastník.)

K otázce tak musíme přistoupit trochu důmyslněji. Nezbývá nám než rozdělit všechny uvažované permutace do dvou skupin: v jedné budou ty, kde si nikdo vlastní věc neodnese, a v druhé ty, kde se alespoň jeden takový případ vyskytne; matematicky zapsáno takové permutace f, že $\forall i\, f(i) \neq i$, od permutací, kdy $\exists i\, f(i) = i$. Takovému i, pro něž $f(i) = i$, se říká *samodružný* či *pevný bod permutace* f: rozlišíme tedy *permutace bez pevného bodu* od *permutací s alespoň jedním pevným bodem*. Po vzoru [7, str. 105] označme $š(n)$ počet permutací bez pevného bodu na n-prvkové množině. Námi hledaná pravděpo-

[2] Složitější by byla otázka, s jakou pravděpodobností si pouze já odnesu vlastní věc. Vedla by k bodu (c), ovšem pro $n - 1$ účastníků.

[3] I na základě této ukázky jiného pojetí „opaku“ v běžné řeči a v jazyce matematiky stojí za zvážení, zda by spíše než o *opačném* jevu nebylo vhodnější mluvit o *doplňkovém* jevu; takové označení by odpovídalo i množinové terminologii, kde mluvíme právě o *doplňku* dané množiny. Chápání rozdílu mezi doplňkem a opakem se ostatně uplatní i v běžném myšlení, kde nejsou na výběr jen dvě možnosti, ale spíše celé jejich (spojité) spektrum: tak si můžeme představit, že např. opakem bílé barvy je černá, nicméně jejím doplňkem je „nebílá“, zahrnující i všechny ostatní barvy, které „nejsou bílé“, např. žlutou, modrou, oranžovou ...

dobnost $p(n)$ pak je podíl tohoto čísla k počtu všech možných permutací, tedy $p(n) = \frac{š(n)}{n!}$.

Při výuce ovšem můžeme všechny tyto pomocné pojmy představit až později a nejprve nechat studenty, ať sami zkusí úlohu vyřešit pro konkrétní nízké počty účastníků – tak často nejlépe pronikneme do podstaty nějakého problému, když jej nejprve vyřešíme pro malá představitelná množství. Pro dvě věci v tombole je situace až triviální: buď si každý odneseme vlastní dárek, nebo si je prohodíme; takže $p(2) = \frac{1}{2}$.

U třech účastníků už je třeba zamyslet se více. Permutací s pevným bodem zřejmě bude případ, kdy si každý odnese vlastní dárek, a také celkem tři případy, kdy jeden si svůj dárek nechá a dva si je prohodí, dohromady tedy celkem čtyři permutace s pevným bodem. Oproti tomu bez pevného bodu jsou celkem dva případy, a to když si dárky vyměníme „cyklicky“ v jednom či druhém směru. Výsledkem je tedy $p(3) = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$. Doporučuji v tomto případě nechat studentům čas v klidu odvodit a rozmyslet si, jak vyměňování probíhá a že jsme takto popsali skutečně všech $3! = 6$ případů.

Než se pustíme do rozboru případu $n = 4$, krátce představme různé **zápisy permutací** chápaných coby zobrazení. Obvyklý a asi nejpřímočařejší způsob je zapsat permutaci f vodorovnou tabulkou dvojic hodnot vzor – obraz; tedy např. pokud první dva účastníci si dárky prohodí a třetí si svůj dárek odnese, zapíšeme tuto permutaci

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Permutací ve smyslu uspořádané n-tice by pak byl druhý řádek této tabulky.

Brzy si ale všimneme, že tento zápis je poněkud zdlouhavý, protože první řádek je vždy stejný. Můžeme tak zkusit v zápisu více vystihnout samo „prohazování“, které permutace realizuje, a to zápisem pomocí tzv. *cyklů*. To znamená, že vzor a obraz postupně zapisujeme za sebou, kde obraz jednoho prvku je současně vzorem dalšího; např. čtyřprvkovou permutaci $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ tak zapíšeme cyklem (1243). Výhodou tohoto zápisu je stručnost a názornost. Nevýhodou se může zdát jeho nejednoznačnost: zápis cyklu lze začít od kteréhokoliv jeho prvku, takže n-prvkový cyklus můžeme zapsat celkem n způsoby; např. $(1243) = (2431) = (4312) = (3124)$. Tuto nejednoznačnost lze ale odstranit požadavkem, aby zápis každého cyklu začínal jeho nejmenším prvkem a jednotlivé cykly byly uspořádány vzestupně podle počátečních prvků; této konvence se budeme držet v dalším textu.

Permutace také může být tvořena z více na sobě nezávislých cyklů, např. když si dárky prohodí první a druhý účastník a také třetí a čtvrtý účastník, tj. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$; pak každý z těchto cyklů uzavřeme do samostatné závorky a permutaci zapíšeme jako (1 2)(3 4). Zvláštním případem jsou právě pevné body, tedy vlastně jednoprvkové cykly; ty opět můžeme zapsat samostatně do závorky, ale i vynechat, víme-li, o kolikaprvkovou permutaci se jedná; tedy např. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

zapíšeme jako (124)(3), popř. jen (124). Právě pomocí cyklického zápisu na první pohled poznáme permutace bez pevných bodů.[4]

Zajímavé je, že někteří studenti si na obdobu cyklického zápisu přišli sami: když chtěli vyjádřit, že první dva účastníci si dárky prohodí a třetí si odnese svůj, zapisovali to pomocí šipek např. jako $1 \leftrightarrow 2 \quad 3$. Obdobně případ bez pevného bodu zapisovali např. $1 \to 2 \to 3$, popř. pomocí různých dalších schémat. Zde se dále budeme držet klasického cyklického zápisu; považuji ale za vhodné ponechávat studentům jejich zápis s šipkami i jiné invence, zvláště pokud jim umožňují lépe pochopit situaci.

Prozkoumejme nyní případ $n = 4$. Předchozí výsledky mohou vést k domněnce, že $p(n) = \frac{1}{n}$; tu ovšem zanedlouho vyvrátíme. Roztřiďme tedy nyní všech 4! čtyřprvkových permutací; zde už je třeba postupovat systematicky. Začněme permutacemi s jediným cyklem; to je zřejmě celkem 6 permutací: (1234), (1432), (1324), (1423), (1243) a (1342). Jsou to všechny bez pevného bodu? Nikoliv! Ještě se může stát, že si dárky nevymění všichni čtyři účastníci takto „dokolečka“, nýbrž vždy dvě dvojice navzájem. Takové dvě dvojice můžeme utvořit celkem třemi způsoby, tedy získáváme dále tyto permutace: (12)(34), (13)(24) a (14)(23). Dohromady jsme tak našli 9 čtyřprvkových permutací bez pevného bodu.

Pro kontrolu si ještě představme zbývajících 15 permutací, které alespoň jeden pevný bod mají: je to jistě 1 identická permutace, tedy případ, kdy si každý odnese svůj dárek; dále $\binom{4}{1} \cdot 2 = 8$ permutací s právě jedním pevným bodem, tj. těch, co mají jeden tříprvkový cyklus; a konečně $\binom{4}{2} = 6$ těch, které mají právě dva pevné body. Můžeme tak potvrdit, že pravděpodobnost, že si nikdo neodnese vlastní dárek, je $p(4) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} = 37{,}5$ %. Při řešení jsme ovšem získali i další informace, a to o celkovém rozložení pravděpodobností: to, že si svůj dárek odnese právě jeden účastník, se stane s pravděpodobností $\frac{8}{24} = \frac{1}{3} = 33{,}\overline{3}$ %, a pro právě dva účastníky to je $\frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 25$ %; lze tedy říci, že všechny tyto tři varianty jsou poměrně podobně pravděpodobné. Naopak pravděpodobnost, že si každý odnese svůj dárek, je jen $\frac{1}{24}$, a to, že by si ho odnesli právě tři účastníci, je logicky nemožné.

Někteří studenti vyřeší i tento případ bez nutnosti nápovědy. Jak ale vidíme, počet permutací rychle roste a už pro $n = 5$ zřejmě nebude praktické vypisovat všech 120 permutací. Můžeme tedy v tom, kolik je n-prvkových permutací bez pevného bodu, najít nějaký obecný systém? Intuice nám napovídá, že by nějak mohly souviset n-prvkové a $(n+1)$-prvkové permutace. Zkusme tedy pro číslo $š(n)$ odvodit rekurentní vzorec, který je umožní spočítat z předchozích výsledků.

Odvození rekurentního vzorce. Zamysleme se tedy více nad tím, jak mohou vzniknout $(n+1)$-prvkové permutace bez pevného bodu z permutací na méně prvcích a ilustrujme to na $n = 3$. Představme si, že ke skupince n účast-

[4] Blíže k zápisu permutací viz např. [1, str. 51 a 56], popř. [7, str. 73] či [3, str. 342]; pěkné vysvětlení i s příklady je též na anglické Wikipedii [15].

níků přijde nový účastník, který se chce zapojit do výměny dárků. Pokud je tato n-prvková permutace bez pevného bodu, může se nově příchozí zapojit na kterékoliv místo kteréhokoliv cyklu – takových možností má tedy pro každou permutaci celkem n. Takto tedy např. ze tříprvkové permutace (132) vzniknou příchodem čtvrtého účastníka tři různé čtyřprvkové permutace bez pevného bodu: (4132), (1432) a (1342); nenechme se zmást, (1324) by už byla stejná permutace jako (4132). Dostáváme tak $n \cdot š(n)$ těchto $(n+1)$-prvkových permutací bez pevného bodu.

Může ovšem taková permutace vzniknout i z n-prvkové permutace, která pevný bod má? Ano, ale pouze tehdy, má-li jen jeden pevný bod, na který se „naváže“ nově příchozí účastník; kdyby jich měla dva nebo více, i po příchodu nového účastníka by nějaký pevný bod zbýval. Takto tedy např. z permutace (13)(2) s jedním pevným bodem vytvoří nově příchozí, čtvrtý účastník permutaci (13)(24); pokud chceme získat permutaci bez pevného bodu, nemá jinou volbu, než si vyměnit dárek s dosud osamocenou 2. Kolik je ovšem takových n-prvkových permutací s právě jedním pevným bodem, z nichž může nově příchozí tímto jediným způsobem vytvořit permutace bez pevného bodu? Odpověď je snazší, než si myslíme: Pro každý výběr jednoho z těch n prvků, který bude tím jediným pevným, „osamoceným“, jich je právě tolik, kolik je $(n-1)$-prvkových permutací bez pevného bodu, tedy $n \cdot š(n-1)$; např. (1)(23), (2)(13), (3)(12), kde $š(2) = 1$.

Vzato dohromady, takto získáváme rekurentní předpis

$$š(n+1) = n \cdot š(n) + n \cdot š(n-1) = n \cdot [š(n) + š(n-1)],$$

přičemž $š(1) = 0$ a $š(2) = 1$. Aby naše předchozí úvahy byly zcela korektní, ještě je třeba ověřit, že uvedeným způsobem získáváme permutace skutečně navzájem různé a jinak je získat nemůžeme; to je však vcelku zřejmé. Snadno nyní ověříme naše předchozí výsledky, že $š(3) = 2$ a $š(4) = 9$. Hlavně však nyní můžeme dopočítat, aniž bychom všechny permutace vypisovali, že $š(5) = 4 \cdot 9 + 4 \cdot 2 = 4 \cdot 11 = 44$. (Doporučuji ovšem zkusit si je vypsat včetně toho, jak vznikly z předchozích čtyřprvkových permutací s žádným, resp. s jedním pevným bodem.) Je tedy $p(5) = \frac{š(5)}{5!} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30} = 36{,}\overline{6}$ %.

Na první pohled nás upoutá, že pravděpodobnost $p(5)$ je poměrně dost blízká pravděpodobnosti $p(4)$. Se studenty dále můžeme spočítat několik dalších hodnot, třeba pomocí tabulky v Excelu, ve kterém se snadno pracuje s rekurentně danými posloupnostmi. Zjistíme, že už se pravděpodobnost se zvyšujícím n téměř nemění a blíží se (zaokrouhleně) k hodnotě 36,788 %, jak ukazuje tab. 1.

Se zvyšujícím se počtem účastníků tomboly tedy námi sledovaný jev, že si nikdo neodnese vlastní věc, není ani skoro jistý, ani skoro nemožný, nýbrž blíží se ke konstantě „někde mezi“; to se zdá být poněkud překvapivé. Přibližné neformální vysvětlení může být toto: Na jedné straně čím více účastníků, tím snadněji se věci promíchají; na druhé straně se ovšem zvyšuje i počet lidí, kteří si vlastní věc mohou odnést, a nám přitom stačí jeden z mnoha.

n	$š(n)$	$n!$	$p(n)$
1	0	1	0,0000 %
2	1	2	50,0000 %
3	2	6	33,3333 %
4	9	24	37,5000 %
5	44	120	36,6667 %
6	265	720	36,8056 %
7	1 854	5 040	36,7857 %
8	14 833	40 320	36,7882 %
9	133 496	362 880	36,7879 %
10	1 334 961	3 628 800	36,7879 %

Tab. 1: Prvních 10 hodnot funkcí $š(n)$ a $p(n)$

Výpočet limity $p(n)$. Dosud jsme si víceméně vystačili s běžnou středoškolskou matematikou a několika názornými úvahami. Abychom nyní ukázali, že se $p(n)$ skutečně limitně blíží k nějaké konstantě a určili její přesnou hodnotu, budeme potřebovat pokročilejší techniky a více počítání. I tak to ale může být zajímavý námět např. do semináře, popř. možnost pro učitele, jak i v běžné hodině načrtnout některé postupy „složitější“ matematiky.

V prvé řadě by se nám hodilo odvodit z rekurentního předpisu přímý vzorec pro $š(n)$. Jak na to? Učebnice [7, str. 109] napovídá, ať zavedeme a prozkoumáme pomocnou posloupnost $a_n = š(n) - n \cdot š(n-1)$. Je-li totiž, jak už jsme odvodili,

$$š(n) = (n-1) \cdot [š(n-1) + š(n-2)] = n \cdot š(n-1) - š(n-1) + (n-1) \cdot š(n-2),$$

pak

$$\begin{aligned} a_n &= š(n) - n \cdot š(n-1) = -š(n-1) + (n-1) \cdot š(n-2) = \\ &= -[š(n-1) - (n-1) \cdot š(n-2)] = -a_{n-1}. \end{aligned}$$

Přitom $a_2 = 1 - 2 \cdot 0 = 1$, tedy $a_n = (-1)^n$. Získáváme tak důležitou rovnost

$$š(n) - n \cdot š(n-1) = (-1)^n.$$

Tu nyní napíšeme pro všechna i sestupně od n až po 2, přičemž ji vždy ještě vydělíme $i!$. Dostaneme celkem $n-2$ rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{š(n)}{n!} - \frac{n \cdot š(n-1)}{n!} &= \frac{(-1)^n}{n!} \\ \frac{š(n-1)}{(n-1)!} - \frac{(n-1) \cdot š(n-1)}{(n-1)!} &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\cdots \\ \frac{š(2)}{2!} - \frac{2 \cdot š(1)}{2!} &= \frac{(-1)^2}{2!} \end{aligned}$$

Když nyní začneme sčítat všechny členy na levé straně rovnosti, všimneme si, že druhý člen jedné rovnice se vždy zruší s prvním členem následující jako při sčítání tzv. *teleskopických řad*; ze součtu levých stran nám tak zůstane pouze první člen první rovnice a druhý člen rovnice poslední. Získáváme rovnost

$$\frac{\check{s}(n)}{n!} - \frac{2 \cdot \check{s}(1)}{2!} = \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{(-1)^2}{2!}.$$

Protože $\check{s}(1) = 0$, můžeme výsledek upravit do tvaru

$$\check{s}(n) = n! \cdot \left(\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{(-1)^2}{2!} \right).$$

Přerovnáme-li členy na pravé straně a doplníme-li „pro formu" ještě první dva členy, dostáváme hledaný vzorec jako elegantní součin faktoriálu a $n+1$ sčítanců:

$$\check{s}(n) = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

Námi hledaná pravděpodobnost tedy je

$$p(n) = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

Ze známého Taylorova rozvoje exponenciály e^x v mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ pak dostáváme přesnou konstantu, k níž naše pravděpodobnost konverguje:

$$\lim_{n \to \infty} p(n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} = \mathrm{e}^{-1} \doteq \frac{1}{2{,}718} \doteq 36{,}788\ \%$$

Přitom je tato konvergence poměrně rychlá, jak jsme už viděli výše rekurentním výpočtem hodnot po $n = 10$. Potvrdili jsme tedy poměrně pozoruhodný výsledek: ať už se na tombole sejde 10, 70 nebo třeba 200 lidí, pravděpodobnost, že si nikdo neodnese věc, kterou do tomboly věnoval, je ve všech případech téměř stejná: přibližně 37 %. Kdo by byl navíc na začátku řekl, že tu na nás zničehonic vyskočí Eulerovo číslo …

Myslím, že tato úloha je krásnou ukázkou propojení několika oblastí matematiky, z nichž většina je přitom srozumitelná už na středoškolské úrovni. Spíše než rovnou při výkladu permutací ji však doporučuji zařadit později, např. jako opakování poté, co už byly vyloženy základní principy počítání pravděpodobnosti; zároveň se hodí, když studenti znají už i posloupnosti, popř. Eulerovo číslo. Též se mi osvědčilo neuvést tuto úlohu hned výrazem *permutace*, nýbrž nechat studenty, zda si její zadání s tímto konceptem sami spojí. I pro učitele je pak inspirativní sledovat, jak se studenti s tímto vlastně velmi jednoduchým a srozumitelným problémem vypořádají.

3 Skládání permutací: Struktura symetrií

V předchozí části jsme představili, jak nám pojetí permutací coby zobrazení a hledání jejich pevných bodů může pomoci uchopit jednoduše formulovanou úlohu o pravděpodobnosti v tombole. V této části se zaměříme na další aspekt takto pojatých permutací, a to jejich skládání, pomocí něhož zase můžeme lépe porozumět struktuře symetrií různých geometrických i abstraktních objektů. Začněme ovšem zdánlivě nesouvisející úlohou (převzatou od doc. Antonína Jančaříka z PedF UK):

Oslava. Doplňte čísla 5, 6, 10 a 12 tak, aby příběh dával smysl:

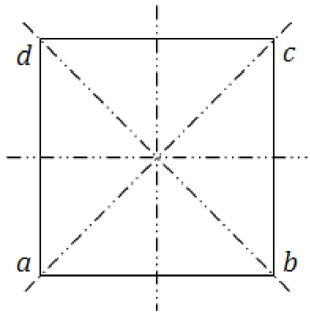
(a) Terezka koupila … balíčků bonbonů na oslavu,
(b) které se celkem … zúčastnilo dětí.
(c) Každý balíček obsahoval … bonbonů a
(d) každé dítě tak dostalo … bonbonů.

Najít nějaké řešení není těžké: např. (a) 5 balíčků, (b) 6 dětí, (c) každý balíček po 12 bonbonech a (d) každý dostal 10 bonbonů. Takovou úlohu hravě vyřeší už děti na prvním stupni základní školy. Správnou však je třeba i odpověď (a) 6, (b) 12, (c) 10 a (d) 5. Nabízí se tak otázka: Kolik různých řešení můžeme najít? Označíme-li jednotlivé hodnoty a, b, c, d, máme celkem $4! = 24$ možností, jak jim přiřadit zadaná čísla.

Zřejmě ale ne každá permutace je řešením; nutnou a postačující podmínkou je, aby $a \cdot c = b \cdot d$. Otázka tedy nyní zní: Kolika způsoby můžeme umístit čísla do této rovnosti? Máme-li jedno řešení, snadno z něj vyrobíme další: můžeme prohodit buď čísla na místech a a c, nebo na místech b a d, nebo oboje provést současně. Také však můžeme prohodit čísla obou stran rovnosti, tedy např. a s b a současně c s d, a pak opakovat prohazování členů jako výše. Celkem tak můžeme prohodit členy v součinu na levé straně, nezávisle na nich členy v součinu na pravé straně a nezávisle na nich též strany rovnosti: dostáváme tak celkem $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ možností.

Můžeme si ale nějak lépe představit *strukturu* těchto řešení? Vezmeme-li např. řešení $(5, 6, 12, 10)$ a $(6, 12, 10, 5)$, dostaneme druhé z prvního pomocí cyklické permutace $(a\ b\ c\ d)$. Zároveň tuto permutaci můžeme zopakovat, čímž získáme další řešení $(12, 10, 5, 6)$. To také můžeme získat z původního řešení rovnou, a to prohozením a a c a současně b a d, tedy permutací $(a\ c)(b\ d)$. Z jednoho původního řešení tak dostaneme všech sedm dalších pomocí těchto permutací: $(a\ b\ c\ d)$, $(a\ c)(b\ d)$, $(a\ d\ c\ b)$, $(a\ c)$, $(b\ d)$, $(a\ d)(b\ c)$ a $(a\ b)(c\ d)$.

Nyní ale přijde geometrické překvapení: Tyto permutace zároveň popisují všechny symetrie čtverce, označíme-li jeho vrcholy postupně a, b, c, d (obr. 1). Permutace $(a\ d)(b\ c)$ a $(a\ b)(c\ d)$ odpovídají osové souměrnosti podle vodorovné a svislé osy; dvojcykly $(a\ c)$ a $(b\ d)$ popisují zrcadlení podle úhlopříček, daných jejich pevnými body; $(a\ c)(b\ d)$ odpovídá středové souměrnosti čili otočení o $180\,^\circ$; a konečně, čtyřcykly $(a\ b\ c\ d)$ a $(a\ d\ c\ b)$ reprezentují otočení o $90\,^\circ$ v kladném („proti směru chodu hodinových ručiček"), resp. záporném („po směru chodu hodinových ručiček") smyslu.



Obr. 1: Čtverec a, b, c, d a jeho osy symetrie

Dostáváme tak i přehledný model množiny řešení naší původní úlohy. Jak řešení naší úlohy, tak symetrie čtverce jsou přitom popsatelné pomocí permutací chápaných jako zobrazení. Navíc však nejde o „pouhou“ množinu, jejíž prvky by mezi sebou neměly žádný další vztah; jak už jsme načrtli výše, **permutace můžeme skládat**, tedy prvky po jednom „proházení“ proházet znovu a sledovat, jaký je výsledek vzhledem k výchozímu stavu. Složením dvou takových permutací je tedy opět permutace.

Při tom ovšem záleží na pořadí, v jakém permutace provedeme. Ilustrujme to na příkladu skládání symetrií našeho čtverce. Označme f otočení o $90\,^\circ$ v kladném smyslu popsané permutací $(a\ b\ c\ d)$ a g zrcadlení podle svislé osy, tj. permutaci $(a\ b)(c\ d)$. Pokud nejprve čtverec otočíme a následně zrcadlíme, vrcholy a, b, c, d přejdou v umístění a, d, c, b; matematicky zapsáno[5]

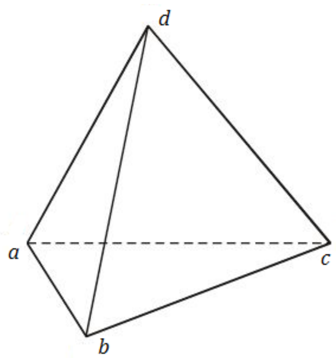
$$f \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & d & c & b \end{pmatrix} = (b\ d).$$

Tato výsledná permutace tedy odpovídá zrcadlení podle úhlopříčky AC. Naopak, pokud čtverec nejprve zrcadlíme a pak otočíme, je výsledkem $g \circ f = (a\ b)(c\ d) \circ (a\ b\ c\ d) = (a\ c)$, tedy zrcadlení podle úhlopříčky BD. Vidíme tedy, že skládání permutací obecně není komutativní.

Současně, ke každé permutaci najdeme permutaci opačnou neboli inverzní, která nám vrcholy vrátí na původní místo: např. k otočení $(a\ b\ c\ d)$ je to otočení v opačném směru: $(a\ d\ c\ b)$. Výsledkem složení těchto dvou permutací pak je permutace *identická*, která nechává všechny prvky na místě, či slovy z předchozí části, má všechny body pevné. Takto vybavená množina permutací tedy má **strukturu grupy**; můžeme tak mluvit nejen o množině permutací, nýbrž o grupě permutací. (Přesné definice grupy může čtenář nalézt např. v [1, str. 52 a násl.].)

[5] Držíme se zde konvence skládání zobrazení „zleva doprava“: zápis $f \circ g$ znamená nejprve provést zobrazení f a následně zobrazení g. V případě obvyklejšího skládání funkcí bychom to vyjádřili tak, že $(f \circ g)(x) = g(f(x))$.

Použít grupu permutací je tak jedna z názorných možností, jak efektivně popsat symetrie nějakého objektu – a to nejen jejich počet či druh, ale navíc strukturu, tedy to, jak se spolu skládají a tedy jako spolu souvisejí. Takové zkoumání struktury symetrií se může hodit nejen pro hlubší porozumění, ale i pro odhalování na první pohled ne zřejmých symetrií složitějších objektů. Jako příklad uvedeme pravidelný čtyřstěn (dále jen čtyřstěn) a krychli. Při čtení doporučujeme zkoušet si uvedené postupy na reálném modelu nebo si alespoň kreslit obrázky. Pěkné zpracování tohoto tématu včetně doprovodných cvičení také čtenář nalezne např. ve volně dostupných skriptech *Open University* [9].



Obr. 2: Pravidelný čtyřstěn a, b, c, d

Symetrie čtyřstěnu. Symetrie čtyřstěnu nejlépe vyjádříme pomocí permutací jeho vrcholů, které opět označíme a, b, c, d (obr. 2). Zaměřme se nejprve na přímé shodnosti: kolem jakých os můžeme čtyřstěn otáčet? Každým ze čtyř vrcholů a středem protilehlé stěny vede jedna osa otáčení, kolem níž můžeme čtyřstěn otočit o $120\,^\circ$ v kladném i záporném směru. Těmto symetriím odpovídají všechny permutace s jedním trojcyklem. Co se ovšem stane, když dvě taková otočení kolem různých os složíme dohromady? Např. $(a\,b\,c)\circ(a\,b\,d) = (a\,d)(b\,c)$.

Tato permutace dvou dvojcyklů přitom odpovídá otočení čtyřstěnu o $180\,^\circ$ okolo osy procházející středy protilehlých hran; obdobným způsobem můžeme dostat další dvě taková otočení odpovídající permutacím $(a\,b)(c\,d)$ a $(a\,c)(b\,d)$. Zajímavé přitom je, že složením dvou těchto permutací (v libovolném pořadí) dostaneme třetí, takže spolu s identickou permutací tvoří podgrupu grupy symetrií pravidelného čtyřstěnu; to geometricky odpovídá tomu, že když v prostoru složíme dvě otočení o $180\,^\circ$ okolo na sebe kolmých os, získáme otočení o $180\,^\circ$ okolo osy k oběma původním osám kolmé.

Celkem jsme tak našli 11 rotací pravidelného čtyřstěnu, které spolu s identickou permutací tvoří dvanáctiprvkovou grupu. A jak je to s nepřímými shodnostmi? Snadno odhalíme šest zrcadlení (rovinných souměrností) podle roviny procházející vždy jednou hranou a středem hrany protilehlé; těm tak odpovídá šest permutací s jedním dvojcyklem: $(a\,b)$, $(c\,d)$, $(a\,c)$, $(b\,d)$, $(a\,d)$ a $(b\,c)$. Pokud libovolné dvě z nich složíme, dostaneme jednu z již odhalených přímých shodností – otočení okolo jejich společné průsečnice o dvojnásobek úhlu, který spolu roviny zrcadlení svírají, tedy o $120\,^\circ$ nebo o $180\,^\circ$; např. $(a\ b) \circ (a\ c) = (a\ b\ c)$.

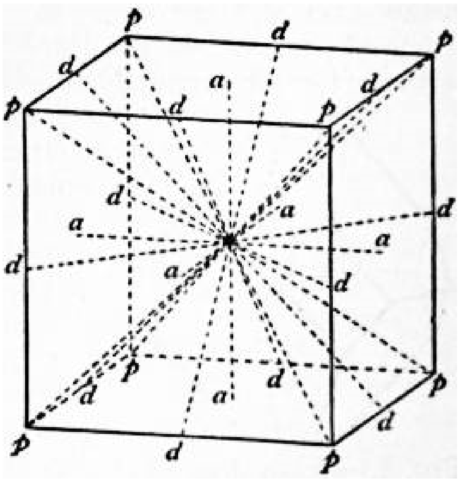
Co se ale stane, když složíme jedno z těchto zrcadlení s nějakým otočením? Pokud osa otočení leží v rovině zrcadlení, dostaneme opět zrcadlení, ovšem podle jiné roviny: např. $(a\ b) \circ (a\ b\ c) = (a\ c)$ nebo $(a\ b) \circ (a\ b)(c\ d) = (c\ d)$. Pokud tomu ale tak není, dostaneme ve výsledku nepřímou shodnost, která prohazuje všechny čtyři vrcholy: např. $(a\ b) \circ (b\ c\ d) = (a\ c\ d\ b)$ nebo $(a\ b) \circ (a\ c)(b\ d) = (a\ d\ b\ c)$; obdobně zřejmě dostaneme všech šest čtyřcyklů. Jejich geometrická intepretace se poněkud vzpírá naší představivosti: je to sice nepřímá shodnost, ale nikoliv pouhé zrcadlení podle nějaké roviny – jak se můžete přesvědčit na modelu, žádnou takovou rovinu nenajdete –, nýbrž složení zrcadlení podle roviny a otočení, které se někdy nazývá *rotoreflexe* [14].

Celkem jsme tak našli 12 nepřímých shodností pravidelného čtyřstěnu: šest obvyklých zrcadlení a šest podivuhodných rotoreflexí. Samy o sobě však netvoří grupu, neboť složeny spolu dávají shodnost přímou. Když je však sesypeme dohromady i s výše zkoumanými přímými shodnostmi, dostaneme celkem 24 shodností – symetrií pravidelného čtyřstěnu. Současně to je ale všech 24 možných permutací jeho vrcholů – naše hledání tak je u konce, více symetrií čtyřstěn mít nemůže, neboť každá taková shodnost musí převádět vrcholy mezi sebou a tímto zobrazením již je jednoznačně určena.

Tak jsme se alespoň pokusili načrtnout, že skládání permutací může být i šikovným nástrojem, jak objevovat a popisovat symetrie nějakého geometrického objektu; navíc zachycuje i jejich strukturu, tedy jak se skládají. Z tohoto hlediska také můžeme říci, že *pravidelný čtyřstěn je symetričtější než čtverec*: zatímco čtverec umožňuje jen některé permutace svých vrcholů (celkem 8), u čtyřstěnu jsou možné všechny.

Výše uvedené příklady jsou zároveň zástupci významných tříd permutačních grup, tzv. dihedrálních, alternujících a symetrických. (K permutačním grupám blíže viz např. učebnice algebry [3] či [10].) Začněme od konce: *Symetrická grupa* na n prvcích, značí se S_n, označuje grupu všech permutací na n prvcích; celkově tedy obsahuje $n!$ permutací. V našem případě popisovala S_4 všechny symetrie pravidelného čtyřstěnu. *Alternující grupa* na n prvcích, A_n, označuje grupu tzv. *sudých permutací* na n prvcích, kterých je $\frac{n!}{2}$. Nebudeme zde zabíhat do podrobností, jen prozradíme, že sudost či lichost permutace můžeme určit např. podle sudosti a lichosti počtu cyklů sudé délky a skládání sudých a lichých permutací se chová obdobně jako násobení sudých a lichých čísel. V našem případě popisovala A_4 všechny přímé symetrie (tj. rotace a identitu) pravidelného čtyřstěnu. Konečně, *dihedrální grupa* D_n je grupa všech symetrií pravidelného n-úhelníku a obsahuje tedy vybrané permutace na n prvcích odpovídající jeho otočením a osovým souměrnostem; celkem jich je $2n$. V našem případě popisovala D_4 všechny symetrie čtverce a také řešení úvodní úlohy o bonbonech.

Symetrie krychle. Závěrem této části se ještě zmiňme o krychli. Průzkum jejích symetrií už může čtenář podle předchozího návodu provést sám (či se svými studenty). Dotkněme se nejprve jen těch přímých, tedy rotací. Kolik jich bude? Zřejmě máme $3 \cdot 3 = 9$ rotací okolo každé ze tří os procházející středy protilehlých stěn o $90°$, $180°$ a $270°$; dále 6 rotací o $180°$ okolo každé z os procházející středy protilehlých hran; a konečně $4 \cdot 2 = 8$ rotací o $120°$ v kladném či záporném směru okolo každé z tělesových úhlopříček; jednotlivé osy znázorňuje obr. 3. Když k tomu přidáme identitu, dostáváme tak celkem 24 přímých shodností. (Povšimněme si, že je jich stejně jako všech shodností u pravidelného čtyřstěnu …)



Obr. 3: Osy přímých symetrií krychle[6]

Jejich skládání opět můžeme prozkoumat pomocí permutací. Ovšem, co budeme permutovat? Jako první se nabízejí, obdobně k předchozím příkladům, permutace vrcholů: tedy nějaká podgrupa symetrické grupy S_8. Jenže, to je jako jít s kanónem na vrabce: S_8 obsahuje celkem $8! = 40320$ permutací, kdežto nám jich stačí pouze 24. Nenajdeme něco vhodnějšího? Ano – můžeme permutovat stěny! Zde už půjde o podgrupu grupy S_6, ovšem stále mnoho permutací nevyužijeme … Nebudeme čtenáře dále napínat: Nejvhodnější popis se nabízí přes permutace čtyř tělesových úhlopříček – vyjde přesně na oněch $4! = 24$ permutací, které jednoznačně odpovídají výše popsaným rotacím.

Necháváme už na čtenáři, aby si je zkusil roztřídit. A souvislost se symetriemi pravidelného čtyřstěnu? Zkuste jej vytvořit z vybraných vrcholů krychle. Ještě dodejme, že i nepřímých shodností krychle lze nalézt právě 24, přičemž opět jednoznačně odpovídají permutacím tělesových úhlopříček; z každé přímé shodnosti je dostaneme jejím složením se středovou souměrností (*inverzí*) podle středu krychle, která, na rozdíl od dvourozměrného případu, je v trojrozměrném prostoru shodností nepřímou (viz též [14]).

[6] Zdroj: Wikimedia Commons, `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:EB1911_Crystallography_-_Fig._5.%E2%80%94Axes_of_Symmetry_of_a_Cube.jpg`

4 Shrnutí a závěr

V příspěvku jsme načrtli dva typy úloh, které se sice vyskytují až ve vysokoškolské matematice, ale můžeme je zařadit do výuky už na střední škole. Společným jmenovatelem *hledání pevných bodů* i *zkoumání struktury symetrií* je přitom *pojetí permutace jako bijektivního zobrazení na konečné množině*, nikoliv pouze jako uspořádání jejích prvků, jak jsou dosud permutace pojímány ve středoškolských učebnicích kombinatoriky.

Současně, pojetí permutací coby zobrazení nejen ukazuje zajímavé souvislosti a představuje užitečné nástroje pro uchopení některých otázek, ale otevírá i cestu k další, pokročilejší matematice. S permutacemi se setká snad každý student lineární algebry při obecné definici determinantu matice.[7] Studium grup permutací se pak zrodilo při řešení zdánlivě nesouvisející otázky řešitelnosti polynomiálních rovnic pátého a vyššího stupně, která zaměstnávala matematiky po několik staletí a dnes ji shrnuje tzv. *Galoisova teorie.* (Tu pěkně představuje např. popularizační práce [6].) Další oblastí pak jsou některé hry a úlohy tzv. rekreační matematiky: např. řešení tzv. *Lloydovy Patnáctky* nebo i popis známější *Rubikovy kostky* – viz [8], [13] a velmi podrobně [11].

Samozřejmě, těmto pokročilejším oblastem matematiky se v navazujícím studiu bude věnovat spíše menšina středoškolských studentů. Přesto považuji za užitečné, pokud se i s tímto druhým pojetím permutací na představených úlohách setkají všichni studenti. Proč? Zejména proto, že propojením mnoha oblastí matematiky – kombinatoriky, pravděpodobnosti, posloupností a funkcí, stereometrie – můžeme prakticky ilustrovat, že matematika není jen používáním předem připravených postupů na k tomu určené úlohy, ale také uměním hledat souvislosti a vytvářet nástroje, pomocí nichž vnášíme do zprvu nejasných problémů přehlednost.

Literatura

[1] J. Bečvář, *Lineární algebra*, 3. vyd., Matfyzpress, 2005.

[2] J. Bečvář, *Z historie lineární algebry*, Matfyzpress, 2007. Dostupné z: `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400920`.

[3] J. Bečvář, V. Dlab, *Od aritmetiky k abstraktní algebře*, vlastním nákladem, 2016.

[4] O. Borůvka, *Úvod do teorie grup*, Královská česká společnost nauk, 1944. Dostupné z: `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/401358`.

[5] E. Calda, V. Dupač, *Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*, 5. vyd., Prometheus, 2008.

[6] M. Livio, *Neřešitelná rovnice: matematika a jazyk symetrií*, Dokořán, 2008.

[7] Zajímavou historii determinantů, včetně jejich zařazení i do tuzemské středoškolské výuky, najde čtenář v publikaci [2], část III., zejm. kap. 6.

[7] J. Matoušek, J. Nešetřil, *Kapitoly z diskrétní matematiky*, 4. vyd., Karolinum, 2009.

[8] L. Motl, M. Zahradník, *Pěstujeme lineární algebru*, Karolinum, 2002. Dostupné z: `http://matematika.cuni.cz/zahradnik-pla.html`.

[9] The Open University: *Symmetry* [online]. Dostupné z: `http://www.open.edu/openlearn/ocw/mod/resource/view.php?id=71454`.

[10] D. Stanovský, *Základy algebry*, Matfyzpress, 2010.

[11] J. Tůma, *Matematické hlavolamy a základy teorie grup*, Mladá fronta, 1988. Dostupné z: `https://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/404164`.

[12] V. Vodička, *Determinanty a matice v theorii a praxi. Část první*, Jednota československých matematiků a fysiků, 1950. Dostupné z: `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403265`.

[13] K. Výborný, M. Zahradník, *Používáme lineární algebru: sbírka řešených příkladů*, Karolinum, 2002. Dostupné z: `http://matematika.cuni.cz/zahradnik-plas.html`.

[14] Wikipedia: *Improper rotation*. `https://en.wikipedia.org/wiki/Improper rotation`.

[15] Wikipedia: *Permutation*. `https://en.wikipedia.org/wiki/Permutation`.

[16] M. Wolfová, *Kombinatorické úlohy o permutacích*, diplomová práce, MFF UK, 2019. Dostupné z: `https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/188627`.

Mgr. et Mgr. Filip Beran
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`filip.beran@centrum.cz`

VYUŽITÍ GEOGEBRY K ROZVOJI KOMBINATORICKÉHO MYŠLENÍ

Daniela Bímová, Jiří Břehovský

Příspěvek je zaměřen na uvedení možností využití GeoGebry k rozvoji kombinatorického myšlení žáků na základní a střední škole. Zabývá se řešením kombinatorických úloh s geometrickým kontextem a popisuje tak možnosti vzájemného propojení geometrie a kombinatoriky. Součástí přednášky jsou především ukázky konkrétních řešení vybraných kombinatorických úloh s geometrickým kontextem za pomoci využití dynamických appletů vytvořených v programu GeoGebra.

1 Úvod

Kombinatorika je jednou z nejstarších odvětví diskrétní matematiky, která sahá až do 16. století, kdy hazardní hry hrály klíčovou roli ve společenském životě [1]. Tento zájem podněcoval matematiky k hlubšímu zkoumání jejích principů a k vybudování uceleného matematického aparátu. V současné době je kombinatorika významnou součástí matematických osnov. Jako celek obsahuje bohatou strukturu důležitých principů, které zasahují i do dalších oblastí matematiky [3]. Ve své podstatě je řešení kombinatorických úloh vhodné k uplatňování heuristických přístupů a napomáhá tak u žáků rozvíjet schopnosti využívat heuristické strategie při řešení problémů. Uplatněním takových způsobů řešení problémů při výuce matematiky dochází také ke zkvalitnění komunikace mezi žáky [5].

Kombinatorika je tak jedním z vhodných nástrojů ke zvyšování matematické gramotnosti a dalších klíčových kompetencí žáků. Proto školskou kombinatoriku chápeme jako podstatnou součást matematické kultury vzdělávání. Důležitost rozvíjet u žáků kombinatorické myšlení byla prokázána celou řadou odborných studií (např. [2, 6, 8, 9]). Výsledky těchto studií ukazují na obtíže žáků s řešením úloh, které vyžadují od žáků kombinatorické uvažování. Obdobné závěry ukazují i mezinárodní studie výsledků ve vzdělávání.

O důležitosti geometrie ve výuce matematiky píše již profesor Čech [4], který ve své metodice věnované výuce geometrie v primě napsal: *Euklidovská geometrie je nejstarší a dosud nepředstižený vzor exaktního badání, takže její studium může přispět ke vzdělání také ve vyšším smyslu než pouhým získáním konkrétních vědomostí.* O téměř padesát let později upozorňuje také profesor Kolář na velmi slabé vědomosti žáků z geometrie, které dává mimo jiné do souvislosti se změnami jejích osnov [7].

V současné době dochází k úpravám a diskuzím nad obsahem matematického vzdělávání v rámci RVP a ke korekcím množství učiva, které bude žákům a studentům ve výuce matematiky předkládáno. Některé oblasti matematiky budou velmi pravděpodobně redukovány. Proto se domníváme, že je více než v jiné době nutné hledat různé možnosti efektivního propojování těch oblastí matematického vzdělávání, které jsou již nyní pro žáky obtížné, časově málo dotované, ale v získávání matematických kompetencí nemálo důležité. Jsme přesvědčeni o tom, že kombinatorika a geometrie jsou právě ty oblasti učiva, které si vyšší pozornost zasluhují.

2 Kombinatorické úlohy s geometrickým kontextem

Úloh, které svým kontextem propojují kombinatoriku a geometrii, je celá řada. Některé využívají pouze různé geometrické pojmy nebo prostředí, jako například: Kolik vlajek skládajících se ze tří obdélníků můžeme vytvořit pomocí pěti různých barev tak, aby se žádná z barev neopakovala? Jiné vyžadují od řešitele hlubší geometrické znalosti a dovednosti, těmi se budeme zabývat v další části textu. Uvedeme několik úloh, které jsou z našeho pohledu vhodné právě k propojení kombinatoriky a geometrie a přispívají tak k rozvoji kompetencí žáků v obou zmíněných oblastech matematiky. Půjde vždy o takové příklady, k jejichž úspěšnému vyřešení budou žáci využívat znalosti z obou oblastí.

Rádi bychom také v rámci řešení těchto úloh u žáků rozvíjeli kompetence týkající se informační gramotnosti, a proto k prezentaci jednotlivých řešení budeme s výhodou využívat program GeoGebra a internetové rozhraní GeoGebra knihy. GeoGebra kniha s názvem *Kombinatorické úlohy s geometrickým kontextem* je vytvořena ve dvou verzích. Verze pro studenty, kterou lze otevřít pomocí odkazu `www.geogebra.org/m/ukyd4kqd`, obsahuje dynamické applety s texty zadání úloh, případně s grafickými zadáními úloh a také s volnými místy pro řešení příslušných úloh. V současné době existuje možnost zobrazení menu, nástrojů, formátovacího panelu, vstupního řádku, ikony pro resetování konstrukce aj. programu GeoGebra u jednotlivých appletů v internetovém rozhraní GeoGebra knihy. Díky možnostem jejich aktivního užití mohou uživatelé řešit úlohy přímo ve vytvořených dynamických GeoGebra appletech. Ve verzi GeoGebra knihy určené pro učitele, která je dostupná na webovém linku `www.geogebra.org/m/crbt7v6y`, jsou prezentována nejen zadání úloh, ale i jejich řešení. GeoGebra kniha s názvem *Kombinatorické úlohy s geometrickým kontextem* bude postupně obsahovat nejen příklady zmiňované v tomto příspěvku, ale i řadu dalších podobných úloh.

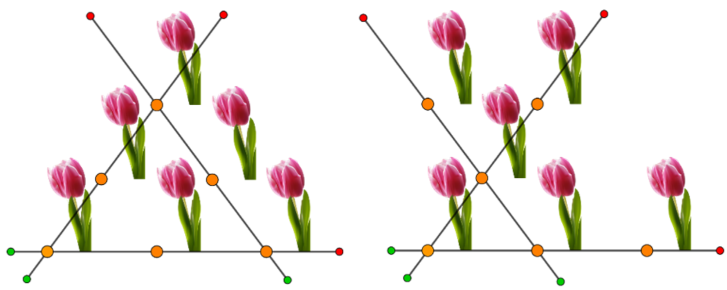
2.1 Tulipány

Zahradník dostal za úkol zasadit cibule 6 tulipánů do tří různých řad po třech tulipánech. Cibule jsou představovány oranžovými body na obrázku 1. Rozmístěte v nákresně cibule tulipánů takovým způsobem, resp. způsoby, jak je mohl zahradník zasadit na záhon. Pomocí připravených úseček zobrazte 3 řady, ve kterých jsou cibule tulipánů zasazeny.

(Lze zařadit pro žáky od 5. ročníku ZŠ)

Obr. 1: Grafické zadání úlohy pojmenované „Tulipány“

Řešení. Úvodní úlohu tulipány zařazujeme jako ukázku takového typu úloh, které lze k rozvoji kombinatorického myšlení využít i u mladších žáků. Tato úloha má také propedeutický potenciál k pozdějšímu zařazování kombinatorických úloh s geometrickým podtextem a jejich řešení v programu GeoGebra. Řešení se opírá o axiomy uspořádání a využívá se při něm manipulativní činnost. Další skutečnost, kterou pokládáme u takových úloh za důležitou, je reprezentace reálných situací pomocí geometrických objektů. Jako v tomto případě, kdy zobrazujeme cibule tulipánů pomocí bodů. Obě řešení úlohy jsou uvedena na obrázku 2.



Obr. 2: Řešení úlohy pojmenované „Tulipány“

2.2 Přímky

Je dáno šest bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce.

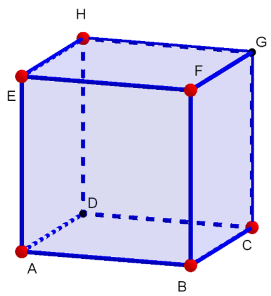
a) Kolik přímek určuje těchto šest bodů?

b) Kolik přímek prochází každým z těchto bodů?

Řešení demonstrujte na vhodně zvoleném obrázku v rovnoběžném promítání, případně ve volném rovnoběžném promítání.

(Určeno pro studenty středních škol)

Řešení. V tomto případě musí řešitel ovládat nejen axiomy incidence, ale také zvolit vhodnou grafickou reprezentaci zadané situace. Vhodným obrázkem lze zadanou situaci zpřehlednit a lépe se v celé situaci zorientovat. Šest bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce, mohou být například vhodně zvolené vrcholy krychle. Například vrcholy A, B, C, E, F, H při obvyklém značení krychle na obrázku 3. Hledané přímky pak můžeme zobrazovat v sepětí s hranami krychle.



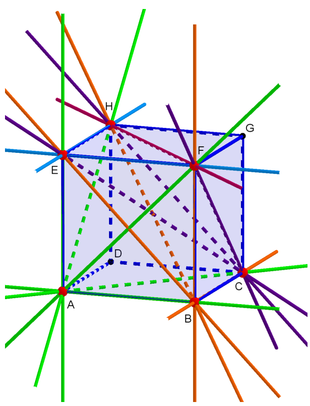
Obr. 3: Zvolené body na krychli

a) Na základě platnosti axiomu incidence víme, že každými dvěma různými body prochází jediná přímka. Přitom popis přímky nezávisí na pořadí bodů, které danou přímku určují. Protože nezávisí na pořadí bodů, pak počet přímek určených šesti body, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce, určíme jako kombinace druhé třídy z šesti prvků. Použijme tedy vzorce

$$C(k,n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$
$$C(2,6) = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15.$$

Z pohledu kombinatoriky je řešení úlohy snadné. V našem případě se jedná o přímky AB, AC, AE, AF, AH, BC, BE, BF, BH, CE, CF, CH, EF, EH, FH. Bez vhodné grafické reprezentace a patřičných geometrických znalostí by řešení bylo značně obtížné. Na místě jsou samozřejmě další úvahy, které je vhodné s žáky promyslet. Lze ke grafické reprezentaci využít i jiné geometrické objekty? Závisí počet přímek na prvotní volbě bodů?

b) K zakreslení řešení v rovnoběžném promítání využijeme opět krychli. Z obrázku 4 i z výčtu přímek je zřejmé, že každým ze šesti zvolených bodů prochází právě pět přímek. Početně lze tuto úlohu řešit vícero způsoby. Situaci nám vždy ulehčí vhodný obrázek.



Obr. 4: Grafické řešení úlohy

2.3 Vnitřní úhly konvexního čtyřúhelníku

Z množiny velikostí úhlů $U = \{29\,°, 95\,°, 132\,°, 44\,°, 155\,°\}$ sestavte všechny takové trojice úhlů, které mohou být velikostmi vnitřních úhlů konvexního čtyřúhelníku. Přitom neuvažujte situace, v nichž se úhly ve čtyřúhelníku opakují. Kolik takových trojic úhlů můžeme z množiny U vytvořit? Kolik takových čtyřúhelníků existuje?

(Bez použití vzorce pro výpočet kombinací lze zařadit od 8. ročníku ZŠ. S použitím vzorce pro výpočet kombinací určeno pro studenty středních škol.)

Řešení. Při řešení této úlohy je nutné, aby si řešitel uvědomil všechny podstatné vlastnosti konvexního čtyřúhelníku, které v konečném důsledku ovlivní správnost řešení. Počet trojic velikostí vnitřních úhlů z množiny U určíme snadno. Vzhledem k tomu, že při jejich výběru nezávisí na pořadí, využijeme opět vzorec pro kombinace třetí třídy z pěti prvků

$$C(3,5) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10.$$

Vidíme, že takových trojic existuje celkem deset. Dále víme, že součet velikostí vnitřních úhlů v konvexním čtyřúhelníku je roven $360\,°$. Také platí, že pokud má být vzniklý čtyřúhelník konvexní, pak velikost každého jeho vnitřního úhlu musí být menší než $180\,°$. Nyní je nutné na základě těchto znalostí určit, které z trojic mohou být vnitřními úhly konvexního čtyřúhelníku. Do tabulky 1 vypíšeme všechny trojice velikostí a výpočtem ověříme výše zmíněné vlastnosti.

Zvolená trojice velikostí	Součet velikostí	$360\,° - s_{U_n}$
$U_1 = \{29\,°, 95\,°, 132\,°\}$	$s_{U_1} = 29\,° + 95\,° + 132\,° = 256\,°$	$104\,°$
$U_2 = \{29\,°, 95\,°, 44\,°\}$	$s_{U_2} = 29\,° + 95\,° + 44\,° = 168\,°$	$192\,°$
$U_3 = \{29\,°, 95\,°, 155\,°\}$	$s_{U_3} = 29\,° + 95\,° + 155\,° = 279\,°$	$81\,°$
$U_4 = \{29\,°, 132\,°, 44\,°\}$	$s_{U_4} = 29\,° + 132\,° + 44\,° = 205\,°$	$155\,°$
$U_5 = \{29\,°, 132\,°, 155\,°\}$	$s_{U_5} = 29\,° + 132\,° + 155\,° = 316\,°$	$44\,°$
$U_6 = \{29\,°, 44\,°, 155\,°\}$	$s_{U_6} = 29\,° + 44\,° + 155\,° = 228\,°$	$132\,°$
$U_7 = \{95\,°, 132\,°, 44\,°\}$	$s_{U_7} = 95\,° + 132\,° + 44\,° = 271\,°$	$89\,°$
$U_8 = \{95\,°, 132\,°, 155\,°\}$	$s_{U_8} = 95\,° + 132\,° + 155\,° = 382\,°$	$-22\,°$
$U_9 = \{95\,°, 44\,°, 155\,°\}$	$s_{U_9} = 95\,° + 44\,° + 155\,° = 294\,°$	$66\,°$
$U_{10} = \{132\,°, 44\,°, 155\,°\}$	$s_{U_{10}} = 132\,° + 44\,° + 155\,° = 331\,°$	$29\,°$

Tab. 1: Ověření vlastností pro dané trojice úhlů

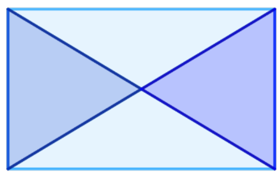
Z tabulky 1 je patrné, že dvě trojice úhlů U_2 a U_8 nesplňují podmínky pro vytvoření konvexního čtyřúhelníku. Pro trojici U_2 je velikost zbývajícího úhlu rovna $192\,°$, což je nekonvexní úhel. Součet velikostí trojice úhlů U_8 je roven $382\,°$, což je více než $360\,°$. Zbývajících osm trojic velikostí úhlů splňuje podmínky pro sestrojení konvexního čtyřúhelníku, přičemž pro trojice úhlů U_4,

U_5, U_6 a U_{10} vychází konvexní čtyřúhelníky se shodnými vnitřními úhly. Z našeho pohledu je velmi zajímavá i otázka: Kolik takových čtyřúhelníků existuje? Ta má potenciál k podnícení diskuze nad možnostmi shodnosti a podobnosti vytvářených čtyřúhelníků.

2.4 Obkládačky s trojúhelníkovými vzory

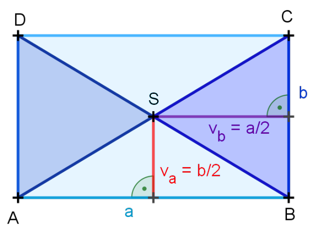
V obchodě prodávají obkládačky obdélníkového tvaru, které vypadají shodně jako obkládačka na obrázku 5. Tyto obkládačky jsou zajímavé tím, že každá z nich je tvořena čtyřmi trojúhelníky, které mají stejný obsah. Navrhněte další vzory dvoubarevných obkládaček, jejichž vzor je tvořen čtyřmi trojúhelníky o stejném obsahu. Přitom trojúhelníky se společnou stranou nesmí mít stejnou barvu. Uvažujte pouze různé obkládačky. (Dvě obkládačky považujeme za shodné, pokud jednu z nich obdržíme z druhé otočením o 180 °.)

(Převzato z 1. kola 45. ročníku matematické olympiády kategorie Z6, šk. rok 1995/1996. S ohledem na využití algebry pro ověření velikostí obsahů různých obkládaček je úloha určena pro žáky 8. ročníku základní školy a starší.)



Obr. 5: Prodávaná obkládačka

Řešení. Pro lepší náhled na vlastnosti prodávané obkládačky poslouží ověření shodnosti obsahů vykreslených trojúhelníků. Na obrázku 6 zvolíme obvyklé značení obdélníku a jeho příslušných stran $a = |AB|$, $b = |BC|$. Z vlastností obdélníku je zřejmé, že trojúhelníky ABS a CDS jsou shodné podle věty sss, analogicky jsou shodné i trojúhelníky BCS a ADS. Stačí tedy určit obsah dvou trojúhelníků, například ABS a BCS.



Obr. 6: Označení obdélníkové obkládačky

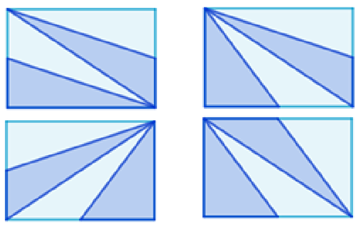
Obsah trojúhelníku ABS vypočítáme pomocí vztahu

$$S_{\triangle ABS} = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{4}.$$

Obsah trojúhelníku BCS spočítáme ze vzorce

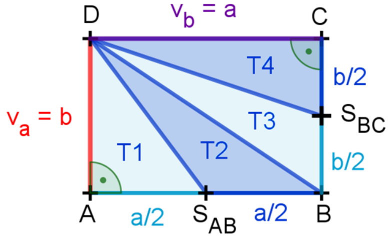
$$S_{\Delta BCS} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{b}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{ba}{4}.$$

Z uvedených výpočtů je zřejmé, že velikosti obsahů všech čtyř trojúhelníků jsou stejné. K rozdělení obdélníku na čtyři trojúhelníky o stejném obsahu podle vzorové obkládačky je nutné si uvědomit, že v každém novém vzoru musí platit tato pravidla. Je nezbytné, aby jedna strana (respektive výška) každého ze čtyř trojúhelníků na příslušné obkládačce byla rovna délce jedné ze stran obdélníku, následně pak délka k ní příslušné výšky trojúhelníku (respektive jí příslušné strany trojúhelníku) byla rovna polovině druhé strany obdélníku. Může však nastat i situace, kdy se uvedené délky na vzoru jedné obkládačky kombinují, viz například vzory obkládaček vpravo nahoře a vlevo dole na obrázku 7. Nebo tak, jako je tomu u zadané obkládačky. Tedy, že každý ze čtyř rovnoramenných trojúhelníků má velikost základny rovnu velikosti jedné strany obdélníku a velikost k ní příslušné výšky rovnu polovině druhé strany obdélníku. Na obrázku 7 jsou ve zmenšeném měřítku zakresleny vybrané vzory obkládaček. Celkem je možné vytvořit 18 vzorů obkládaček včetně té vzorové.



Obr. 7: Příklady možných vzorů obkládaček

Ověření, že velikosti obsahů čtyř trojúhelníků na příslušném vzoru obkládačky jsou stejné, je možné provést analogickým způsobem, jako je učiněno pro vzorovou obkládačku. Pro jeden vybraný vzor je toto ověření naznačeno na obrázku 8.



Obr. 8: Označení zvolené obkládačky pro ověření shodnosti obsahů trojúhelníků

2.5 Výšky staveb ze tří cihel

Tři shodné cihly stavíme různými způsoby na sebe. Rozměry jedné cihly jsou následující: délka $d = 29$ cm, šířka $s = 14$ cm a výška $v = 6{,}5$ cm. Určete, jaké různé výšky mohou mít stavby vytvořené ze tří daných shodných cihel. Řešení demonstrujte na vhodně zvoleném obrázku v rovnoběžném promítání, resp. ve volném rovnoběžném promítání.

(Upraveno dle úlohy z 1. kola 45. ročníku matematické olympiády kategorie Z4, šk. rok 1995/1996. Bez použití vzorce pro výpočet kombinací lze zařadit od 5. ročníku ZŠ. S použitím vzorce pro výpočet kombinací určeno pro studenty středních škol.)

Řešení. Každou takovou cihlu můžeme na podložku postavit třemi způsoby. Protože při sestavování staveb ze tří cihel nezávisí na pořadí jejich jednotlivých poloh a polohy jednotlivých cihel se mohou opakovat, počet všech staveb získáme jako počet kombinací s opakováním třetí třídy ze tří prvků. Využijeme tedy vzorec

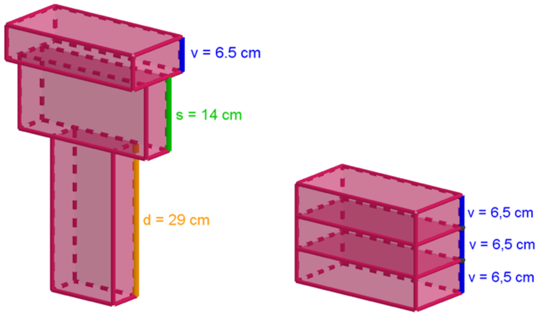
$$C'(k,n) = \binom{n+k-1}{k},$$
$$C'(3,3) = \binom{5}{3} = 10.$$

Celkem je možné vytvořit deset staveb, jejichž jednotlivé výšky udává tabulka 2.

Označení polohy cihel	Součet výšek [cm]	Celková výška stavby [cm]
$d-d-d$	$29+29+29$	87
$d-d-s$	$29+29+14$	72
$d-d-v$	$29+29+6{,}5$	64,5
$d-s-s$	$29+14+14$	57
$d-s-v$	$29+14+6{,}5$	49,5
$d-v-v$	$29+6{,}5+6{,}5$	42
$s-s-s$	$14+14+14$	42
$s-s-v$	$14+14+6{,}5$	34,5
$s-v-v$	$14+6{,}5+6{,}5$	27
$v-v-v$	$6{,}5+6{,}5+6{,}5$	19,5

Tab. 2: Výšky jednotlivých staveb

Pro zakreslování řešení v rovnoběžném promítání budeme každou ze tří shodných cihel reprezentovat pomocí kvádru o stejných rozměrech. Na obrázku 9 uvádíme dvě možnosti umístění pomocí zobrazení kvádrů namísto cihel.



Obr. 9: Příklady dvou různých cihlových staveb

3 Závěr

Cílem příspěvku bylo ukázat vhodné možnosti propojení kombinatoriky a geometrie pomocí úloh, které mají potenciál rozvíjet jak kombinatorické, tak geometrické myšlení žáků. Naším záměrem rovněž bylo zobrazovat řešení v prostředí dynamické geometrie, konkrétně GeoGebry. Za tímto účelem jsme vytvořili GeoGebra knihu ve dvou verzích, přičemž studentskou verzi GeoGebra knihy lze otevřít pomocí odkazu `www.geogebra.org/m/ukyd4kqd` a učitelská verze GeoGebra knihy je dostupná na weblinku `www.geogebra.org/m/crbt7v6y`. V té budou postupně prezentována řešení nejen zmíněných příkladů, ale i dalších, které se do příspěvku nevešly. Pokládáme za přínosné účelně při výuce matematiky využívat informačních technologií a přirozeně tak napomáhat k rozvíjení informační gramotnosti žáků.

Z pohledu kombinatoriky jsme volili záměrně jednodušší příklady, protože naším cílem nebylo vyučovat nebo opakovat kombinatorické pojmy, ale pouze rozvíjet kombinatorické myšlení řešitelů. K tomuto účelu jsme si vybrali prostředí geometrie, protože jsme přesvědčeni, že je dobré využít každou příležitost k prolínání matematických disciplín. Obě tyto oblasti vnímáme jako velmi důležité a vhodné k celkovému přispění zvyšování matematické gramotnosti žáků.

Ve využití GeoGebry při řešení podobných příkladů spatřujeme hned několik výhod. S ohledem na geometrický kontext úloh jde o prostředí, které žáci znají. Mohou ho proto využít jako nástroj buď přímo k řešení úlohy, nebo k modelování situace, kterou úloha obsahuje. Tím lze eliminovat případné nepřesnosti či zkreslení při vytváření náčrtu. Kromě přehlednosti u složitějších obrázků získáváme díky dynamickým nástrojům programu také možnost s objekty v nákresnách či ve 3D okně programu manipulovat. Žáci, studenti tak okamžitě obdrží zpětnou vazbu, zda jejich řešení splňuje podmínky zadání úlohy. Dále je také možné nejen určité části kopírovat a přesouvat, ale také měnit tvary a barvy, popřípadě pozice jednotlivých částí, díky čemuž lze v některých případech snadněji nalézt všechna řešení úlohy. V neposlední řadě jde o kontrolní nástroj pro učitele, který může mít všechna řešení okamžitě k dispozici, nebo využije možnost zobrazit pouze část řešení jako návod pro své žáky. Cílem příspěvku bylo také ukázat i další vhodné využití GeoGebry při výuce matematiky.

Literatura

[1] S. Abramovich, A. Pieper, *Fostering recursive thinking in combinatorics through the use of manipulatives and computer technology*, The Mathematics Educator 7 (1996), 4–12.

[2] C. T. Benson, G. A. Jones, *Assessing students' thinking in modelling probability contexts*, The Mathematics Educator 4 (1999), 1–21.

[3] M. Borovcnik, R. Peard, *Probability.* In A. J. Bishop,K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde (eds.), *International Handbook in Mathematics Education. Part 1*, Springer, 1996, 239–287.

[4] E. Čech, *Jak vyučovati geometrii v primě*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 70 (1941), 40–58.

[5] P. Doulík, P. Eisenmann, J. Přibyl, J., Škoda, *Unconventional ways of solving problems in mathematics classes*, The New Educational Review 43 (2016), 53–66.

[6] T. M. Johnson, G. A. Jones, C. A. Thornton, C. W. Langrall, A. Rous, *Students' thinking and writing in the context of probability*, Written Communication 15 (1998), 203–229.

[7] I. Kolář, *Geometrie v současné matematice a její úloha ve vyučování*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 34 (1989), 41–54.

[8] S. Nisbet, G. A. Jones, C. W. Langrall, C. A. Thornton, *A Dicey Strategy to Get Your M and Ms*, Australian Primary Mathematics Classroom 5 (2000), 19–22.

[9] G. M. Zimmermann, G. A. Jones, *Probability simulation: What meaning does it have for high school students?*, Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education 2 (2002), 221–236.

Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky FP TUL
Univerzitní náměstí 1410/1
461 17 Liberec 1
`daniela.bimova@tul.cz`

Mgr. Jiří Břehovský, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky FP TUL
Univerzitní náměstí 1410/1
461 17 Liberec 1
`jiri.brehovsky@tul.cz`

PRAVDĚPODOBNOST V UČEBNICÍCH Z 19. STOLETÍ Z POHLEDU TŘETÍHO TISÍCILETÍ

Magdalena Hykšová

Příspěvek představuje různé přístupy k výkladu základních pojmů a principů teorie pravděpodobnosti obsažené v učebnicích používaných v rakouské monarchii v 19. a na počátku 20. století. Způsob výkladu a zajímavé motivační úlohy, zahrnující mj. nejrůznější sázky, loterie či problémy spojené s pojišťovnictvím, představují přínosnou inspiraci i z pohledu dnešní výuky matematiky.

1 Sázky a loterie

Jedním z hlavních nástrojů pro motivaci výuky pravděpodobnosti byly v učebnicích z 19. a počátku 20. století různé sázky a loterie. Úlohy tohoto typu neztratily na významu ani o více než sto let později, kdy hazard zažívá nebývalý rozmach a každá příležitost k objasnění jeho nebezpečí je vítána. Kromě toho tyto úlohy mohou pomoci při výkladu základních pojmů a myšlenek teorie pravděpodobnosti.

1.1 Loterie a střední hodnota

Loterie jsou z didaktického hlediska dobrou příležitostí k objasnění pojmu střední hodnoty, dříve označované jako *mathematická naděje*. Ilustrujme to na příkladu z učebnice algebry pro vyšší třídy středních škol [19] Emanuela Taftla z roku 1883:

Ve společnosti rozprodáno 100 losův a výhry stanoveny takto: jedna výhra 2 zlaté [200 krejcarů]*, jedna výhra 1 zlatý, 10 výher po 10 krejcarech, dvacet po 5 krejcarech; kterou hodnotu má mathematická naděje majetníka jednoho losu?*

Řešení je jednoduché a pochopitelné i pro žáka základní školy. Prodá-li se všech 100 losů, pak musí být vyplaceno

$$(200 \cdot 1 + 100 \cdot 1 + 10 \cdot 10 + 5 \cdot 20) \text{ krejcarů} = 500 \text{ krejcarů}.$$

Na jeden los proto v průměru připadá výhra

$$500/100 \text{ krejcarů} = 5 \text{ krejcarů}.$$

Vydělíme-li stem hned první součet, můžeme psát:

$$\left(200 \cdot \frac{1}{100} + 100 \cdot \frac{1}{100} + 10 \cdot \frac{10}{100} + 5 \cdot \frac{20}{100}\right) \text{ krejcarů} = 5 \text{ krejcarů}.$$

Střední hodnota výhry nebo též *očekávaná výhra* či ve starší terminologii *úplná mathematická naděje* připadající na jeden los je tedy 5 krejcarů. Slovy E. Taftla: *bez užitku a škody má tedy los hodnotu 5 kr.* Z posledního vztahu je zároveň vidět, že tuto střední hodnotu lze nalézt jako součet *mathematických nadějí* jednotlivých typů výher, tedy součinů hodnoty výhry a pravděpodobnosti, že dané výhry dosáhneme.

1.2 Sázky – spravedlivá hra

Vděčným tématem byla ve starých učebnicích zejména tzv. *janovská* neboli *malá loterie*, v níž se losovalo 5 čísel z 90 a hráči mohli uzavírat rozmanité typy sázek, například na to, že zvolené číslo bude mezi vylosovanými na konkrétní pozici (*nominato*) nebo na libovolném místě (*extrato*), dále mohli sázet na shodu dvou (*ambo*) nebo tří čísel (*terno*), popř. kombinaci těchto případů. Výši vsazené částky si hráči určovali sami v rámci stanovených mezí, výhra pak byla vyplácena v kurzu, který byl pro každý typ sázky pevně daný. Připomeňme, že loterie tohoto typu má kořeny v italském Janově na počátku 17. století,[1] v rakouské monarchii fungovala od roku 1752. V širších vrstvách byla tato loterie velmi oblíbená, zároveň však byla pro negativní sociální důsledky předmětem ostré kritiky. I přesto, že zisk zpravidla plynul do státního rozpočtu, přistoupila řada zemí k jejímu zrušení – v Prusku byla loterie ukončena v roce 1810, v Anglii v roce 1826, ve Francii v roce 1838 a v Bavorsku v roce 1862. V českých zemích vydržela malá loterie až do roku 1919, kdy ji nahradila tzv. *třídní loterie*.

Skutečnosti, že pojmy používané v janovské loterii byly v té době všeobecně velmi dobře známé, využívali při výkladu kombinatoriky a pravděpodobnosti mnozí autoři učebnic matematiky. Kombinace první až páté třídy bez opakování byly nazývány *extrata*, *amba*, *terna*, *kvaterna* a *kvinterna* a obvyklou otázkou bylo, kolik amb, ... , kvinteren lze sestavit z 90 čísel malé loterie.

Na příkladech spojených se sázením autoři ukazovali, že ve spravedlivé hře se sázka musí rovnat *mathematické naději*, což znamená, že vypsaný kurz je roven převrácené hodnotě pravděpodobnosti příslušného výsledku. Čtenáři pak byli upozorňováni na to, že ve skutečnosti jsou kurzy nižší, a tedy vsazené částky vyšší, což vede k ziskům provozovatelů loterií, *počítáť se na chuť obecenstva ve výhru bez vlastní práce* [15].

---

[1] Od roku 1576 zde byli každé dva roky losováni dva muži ze 120, kteří se pak stali novými senátory. Postupem času lidé začali sázet na jména vylosovaných a podle toho, zda uhodli jednoho nebo oba vybrané (*ambo*), získali určitou výhru. Později byl počet losovaných rozšířen na pět; nahrazením jmen čísly pak vznikla číselná loterie, kde bylo losováno 5 čísel ze 120; první prokazatelně povolená loterie „5 ze 120“ začala být provozována v roce 1643 a v průběhu druhé poloviny 17. století se rozšířila do dalších italských měst: Milána, Říma, Turína a Neapole. V Neapoli se pak místo 120 poprvé objevilo číslo 90, a to v souvislosti s hrou, v níž bylo losováno 5 dívek z 90, které pak dostaly svatební výbavu. V 18. století se číselné loterie jako výhodný zdroj příjmu do státní pokladny rozšířily i do dalších zemí. Podrobněji viz [8].

Ve sbírce úloh z aritmetiky a algebry [6] Eduarda Heisse z roku 1837 například nalezneme úlohu týkající se číselné loterie ve Francii, kde se losovalo 5 čísel z 90 a vyplácel se 15násobek vsazené částky za extrato, 270násobek za ambo, 5500násobek za terno a 60 000násobek za kvaterno. Studenti měli za úkol vypočítat, kolik procent vsazených peněz si loterie v jednotlivých případech ponechá.

Řešení je shrnuto v následující tabulce, k jejímuž sestavení stačí nalézt pravděpodobnosti jednotlivých výsledků. Vsadíme-li například 1 tolar na *extrato*, tedy na jedno konkrétní číslo, pak je pravděpodobnost výhry zřejmě 5/90, tedy 1/18. Vsadíme-li 1 tolar na *ambo*, tedy na dvě konkrétní čísla, pak pravděpodobnost výhry získáme jako podíl počtu dvojic vytvořených z vylosovaných 5 čísel (počtu příznivých případů) a počtu dvojic vytvořených ze všech 90 čísel (počtu všech možných případů):

$$P(ambo) = \binom{5}{2} : \binom{90}{2} = \frac{2}{801} = \frac{1}{400{,}5}$$

V případě *terna* a *kvaterna* pak jen místo dvojic uvažujeme trojice a čtveřice:

$$P(terno) = \binom{5}{3} : \binom{90}{3} = \frac{1}{11\,748}, \quad P(kvaterno) = \binom{5}{4} : \binom{90}{4} = \frac{1}{511\,038}$$

Vsadíme-li například 1 tolar na *extrato*, pak s pravděpodobností 1/18 vyhrajeme 15 tolarů a s pravděpodobností 17/18 o vsazený tolar přijdeme; střední hodnota výhry je proto 15/18 = 0,833 tolaru (součin pravděpodobnosti výhry a vypsaného kurzu). Střední hodnota zisku provozovatele loterie je pak 0,167 tolaru neboli 16,7 %. Celkem tak dostaneme následující hodnoty:

Výsledek	Pravděpodobnost	Vypsaný kurz	Střední hodnota výhry za 1 tolar	Střední hodnota zisku loterie
extrato	1/18	15	0,833	16,7 %
ambo	1/400,5	270	0,674	32,6 %
terno	1/11 748	5500	0,468	53,2 %
kvaterno	1/511 038	60 000	0,117	88,3 %

Pokud by byl například v prvním řádku vypsaný kurz 18 místo 15, pak by byla střední hodnota výhry rovna jednomu tolaru a zisk provozovatele by byl nulový – v takovém případě bychom mohli hovořit o *spravedlivé sázce*, protože ani jedna strana by nebyla zvýhodněna. Podobně ve zbývajících případech: spravedlivý kurz by byl roven převrácené hodnotě příslušné pravděpodobnosti. Ve skutečnosti bývají kurzy nižší, aby provozovatelům zaručily dlouhodobý zisk.

V učebnici algebry pro střední školy [17] Josefa Smolíka z roku 1870 nalezneme mimo jiné srovnání spravedlivých kurzů a kurzů v Rakousku a Itálii (opět se losuje 5 čísel z 90). Přehled zároveň ilustruje, proč byly v rakouské monarchii zakázany sázky v zahraničních loteriích:

Výsledek	Pravděpodobnost p	Spravedlivý kurz $1/p$	Kurz v Rakousku	Kurz v Itálii
extrato	1/18	18	14	15
nominato	1/90	90	67	70
ambo	1/400,5	400,5	240	270
terno	1/11 748	11 748	4800	5500
kvaterno	1/511 038	511 038	19 210	75 000
kvinterno	1/43 949 268	43 949 268	48 000	1 100 000

K tomu lze samozřejmě doplnit i příklady z dnešní doby, týkající se hazardních her a kurzových sázek. Některé z nich, snadno použitelné ve výuce, lze nalézt v autorčině příspěvku [9] a podrobněji pak v pravděpodobnostní kapitole sbírky aplikačních úloh [16]. Jednoduché, ale zajímavé příklady, týkající se výpočtu pravděpodobností různých výher, střední hodnoty a návratnosti sázky, poskytují například klasické výherní hrací přístroje s otáčejícími se válci opatřenými daným počtem symbolů, které se mohou opakovat, ale počty různých symbolů se liší. Sázky na rozličné sportovní a společenské události jsou potom zajímavým zdrojem úloh týkajících se odhadů pravděpodobností.

2 Geometrická pravděpodobnost

Geometrická pravděpodobnost byla zavedena jako rozšíření klasické definice pravděpodobnosti na situace, kdy množiny elementárních jevů jsou nespočetné a počty příznivých a všech možných případů je třeba nahradit vhodnými mírami – podle situace délkami, obsahy či objemy, obecněji Lebesgueovou, popř. Hausdorffovou mírou. Počáteční rozvoj byl – podobně jako tomu bylo u pravděpodobnosti „klasické“ – motivován snahami o pochopení náhodných her a nalezení pravidel, která by zaručovala jejich spravedlnost. Později se však ukázalo, že se jedná o neobyčejně důležitý nástroj umožňující velmi efektivně a snadno odhadnout například objem, plošný obsah či délku složitých útvarů v rovině nebo prostoru, ať už se jedná o minerály v hornině, buňky v tkáních, lidské nebo živočišné orgány a jejich patologické změny, cévní systémy nebo například řeky či různé oblasti na mapách. Odhad je přitom založen na sondách nižší dimenze (rovina řezu, lineární či bodová sonda).

Připomeňme, že pokud přejdeme od zkoumání vlastností konečných populací ke geometrickým charakteristikám (např. objem, plošný obsah, délka) trojrozměrných struktur, náhodný výběr z populace nahradíme sondou nižší dimenze a jako nástroj budeme místo „klasické“ teorie pravděpodobnosti využívat pravděpodobnost geometrickou, učiníme přechod od statistiky ke *stereologii.* A protože zmíněnými strukturami jsme nejen obklopeni, ale jsme jimi dokonce i tvořeni, má stereologie, a tedy i geometrická pravděpodobnost, pro náš život zcela zásadní význam. Postupně se stala neoddělitelnou součástí geologie, metalografie, biologie, medicíny, kartografie a řady dalších oborů.

Obr. 1: „Sonda nižší dimenze“

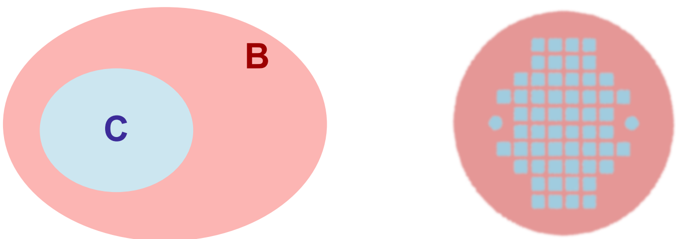
Řešení úloh týkajících se geometrické pravděpodobnosti bývá poměrně složité, založené na výpočtu vícenásobných integrálů. Základní myšlenky se však dají ve zjednodušené podobě zprostředkovat i středoškolským studentům – alespoň do té míry, aby si uvědomili, k čemu je tato teorie dobrá.

2.1 Odhad obsahu oblasti v rovině

Intuitivně je například snadno pochopitelné, že pravděpodobnost, že náhodně zvolený bod X ležící v rovinné oblasti B o obsahu $S(B)$ leží i v oblasti $C \subseteq B$ o obsahu $S(C)$, je rovna podílu obsahů uvedených oblastí:[2]

$$P(X \uparrow C \,|\, X \uparrow B) = \frac{S(C)}{S(B)} \tag{1}$$

Například pravděpodobnost, že nedopalek hozený bez míření na poklop kanálu propadne otvorem dovnitř, je tím větší, čím větší část obsahu vrchní strany poklopu tvoří otvory (nejsou-li rozměry jednotlivých otvorů příliš malé).



Obr. 2: Ilustrace ke vztahu (1)

[2] Pro geometrické objekty X, Y se symbol $X \uparrow Y$ používá k vyjádření skutečnosti, že jejich průnik je neprázdný (X *zasahuje* Y). Speciálně pro bod X to znamená $X \in Y$.

Na druhé straně bychom mohli pravděpodobnost (1) odhadnout tak, že bychom náhodně „vrhali body“ na oblast B (v celkovém počtu N_{celk}) a počítali, kolik jich zasáhne také oblast C (počet těchto bodů označme N_{zas}):

$$P(X \uparrow C \,|\, X \uparrow B) = \frac{S(C)}{S(B)} = \frac{N_{\mathrm{zas}}}{N_{\mathrm{celk}}} \tag{2}$$

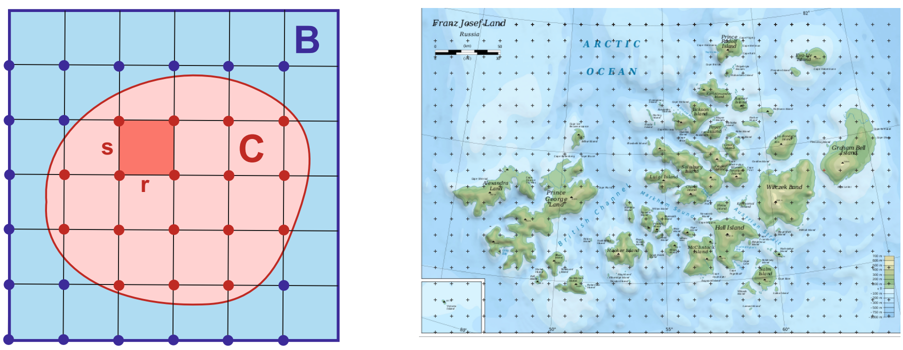
Je-li obsah $S(B)$ znám, lze vztah (2) použít k odhadu $[S(C)]$ obsahu oblasti C:

$$[S(C)] = S(B) \cdot \frac{N_{\mathrm{zas}}}{N_{\mathrm{celk}}} \tag{3}$$

Jednodušeji můžeme na řez náhodně klást bodovou testovací mřížku znázorněnou na obr. 3 vlevo. Budeme-li jako oblast B uvažovat obdélník o obsahu $S(B) = rs \cdot N_{\mathrm{celk}}$, získáme odhad

$$[S(C)] = rs \cdot \overline{N_{\mathrm{zas}}}\,, \tag{4}$$

kde $\overline{N_{zas}}$ značí střední hodnotu počtu bodů mřížky, které při opakovaném náhodném kladení mřížky zasáhly oblast C.



Obr. 3: Bodová mřížka (vlevo); Země Franze Josefa (vpravo, zdroj: [20])

Uvědomme si, že tato metoda se liší od počítání čtverců milimetrového papíru pokrývajících zkoumanou oblast. Nesnažíme se zde o odhad velikosti částí čtverců na hranici; jedná se o statistickou metodu, jejíž přesnost roste s rostoucím počtem opakování. Ve škole lze bodovou metodu použít například k odhadu obsahu určité oblasti na mapě (vodní plocha, souostroví, zalesněná plocha apod.) či ke zkoumání různých biologických objektů. Studenti ji mohou porovnat s jinými metodami, které je napadnou, a uvědomit si tak její výhody – zejména pro složité tvary.

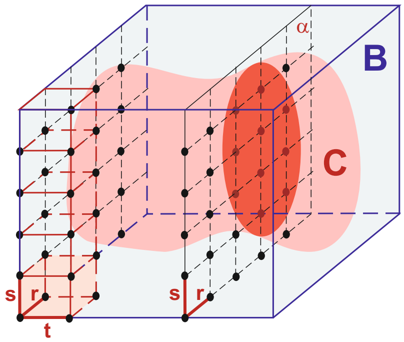
2.2 Odhad objemu oblasti v prostoru

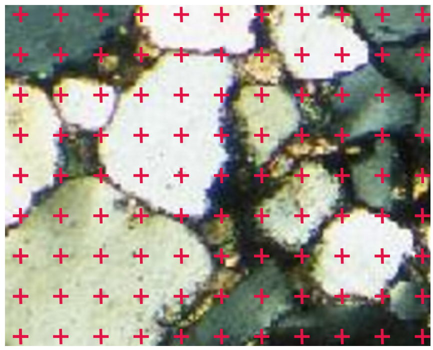
Podobně lze postupovat i v prostoru. Pravděpodobnost, že bod X, který leží v množině B, leží také v podmnožině $C \subseteq B$, je rovna podílu odpovídajících objemů:

$$P(X \uparrow C | X \uparrow B) = \frac{V(C)}{V(B)} \tag{5}$$

Známe-li objem $V(B)$, můžeme vzorec (5) využít k odhadu objemu $V(C)$. K tomu stačí jako oblast B uvažovat hranol o objemu $V(B) = rst \cdot N_{\text{celk}}$ tvořený prostorovou bodovou mřížkou znázorněnou na obr. 4 vlevo. Pak získáme odhad objemu $V(C)$:

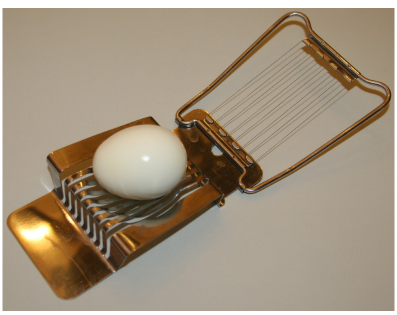
$$[V(C)] = \frac{\overline{N_{\text{zas}}}}{N_{\text{celk}}} \cdot V(B) = rst \cdot \overline{N_{\text{zas}}} \tag{6}$$

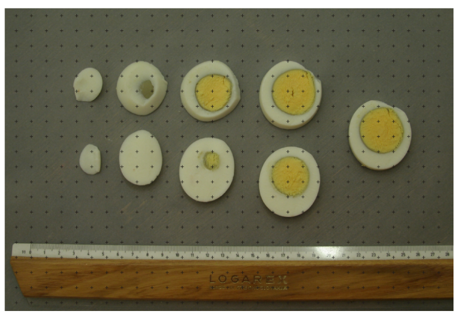




Obr. 4: Bodová mřížka v prostoru (vlevo) a v rovinném řezu (vpravo)

Tuto metodu lze jednoduše demonstrovat na příkladu odhadu objemu vajíčka na základě zkoumání jeho řezů vytvořených kráječem: roviny řezu tvoří tzv. „systematicky náhodný“ soubor rovin; rovinné bodové mřížky v jednotlivých rovinách tvoří dohromady prostorovou bodovou mřížku. Objem vajíčka pak může být odhadnut pomocí rovnice (6), kde hodnota N_{zas} je součtem počtu zasahujících bodů v jednotlivých rovinách. Výsledek může být porovnán s hodnotou získanou jiným způsobem, například ponořením nerozkrájeného vajíčka do vody v odměrném válci. Podobně lze také odhadnout, jakou část objemu vajíčka tvoří žloutek.





Obr. 5: Odhad objemu

V geologii, metalografii či biomedicíně je často třeba odhadnout objemový podíl V_V nějaké fáze ve vzorku (například podíl určitého minerálu v hornině). Je-li rozložení sledované fáze homogenní, pak by se střední hodnota podílu $N_{\mathrm{zas}}/N_{\mathrm{celk}}$ neměla změnit při omezení bodů jen na některou z rovnoběžných rovin. Podíl A_A obsahů v řezu je tedy (v průměru) roven objemovému podílu V_V vyšetřované fáze ve vzorku a zároveň byl určen jako podíl P_P počtu bodů zasahujících danou fázi a všech bodů mřížky v dané rovině, což vyjadřuje jedna ze základních stereologických formulí:

$$P_P = V_V = A_A \tag{7}$$

V případě homogenního rozložení tedy k odhadu stačí jen jeden nebo několik málo řezů. Bodová metoda je obzvlášť efektivní při zkoumání materiálů s jemnou strukturou, jako například hornin či kovů tvořených malými částicemi, organických tkání apod. Dříve byla mřížka superponována přímo se vzorkem studovaným pod mikroskopem, popř. s jeho zvětšenou fotografií; v době počítačů stejnou práci zastane software pro zpracování obrazu. Na webové stránce [10] lze mj. nalézt pracovní listy použitelné ve výuce, pomocí nichž mohou studenti vyzkoušet aplikaci bodové metody v různých situacích.

2.3 Odhad délky křivky

Systematický rozvoj geometrické pravděpodobnosti začal až v druhé polovině 19. století, kdy své práce publikovali M. W. Crofton [4], E. Czuber, autor první monografie [5] věnované geometrické pravděpodobnosti, či například dále zmíněný J.-É. Barbier [2]. Některé ojedinělé úlohy však byly publikovány již mnohem dříve. Asi nejznámější z těchto příkladů (a často také jediný, s nímž se student během studia setká) je Buffonova úloha o jehle, publikovaná v roce 1777 [3]. Připomeňme, že tento problém spočívá v hledání pravděpodobnosti, že jehla (tyčka) délky l náhodně vržená na systém ekvidistantních rovnoběžek, kde vzdálenost dvou sousedních rovnoběžek je rovna $d > l$, zasáhne některou rovnoběžku. Z didaktického hlediska je velice zajímavá práce [2] J.-É. Barbiera, který bez použití integrálního počtu odvodil, že pro libovolný omezený konvexní geometrický útvar, jehož hranici tvoří křivka délky L a který v žádné poloze nemůže protnout více rovnoběžek, je pravděpodobnost zasažení některé z přímek dána vztahem:

$$P = \frac{L}{\pi d} \tag{8}$$

Při důkazu Barbier pracoval s pojmem „očekávání“, tedy v duchu tehdy obvyklého přístupu ke zkoumání hazardních her. Uvažujme konvexní mnohoúhelník, který má m shodných stran o délce c a jeho průměr (tj. největší vzdálenost dvou jeho bodů) je menší, než je vzdálenost rovnoběžek d; každá ze stran má zřejmě stejnou šanci na to, aby protťala některou rovnoběžku. Nyní si představme následující hru m hráčů: každému patří jedna strana a poté, co mnohoúhelník dopadne na systém rovnoběžek, dostane majitel strany, která zasáhla některou přímku, určitou výhru. Očekávaná výhra je před každým hodem pro všechny hráče stejná, označme ji například symbolem E. Jestliže si hráč koupí n stran, bude jeho očekávaná výhra rovna nE, a tedy bude přímo úměrná počtu jím vlastněných stran, což se nezmění ani při jakékoli deformaci zachovávající délky stran a konvexnost mnohoúhelníku (protne-li tedy některou rovnoběžku, budou průsečíky vždy dva), přičemž průměr je stále menší než d. Počtu stran je pak přímo úměrná i pravděpodobnost zasažení některé rovnoběžky. Aproximace pomocí m-úhelníků konečně vede k závěru, že pravděpodobnost zasažení je stejná pro všechny konvexní rovinné útvary o stejném obvodu a o průměru menším než d. K určení konstanty úměrnosti potom stačí uvažovat nejjednodušší případ, jímž je kruh o poloměru r, kde $L = 2\pi r$, $r < d/2$. Tento kruh protne některou rovnoběžku, je-li od ní jeho střed vzdálen o méně než r. Pravděpodobnost zasažení je proto rovna

$$P = \frac{2r}{d} = \frac{2\pi r}{\pi d} = \frac{L}{\pi d}\,. \tag{9}$$

Jak Barbier rovněž poznamenává, tenkou tyčku délky l lze považovat za limitní případ elipsy s nulovou vedlejší poloosou a s obvodem $L = 2l$, odkud ihned plyne řešení pro jehlu:

$$P = \frac{2l}{\pi d} \tag{10}$$

Kromě toho Barbier také hledal počet průsečíků libovolné křivky se systémem rovnoběžek. Křivku nahradil lomenou čarou o délce L, sestávající z n úseček téže délky $l < d$. Ze vztahu (10) plyne, že střední hodnota počtu průsečíků, $\overline{N} = nP$, je rovna

$$\overline{N} = \frac{2L}{\pi d}\,. \tag{11}$$

Ve školské matematice bývá jedinou „aplikací“ Buffonovy úlohy o jehle odhad hodnoty π. K tomu však existují výrazně efektivnější a přesnější metody, proto je mnohem zajímavější jiná aplikace: tak jako jsme odhadovali obsah či objem určité oblasti, můžeme na základě vztahu (11) odhadnout délku nějaké složité křivky nebo systému křivek (představme si například cévní systém, vodní toky či hranice buněk v rovinném řezu). Na daný vzorek můžeme „vrhnout“ systém rovnoběžek, zjistit počet průsečíků N a využít vzorec (11) pro odhad neznámé délky:[3]

$$[L] = \frac{\pi d}{2} \cdot \overline{N} \tag{12}$$

Dnes bychom řekli, že systém rovnoběžek představuje testovací systém přímek s délkovou intenzitou (délkou připadající na jednotku obsahu) $L_A = 1/d$. V tomto značení lze vztah (12) přepsat ve tvaru:

$$[L] = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{L_A} \cdot \overline{N} \tag{13}$$

[3] Mezi pracovními listy, které jsou k dispozici na stránce [10], lze nalézt i testovací systémy přímek či jiných křivek, jež stačí vytisknout na slidy.

Po vydělení obou stran rovnosti obsahem oblasti obsahující uvažovaný testovací systém obdržíme jeden ze základních stereologických vzorců:

$$[L_A] = \frac{\pi}{2} \cdot N_L, \tag{14}$$

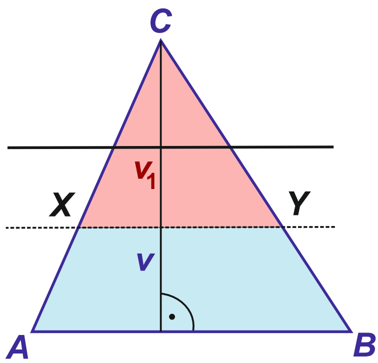
kde N_L udává počet průsečíků připadající na jednotku délky testovacího systému. Vztah (14) přitom platí i v případě, že testovací systém není tvořen rovnoběžkami, ale libovolným systémem křivek nebo jedinou křivkou konstantní délkové intenzity, což je další z originálních výsledků, k nimž dospěl J.-É. Barbier, který potom podobně zkoumal i interakce ploch a křivek v prostoru a dospěl k dalším formulím pro odhad délek a plošných obsahů – podrobněji viz články [11], [12] a [13].

2.4 Úlohy ze starých učebnic

Stručný výklad a tři úlohy týkající se geometrické pravděpodobnosti lze nalézt například v učebnici *Algebry pro vyšší třídy škol středních* [14] Františka Machovce z roku 1883. Podívejme se na dvě z nich. První vyžaduje, aby si student uvědomil, že vhodnou míru množiny bodů na přímkách a křivkách představuje délka, a tedy pravděpodobnost bude vyjádřena poměrem délek odpovídajících křivek (v tomto případě úseček). Úloha je následující:

V trojúhelníku sestrojena jest se základnou rovnoběžka. Jaká jest pravděpodobnost, že trojúhelník, který při vrcholu vznikl, jest menší [má menší obsah] *než polovina daného trojúhelníku?*

Situace je znázorněna na obr. 6. Hledáme takovou pozici bodu X na úsečce AC, aby platilo: $S(\Delta XYC) = \frac{1}{2} \cdot S(\Delta ABC)$.



Obr. 6: Ilustrace k úloze o trojúhelníku

Vzhledem k tomu, že

$$S(\Delta XYC) : S(\Delta ABC) = (|XC| : |AC|)^2\,,$$

musí být

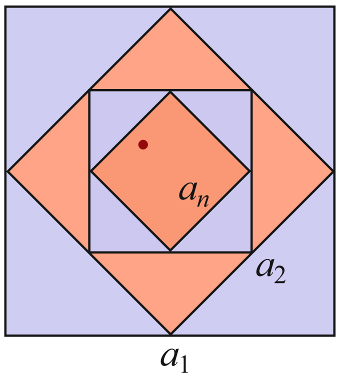
$$(|XC| : |AC|)^2 = 1/2.$$

Příznivé případy (polohu průsečíku X rovnoběžky a strany AC) představuje úsečka XC, všechny možné případy celá úsečka AC. Hledaná pravděpodobnost je proto rovna poměru délek těchto úseček:

$$P = \frac{|XC|}{|AC|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Druhá úloha se týká oblastí v rovině, pro které – jak jsme viděli – je vhodnou mírou obsah. Její znění je následující:

Středy stran čtvercové desky jsou vrcholy nového čtverce, z něhož odvozen jest čtverec týmž způsobem a t.d. do nekonečna. Jaká jest pravděpodobnost, že bod na této desce vytčený jest uvnitř n-tého čtverce, okraj desky za 1. čtverec počítajíc?



Obr. 7: Ilustrace k úloze o čtvercích

Jak je patrné z obr. 7, pro obsahy jednotlivých čtverců platí:

$$S_1 = a_1^2,\ S_2 = a_2^2 = a_1^2 \cdot \frac{1}{2},\ S_n = a_n^2 = a_1^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

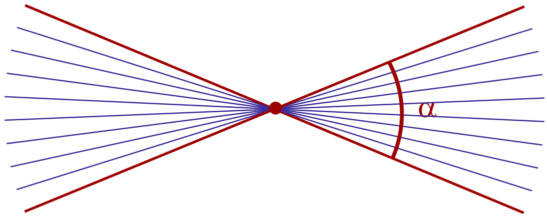
Hledaná pravděpodobnost je pak rovna poměru obsahů n-tého a prvního čtverce:

$$P = \frac{S_n}{S_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Šest úloh na geometrickou pravděpodobnost můžeme nalézt ve *Sbírce úloh z algebry pro vyšší třídy středních škol* [7] F. Hromádka a A. Strnada z roku 1902. První z těchto úloh je následující:

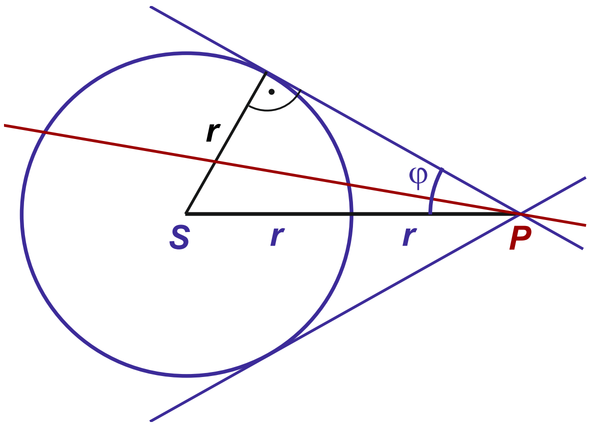
Která jest pravděpodobnost, že protíná kružnici libovolná přímka jdoucí bodem, jehož vzdálenost od středu rovna jest průměru kružnice?

Zde si řešitel musí uvědomit, že adekvátní mírou množiny přímek, které procházejí daným bodem a leží mezi dvojicí daných přímek, je velikost úhlu v radiánech mezi hraničními přímkami (tento výsledek odvodil M. Crofton v práci [4], podrobněji viz např. [8] a [11]).



Obr. 8: Míra množiny přímek v rovině, procházejících daným bodem

V uvedené úloze tedy hledáme velikost úhlu, který za daných podmínek svírá dvojice tečen kružnice:



Obr. 9: Ilustrace k úloze o kružnici a přímce

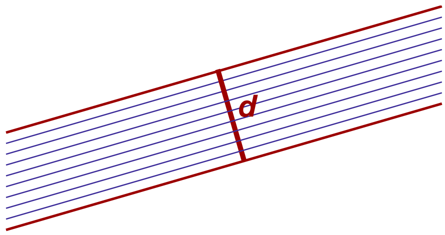
Zřejmě je

$$\sin\varphi = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}, \qquad \text{a tedy} \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Hledaná pravděpodobnost je proto

$$P = \frac{2\varphi}{\pi} = \frac{1}{3}\,.$$

Další úloha je podobná jako Machovcova úloha o trojúhelníku. Výsledek je stejný, jen se v řešení nepracuje s množinami bodů na straně AC, ale přímo s přímkami rovnoběžnými se stranou AB. Přitom je třeba si uvědomit, že vhodnou mírou množiny rovnoběžek ležících mezi danou dvojicí rovnoběžných přímek je vzdálenost hraničních přímek.



Obr. 10: Míra množiny rovnoběžek v rovině

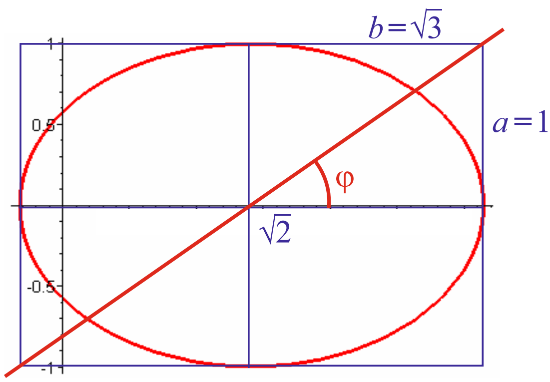
Poměrně netriviální úlohy lze nalézt ve sbírce neřešených maturitních otázek z matematiky [18] J. Sommera a V. Hübnera z roku 1905. Pět z celkových šestnácti úloh na pravděpodobnost se týká pravděpodobnosti geometrické. Uveďme zde aspoň malou ukázku ilustrující nároky na maturanty před více než stoletím.

Středem křivky

$$r = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}\cos\varphi}$$

veden jest paprsek; která jest pravděpodobnost, že paprsek protíná stranu a opsaného obdélníka, jehož strany jsou rovnoběžné s osami křivky; která jest pravděpodobnost, že bude proťata strana druhá b?

Studenti tedy museli být zvyklí pracovat s polárními souřadnicemi a museli být schopni přijít na to, o jakou křivku se jedná. Zbytek výpočtu už je snadný.



Obr. 11: Ilustrace k úloze o elipse

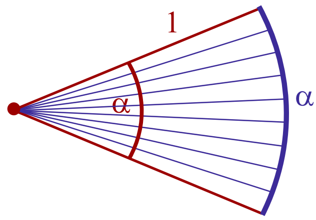
Z obr. 11 je patrné, že $\operatorname{tg}\varphi = 1/\sqrt{3}$, a tedy $\varphi = \pi/6$. Hledané pravděpodobnosti jsou proto

$$P_a = \frac{2\varphi}{\pi} = \frac{1}{3}, \qquad P_b = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Poslední úloha z uvedené sbírky, kterou zde zmíníme, se týká polopřímek v prostoru:

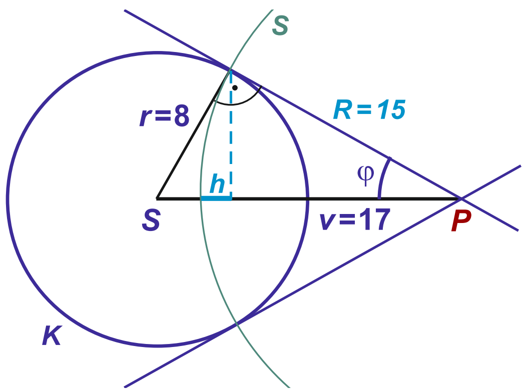
Která jest pravděpodobnost, že polopaprsek z bodu P vycházející dopadne na kouli, jejíž střed jest od svíticího bodu vzdálen o $v = 17$ cm a má-li koule poloměr $r = 8$ cm?

Při řešení této úlohy je třeba vědět, jaká míra se má v podobném případě uvažovat. Kdyby se jednalo o polopřímky v rovině, pak by byla mírou opět velikost úhlu v radiánech mezi krajními polopřímkami. Tato hodnota zároveň vyjadřuje délku části jednotkové kružnice, kterou procházejí dané polopřímky a jejímž středem je jejich společný počáteční bod.



Obr. 12: Míra množiny polopřímek se společným počátečním bodem

Přejdeme-li do prostoru, pak místo jednotkové kružnice uvažujeme jednotkovou sféru se středem v bodě, který je společným počátečním bodem daných polopřímek, a jako míru uvažujeme obsah části této sféry, jíž daný trs polopřímek prochází. Pravděpodobnost je poměrem příslušných měr, při jejím výpočtu proto můžeme pracovat se sférou libovolného poloměru. V dané úloze je výhodné uvažovat sféru S se středem v bodě P a poloměrem, který je na obr. 13 označen symbolem R (zřejmě je $R = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$).



Obr. 13: Ilustrace k úloze o polopřímkách v prostoru

Plošný obsah celé sféry S je $S_S = 4\pi R^2$; plošný obsah odpovídajícího kulového vrchlíku, tj. obsah části sféry S, do níž zasahují polopřímky dopadající na zadanou kouli K, je roven

$$S_V = 2\pi Rh = 2\pi R(R - R\cos\varphi) = 2\pi R^2(1 - \cos\varphi) = 2\pi R^2 \left(1 - \frac{15}{17}\right) = \frac{4\pi R^2}{17}.$$

Hledaná pravděpodobnost je proto

$$P = \frac{S_V}{S_K} = \frac{1}{17}\,.$$

3 Závěr

V předcházejících částech snad bylo vidět, že i dnes najdeme ve starých učebnicích z 19. a počátku 20. století zajímavou inspiraci pro současnou výuku. Úlohy týkající se loterií lze snadno přenést do současných reálií a využít je jednak jako motivaci pravděpodobnostních výpočtů, jednak jako varování před hazardními hrami – studenti si sami mohou spočítat, jaký průměrný zisk z různých her plyne jejich provozovatelům. Také myšlenka, že geometrická pravděpodobnost si zaslouží zařazení do výuky, jistě stojí za zvážení i dnes. Jen by místo složitých příkladů jako z citované sbírky [18] byly vhodnější jednodušší úlohy týkající se odhadů obsahů, objemů či délek, diskutované na začátku druhé části tohoto příspěvku. Studentům se tak dá ukázat, že geometrická pravděpodobnost – a tím i matematika jako taková – má velké množství zajímavých aplikací, mj. v anatomii, histologii, neurofyziologii, dermatologii, nefrologii, onkologii, kardiologii, biologii, metalurgii, geologii či petrologii.

Literatura

[1] R. Baltzer, *Die Elemente der Mathematik. 1. Band: Gemeine Arithmetik, Allgemeine Arithmetik, Algebra*, S. Hirzel, Leipzig, 1860 [4. vyd.: 1872].

[2] J.-É. Barbier, *Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 5 (1860), 273–286.

[3] G.-L. Leclerc de Buffon, *Essai d'arithmétique morale*, Histoire naturelle, générale et particullière, servant de suite à l'Histoire naturelle de l'Homme, Suppl., tome IV, Imprimerie Royale, Paris, 1777, 46–148.

[4] W. M. Crofton, *On the Theory of Local Probability, Applied to Straight Lines Drawn at Random in a Plane; the Methods Used Being Also Extended to the Proof of Certain New Theorems in the Integral Calculus*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London 158 (1868), 181–199.

[5] E. Czuber, *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte*, Teubner, Leipzig, 1884.

[6] E. Heiss, *Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra. Für Gymnasien, Realschulen, höhere Bürgerschulen und Gewerbschulen in systematischer Folge bearbeitet*, M. DuMont-Schauberg, Köln, 1837.

[7] F. Hromádko, A. Strnad, *Sbírka úloh z algebry pro vyšší třídy středních škol*, JČM, Praha, 1876.

[8] M. Hykšová, *Filosofická pojetí pravděpodobnosti v pracích českých myslitelů*, Matfyzpress, Praha, 2011.

[9] M. Hykšová, *Zdůvodňování v počtu pravděpodobnosti.* In: J. Hromadová, A. Slavík (ed.): *Cesty k matematice II*, Matfyzpress, Praha, 2016, 34–41.

[10] M. Hykšová, *Pravděpodobnost* [online]. Dostupné z: `http://euler.fd.cvut.cz/~hyksova/pravdepodobnost`.

[11] M. Hykšová, A. Kalousová, I. Saxl, *Early History of Geometric Probability and Stereology*, Image Analysis and Stereology 31 (2012), 1–16.

[12] A. Kalousová, *Joseph-Émile Barbier a stereologie v 19. století*, Informační Bulletin České statistické společnosti 21 (2009), 10–18.

[13] A. Kalousová, *Stereology in the 19th Century: Joseph-Émile Barbier.* In: V. Capasso et al. (ed.), *Stereology and Image Analysis*, Esculapio, Bologna, 2009, 167–172.

[14] F. Machovec, *Algebra pro vyšší třídy škol středních. Vydání pro gymnasia*, F. Tempský, Praha, 1886.

[15] M. Pokorný, *Dra Richarda Baltzera Základové mathematiky. Díl Prvý. Prostá arithmetika, obecná arithmetika, algebra*, Theodor Mourek, Praha, 1874 [český překlad 4. vydání knihy R. Baltzera [1] z roku 1872].

[16] J. Robová a kol., *Sbírka aplikačních úloh ze středoškolské matematiky*, Prometheus, Praha, 2014.

[17] J. Smolík, *Algebra pro střední školy*, I. L. Kober, Praha, 1870 [2. opravené vydání: 1875].

[18] J. Sommer, V. Hübner, *Maturitní otázky z mathematiky*, JČM, Praha, 1905.

[19] E. Taftl, *Algebra. Vyšším třídám středních škol českých*, M. Čermák, Klatovy, 1883.

[20] Wikipedia: *Franz Josef Land*, `https://en.wikipedia.org/wiki/Franz_Josef_Land`.

RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D.
Ústav aplikované matematiky
Fakulta dopravní ČVUT
Na Florenci 25
110 00 Praha 1
`hyksova@fd.cvut.cz`

KOMBINATORIKA V PŘÍPRAVĚ BUDOUCÍCH UČITELŮ

Antonín Jančařík

Kombinatorika patří mezi jedno z kritických míst ve výuce matematiky na základních i středních školách. Mnoho učitelů označuje kombinatoriku za oblast, kterou nemají příliš oblíbenou a se kterou mají při výuce problémy. Nelze se tedy divit ani tomu, že podobný postoj zastávají ke kombinatorice i žáci. Považují ji za obtížnou, neoblíbenou a často mají z kombinatorických úloh i obavy. To se následně projevuje tím, že jsou velmi limitováni při řešení jednotlivých úloh, netroufají si experimentovat a objevovat a raději spoléhají na formálně naučené vzorce, které však selhávají u komplexnějších úloh.

Vzhledem k těmto skutečnostem patří kombinatorika mezi oblasti, kterým je nutné věnovat zvýšenou pozornost v přípravě budoucích učitelů matematiky. Cílem tohoto příspěvku je sdílet zkušenost s výukou kombinatoriky na Pedagogické fakultě UK.

1 Výuka kombinatoriky

Kombinatorika je takřka ideální oblastí pro zavádění konstruktivisticky orientovaného učení a badatelských přístupů k učení. Naprostá většina úloh nabízí velký prostor pro experimentování a objevování. Přesto zkušenosti ze škol naznačují, že tento potenciál v mnoha případech zůstává nevyužit a výuka se omezuje na výuku a procvičování základních vzorců a postupů. Žáci pak jsou schopni dosahovat poměrně dobrých výsledků, pokud mají řešit jednoduché úlohy, při nichž pouze aplikují naučený postup. Ovšem selhávají u úloh, které vyžadují hlubší úvahy, kdy se často místo řešení uchylují k pouhému hádání vzorce, který by bylo možné aplikovat.

Důvodů, proč k tomuto stavu dochází, je jistě celá řada. Je nezpochybnitelné, že kombinatorika není jednoduchou partií matematiky a bude některým žákům činit potíže. Učitelé často uvádějí jako argument nedostatek času, kvůli kterému nemohou inovativní metody zavádět. Setkal jsem se i argumentací, že výuku není možné realizovat jinak, protože žáci látku nechápou ani při tradičním postupu.

Dalším závažným důvodem, proč učitelé volí uvedený postup, mohou být obavy z vlastního tématu. U kombinatorických úloh může vést k řešení celá řada různých postupů. Od učitele se očekává, že bude reagovat na mnoho různých podnětů, které mohou být správné, částečně správné, nebo chybné. To vyžaduje schopnost rozpoznat myšlenku, kterou žák prezentuje, analyzovat ji a případně ji vhodným způsobem upravit tak, aby vedla ke správnému řešení. Aby toho byl učitel schopen, musí mít jak velmi dobrou znalost tématu, tak i důvěru ve vlastní schopnosti při řešení kombinatorických úloh (self-efficacy).

V neposlední řadě je problém i v tom, že mnoho učitelů se ve svém vlastním studiu s jiným, než transmisivním, způsobem výuky nesetkali. Je známým faktem, že učitelé se ve své vlastní praxi více řídí tím, jak byli sami vyučováni, než tím, jak jim bylo říkáno, že mají vyučovat ([Ko]).

2 Příprava budoucích učitelů

Na základě výše popsaných zkušeností s výukou kombinatoriky na středních školách byly identifikovány čtyři základní oblasti, na které se výuka kombinatoriky na Pedagogické fakultě UK soustředí, jsou jimi:

- Znalost obsahu.
- Osobní zkušenost s inovativními postupy z pozice studenta.
- Budování self-efficacy.
- Osobní zkušenost s výukou kombinatoriky z pozice vyučujícího.

Vzhledem k obsahu, který je v současné době orientován i významně didakticky, byla výuka kombinatoriky přesunuta z bakalářského studia do plánů navazujícího magisterského studia a je realizována v rámci předmětu *Diskrétní matematika* s tříhodinovou týdenní hodinovou dotací ve třetím semestru studia. Kromě kombinatoriky, která tvoří jádro předmětu, je jeho součástí ještě úvod do diskrétní pravděpodobnosti a teorie grafů.

Po krátké období docházelo k souběhu předchozí akreditace v bakalářském studiu a současné akreditace v navazujícím magisterském studiu. Část studentů tak absolvovala předmět Diskrétní matematika jak v bakalářském, tak i navazujícím magisterském studiu. Tento souběh napomohl realizaci změny v koncepci předmětu. Aktuálně je tak do praxe uváděn princip, že výuka odborných témat v přípravě budoucích učitelů má být realizována takovými didaktickými postupy, jakými mají učitelé v praxi sami vyučovat ([Za], [Kř]).

3 Realizace předmětu

Vlastní výuka je realizována formou workshopů, v rámci nichž studenti individuálně i skupinově řeší předem připravené úlohy, na kterých jsou demonstrovány jak matematické, tak didaktické postupy. Důležitou součástí výuky jsou i diskuze o různých přístupech k řešení a především rozbor chybných řešení, ve kterých se budoucí učitelé učí nalézt chybu v úvaze a upravit jí. Vyučující zde postupně vstupuje do role facilitátora. V druhé části semestru pak vedení výuky přebírají sami studenti, kteří si na základě zkušenosti a vzorů z počátku výuky připravují pro své kolegy vlastní témata. Díky tomu, že ve třetím semestru probíhají praxe na školách, mají studenti někdy možnost si některé postupy vyzkoušet i během své výuky na střední škole. Dochází tak k tomu, že téma, které si student připravuje pro své spolužáky, použije a experimentálně ověří i v rámci praxe. Je známo, že učitelovy postupy velmi efektivně mění jeho vlastní zkušenost podpořená tím, že vidí změnu u svých žáků ([Gu]).

3.1 Volba úloh

V rámci předmětu jsou využívány úlohy především ze dvou učebních textů [Kb], [Ro] a úlohy matematické olympiády. Úlohy jsou voleny tak, aby (s výjimkou úvodní motivační úlohy) nebylo možné jejich řešení pouhou aplikací jednoho ze základních vzorců. Pokud například v rámci tématu permutace bez opakování je motivační úloha zaměřena na výpočet počtu možností, kterými lze seřadit žáky do řady, v návazných úlohách jsou již doplňovány další podmínky. Třeba požadavek na první prvek posloupnosti, na to, že dva prvky musí být vedle sebe, že jeden musí být před druhým.

Tento postup je volen proto, aby se studenti neupnuli k prosté aplikaci vzorce, ale museli vždy úlohu analyzovat. Z tohoto důvodu také nedochází v průběhu řešení k pojmenování postupů či formálnímu zavádění vzorců. Tento krok je realizován až v samotném závěru.

3.2 Vycházíme z experimentu

V průběhu celé výuky jsou studenti vedeni k tomu, aby si situace zkoušeli na malém počtu prvků, kreslili si nákresy a pokud možno i fyzicky modelovali jednotlivé případy, včetně přehrávání jednotlivých situací. Ukazuje se, že mnoho studentů není zvyklých si při řešení byť jen kreslit náčrtky situací. Budoucí učitelé si tak mohou sami vyzkoušet, nakolik je jim podobné modelování pomocí. Výsledkem bylo, že při svých hodinách sami vymýšleli a přinášeli pomůcky pro ostatní, aby mohli experimentovat (např. barevná víčka od pet lahví).

3.3 Diskuze je základ

Výuka byla po celou dobu postavena na skupinových diskuzích. Ty sloužily nejen k tomu, aby se studenti učili sami srozumitelně formulovat vlastní myšlenky (zpětná vazba od spolužáků je v tomto mnohem efektivnější, než od vyučujícího), ale především se učili naslouchat a porozumět argumentům ostatních. Pro mnoho studentů bylo těžké oprostit se od vlastního řešení (ke kterému se z počátku upínali) a naslouchat a porozumět myšlenkám ostatních. Přijmout a zabývat se jiným postupem je obtížné především v okamžiku, kdy tento postup vede k chybnému výsledku. Studenti se postupně učili neodmítat myšlenku jako celek, ale hledat zdravé jádro a odhalit chybu v jednotlivých postupech a tuto chybu pak i pomoci svému spolužákovi pochopit a opravit.

3.4 Základní otázky

Při analýze řešení se studenti učili používat dvě základní otázky, které byli z počátku nuceni si klást u každého řešení. Byť se mohou zdát na první pohled triviální, jejich pravidelné používání se dlouhodbě v rámci kurzu ukazuje jako efektivní. Těmito otázkami jsou:

- Započítal jsem všechno?
- Nezapočítal jsem něco dvakrát?

Ukazuje se, že naprostá většina chyb v úvahách při řešení kombinatorických úloh spadá pod jednu z těchto dvou otázek.

3.5 Číslo není odpověď

V neposlední řadě se studenti také učili, že správnost řešení nelze posuzovat jen dle číselného výsledku, ale vždy je nutné posuzovat i vlastní postup, který k řešení vede. Protože však ve školní praxi budou muset pracovat někdy pouze s písemným řešením, byl důraz v rámci kurzu kladen také na čtení a interpretaci myšlenek, které vedly k jednotlivým zápisům řešení.

Velmi jednoduchou ukázkou může být řešení základní úlohy, kolik je nutné odehrát zápasů na turnaji, kterého se účastní 5 družstev a každé hraje s každým právě jednou. Každé z následujících řešení je motivováno jinou myšlenkou, přičemž každé z těchto řešení je správné:

- $\binom{5}{2} = 10$, vybírám dva prvky z pěti.
- $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$, do dvojice vyberu první družstvo pěti způsoby, druhé čtyřmi a nezáleží na pořadí.
- $4 + 3 + 2 + 1 = 10$, první družstvo musí hrát se čtyřmi soupeři, druhé již jen se třemi, ...
- $\frac{5 \cdot 5 - 5}{2} = 10$, výsledky zapisuji do tabulky 5×5, diagonálu nepoužívám a každý výsledek se zapisuje dvakrát.
- $5 \cdot 3 - 5 = 10$, pokud by bylo šest družstev, hraje se 5 kol po třech zápasech. Protože je jen 5 družstev, v každém kole jeden zápas odpadá.
- $5 \cdot 2 = 10$, hraje se 5 kol a v každém se odehrají jen dva zápasy a páté družstvo odpočívá.

4 Zkušenosti s realizací

Dosavadní výsledky ukazují, že zvolený způsob výuku vede jak ke zvýšení matematických dovedností, kdy jsou studenti schopni úspěšně řešit náročné úlohy z matematické olympiády (včetně vybraných úloh z IMO), tak především ve vnímání vlastních schopností jak při řešení úloh, tak především v připravenosti na to, téma vyučovat. Níže uvedené je jedno ze studentských hodnocení předmětu:

Kombinatorika byla vždy mým méně oblíbeným tématem v matematice. Již od gymnázia a i v Diskrétní matematice na bakaláři jsem nebyla tématu nijak nakloněna. To vše se změnilo tímto předmětem. Nejen, že jsem konečně pochopila v čem spočívá kombinatorika, ale i jsem zjistila jak předmět vyučovat. Nyní jsem si v tématu jistá a nechovám k němu již žádnou zášť. Ihned jsem měla to štěstí, že jsem si kombinatoriku a pravděpodobnost vyzkoušela učit na praxi na SŠ, a ono vše, co jsme se učili, fungovalo. Za mě tedy velice přínosný předmět a skvěle organizačně vyřešen.

5 Závěr

Příprava učitelů matematiky na Pedagogické fakultě UK prochází v současné době proměnou, jejímž cílem je lépe připravit učitele na jejich budoucí povolání a praxi. Z tohoto důvodu je opouštěn tradiční model, kdy jsou odborné předměty odděleny od oborové didaktiky a jsou přednášeny tradiční transmisivní metodou definice – věta – důkaz. Postupně dochází i v rámci oborové přípravy k významnému zavádění inovativních výukových metod a postupů. V tomto článku byla představena nová podoba výuky předmětu Diskrétní matematika, který byl jedním z prvních inovovaných předmětů. Od příštího akademického roku (2021/22) vstupuje v platnost nová akreditace, v rámci které bude studentům nabízeno mnohem více předmětů, které jsou orientovány v podobném duchu.

Literatura

[Gu] T. R. Guskey, R. Leikin, *Professional Development and Teacher Change*, Teachers and Teaching (8) 2002, 381–391.

[Kb] M. Kubesa, *Základy diskrétní matematiky*, VŠB, Ostrava, 2011 [online]. Dostupné z: `http://mi21.vsb.cz/modul/zaklady-diskretni-matematiky`.

[Ko] F. Korthagen, *Didaktika realistického vzdělávání učitelů*, Paidó, Brno, 2011.

[Kř] F. Kuřina, *Metody a cíle vyučování matematice*, Učitel matematiky 27 (2019), 169–179.

[Ro] T. Roskovec, *Kombinatorika na želvách* [online]. Dostupné z: `http://www.talnet.cz/`.

[Za] O. Zaslavsky, R. Leikin, *Professional Development of Mathematics Teacher Educators: Growth Through Practice*, Journal of Mathematics Teacher Education 7 (2014), 5–32.

doc. RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.
Pedagogická fakulta UK
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
M. Rettigové 4
116 39 Praha 1
`antonin.jancarik@pedf.cuni.cz`

POPISNÁ STATISTIKA V PŘÍKLADECH A ZAMYŠLENÍ

Jana Kalová, Karel Pazourek

V příspěvku ukážeme některé příklady z matematické statistiky a přístupy, které byly vyzkoušeny ve výuce na gymnáziu a které by mohly zaujmout mnohé žáky a učitele. Názornost úloh je umocněna využitím vhodného grafického znázornění dat a jejich charakteristik a aplikací do dalších oborů v rámci konceptu STEM.

1 Úvod

Rámcový vzdělávací plán pro gymnázia [4] předkládá očekávané výstupy pro výuku statistiky na gymnáziích následovně:

Žák [. . .]

- *diskutuje a kriticky zhodnotí statistické informace a daná statistická sdělení*
- *volí a užívá vhodné statistické metody k analýze a zpracování dat (využívá výpočetní techniku)*
- *reprezentuje graficky soubory dat, čte a interpretuje tabulky, diagramy a grafy, rozlišuje rozdíly v zobrazení obdobných souborů vzhledem k jejich odlišným charakteristikám*

Za účelem jejich naplnění požaduje se věnovat různým reprezentacím dat, pojmu statistický soubor a jeho charakteristikám.

Učebnice doporučované přímo pro gymnázia ([2], [5]) představují požadované pojmy, jen velmi omezeně se zde vysvětluje, v jakých problémech či situacích je ten či onen pojem vhodné použít. Stejně tak se málo pracuje s analýzou dat.

Článek obsahuje ukázku výuky tématu zobrazení kvantitativních dat na Gymnáziu Jírovcova v Českých Budějovicích. Na příkladech ukážeme, jak se lze čistě od popisného pohledu výpočtu kvantilů posunout k analýze statistického souboru, a to díky vhodnému grafickému zobrazení kvantitativních dat. Použití matematického softwaru (GeoGebra, MS Excel apod.) je zde velmi vhodné, není však úplně nutné – obrázky lze kreslit i ručně. Žáci se tak seznámí (nebo znovu setkají) se zvoleným matematickým softwarem, navíc mohou pracovat s rozsáhlejšími soubory dat. Odtud už je jen krůček k aplikaci statistických metod v rámci konceptu STEM.

2 Kvantily

Nejprve se zaměříme na výpočet kvantilů, speciálně na kvartily.

Percentil je taková hodnota znaku x, která odděluje k % nejnižších hodnot znaku od zbývajících $(100 - k)$ %. Percentily, které rozdělují data na čtvrtiny, mají své vlastní názvy: dolní kvartil (25. percentil), horní kvartil (75. percentil), medián (50. percentil nebo 5. decil). Užitečnou hodnotou je mezikvartilové rozpětí, které spočteme jako rozdíl třetího a prvního kvartilu.

Příklad 1. *Doplňte: Student, který při srovnávací zkoušce z matematiky dosáhl percentilu* 75*, dosáhl stejného nebo* _________ *výsledku než* 75 % *účastníků stejného testování.*

Odpověď: lepšího

Poznámka. Zařazení takového jednoduchého příkladu do výuky se ukázalo jako opodstatněné. Vždy se alespoň jeden student zeptal, co to je percentil a co se myslí zadáním úlohy.

Metod pro výpočet prvního a třetího kvartilu je několik. Jejich výsledky se mohou lišit. V následujících příkladech budeme vycházet od mediánu.

Příklad 2. *Vypočtěte kvartily a mezikvartilové rozpětí pro následující sadu hodnot:*

$$\{12, 16, 14, 13, 15, 12, 15, 18, 10, 12, 20\}$$

Řešení. Nejprve setřídíme data od nejmenší hodnoty po největší:

$$\{10, 12, 12, 12, 13, 14, 15, 15, 16, 18, 20\}.$$

Hodnot máme jedenáct, tedy lichý počet. Proto určíme kvartily následovně: Druhý kvartil (medián) ($Q2$) pro lichý počet hodnot je prostřední hodnota setříděného souboru:

$$Q2 = 14$$

První kvartil ($Q1$) spočteme jako prostřední hodnotu souboru vlevo od mediánu, obdobně třetí kvartil($Q3$) jako prostřední hodnotu souboru vpravo od mediánu.

$$Q1 = 12, \quad Q3 = 16$$

Vypočteme mezikvartilové rozpětí: $Q3 - Q1 = 16 - 12 = 4$.

Příklad 3. Vypočtěte kvartily a mezikvartilové rozpětí pro následující sadu hodnot:

$$\{12, 16, 14, 13, 15, 12, 15, 18, 10, 12\}$$

Řešení. Opět setřídíme data vzestupně: $\{10, 12, 12, 12, 13, 14, 15, 15, 16, 18\}$.

Hodnot je tentokrát deset, tedy sudý počet. Určíme kvartily: Medián pro sudý počet hodnot vypočteme jako aritmetický průměr dvou prostředních hodnot setříděného souboru:

$$Q2 = 13{,}5$$

První kvartil $Q1$ určíme jako prostřední hodnotu (medián) levé poloviny setříděného datového souboru, třetí kvartil $Q3$ jako prostřední hodnotu (medián) pravé poloviny setříděného datového souboru:

$$Q1 = 12; \quad Q3 = 15.$$

Vypočteme mezikvartilové rozpětí: $Q3 - Q1 = 15 - 12 = 3$.

3 Odlehlé hodnoty

Odlehlé hodnoty (též odlehlé body, angl. outliers) vybočují z datové sady, v našem případě svou velmi malou, anebo naopak velmi velkou hodnotou. Odhadnout je lze pomocí vizualizace dat. Tato metoda je ale nespolehlivá. Matematicky určíme odlehlé body např. pomocí kvartilů a mezikvartilového rozpětí: odlehlé hodnoty najdeme vně intervalu

$$\langle Q1 - 1{,}5(Q3 - Q1), Q3 + 1{,}5(Q3 - Q1)\rangle.$$

Příklad 4. Zjistěte odlehlé body v datové sadě:

$$\{3, 10, 14, 19, 22, 29, 32, 36, 49, 70\}$$

Řešení. Nejprve spočítáme první a třetí kvartil podobně jako v předchozích příkladech:

$$Q1 = 14, Q3 = 36.$$

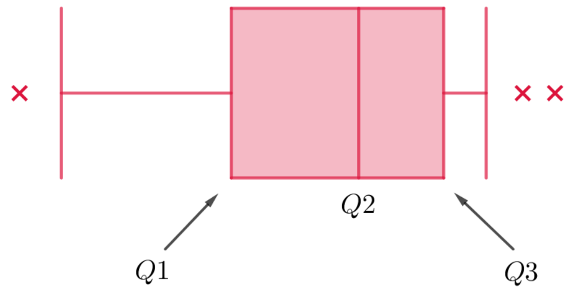
Vypočtěme meze intervalu:

$$\begin{aligned} &\langle Q1 - 1,5(Q3 - Q1), Q3 + 1,5(Q3 - Q1)\rangle = \\ &= \langle 14 - 1,5(36 - 14), 36 + 1,5(36 - 14)\rangle = \\ &= \langle 14 - 33, 36 + 33\rangle = \langle -19, 69\rangle \end{aligned}$$

Mimo vypočtený interval leží jen hodnota 70, která je jediným odlehlým bodem zadané datové sady.

4 Krabicový diagram

Krabicový diagram (boxplot) je vhodnou, rychlou a jednoduchou grafickou metodou pro vizuální znázornění dat (jednorozměrných). Používá se pro zjišťování struktury dat, jejich symetrie (asymetrie) nebo např. pro porovnání dvou a více datových souborů. Diagram je tvořen krabicí a anténami (vousy). Může být znázorněn vodorovně nebo svisle. Pro sestrojení boxplotu nejprve seřadíme vzestupně data a najdeme kvartily. První a třetí kvartil tvoří hranice krabičky, druhý kvartil (medián) vyznačíme čarou uvnitř krabičky. (Uvnitř krabičky je někdy zakreslen křížek, znázorňující aritmetický průměr.) Pro ohraničení antén najdeme minimální (min) a maximální (max) hodnotu souboru a vypočteme také mezikvartilové rozpětí. Levá anténa pro vodorovný graf (analogicky dolní anténa pro svislé znázornění) je ohraničena např. větší z hodnot (min, $Q1 - 1{,}5(Q3 - Q1)$). Pokud je větší hodnotou $Q1 - 1{,}5(Q3 - Q1)$ a tato hodnota není zastoupena v datové sadě, zvolíme jako levou (resp. dolní) hranici nejbližší větší hodnotu z datového souboru. Pravá (resp. horní) anténa je pak ohraničena menší z hodnot (max, $Q3 + 1{,}5(Q3 - Q1)$). Opět, pokud $Q3 + 1{,}5(Q3 - Q1)$ nepatří do datové sady, zvolíme jako hranici nejbližší menší hodnotu z datové sady. Vyskytují-li se v souboru odlehlé hodnoty, vyznačíme je jako samostatné body (na obrázku 1 jsou odlehlé body vyznačeny jako křížky).



Obr. 1: Konstrukce krabicového diagramu

Poznámka. Hranice krabičky boxplotu jsou vždy určeny prvním a třetím kvartilem. Hranice antén jsou ale znázorňovány různě – hranicí může být i minimum a maximum (jako například v učebnici [1]), používá se také hodnota směrodatné odchylky atd. Někdy se ani nezobrazují odlehlé hodnoty.

Důležitým didaktickým aspektem je právě přehledné shrnutí vypočtených údajů, což umožní žákům zamyslet se nad zpracovávanými daty.

Příklad 5. Nakreslete krabicový diagram pro hodnoty z příkladu 4.

Řešení. Datová sada: $\{3, 10, 14, 19, 22, 29, 32, 36, 49, 70\}$

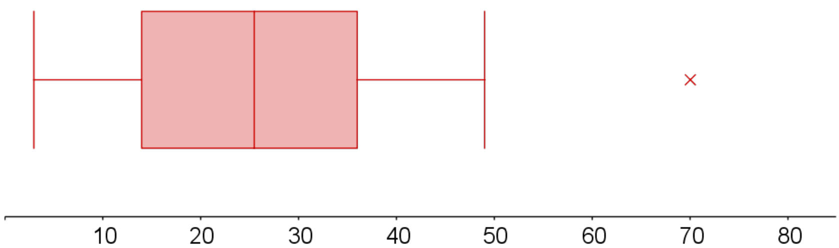
Spočítáme opět základní charakteristiky:

$$\min = 3, \quad Q1 = 14, \quad Q2 = 25{,}5, \quad Q3 = 36, \quad \max = 70.$$

Hranice krabičky grafu tak budou $Q1 = 14$ a $Q3 = 36$. Pro konce antén (vousů) určíme, zda data obsahují odlehlé hodnoty. Nejprve spočítáme hranice intervalu:

$$\max(\min,\ Q1 - 1{,}5(Q3 - Q1)) = \max(3, -19) = 3$$
$$\min(\max,\ Q3 + 1{,}5(Q3 - Q1)) = \min(70, 69) = 69$$

Hodnota 70 neleží v intervalu $\langle 3; 69 \rangle$, je tedy odlehlou hodnotou. Konce antén tak budou v bodech 3 a 49 (největší hodnota datového souboru, která je větší než třetí kvartil a není odlehlým bodem).



Obr. 2: Řešení příkladu 5

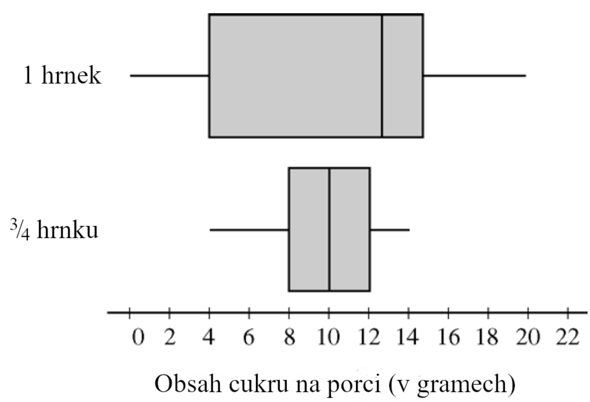
Poznámka. Sestrojit boxplot ručně je jednoduché. Vhodné je ale používat se studenty také matematický software. Boxplot snadno vykreslíme např. pomocí SW GeoGebra. V tabulkovém procesoru MS Excel lze také boxplot sestrojit, ale je třeba jej pak správně nastavit. Je také třeba si ozřejmit právě nastavení boxplotu v daném programu, zejména jaké hodnoty odpovídají hranicím antén (vousů).

5 Aplikační úloha

Následující úloha byla zadána v AP Statistics Exam[1] v roce 2008 [3].

Příklad 6. Zadání (mírně modifikováno): Student chtěl porovnat obsah cukru v cereáliích v typické snídaňové porci. Ve velkém obchodě s potravinami náhodně vybral 60 krabic různých druhů cereálií. Všiml si, že na některých krabicích je uveden obsah cukru pro porci o velikosti jednoho hrnku a na jiných krabicích pro porci o velikosti tři čtvrtiny hrnku. Obaly cereálií s uvedeným obsahem cukru pro tři čtvrtiny hrnku byly uzpůsobeny tak, aby více přitahovaly pozornost malých dětí. Student se rozhodl zjistit, zda by mohl být nějaký rozdíl v obsahu cukru v cereáliích v závislosti na velikosti uvedené snídaňové porce (1 hrnek nebo $^3/_4$ hrnku).

Student rozdělil data do dvou skupin. Jedna skupina se skládala z 29 druhů obilovin s uvedenou snídaňovou porcí o velikosti 1 hrnku. Druhou skupinu tvořilo 31 druhů obilovin v krabicích s uvedenou snídaňovou porcí o velikosti $^3/_4$ hrnku. Boxploty na obrázku 3 ukazují obsah cukru (v gramech) na porci obilovin pro plný a tříčtvrtinový hrnek.



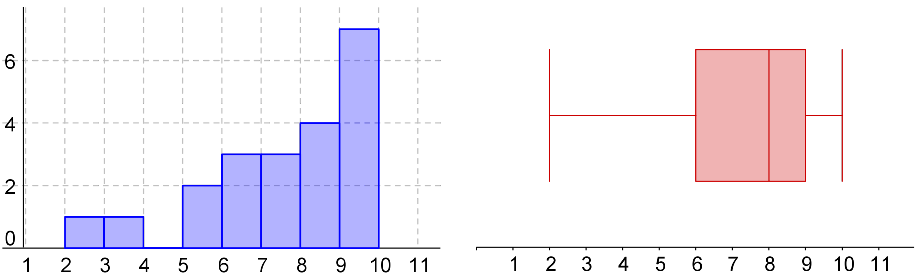
Obr. 3: Rozdělení obsahu cukru v gramech pro dvě skupiny cereálií (upraveno podle [3])

[1] AP Exam – Advanced Placement Exam – je zkouška organizovaná (nejen) pro středoškolské studenty v USA. Obsah zkoušky odpovídá rozsahem úvodním kurzům matematické statistiky na vysokých školách v ČR.

a) Porovnejte obsah cukru pro obě skupiny.

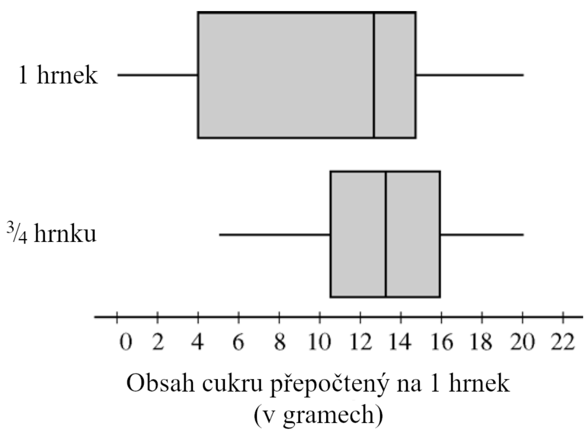
Řešení. Medián množství cukru v obilovinách v krabicích s velikostí porce 1 hrnek (skupina 1) je větší než medián množství cukru v obilovinách v krabicích s velikostí porce $^3/_4$ hrnku (skupina 2). Cereálie ve skupině 1 mají větší variabilitu obsahu cukru. Liší se také tvar obou rozdělení. Rozdělení obsahu cukru pro skupinu 1 je sešikmené vlevo.

Poznámka. Pro názornější vizualizaci dat sešikmených vlevo připomeneme studentům ještě histogram – viz obrázek 4.[2]



Obr. 4: Data sešikmená vlevo

Po analýze diagramů se student rozhodl, že místo porovnání obsahu cukru pro plný a tříčtvrtinový hrnek bude vhodnější porovnat obsah cukru pro stejně velké porce. K tomuto účelu vynásobil obsah cukru pro cereálie s velikostí porce $^3/_4$ hrnku číslem $\frac{4}{3}$. Boxploty na obrázku 5 ukazují obsah cukru (v gramech) na hrnek pro obě skupiny po přepočtení na stejně velké porce.



Obr. 5: Rozdělení obsahu cukru v gramech po přepočtení na porce stejné velikosti (upraveno podle [3])

[2] Obrázek 4 je ilustrativní, grafy nejsou založeny na datech z příkladu 6.

b) Jaké nové informace o obsahu cukru poskytují krabicové diagramy na obrázku 5?

Řešení. Mediány jsou si nyní mnohem blíže než v prvním případě. První boxplot se nezměnil, protože nedošlo ke změně dat. Druhý boxplot se ale změnil, při použití transformovaných dat je vidět posun obsahu cukru k vyšším hodnotám. Oba boxploty mají nyní srovnatelné maximum.

c) Na základě úloh a) a b) porovnejte průměrné množství cukru pro dvě různé velikosti porcí uváděné na krabicích cereálií.

Řešení. Nyní se podíváme na symetrii dat. Pro skupinu 1 jsou data sešikmená vlevo, medián obsahu cukru bude větší než aritmetický průměr. Pro skupinu 2 jsou data symetrická, aritmetický průměr a medián si v tomto případě budou blízké. Budeme očekávat, že průměrné množství cukru bude po přepočtení na 1 hrnek menší ve skupině 1 než ve skupině 2.

Poznámka. Nejvíce problematické se u této úlohy jeví, že někteří studenti nečtou rádi delší texty, což je ale známý a celkem běžný jev.

6 Aplikace ve fyzice, STEM

Jedním ze základních předpokladů života na Zemi je přítomnost vody. Přestože je voda objektem zájmu vědců po staletí, stále existují její nevysvětlené vlastnosti. Nejznámější anomálií vody je maximum hustoty při 4 °C. K anomáliím vody patří také povrchové napětí, především kvůli neobvykle vysoké hodnotě. Je zde ale i další zvláštnost. Hodnota povrchového napětí vody není přesně známa. Ačkoliv hustotu vody umíme měřit s přesností 1 ppm (parts per million, miliontina celku, podobně jako např. procento je setina celku), hodnoty povrchového napětí získané z různých experimentů mají mnohem větší odchylky.

Příklad 7. V tabulce je přehled několika experimentálních hodnot povrchového napětí vody σ $[mN \cdot m^{-1}]$ při 20 °C.

σ	72,86	72,80	72,70	72,59	72,80	72,76	70,00	71,76	72,85	71,00

Řešte úlohy:

a) Napište 5 důležitých hodnot datové sady (minimum, první kvartil $Q1$, medián $Q2$, třetí kvartil $Q3$, maximum).

b) Spočtěte, zda sada obsahuje odlehlé hodnoty.

c) Sestrojte krabicový diagram.

d) Pokuste se na základě krabicového diagramu diskutovat charakter naměřených hodnot povrchového napětí (možné zdroje sešikmení dat, možné zdroje chyb apod.).

Řešení. Nejprve hodnoty setřídíme:

σ	70,00	71,00	71,76	72,59	72,70	72,76	72,80	72,80	72,85	72,86

a) Charakteristické hodnoty vyjdou

$$\min = 70{,}00,\ Q1 = 71{,}76,\ Q2 = 72{,}73,\ Q3 = 72{,}80,\ \max = 72{,}86.$$

b) Najdeme hranice intervalu:

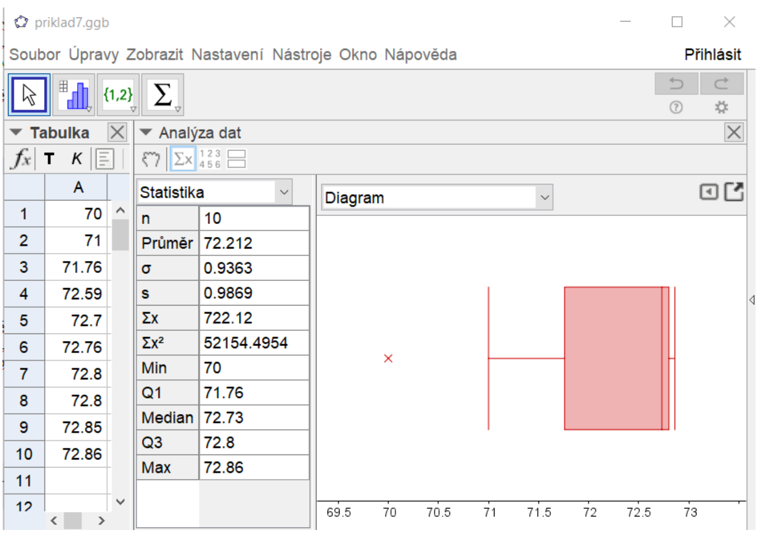
$$\max(\min;\ Q1 - 1{,}5(Q3 - Q1)) = \max(70{,}00;\ 70{,}20) = 70{,}20$$
$$\min(\max;\ Q3 + 1{,}5(Q3 - Q1)) = \min(72{,}86;\ 74{,}36) = 72{,}86$$

Vně intervalu $\langle 70{,}20;\ 72{,}86\rangle$ leží hodnota $\sigma = 70{,}00\ mN \cdot m^{-1}$. Tato hodnota je odlehlým bodem.

Poznámka. V praxi se často experimentální data očišťují od odlehlých hodnot a potom dále zpracovávají.

c) Krabicový diagram sestrojíme v SW Geogebra. Současně získáme analýzu dat (porovnáme s ručně vypočtenými hodnotami).

d) Data jsou sešikmená vlevo, příčinou může být například znečištění vzorků vody (mírné znečištění vede k rychlému poklesu povrchového napětí) atd.



Obr. 6: Zpracování příkladu 7 v GeoGebře

Poznámka. Uvedený příklad ukazuje propojení matematiky a fyziky konceptem STEM. Důležitou složkou výuky je i představit žákům fyzikální obsah příkladu, ať už formou výkladu nebo projektové výuky. Příklady tohoto druhu je vhodné zařazovat často – a z různých oborů, abychom se „trefili“ do zájmů co nejširšího spektra žáků.

7 Závěr

V článku jsme ukázali, že se nemusíme ve výuce spokojit pouze s výpočtem statistických ukazatelů, ale že je vhodné pomocí nich analyzovat data. Stejně tak propojení statistiky s dalšími obory (koncept STEM) vede podle našich zkušeností k efektivnější výuce.

Literatura

[1] Z. Bárta, *Základy statistiky pro obchodní akademie*, Eduko, 2016.

[2] E. Calda, V. Dupač, *Matematika pro gymnázia. Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika*, Prometheus, 2009.

[3] College Board, *AP Statistics. 2008 Free-Response Questions.* `https://secure-media.collegeboard.org/secure/ap/pdf/statistics ap-2008-statistics-free-response-questions.pdf`

[4] *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*, Výzkumný ústav pedagogický, Praha, 2007.

[5] M. Krynický, Realistické učebnice matematiky a fyziky: *Statistika.* `http://www.realisticky.cz/kapitola.php?id=118`

doc. RNDr. Ing. Jana Kalová, Ph.D., Mgr. Karel Pazourek, Ph.D.
Ústav matematiky PřF JU
Branišovská 1760
370 05 České Budějovice

Gymnázium, České Budějovice, Jírovcova 8
Jírovcova 8
371 61 České Budějovice

`jkalova@prf.jcu.cz, pazourek@jirovcovka.net`

ZÁKLADY MAGIE PRO UČITELE MATEMATIKY

Jindřich Michalik

V příspěvku ukážeme na několika příkladech, jak lze „matematické kouzlo" zařadit do výuky na základní nebo střední škole. Podstatnou složkou provedení kouzla je interakce s divákem (žákem), proto může být vítaným zpestřením vyučovací hodiny. Formu kouzla můžeme využít k prezentaci zajímavých matematických vztahů, na úvod však představíme všeobecně známé početní kouzlo, které se dá využít k odlehčení hodiny a současně k procvičení základních aritmetických operací, případně i manipulace s výrazy.

1 Kouzlo s telefonním číslem

- Vezmi počáteční pětičíslí svého telefonního čísla (bez předvolby).
- Vynásob získané pěticiferné číslo osmdesáti.
- Přičti 1.
- Výsledek vynásob číslem 250.
- Přičti poslední čtyřčíslí svého telefonního čísla.
- Znovu přičti poslední čtyřčíslí svého telefonního čísla.
- Odečti 250.
- Výsledek vyděl dvěma. Co vyšlo?

Instrukce jsou navržené tak, aby výsledkem bylo žákovo telefonní číslo (v zájmu ochrany osobních údajů lze kouzlo modifikovat tak, že místo svého telefonního čísla pracuje žák s libovolně zvoleným devíticiferným číslem). Očividně se nejedná o žádnou magii, neboť žák své celé číslo sdělil, i když jen po částech. Přesto „kouzlo" zaujme více než klasické procvičování základních aritmetických operací na příkladech z učebnice.

Jsou-li již ve třídě probrány alespoň základní úpravy algebraických výrazů, můžeme z kouzla vytěžit více. Ukažme, že kouzlo funguje pro kterékoli zvolené devíticiferné číslo ve tvaru $x_1x_2x_3x_4x_5y_1y_2y_3y_4$, kde $x = x_1x_2x_3x_4x_5$ je jeho počáteční pětičíslí a $y = y_1y_2y_3y_4$ je jeho koncové čtyřčíslí. Instrukce popsané výše lze shrnout do vzorce:

$$\frac{(x \cdot 80 + 1) \cdot 250 + y + y - 250}{2} = \frac{20000x + 250 + 2y - 250}{2} =$$
$$= 10000x + y = x_1x_2x_3x_4x_50000 + y_1y_2y_3y_4 = x_1x_2x_3x_4x_5y_1y_2y_3y_4.$$

Poté můžeme žáky pobídnout, aby na stejném principu navrhli vlastní kouzlo (nemusíme se držet telefonních čísel, lze vycházet například z dvojciferné velikosti nohy apod.). Pro zvýšení náročnosti můžeme například požadovat, aby místo počátečního pětičíslí a koncového čtyřčíslí v instrukcích vystupovala počáteční, prostřední a koncové trojčíslí. Označíme-li tato trojčíslí po řadě x, y, z, řešení může vypadat například takto:

$$
\begin{aligned}
1000000x + 1000y + z &= \frac{2000000x + 2000y + 2z + 250000 - 250000}{2} = \\
&= \frac{(4000x + 4y + 500) \cdot 500 + z - 250000 + z}{2} = \\
&= \frac{((8x + 1) \cdot 500 + 4y) \cdot 500 + z - 250000 + z}{2}.
\end{aligned}
$$

- Vezmi počáteční trojčíslí svého telefonního čísla (bez předvolby).
- Vynásob toto trojciferné číslo osmi.
- Přičti 1.
- Výsledek vynásob číslem 500.
- Přičti čtyřnásobek prostředního trojčíslí svého telefonního čísla.
- Výsledek vynásob číslem 500.
- Přičti poslední trojčíslí svého telefonního čísla.
- Odečti 250000.
- Přičti poslední trojčíslí svého telefonního čísla.
- Výsledek vyděl dvěma. Vyšlo tvé telefonní číslo.

V příkladech na procvičení úprav algebraických výrazů vedeme obvykle žáky spíše ke zjednodušení výrazu, což je zřejmě v pořádku. Úkol, kdy má žák navrhnout vlastní kouzlo, vyžaduje naopak schopnost výraz zkomplikovat, díky čemuž je žák nucen nad výrazem přemýšlet trochu jinak. Ze zkušenosti z výuky na střední škole vím, že možnost volby může být pro některé žáky překážkou nebo výzvou.

Na závěr si mohou spolužáci v lavici svá kouzla navzájem „zkontrolovat“, pro jednoduchost například s využitím kalkulaček.

2 Fibonacciho čísla

Než představíme další matematické kouzlo a návrh jeho implementace do výuky, připomeňme stručně jednu známou a (nejen) matematiky oblíbenou posloupnost čísel a některé její vlastnosti.

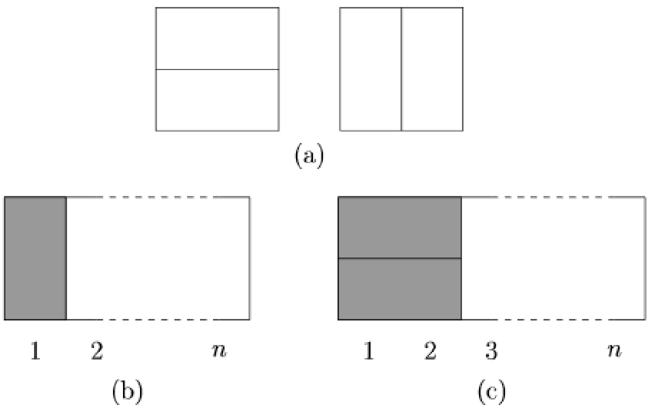
Fibonacciho posloupnost $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ je jednoznačně určena dvěma počátečními členy a rekurentním vzorcem:

(1) $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.
(2) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$.

Na úvod ukážeme kombinatorický význam Fibonacciho čísel na klasickém příkladu (čerpáme z [1]).

Příklad. Uvažujme obdélník o rozměrech $2 \times n$ pro $n \geq 1$. Chceme takový obdélník pokrýt n dlaždicemi o rozměrech 1×2. Dlaždice můžeme klást horizontálně nebo vertikálně (můžeme tedy použít dlaždice o rozměrech 2×1). Kolika způsoby lze pokrytí provést?

Pro $n \geq 1$ označme q_n počet možností, kterými lze pokrýt obdélník o rozměrech $2 \times n$ dlaždicemi o rozměrech 1×2 nebo 2×1. Zřejmě $q_1 = 1$, na pokrytí obdélníka 2×1 potřebujeme dlaždici 2×1. Pokrytí obdélníka 2×2 lze provést dvěma způsoby, a to buď použitím dvou dlaždic 1×2 (horizontálních), nebo použitím dvou dlaždic 2×1 (vertikálních). Obě možnosti jsou znázorněny na obrázku 1(a).



Obr. 1: Dlážděni

Tedy $q_2 = 2$. Pro $n \geq 3$ se zamysleme nad možnostmi pokrytí prvního sloupce obdélníka $2 \times n$. Snadno zjistíme, že existují dvě možnosti:

(1) Pokryjeme tento sloupec dlaždicí 2×1 (vertikální). Potom zbývající část obdélníka o rozměrech $2 \times (n-1)$ může být pokryta q_{n-1} způsoby, viz obrázek 1(b).

(2) Pokryjeme tento sloupec levými polovinami dvou dlaždic 1×2 (horizontálních) umístěných nad sebou. Tyto dlaždice současně pokryjí i druhý sloupec obdélníka zleva, zbývá tedy pokrýt ještě obdélník o rozměrech $2 \times (n-2)$, což lze provést q_{n-2} způsoby, viz obrázek 1(c).

Jiné možnosti než ty popsané v bodech (1) a (2) neexistují a žádné pokrytí nemůže být zároveň zahrnuto v případu (1) i v případu (2), proto platí

$$q_n = q_{n-1} + q_{n-2} \quad \text{pro } n \geq 3, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = 2.$$

Jelikož $q_1 = F_2$, $q_2 = F_3$ a každý další člen posloupnosti $\{q_n\}$ je součtem předchozích dvou členů, platí

$$q_n = F_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Tedy odpovědí na otázku, kolika způsoby můžeme obdélník $2 \times n$ pokrýt dlaždicemi 2×1 nebo 1×2, je $(n+1)$-ní Fibonacciho číslo.

3 Některé vlastnosti Fibonacciho čísel

Fibonacciho posloupnost má řadu zajímavých vlastností. Zmiňme a dokažme jednu související s dělitelností, kterou posléze využijeme k návrhu matematického kouzla ([1]):

$$\sum_{k=n}^{n+5} F_k = F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5} = 4 \cdot F_{n+4}, \quad n \geq 0.$$

Tedy součet šesti po sobě jdoucích Fibonacciho čísel je roven čtyřnásobku v pořadí pátého z těchto čísel. Pro důkaz tohoto tvrzení vyjádříme čísla $F_{n+2}, \ldots, F_{n+5}$ pomocí F_n a F_{n+1} opakovaným využitím toho, že každý další člen je součtem dvou předchozích:

$$\begin{gathered} F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5} = \\ = F_n + F_{n+1} + (F_n + F_{n+1}) + (F_n + 2F_{n+1}) + (\underbrace{2F_n + 3F_{n+1}}_{F_{n+4}}) + (3F_n + 5F_{n+1}) = \\ = 8F_n + 12F_{n+1} = 4 \cdot F_{n+4} \end{gathered}$$

Všimněme si, že v důkazu nebyl potřeba předpoklad, že čísla F_n a F_{n+1} jsou členy Fibonacciho posloupnosti. Jinými slovy, dokázaný vztah platí pro každou posloupnost, která je určená stejným rekurentním vzorcem. Dalším příkladem takové posloupnosti jsou Lucasova čísla, definovaná následovně:

(1) $L_0 = 2$, $L_1 = 1$.
(2) $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $n \geq 2$.

Jako první dva členy posloupnosti můžeme ovšem zvolit jakákoli dvě čísla, čehož využijeme v následující sekci k formulaci matematického kouzla. Než tak učiníme, zmiňme některé další vlastnosti Fibonacciho čísel, například:

$$\sum_{k=n}^{n+9} F_k = 11F_{n+6},$$

tedy součet deseti po sobě jdoucích Fibonacciho čísel je roven jedenáctinásobku v pořadí sedmého z těchto čísel. Důkaz lze provést stejnou technikou jako u předchozího tvrzení a opět zjistíme, že tvrzení platí i pro ostatní posloupnosti určené stejným rekurentním vzorcem.

Sekci uzavřeme důkazem jedné ze známých a zajímavých vlastností Fibonacciho posloupnosti:

$$F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n, \quad n \geq 0,\ m \geq 1.$$

Tvrzení snadno dokážeme pro libovolně zvolené $n \geq 0$ indukcí podle m. Zřejmě platí

$$F_{n+1} = F_1 F_{n+1} + F_0 F_n = 1 \cdot F_{n+1} + 0 \cdot F_n,$$
$$F_{n+2} = F_2 F_{n+1} + F_1 F_n = 1 \cdot F_{n+1} + 1 \cdot F_n.$$

Dále pro $m \geq 2$ předpokládáme

$$F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n,$$
$$F_{n+m-1} = F_{m-1} F_{n+1} + F_{m-2} F_n.$$

Potom odvozujeme

$$\begin{aligned} F_{n+m+1} &= F_{n+m} + F_{n+m-1} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n + F_{m-1} F_{n+1} + F_{m-2} F_n = \\ &= (F_m + F_{m-1}) \cdot F_{n+1} + (F_{m-1} + F_{m-2}) \cdot F_n = F_{m+1} F_{n+1} + F_m F_n. \end{aligned}$$

V [1] najdeme pěkný kombinatorický důkaz tohoto tvrzení, který vychází z příkladu o dláždění obdélníka. Poznamenejme, že například pro Lucasova čísla tento vztah neplatí; důkaz indukcí by kvůli odlišným hodnotám prvních dvou členů nešel ani nastartovat. Na druhou stranu zřejmě platí

$$L_{n+m} = F_m L_{n+1} + F_{m-1} L_n, \quad n \geq 0,\ m \geq 1.$$

4 Kouzlo s rekurentním vztahem

- Zvol libovolné první a libovolné druhé číslo.
- Třetí číslo urči jako součet zvolených dvou čísel.
- Každé další číslo urči jako součet dvou jemu předcházejících čísel.
- Pokračuj, dokud nebudeš mít celkem 6 čísel.
- Všech šest čísel sečti.
- Výsledek vyděl pátým číslem.
- Nyní uhodnu tvůj výsledek. Je to 4?

Kouzlo lze formulovat také takto: Zvol čísla a_1, a_2 a pro $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ urči $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Poté vypočti $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) : a_5$. Vyjde 4?

Poznamenejme rovnou, že kouzlo nemusí fungovat. Na vině může být chyba ve výpočtu žáka, ale také volba počátečních dvou čísel. Ta nesmí být zvolena tak, aby a_5 bylo rovno nule. Po prezentaci kouzla a následném důkazu, že kouzlo „většinou funguje“, který provedeme analogicky k důkazu v předchozí sekci, se tedy nabízí námět na diskuzi: kdy kouzlo selže?

Ve třech ze čtyř tříd, ve kterých jsem toto kouzlo při výuce prezentoval (konkrétně se jednalo o dvě sekundy a dvě kvinty osmiletého gymnázia), si alespoň jeden z žáků zvolil počáteční dvě čísla 0, 0. Pravděpodobně proto, že jsem žákům radil, ať nevolí příliš velká čísla, jinak bude výpočet náročný.

V jedné z těchto tříd si jeden žák dokonce zvolil nenulová čísla, pro která kouzlo také selhalo. Pro diskuzi je však podle mě ideální stav, kdy všichni žáci zvolili pro kouzlo vhodná čísla, neboť potom mají všichni čas se zamyslet, v čem by mohl eventuálně být problém. Je možné, že se malá skupina žáků uchýlí k zběsilému volení dalších dvojic a sérii bleskurychlých výpočtů, aby získali nadhled nad tím, jak se mohou chovat různé posloupnosti, které je možné na základě volby získat.

Abychom docílili úplného popisu možností volby počátečních dvou čísel, při kterých kouzlo selže, položíme páté číslo rovno nule a zjistíme hodnotu prvních dvou čísel, tedy:

$$0 = a_5 = a_3 + a_4 = (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) = (a_1 + a_2) + (2a_2 + a_1) = 2a_1 + 3a_2.$$

Tedy jakákoli zvolená čísla a_1, a_2 splňující rovnost $2a_1 + 3a_2 = 0$ by při realizaci kouzla vedla na dělení nulou. Není od věci v této fázi nechat žáky, ať se sami přesvědčí při volbě nějakých konkrétních čísel, třeba $a_1 = -3$, $a_2 = 2$.

Vidíme, že selhání kouzla se můžeme snadno vyhnout, pokud budeme požadovat, aby zvolená čísla byla kladná. Na druhou stranu, můžeme volit čísla desetinná nebo zlomky, čehož lze vhodně využít k procvičení základních početních operací s těmito čísly na vyšším stupni základní školy.

5 Kouzlo s trojciferným číslem

Pro lepší srozumitelnost obohatíme postup při provádění následujícího matematického kouzla o příklad.

- Zvol libovolné trojciferné číslo obsahující alespoň dvě různé cifry (např. 700).
- Uspořádej cifry svého čísla nejdříve od největší po nejmenší a poté od nejmenší po největší, čímž získáš dvě různá trojciferná čísla – v případě výskytu nul povolíme, aby zápis menšího čísla začínal nulou (tedy 700 a 007).
- Tato dvě čísla od sebe odečti (menší od většího), čímž získáš nové číslo (tedy $700 - 007 = 700 - 7 = 693$).
- Předchozí dva kroky opakuj do té doby, dokud se nově získané číslo liší od předchozího (693 se liší od 700, tedy se vracíme k druhému kroku). Pokud je nové číslo jen dvojciferné, přidej jako třetí cifru nulu.
- Uhodnu, na kterém čísle výpočet skončí. Je to 495?

Proveďme zbývající výpočty pro zvolené číslo:

$$963 - 369 = 594, \quad 954 - 459 = 495.$$

Dále by se opakoval stejný výpočet, tedy skutečně končíme na čísle 495. Na základní škole lze kouzlo do vyučovací hodiny zařadit jako zpestření při procvičování písemného odčítání, jistě ale zaujme i žáky středních škol, kde se můžeme alespoň zaobírat otázkou, proč toto kouzlo funguje. V [3] najdeme návrh na rozvinutí této matematické zajímavosti do didaktické hry, nazvané „Stavíme dům“:

Každý žák zvolí libovolné trojciferné číslo s různými ciframi, např. 213. *(To bude tvořit „střechu“.) Pak sestaví z jeho cifer největší a nejmenší možné číslo, např.* 321 *a* 123 *a odečte je. Dostane nové číslo, zde* 198. *Tím má „postaveno nejvyšší patro“. Nyní postup opakuje, např. zde* $981 - 189 = 792$*, tvoří předposlední patro atd. až se už nebudou vytvářet další nová čísla. Tím je postup ukončen, „dům je postaven“.*

Děti počítají („staví dům“) se zájmem. Lze i vyhlásit soutěž o nejlepšího stavbaře, který postaví nejvyšší dům.

Pro žáky nejvyšších tříd ZŠ můžeme hru zadat jako problémovou úlohu s cílem objevit, proč vždy končí číslem 495 *a jak vysoký může dům maximálně být.*

213
321 −123
198
981 −189
792
972 −279
693
963 −369
594
954 −459
495

Tabulka reprezentuje postavený dům o pěti patrech. Všimněme si, že se pravidla volby počátečního čísla v popsané didaktické hře mírně liší, a to tak, že všechny tři číslice musejí být navzájem různé. Dále se budeme opět věnovat matematickému kouzlu tak, jak bylo popsáno v úvodu sekce.

Ukažme, že kouzlo funguje, tedy, že výpočet vždy skončí u čísla 495. Zvolme trojici číslic a, b, c splňující $c \geq b \geq a$ a $c > a$. Největší trojciferné číslo složené ze všech těchto číslic má tedy zápis cba, nejmenší má zápis abc a rozdílem těchto čísel je

$$(100c + 10b + a) - (100a + 10b + c) = 99c - 99a = 99(c - a).$$

Rozdíl $c - a$ může nabývat jen hodnot $1, \ldots, 9$, tedy i výraz $99(c - a)$ může nabývat pouze devíti různých hodnot, jsou to tyto: 99, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891. Podívejme se, jak by vypadaly další kroky výpočtu pro tato čísla:

$$\begin{aligned}
990 - 99 &= 891,\\
981 - 189 &= 792,\\
972 - 279 &= 693,\\
963 - 279 &= 594,\\
954 - 459 &= 495.
\end{aligned}$$

Ukázali jsme nejen, že výpočet se zastaví na čísle 495, ale také to, že se k číslu 495 dostaneme po nejvýše šesti odčítáních. Přitom tohoto maxima dosáhneme pouze v případě, kdy je rozdíl čísel cba a abc roven 99.

Položme si další otázku: kolik existuje takových čísel, pro která je počet odčítání při provádění kouzla maximální?

Jedná se o poměrně jednoduchou, avšak zajímavou kombinatorickou úlohu. Již víme, že takové číslo musí být složené z číslic a, b, c splňujících $c \geq b \geq a$ a $c > a$, přičemž rozdíl čísel cba a abc je roven 99 (vyhovuje tedy například číslo 100, neboť $100 - 001 = 100 - 1 = 99$). Musí platit $c = a + 1$, tedy pro b platí buď $b = c$, nebo $b = a$. Jinými slovy, pro každou volbu $c \in \{1, \ldots, 9\}$ existují dvě možnosti volby b a a je určeno jednoznačně. Tím dostáváme 18 kombinací číslic: 100, 110, 211, 221, 322, 332, 433, 443, 544, 554, 655, 665, 766, 776, 877, 887, 988, 998 (v souvislosti s hrou „Stavíme dům“ můžeme v tuto chvíli poznamenat, že maximální počet pater domu je 5 – nikoli 6, neboť pravidla hry zakazují volbu kteréhokoli z vypsaných čísel). Kromě čísla 110 však vyhovuje i číslo 101. Jelikož musíme na začátku kouzla volit trojciferné číslo, permutaci číslic 011 neuvažujeme. Pro čísla $211, \ldots, 988$ přicházejí v úvahu všechny tři permutace (např. pro kombinaci číslic 211 jsou to čísla 211, 121, 112). Celkový počet čísel, pro která je počet odčítání při provádění kouzla maximální, je tedy $3 + 3 \cdot 16 = 51$.

6 Kaprekarova konstanta

Podobné kouzlo lze formulovat i pro čtyřciferná čísla.

- Zvol libovolné čtyřciferné číslo obsahující alespoň dvě různé cifry (např. 3022).
- Uspořádej cifry svého čísla nejdříve od největší po nejmenší a poté od nejmenší po největší, čímž získáš dvě různá čtyřciferná čísla – v případě výskytu nul povolíme, aby zápis menšího čísla začínal nulou (tedy 3220 a 0223).
- Tato dvě čísla od sebe odečti (menší od většího), čímž získáš nové číslo (tedy $3220 - 0223 = 3220 - 223 = 2997$).

- Předchozí dva kroky opakuj do té doby, dokud se nově získané číslo liší od předchozího (2997 se liší od 3022, tedy se vracíme k druhému kroku). Pokud je nové číslo jen trojciferné, přidej jako čtvrtou cifru nulu.
- Uhodnu, na kterém čísle výpočet skončí. Je to 6174?

Číslo 6174, u kterého výpočet vždy skončí, se nazývá Kaprekarova konstanta. Důkaz je poněkud komplikovaný, jeho náznak a další komentáře a zajímavosti lze najít v [2]. Za zmínku stojí, že v případě dvouciferných a pěticiferných čísel výpočty nekonvergují k žádnému číslu, nýbrž se postupně získávaná čísla točí v cyklu (u dvouciferných čísel lze toto snadno ukázat i ve výuce). V případě šesticiferných čísel existují dvě hodnoty, na kterých může výpočet skončit (549945, 631764), nicméně i zde je podle volby počátečního čísla možné, že se výpočet zacyklí.

7 Závěr

Kouzelníci a iluzionisté se živí představováním triků, které mají šokovat diváka a ideálně vzbudit dojem, že autor triku disponuje nadpřirozenými schopnostmi. Existují však kouzelníci, kteří jsou ochotni se o podstatu svých triků podělit. Stejně tak matematická kouzla, která mohou působit na první pohled záhadně, spočívají v logice a matematických vztazích, které lze často snadno vysvětlit, čehož lze využít i při výuce matematiky na základní a střední škole.

Literatura

[1] R. P. Grimaldi, *Fibonacci and Catalan numbers. An introduction*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2012.

[2] Y. Nishiyama, *The Weirdness of Number 6174*, International Journal of Pure and Applied Mathematics 80 (2012), 363–373.

[3] E. Krejčová, M. Volfová, *Didaktické hry v matematice*, Vysoká škola pedagogická v Hradci Králové, Gaudeamus, 1994.

RNDr. Jindřich Michalik
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
jindrich.michalik@seznam.cz

KRÁJENÍ KOLÁČE A JINÉ ÚLOHY

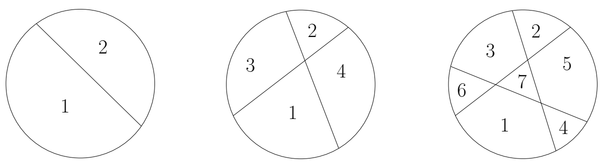
Antonín Slavík

Obsahem tohoto příspěvku jsou vybrané úlohy propojující kombinatoriku s elementární planimetrií a stereometrií. Z velké části jsou řešitelné pomocí středoškolské matematiky a mohou posloužit ke zpestření výuky nebo jako motivace pro studenty, kterým připadá kombinatorika odtažitá, ale mají rádi geometrické problémy. Při řešení úloh využijeme nejrůznější techniky: rekurentní vztahy, Eulerův vzorec, důkaz pomocí bijekce, součty kombinačních čísel a stereografickou projekci. Výklad je inspirován první kapitolou knihy [6].

1 Krájení koláče

Úloha 1. *Na jaký maximální počet kusů lze rozkrájet koláč ve tvaru kruhu pomocí n rovných řezů?*

Obrázek 1 znázorňuje situaci pro jeden, dva a tři řezy.

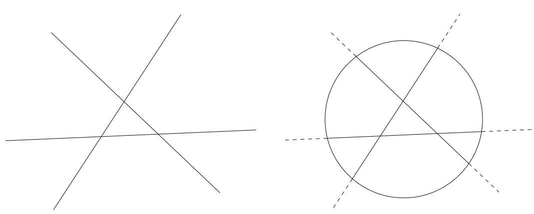


Obr. 1: Maximální počet kusů pro jeden, dva a tři řezy

Problém lze převést na následující úlohu, kterou roku 1826 vyřešil švýcarský matematik Jakob Steiner [9].

Úloha 2. *Jaký maximální počet oblastí může vzniknout, jestliže pomocí n přímek rozdělíme rovinu?*

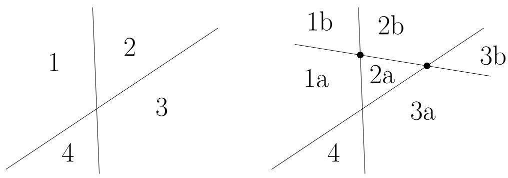
Proč se jedná o ekvivalentní úlohy? Mějme rovinu rozdělenou přímkami na jistý počet oblastí. Průsečíky všech přímek leží uvnitř dostatečně velké kružnice. Jejím sestrojením získáme dělení kruhu na stejný počet oblastí (viz obr. 2). Na druhou stranu je zřejmé, že pokud vezmeme libovolné rozřezání kruhu, odstraníme hraniční kružnici a prodloužíme úsečky představující řezy na přímky, pak získáme dělení roviny na stejný nebo větší počet oblastí (větší bude tehdy, pokud se některé dvě přímky protínají na hranici nebo vně kruhu).



Obr. 2: Přímky v rovině a dělení koláče se stejným počtem oblastí

Nechť L_n je maximální počet oblastí v rovině při sestrojení n přímek. Platí $L_1 = 2$ (jedna přímka dělí rovinu na 2 oblasti) a $L_2 = 4$ (dvě různoběžky dělí rovinu na 4 oblasti, zatímco dvě rovnoběžky pouze na 3 oblasti).

Představme si situaci, kdy v rovině je $n - 1$ přímek. Pak n-tá přímka může protnout všechny z nich (pokud je s nimi různoběžná). Příslušné průsečíky dělí n-tou přímku na nejvýše n úseků (může jich být méně, pokud jsou některé průsečíky totožné) a každý takový úsek dělí některou stávající oblast roviny na dvě podoblasti. Při sestrojení n-té přímky proto může vzniknout maximálně n nových oblastí; bude jich právě n, pokud přímky volíme tak, aby každé dvě byly různoběžné a žádné tři neměly společný bod (viz obr. 3).



Obr. 3: Dvě různoběžky dělí rovinu na 4 oblasti (vlevo). Přidáním třetí přímky se počet oblastí se zvýší o tři (vpravo).

Ukázali jsme, že pro $n \geq 2$ platí rekurentní vztah

$$L_n = L_{n-1} + n.$$

Naším cílem je najít explicitní vzorec pro L_n. Opakovaným použitím rekurentního vztahu dostaneme

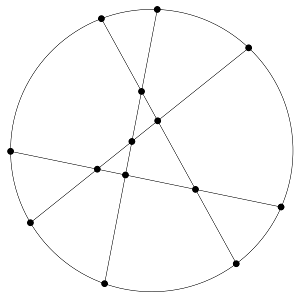
$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1} + n = \\ &= L_{n-2} + (n-1) + n = \\ &= L_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n = \\ &\dots \\ &= L_1 + 2 + 3 + \dots + n = \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1, \end{aligned}$$

čímž je úloha vyřešena.[1]

Ukažme si další dva přístupy k odvození vzorce pro L_n, které nevyužívají rekurentního vztahu, ale pouze skutečnosti, že optimální dělení je takové, kde žádné dvě přímky nejsou rovnoběžné a žádné tři nemají společný bod. Vrátíme se k interpretaci s krájením koláče.

[1] Je možné postupovat i jinak a všimnout si, že diference $L_n - L_{n-1}$ je lineární funkcí v proměnné n. Poučený čtenář ví, že L_n pak nutně musí být polynomem druhého stupně v proměnné n a jeho koeficienty lze najít pomocí počátečních členů posloupnosti (viz [6, oddíl 1.3]). Stejným způsobem lze řešit i další rekurentní rovnice v tomto článku.

Druhý způsob řešení využívá Eulerův vzorec pro rovinné grafy (viz např. [5]): Pro každý rovinný graf s v vrcholy, h hranami a s stěnami platí $v + s = h + 2$.



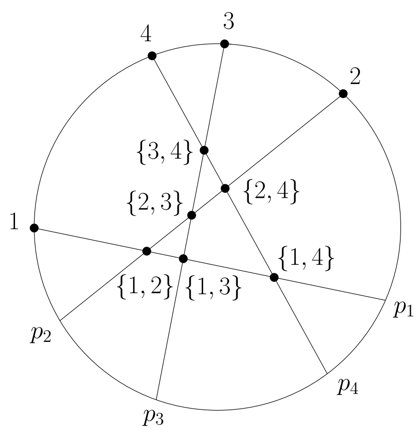
Obr. 4: Rovinný graf představující rozkrájený koláč

Rozkrájený koláč na obr. 4 můžeme chápat jako rovinný graf. Jeho vrcholy (na obrázku vyznačeny tečkami) jsou průsečíky dvojic řezů a průsečíky řezů s hraniční kružnicí, celkem jich je $v = \binom{n}{2} + 2n$. Každý řez je tvořen n hranami a podél okraje kružnice máme dalších $2n$ hran, tedy $e = n^2 + 2n$. Počet stěn je roven počtu kusů koláče zvětšenému o 1 (vnější oblast koláče je neomezenou stěnou grafu), tj. $s = L_n + 1$. Podle Eulerova vzorce tedy platí

$$\binom{n}{2} + 2n + L_n + 1 = n^2 + 2n + 2,$$

odkud po úpravě plyne $L_n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 1$.

Ve třetím řešení znázorněném na obrázku 5 jsou řezy označeny $p_1, \dots, p_n$. Předpokládejme, že každý kus koláče má právě jeden nejvýše položený bod, tj. bod s největší y-ovou souřadnicí. To nastává tehdy, pokud žádný řez není vodorovný – v opačném případě stačí koláč mírně pootočit. Každému kousku tedy přiřadíme odpovídající nejvyšší bod (na obrázku vyznačen tečkou). Každému z těchto bodů dále přiřadíme jisté označení: Výše položený průsečík úsečky p_i s kružnicí označíme i a průsečík úseček p_i, p_j označíme $\{i, j\}$.



Obr. 5: Kousky koláče a jejich nejvyšší body

Každý bod označený jedním číslem je nejvyšším bodem právě jednoho kusu koláče s výjimkou bodu, který je na kružnici nejvýše – ten je nejvyšším bodem dvou kusů. Každý bod označený dvojicí čísel je pak nejvyšším bodem právě jednoho kusu. Celkový počet kusů je tedy[2]

$$L_n = 1 + n + \binom{n}{2} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}.$$

Čtenář se smyslem pro spravedlnost se může ptát, zda je možné dosáhnout toho, aby všechny kousky koláče byly aspoň přibližně stejně velké. V článku [2] je dokázáno, že nikoliv: Pokud je jednotkový kruh rozkrájen na L_n oblastí, pak největší z nich má obsah aspoň $\frac{\pi}{4n}$. Zároveň je zřejmé, že obsah nejmenší oblasti je menší nebo roven $\frac{\pi}{L_n}$. Poměr obsahů největší a nejmenší části je tedy větší nebo roven než

$$\frac{\frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{L_n}} = \frac{L_n}{4n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2} + 1}{4n} = \frac{n^2 + n + 2}{8n} \geq \frac{n+1}{8}.$$

Zlomek na pravé straně, a tedy i poměr obsahů největší a nejmenší části koláče, roste nade všechny meze.

2 Další úlohy o přímkách v rovině

Ukažme si dvě varianty úlohy 2 s přímkami, z nichž některé jsou rovnoběžné nebo procházejí jedním bodem. Jsou převzaty z [7, oddíl 9.3], kde lze najít i další varianty.

Úloha 3. *V rovině je $q + r$ přímek, z nichž žádné tři nemají společný bod, r přímek je navzájem rovnoběžných a žádné jiné dvě nejsou rovnoběžné. Na kolik oblastí je rovina těmito přímkami rozdělena?*

Nechť $a(q, r)$ značí hledaný počet oblastí. Z řešení úlohy 2 víme, že $a(q, 0) = \frac{q(q+1)}{2} + 1$. Podobnou úvahou jako v úloze 2 dojdeme k rekurentnímu vztahu $a(q, r) = a(q, r - 1) + q + 1$ pro $r \geq 1$. Odtud plyne

$$a(q, r) = a(q, 0) + r(q + 1) = \frac{q(q + 1)}{2} + 1 + r(q + 1).$$

Úloha 4. *V rovině je $q + r$ přímek, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné, q přímek se protíná v jistém bodě A, r přímek se protíná v jiném bodě B a žádná přímka neprochází oběma body A, B. Na kolik oblastí je rovina těmito přímkami rozdělena?*

Nechť $b(q, r)$ značí hledaný počet oblastí. Platí $b(q, 0) = 2q$. Podobně jako v úloze 2 dojdeme ke vztahům $b(q, 1) = b(q, 0) + q + 1 = 3q + 1$ a $b(q, r) = b(q, r - 1) + q + 2$ pro $q \geq 2$. Odtud je zřejmé, že

$$b(q, r) = b(q, 1) + (r - 1)(q + 2) = qr + 2q + 2r - 1.$$

[2] Užitečnost zápisu ve tvaru součtu tří kombinačních čísel se ukáže později.

Poznamenejme, že existuje obecný vzorec, který zahrnuje jako speciální případy řešení úloh 2, 3 i 4: Nechť je v rovině dáno n přímek, mezi kterými existuje p skupin rovnoběžek; v i-té skupině je $\mu_i \geq 2$ rovnoběžek. Žádné jiné dvě přímky nejsou rovnoběžné. Dále nechť existuje m bodů $A_1, \ldots, A_m$, kterými procházejí aspoň tři přímky; nechť bodem A_i prochází $\lambda_i \geq 3$ přímek. Žádné jiné tři přímky nemají společný bod. Pak celkový počet oblastí, na které je rovina rozdělena danými n přímkami, je roven

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1 - \sum_{i=1}^{p} \binom{\mu_i}{2} - \sum_{i=1}^{m} \binom{\lambda_i - 1}{2}.$$

Vzorec pochází od Samuela Robertse [8] z roku 1889, důkaz lze najít v [11]. Úloha 2 odpovídá situaci $p = m = 0$, úloha 3 volbě $n = q + r$, $p = 1$, $\mu_1 = k$ a $m = 0$, zatímco úloha 4 volbě $n = q + r$, $p = 0$, $m = 2$, $\lambda_1 = q$, $\lambda_2 = r$. Čtenář si může ověřit, že v těchto případech dává vzorec správné výsledky.

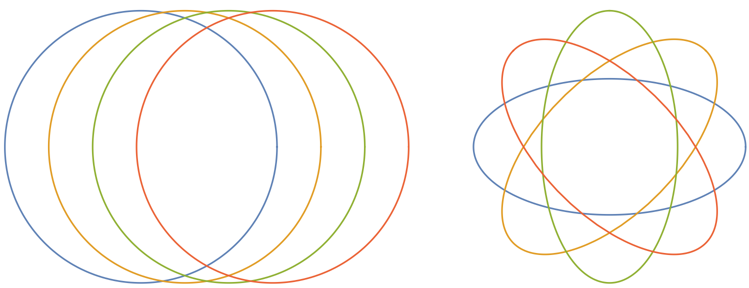
Místo přímek lze uvažovat i jiné křivky v rovině, například kružnice – tuto variantu úlohy lze najít již ve Steinerově článku [9]. Další dvě části následující úlohy týkající se elips a parabol jsou převzaty z [6, str. 24–25] a [4, str. 150–151].

Úloha 5. *Jaký maximální počet oblastí může vzniknout, jestliže rozdělíme rovinu pomocí*

(a) *n kružnic,*
(b) *n elips,*
(c) *n parabol?*

Nechť K_n, E_n, P_n značí hledaný maximální počet oblastí v jednotlivých částech úlohy.

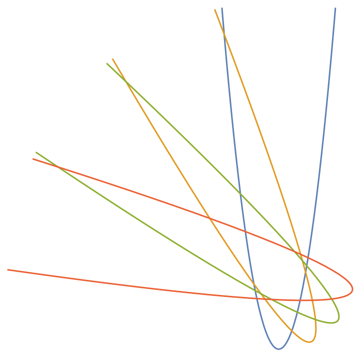
Pro kružnice platí $K_1 = 2$ a podobnou úvahou jako v úloze 2 se dojde k rekurentnímu vztahu $K_n = K_{n-1} + 2(n-1)$, $n \geq 2$. Maximální počet oblastí vznikne tehdy, když každé dvě kružnice mají dva průsečíky a žádné tři nemají společný bod (viz obr. 6 vlevo). Řešením rekurentní rovnice podobně jako v úloze 2 získáme $K_n = n^2 - n + 2$. Ke stejnému výsledku lze dojít pomocí Eulerovy věty dosazením $v = 2\binom{n}{2}$, $h = 4v/2 = 2v$, $s = K_n$.



Obr. 6: Maximální počet oblastí pro čtyři kružnice, resp. elipsy

Pro elipsy platí $E_1 = 2$ a podobnou úvahou jako v úloze 2 se dojde k rekurentnímu vztahu $E_n = E_{n-1} + 4(n-1)$, $n \geq 2$. Maximální počet oblastí vznikne tehdy, když každé dvě elipsy mají čtyři průsečíky a žádné tři nemají společný bod (viz obr. 6 vpravo). Řešením rekurentní rovnice získáme $E_n = 2n^2 - 2n + 2$. Ke stejnému výsledku lze dojít pomocí Eulerovy věty dosazením $v = 4\binom{n}{2}$, $h = 4v/2 = 2v$, $s = E_n$.

Pro paraboly platí $P_1 = 2$ a podobnou úvahou jako v úloze 2 lze dojít[3] k rekurentnímu vztahu $P_n = P_{n-1} + 4n - 3$, $n \geq 2$. Maximální počet oblastí vznikne tehdy, když každé dvě paraboly mají čtyři průsečíky a žádné tři nemají společný bod (viz obr. 7). Řešením rekurentní rovnice získáme $P_n = 2n^2 - n + 1$.



Obr. 7: Maximální počet oblastí pro čtyři paraboly

3 Krájení melounu a další úlohy v prostoru

Podívejme se na prostorovou verzi úlohy 1.

Úloha 6. *Na jaký maximální počet kusů lze rozkrájet meloun ve tvaru koule pomocí n rovných řezů?*

Budeme postupovat podobně jako v rovině a uvědomíme si, že úlohu lze převést na následující problém.

Úloha 7. *Jaký maximální počet oblastí může vzniknout, jestliže pomocí n rovin rozdělíme trojrozměrný prostor?*

Nechť M_n značí hledaný maximální počet oblastí. Zřejmě platí $M_1 = 2$ (jedna rovina rozdělí prostor na 2 oblasti) a $M_2 = 4$ (dvě různoběžné roviny rozdělí prostor na 4 oblasti, zatímco dvě rovnoběžné roviny pouze na 3 oblasti). Postupujme podobně jako při řešení úlohy 2: n-tá rovina protne nejvýše $n - 1$ dříve sestrojených rovin (může jich být méně, pokud je nová rovina rovnoběžná

[3] Situace je o tentokrát o něco složitější než u kružnic a elips. Je užitečné si představit, že parabola je svým vrcholem rozdělena na dvě shodné části se společným krajním bodem, které přidáváme postupně. Řešení úlohy se nezmění, pokud bychom místo parabol uvažovali dvojice polopřímek se společným krajním bodem.

s některou dříve sestrojenou). Vznikne v ní nejvýše $n-1$ přímek, které ji dělí na maximálně L_{n-1} rovinných oblastí. Každá rovinná oblast v n-té rovině dělí některou stávající oblast prostoru na dvě podoblasti. Při sestrojení n-té roviny tedy může vzniknout maximálně L_{n-1} nových oblastí; bude jich právě L_{n-1}, pokud v n-té rovině vznikne $n-1$ přímek, které jsou navzájem různoběžné a žádné tři nemají společný bod. Stačí tedy roviny volit tak, aby každé dvě byly různoběžné, průsečnice libovolných dvou rovin byly různoběžné a žádné čtyři roviny neměly společný bod.

Ukázali jsme, že pro $n \geq 2$ platí $M_n = M_{n-1} + L_{n-1}$. Opakovaným použitím tohoto vztahu dostáváme

$$\begin{aligned} M_n &= M_{n-1} + L_{n-1} = \\ &= M_{n-2} + L_{n-2} + L_{n-1} = \\ &\dots \\ &= M_2 + L_2 + \cdots + L_{n-1} = \\ &= 4 + \sum_{i=2}^{n-1} L_i = \\ &= 4 + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\binom{i}{0} + \binom{i}{1} + \binom{i}{2} \right) = \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{0} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{i}{1} + \sum_{i=2}^{n-1} \binom{i}{2} = \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}, \end{aligned}$$

kde poslední rovnost plyne ze známého vztahu[4] $\sum_{i=j}^{n-1} \binom{i}{j} = \binom{n}{j+1}$.

Podobným způsobem je možné pokračovat do vyšších dimenzí: Maximální počet oblastí, které vzniknou, jestliže pomocí n nadrovin rozdělíme d-rozměrný prostor, lze vypočítat pomocí rekurentního vztahu, ve kterém vystupuje počet řešení stejné úlohy v $(d-1)$-rozměrném prostoru. Čtenáře již asi nepřekvapí výsledek: Maximální počet oblastí pro n nadrovin v d-rozměrném prostoru je (viz např. [13])

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{d}.$$

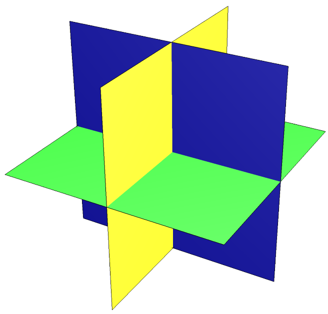
Zůstaňme však v trojrozměrném prostoru a podívejme se na dvě varianty úlohy 7. Následující problém převzatý z [3, úloha 137] lze řešit několika odlišnými způsoby.

---

[4] Obě strany vztahu udávají počet způsobů, jak z množiny $\{0, \dots, n-1\}$ vybrat neuspořádanou $(j+1)$-tici prvků bez opakování. Číslo $\binom{i}{j}$ odpovídá počtu $(j+1)$-tic, jejichž největší prvek je i.

Úloha 8. *V prostoru je n rovin. Všechny mají společný bod, ale žádné tři nemají společnou přímku. Na kolik oblastí je prostor těmito rovinami rozdělen?*

Jestliže R_n značí hledaný počet oblastí, pak $R_1 = 2$. Uvažujme situaci, kdy máme $n-1$ rovin procházejících jistým bodem A a přidáváme n-tou rovinu procházející tímto bodem. Ta protíná všech $n-1$ předchozích rovin. Jelikož žádné tři roviny nemají společnou přímku, v n-té rovině vznikne $n-1$ různých přímek, které se protínají v bodě A a dělí n-tou rovinu na $2(n-1)$ rovinných oblastí (úhlů). Každá z těchto rovinných oblastí dělí některou stávající oblast prostoru na dvě podoblasti, platí tedy $R_n = R_{n-1} + 2(n-1)$, $n \geq 2$. Řešením této rekurentní rovnice dojdeme k výsledku $R_n = 2 + n(n-1)$.



Obr. 8: Přípustná konfigurace tří rovin z úlohy 8

Lze postupovat i jinak: Představme si kulovou plochu se středem v bodě, kde se protínají všechny roviny. Průsečnice kulové plochy s rovinami jsou hlavní kružnice a jejich oblouky lze chápat jako hrany grafu nakresleného na kulové ploše. Počet stěn tohoto grafu je roven hledanému počtu oblastí R_n. Pro grafy na kulové ploše platí Eulerův vzorec $v + s = h + 2$, neboť pomocí stereografické projekce[5] lze graf promítnout do roviny při zachování počtu vrcholů, hran i stěn. V našem případě máme $v = 2\binom{n}{2}$ (průsečnici libovolných dvou rovin odpovídají dva body na kulové ploše). Z každého vrcholu vedou čtyři hrany, proto $h = 4v/2 = 2v$ (výraz $4v$ započítává každou hranu dvakrát). Dostáváme tedy $2\binom{n}{2} + R_n = 4\binom{n}{2} + 2$ a po úpravě $R_n = 2\binom{n}{2} + 2$.

Hodnota R_n se shoduje s číslem K_n udávajícím maximální počet oblastí v rovině rozdělené n kružnicemi. Tato shoda není náhodná: Uvažujme opět kulovou plochu se středem v bodě, kde se protínají všechny roviny. Průsečnice rovin s kulovou plochou jsou hlavní kružnice, které ji dělí na R_n oblastí. Pomocí stereografické projekce promítneme kulovou plochu do roviny, která se jí dotýká v bodě neležícím na žádné ze zmíněných hlavních kružnic. Z vlastností projekce plyne, že získáme n kružnic v rovině, přičemž každé dvě se protínají ve dvou bodech a žádné tři nemají společný bod. Počet oblastí na kulové ploše, který se rovná R_n, se shoduje s počtem oblastí v rovině, který je roven K_n.

Další úlohu lze najít např. v [1, str. 304] nebo v [12, úloha 45].

[5] Viz např. `https://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection`.

Úloha 9. *Jaký maximální počet oblastí může vzniknout, jestliže pomocí n kulových ploch rozdělíme trojrozměrný prostor?*

Všimněme si nejprve, že maximální počet oblastí na kulové ploše, které mohou vzniknout, pokud na ni nakreslíme n kružnic, je K_n. Tato skutečnost, kterou vzápětí využijeme, plyne z úlohy 5a) a z vlastností stereografické projekce, která mezi sebou převádí kružnice na kulové ploše a kružnice v rovině.

Vraťme se k zadané úloze. Jestliže S_n značí hledaný maximální počet oblastí, pak $S_1 = 2$, $S_2 = 4$. Pokud je již sestrojeno $n-1$ kulových ploch, pak n-tá kulová plocha může protnout všechny z nich. Tím v ní vznikne nejvýše $n-1$ kružnic, které ji dělí na maximálně K_{n-1} oblastí. Bude jich právě K_{n-1}, pokud v n-té kulové ploše vznikne $n-1$ kružnic, z nichž každé dvě se protínají ve dvou bodech a žádné tři nemají společný bod. Stačí tedy kulové plochy volit tak, aby se každé dvě protínaly (nikoliv pouze dotýkaly), každé tři měly společný bod a žádné čtyři neměly společný bod. Každá z K_{n-1} oblastí na n-té kulové ploše dělí některou stávající oblast prostoru na dvě podoblasti. Pro $n \geq 2$ tedy platí $S_n = S_{n-1} + K_{n-1}$. Zároveň $K_i = i^2 - i + 2 = 2\binom{i}{2} + 2$, tudíž

$$
\begin{aligned}
S_n &= S_{n-1} + K_{n-1} = \\
&\dots \\
&= S_2 + K_2 + \cdots + K_{n-1} = \\
&= 4 + 2\sum_{i=2}^{n-1}\left(\binom{i}{2} + 1\right) = \\
&= 4 + 2(n-2) + 2\sum_{i=2}^{n-1}\binom{i}{2} = \\
&= 2n + 2\binom{n}{3} = \\
&= \frac{n}{3}(n^2 - 3n + 8).
\end{aligned}
$$

Poznamenejme, že řešení úloh 7 a 9 pochází opět od Steinera [9].

4 Závěr

Následující tabulka uvádí čísla některých posloupností z tohoto článku ve známé online encyklopedii OEIS [10], kde lze dohledat další užitečné informace.

L_n	úloha 2	`A000124`
$K_n = R_n$	úlohy 5a), 8	`A014206`
E_n	úloha 5b)	`A051890`
P_n	úloha 5c)	`A130883`
M_n	úloha 7	`A000125`
S_n	úloha 9	`A046127`

Další zajímavé úlohy týkající se dělení roviny či prostoru na oblasti je možné najít např. v [1, oddíl 3.2].

Literatura

[1] J. Herman, R. Kučera, J. Šimša, *Metody řešení matematických úloh II*, Masarykova univerzita, 2004.

[2] D. Ismailescu, *Slicing the pie*, Discrete & Computational Geometry 30 (2003), 263–276.

[3] J. D. E. Konhauser, D. Velleman, S. Wagon, *Which Way Did the Bicycle Go? ... and Other Intriguing Mathematical Mysteries*, Mathematical Association of America, 1996.

[4] M. I. Krusemeyer, G. T. Gilbert, L. C. Larson, *A Mathematical Orchard. Problems and Solutions*, Mathematical Association of America, 2012.

[5] J. Matoušek, J. Nešetřil, *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Karolinum, 2002.

[6] T. S. Michael, *How to Guard an Art Gallery and Other Discrete Mathematical Adventures*, Johns Hopkins University Press, 2009.

[7] I. Niven, *Mathematics of Choice: Or, How to Count Without Counting*, Random House, 1965.

[8] S. Roberts, *On the figures formed by the intercepts of a system of straight lines in a plane, and on analogous relations in space of three dimensions*, Proceedings of the London Mathematical Society 19 (1889), 405–422.

[9] J. Steiner, *Einige Gesetze über die Theilung der Ebene und des Raumes*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 1 (1826), 349–364.

[10] *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* [online]. Dostupné z: `https://oeis.org/`.

[11] J. E. Wetzel, *On the division of the plane by lines*, American Mathematical Monthly 85 (1978), 647–656.

[12] A. M. Yaglom, I. M. Yaglom, *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions, Vol. 1: Combinatorial Analysis and Probability Theory*, Dover Publications, 1987.

[13] S. Zimmerman, *Slicing space*, College Mathematics Journal 32 (2001), 126–128.

doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`slavik@karlin.mff.cuni.cz`

VARIACE KONCEPTESTŮ Z KOMBINATORIKY, PRAVDĚPODOBNOSTI A STATISTIKY

Tomáš Zadražil

Ve své knize *Peer Instruction: A user's manual* [1] definoval Eric Mazur *KoncepTest* jako jednoznačně formulovanou otázku s adekvátní obtížností testující porozumění jedinému *konceptu*, kterou nelze vyřešit pouhým využitím paměti a která je obvykle provázena adekvátním počtem možných odpovědí.

Pomocí *KoncepTestů* lze jak testovat, tak i prohlubovat *konceptuální porozumění* žáků. Nabízené odpovědi totiž obvykle obsahují typické *miskoncepce* spjaté s testovaným *konceptem* a žáci jsou tak cíleně směřováni ke *kognitivnímu konfliktu*, který při řešení běžných školských úloh zpravidla nenastane.

Tento příspěvek si klade za cíl představit možnost využití *KoncepTestů* ve výuce středoškolské matematiky a to na komentované variaci vzorových úloh z kombinatoriky, pravděpodobnosti a statistiky.

V rámci textu je dále přiblížen model *konceptuálního obrazu* profesorů D. Talla a S. Vinnera pro práci s matematickými *koncepty*.

1 Definice KoncepTestu

KoncepTest je podle [1] definován jako:

(1) jednoznačně formulovaná otázka
(2) s adekvátní obtížností
(3) testující porozumění jedinému *konceptu* (nosnému pojmu, myšlence, nebo principu),
(4) kterou nelze vyřešit pouhým využitím paměti (nebo pouhým dosazením do vzorce)
(5) a která je obvykle provázena přiměřenou nabídkou možných odpovědí (nebo jde o tzv. otevřenou otázku).

KoncepTesty byly původně definovány pro potřeby metody *peer instruction*, jejíž podrobný popis se nachází v sekci 3. Stěžejní účel *KoncepTestů*, a sice testování, formování a prohlubování žákovského porozumění předkládaným *konceptům* však můžeme celkem dobře využít i mimo běžné schéma *peer instruction* (viz obrázek 1). Chceme-li však pracovat s *konceptuálním porozuměním*, je nutné mít o něm alespoň nějakou představu. Pro tento účel si v následující sekci představíme model *konceptuálního obrazu* profesorů D. Talla a S. Vinnera [2].

2 Co je to konceptuální obraz a jak s ním pracovat?

Tato sekce vychází z článku [2].

Pokusme se myšlenku *konceptuálního obrazu* přiblížit na příkladu vývoje této kognitivní struktury u konkrétního (smyšleného) žáka – řekněme Ctibora – pro konkrétní *koncept*, a sice *pravděpodobnost* (o Ctiborově *konceptuálním obrazu pravděpodobnosti* budeme nadále ve zkratce hovořit jen jako o *KO*; veškeré *koncepty* pak budou dále v textu psány *kurzívou*).

Prapůvodně je Ctiborův *KO* prázdný, nicméně, začne se zaplňovat, jakmile se setká s výroky typu: „Pravděpodobně vyhrajeme.“; „Určitě spadne!“; „Nemá velkou šanci na úspěch“; „Je to padesát na padesát“. Ctibor si začne uvědomovat, že *pravděpodobnost* vyjadřuje jakousi míru jistoty–nejistoty, že se stane, případně nestane, nějaká událost, tj. začne si vytvářet svou vlastní *osobní definici* tohoto *konceptu*. Bude mu jasné, že panna má v hodu mincí stejnou šanci jako orel a bude vědět, že nemusí být dobrý nápad sázet na nejisté události – společně s dalšími se tyto představy začnou ukládat do jeho *KO*. Po čase zjistí, že *pravděpodobnost* je možné vyjádřit pomocí procent, že nula-procentní šanci mají události, které nemohou nastat a naopak stoprocentní jsou věci jisté. Když se svými přáteli bude hrát karty, dojde mu, že čekat na eso je méně jisté, než čekat na červenou barvu. V okamžiku, kdy se Ctibor setká s *formální definicí pravděpodobnosti*, tak již jeho *KO* bude obsahovat bohatou zásobu souvisejících představ, úloh a situací, které budou (zřejmě) v souladu s jeho aktuální *osobní definicí* tohoto *konceptu*. Lze rovněž očekávat, že v této fázi nebude *formální definice* v rozporu s tou *osobní* a že budou obě tyto definice generovat podobnou část Ctiborova *KO*. Pokusme se nyní srovnat možné podoby obou definic.

Ctiborova *osobní definice*: Pravděpodobnost jevu je poměr přijatelných a všech možností.

Formální definice[1]: Nechť Ω je množina všech možných výsledků náhodného pokusu, $\omega \in \Omega$ elementární jev a $A \cup \Omega$ náhodný jev. Nechť dále Ω obsahuje konečný počet prvků, tj. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ a nechť všechny elementární jevy w_i jsou stejně pravděpodobné. Pak pravděpodobnost jevu A definujeme jako $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, kde $|A|$ je počet prvků množiny A.

Ačkoli se zdá, že uvedené definice říkají to samé, ta *formální* snad jen matematicky precizňějším jazykem, za několik málo řádků si ukážeme, že tomu tak nemusí být a že skrytý rozpor v užitém slově „možností“, může vést až ke *kognitivnímu konfliktu* (v tom lepším případě).

Na závěr tematického okruhu pravděpodobnost bude Ctiborův *KO* plný přidružených představ, typových úloh a souvisejících *konceptů* (jako: *kombinace*, *variace*, *permutace*, *elementární jev*, *kombinatorický součin*, *princip korespondence*, *náhodný experiment*, *podmíněná pravděpodobnost*, atd. ...). Jde již o natolik rozsáhlou kognitivní strukturu, že nadále není možné pracovat s ce-

[1] Poznamenejme, že jde o takzvanou klasickou definici pravděpodobnosti.

lým *KO* najednou. Setká-li se tak Ctibor v daném kontextu s konkrétní situací, respektive úlohou, spadající do domény *pravděpodobnosti*, evokují se mu pouze části *KO* – těmto částem budeme v daný okamžik říkat *evokovaný konceptuální obraz* (dále jen *EKO*). Za ideálních podmínek jsou veškeré části *KO* ve vzájemném souladu. Nicméně, může se stát, že některé části *KO* jsou ve vzájemném rozporu, a jsou tedy *potenciálními faktory kognitivního konfliktu. Potenciálními*, neboť nikdy nemusí dojít k situaci, kdy by byly evokovány současně, a tedy vedly ke kognitivnímu konfliktu. Avšak, v okamžiku, kdy *EKO* obsahuje *potenciální faktory kognitivního konfliktu*, tj. dojde k jejich současnému evokování, stávají se tyto *aktuálními faktory kognitivního konfliktu* a nutně nastává *kognitivní konflikt. Kognitivní konflikt* vede k rekonstrukci *EKO*, a tedy i celého *KO* – k horšímu, či k lepšímu (je nepravděpodobné, avšak možné, že by Ctibor nastalý *kognitivní konflikt* ignoroval a rekonstrukce neproběhla).

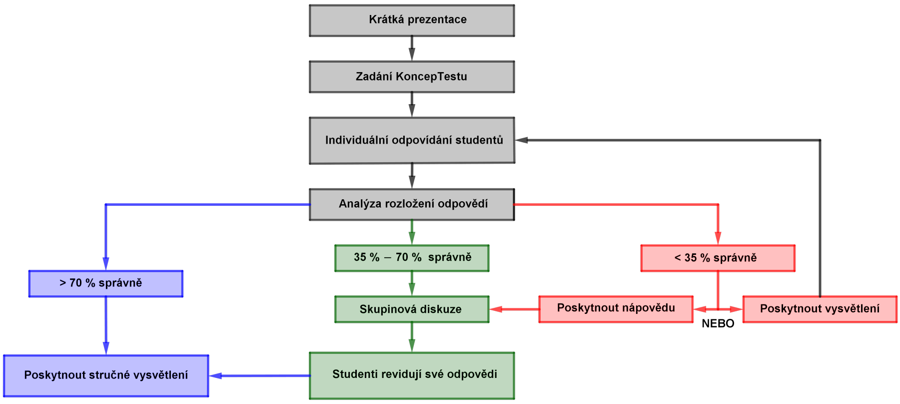
Ve světle nabízeného přístupu, tak můžeme míru *konceptuálního porozumění* chápat jako kvalitu a košatost odpovídajícího *konceptuálního obrazu.* Své *KoncepTesty* pak můžeme designovat za účelem cíleně vyvolávat *kognitivní konflikt*, například žáky vystavovat běžným *miskoncepcím* (špatným představám o daném *konceptu*). Vzato z druhé konce, pokud své žáky vhodnými úlohami nevystavíme *kognitivnímu konfliktu*, nikdy si nemusejí uvědomit, že jejich *konceptuální obrazy*, obsahují trhliny, nedostatky a vzájemně rozporuplné představy a že je tak jejich porozumění „mlhavé a chatrné“.

3 Metoda peer instruction

Tato sekce je včetně obrázku 1 doslovně převzata z konferenčního příspěvku [3]. Originální je pouze závěrečný doslov o vhodných modifikacích metody *peer instruction* spolu s komentáři.

Roku 1984 začal Eric Mazur na Harvardu vyučovat úvodní kurzy fyziky pro mediky. Jeho přednášky byly hodnoceny velmi kladně a stejně tak jeho studenti dosahovali, z hlediska testů a zkoušek, velmi slušných studijních výsledků. Na základě těchto indicií pokládal Mazur sám sebe za velmi dobrého přednášejícího. Po přibližně sedmi letech „úspěšné výuky“ se však k jeho očím dostal článek referující skutečnost, že úvodní kurzy fyziky na vstupních *prekoncepcích* a *miskoncepcích* studentů ve fyzice prakticky nic nezmění. Prvotní Mazurovou reakcí na sdělení článku bylo pouhé konstatování: „Ne moji studenti – ne studenti Harvardu!“ Jako vědec však dobře věděl, že své tvrzení potřebuje ukotvit v datech. Studentům proto zadal, podle měřítek akademiků „jednoduchý“, test zacílený na konceptuální porozumění třem Newtonovým zákonům. Výsledky, které obdržel, jej zcela šokovaly. *Někteří studenti dopadli stěží lépe, než gorila náhodně stlačující klávesy na klávesnici* [1].

Toto své zjištění mohl Eric Mazur zcela ignorovat a pokračovat ve výuce dosavadním klasickým způsobem. Rozhodl se však svůj přístup zcela změnit a vyvinul metodu *peer instrucion.*



Obr. 1: *Peer Instruction* – schéma jednoho bloku

Peer instruction (dále jen *PI*), jak ji ve své knize [1] popsal Eric Mazur, je metoda aktivního učení stojící zejména na skupinové diskuzi vyvolané složitější konceptuální otázkou, takzvaným *KoncepTestem*. Hodina vyučovaná podle *PI* je obvykle členěna do několika bloků. Schematickou strukturu jednoho takového bloku si můžeme prohlédnout na obrázku 1. Každý blok je zahájen krátkou prezentací zvoleného *konceptu*. Při svém výkladu se instruktor snaží vyvarovat poskytnutí vzorce nebo jiné, na paměti založené, berličky. Po prezentaci následuje zadání *KoncepTestu* cíleného na prohloubení porozumění představovanému *konceptu*. Studentům je poskytnut krátký čas na individuální promyšlení odpovědi. Následně jsou vyzváni k hlasování prostřednictvím hlasovacích karet, *clickerů* nebo chytrých zařízení. Na základě rozložení relativních četností studentských odpovědí buď instruktor stručně vysvětlí správnou odpověď, přejde ke skupinovým diskuzím, nebo se pokusí prezentovaný problém ještě jednou vysvětlit. Ve fázi skupinových diskuzí se studenti snaží přesvědčit své kolegy o správnosti své volby, přičemž jsou instruktorem vybízeni ke zdůvodňování – nikoli pouze k pouhému konstatování. Výzkumy ukazují, že je student mnohdy schopen danému konceptu snáze porozumět na základě výkladu svého spolužáka, nežli na základě výkladu samotného instruktora [4]. Studenti, kteří čerstvě diskutovanému *konceptu* porozuměli, si totiž živě pamatují, jaké to bylo pojmu nerozumět a jaké kroky museli učinit, aby se porozumění dobrali. Naproti tomu instruktor sám často trpí takzvanou „kletbou vědomosti“ [1], neboť danému *konceptu* dobře rozumí a dávno si již neuvědomuje nesnáze na cestě k porozumění. Skupinové diskuze jsou ukončeny revidujícím hlasováním studentů a stručným vysvětlením správné odpovědi. Prakticky vždy dojde k znatelnému navýšení hlasů ve prospěch správné odpovědi [1], [4].

Popsaný blok zabere přibližně 10–15 minut. Za jednu vyučovací hodinu jsme tímto způsobem tedy schopni probrat 3 až 4 *koncepty*. Je proto zřejmé, že abychom dosáhli stejného objemu učiva jako u klasické výuky, musíme část práce naložit na bedra studentům. Toho můžeme docílit například tak, že před lekcí studentům zadáme přípravné materiály k samostudiu, po jejichž nastudování budou disponovat potřebnými znalostmi pro zvládnutí lekce. Ve své knize [1] Eric Mazur pro tyto účely doporučuje po bok *PI* zařadit i strategii *Just-in-time Teaching*[2].

Možné modifikace a doporučení

Na základě tří let výzkumných i praktických zkušeností s *PI* doporučuji pro účely výuky matematiky na úrovni základní–střední školy následující modifikace:

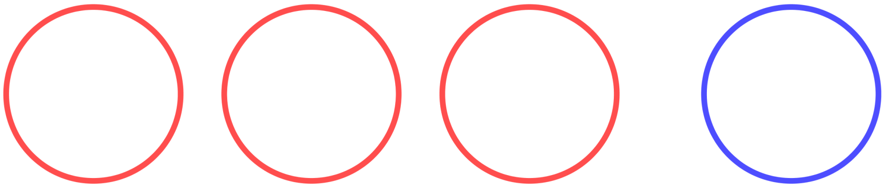
- Pro daný *koncept* postupně zadat více *KoncepTestů* se vzestupnou obtížností. Řada matematických *konceptů* je pro žáky zcela nová – pro účely složitějších úloh je proto potřeba u žáků vypěstovat o daném *konceptu* alespoň nějakou představu.
- Nechat žáky, alespoň zpočátku, diskutovat ve skupinách i nad *KoncepTesty* s vysokou počáteční úspěšností (tj. nad 70 %). Ne vždy na řešení přijdou správným způsobem. Může být přínosné slyšet rozdílné přístupy spolužáků k témuž problému. Konečně, diskuzí dojde k procvičení sociálních dovedností žáků.
- Před krok skupinových diskuzí zařadit krok před-diskutování *KoncepTestu* ve dvojicích. Tímto způsobem dojde k zapojení většího počtu žáků a k lepšímu uchopení úlohy samotné před vstupem do skupinových diskuzí.
- Nepoužívat žádný skupino-tvárný mechanizmus a nechat žáky utvářet diskuzní skupiny podle vlastních preferencí. Toto doporučení platí obzvláště pro třídy s nedostatečně zajištěným *bezpečným prostředím*, neboť pro některé žáky může být obtížné prezentovat své názory spolužákům, vůči kterým chovají stud či nějaké antipatie.
- Hlasování realizovat co nejvíce anonymním způsobem (ideálně pomocí telefonů). Některý žáci mohou špatně snášet vědomí, že jejich odpověď mohou „vidět“ i jejich spolužáci (viz předchozí poznámka o *bezpečném prostředí*).
- Neukazovat žákům distribuci hlasů po prvním hlasování. Tento akt by mohl nežádoucím způsobem ovlivnit skupinové diskuze – obzvláště pro jedince náchylné k přejímání většinového názoru.

4 Komentovaná mini-sbírka ukázkových KoncepTestů

Kuličky

V sáčku jsou tři červené a jedna modrá kulička (viz obrázek 2). Budeme vytahovat dvě kuličky naráz. Který z následujících jevů je pravděpodobnější?

[2] Just-in-time Teaching je strategie výuky založená na zpětnovazební smyčce mezi přípravným online prostředím a následným děním ve třídě. Stručně řečeno, instruktor zadá studentům skrze internet přípravné materiály provázené úkoly a otázkami, které studenti musejí vypracovat a odevzdat ještě před začátkem následující lekce. Na základě zpětné vazby poskytnuté odpověďmi studentů poté instruktor vhodně upraví obsah následující lekce. Stejně tak obsah přípravných materiálů je do značné míry uzpůsoben průběhu předešlé lekce [5].



Obr. 2: Tři červené a jedna modrá

(A) Obě vytažené kuličky mají stejnou barvu.
(B) Obě vytažené kuličky mají různou barvu.
(C) Ani jeden. Jevy A, B jsou stejně pravděpodobné.
(D) Na položenou otázku není možné jednoznačně odpovědět.

Tato úloha byla v blízké minulosti opakovaně zadána budoucím i praktikujícím učitelům matematiky a také studentům prvních ročníků obecné matematiky, fyziky, či informatiky na MFF UK. Ačkoli může otázka na první pohled působit jednoduše, ve skutečnosti se jedná o poměrně obtížný *KoncepTest* s typickou úspěšností v prvním hlasování okolo 20–40 %.

Je dobré si uvědomit, že pro řešení úlohy není podstatné, zda obě kuličky vyjmeme ze sáčku naráz, nebo postupně. Dojde-li nám tato skutečnost, pak pro postupné vylosování dvou kuliček červené barvy získáváme pravděpodobnost $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ (pro vylosování červené kuličky v prvním a následně i druhém tahu hovoří nejprve tři ze čtyř, a posléze dvě ze tří šancí) a pro postupný los dvou kuliček různé barvy pak pravděpodobnost $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{2}$.

Další možný myšlenkový postup vedoucí ke správné odpovědi (C) je naznačen na obrázku 3. Naše smysly kuličky nerozliší – pravděpodobnost však ano! Jak to vysvětlit?

- Představme si, že jsou kuličky označeny neviditelným inkoustem pomocí čísel. Losování pak na první pohled probíhá stejně. Nicméně posvítíme-li si na kuličky pomocí UV lampy, vidíme, že jsou jiné. Tj. získáváme elementární jevy[3] (1; 1); (2; 1); (3; 1); (1; 2); (1; 3); (2; 3) a na první pohled je zřejmé, že pravděpodobnosti obou jevů jsou stejné.
- Dobře, co když kuličky neoznačíme neviditelným inkoustem, budou i pak různé? Ano – každá z nich byla pravděpodobně vyrobena v jiný okamžik a každá z nich je zcela určitě sestavena z jiného počtu atomů. V makroskopičtějším měřítku pak každá nese jiné poškrábání povrchu, atd.
- Je zde ještě jedno vysvětlení. Z hlediska geometrie vaku, tj. nahlížíme-li na úlohu z perspektivy geometrické definice pravděpodobnosti, leží každá kulička někde jinde a modré kuličky se tedy liší přinejmenším svou pozicí.

[3] Při užitém značení rozumíme jevem (1; 1) tažení červené kuličky 1 a modré kuličky 1.

Obr. 3: Lidské oko smysly kuličky nerozliší – pravděpodobnost však ano!

Za třetí, a zřejmě i nejelegantnější, přístup k této úloze, vděčíme kreativitě dr. Staňka.

Vylosování dvou kuliček červené barvy je ekvivalentní situaci, kdy v pytlíku zůstanou dvě kuličky různé barvy. Oba jevy proto musejí být stejně pravděpodobné.

Správné řešení již máme, jak ale s úlohou pracovat ve třídě v okamžiku nízké počáteční úspěšnosti, tj. v okamžiku, kdy nemá cenu nechat žáky nad otázkou diskutovat ve skupinách? V takovém případě se jako schůdná cesta jeví názorný experiment, který nejprve zboří mylnou představu žáků, a až poté se přikročí k diskuzi směřující k vysvětlení rozporu mezi realitou a intuicí. Žákům můžeme rozdat kuličky a nechat je několikrát provést popsaný experiment (dvojtah ze zavřené dlaně). Během krátké chvíle tak, po například pěti opakováních, získáme $5 \cdot 30 = 150$ výsledků (v obvyklé konstelaci třídy o 30 žácích).

Proč má úloha obvykle tak nízkou počáteční úspěšnost a to i mezi praktikujícími učiteli? „Zakopaného psa“ je možné hledat v rozporu mezi částmi *konceptuálního obrazu pravděpodobnosti* generovanými *osobní* a *formální* definicí *pravděpodobnosti*. Vzpomeňme si na ukázkovou *osobní definici*:

„Pravděpodobnost jevu je poměr přijatelných a všech možností.“

Jeden z možných výkladů nás zavede ke „kombinatorickému“ nerozlišování stejných červených kuliček, a tedy k intuitivnímu předpokladu, že je-li červených kuliček více, pak je pro vytažení dvou červených kuliček i více možností než pro současné vytažení červené a modré kuličky. Na vině tak může být intuice v kombinaci s „naivně kombinatorickým“ pohledem na hledání počtu možností.

Další možnost, jak si nízkou úspěšnost úlohy vysvětlit, tkví v nesprávné identifikaci *elementárního jevu*. Možná se nám vybaví „pověstné“ duo úloh o hodu několika bílými versus několika různými kostkami.

Pro připomenutí, řekněme, že hodíme a) dvěma stejnými bílými kostkami a za b) dvěma různými, například červenou a modrou. Jaká je pravděpodobnost, že padne duo ⚀, ⚁.

V případě a) jde přece o stejné kostky, výsledku dosáhneme užitím kombinací s opakováním (duo ⚀, ⚁ reprezentuje jediná možnost). V případě b) pak jde o kostky různé a výsledku tak dosáhneme prostřednictvím variací s opakováním (duo ⚀, ⚁ reprezentují dvě možnosti).

Časem se objeví úloha c) s jakou pravděpodobností dosáhneme při opakovaném hodu jednou bílou kostkou výsledku dua ⚀, ⚁? Navíc lze v případě c) požadovat přímo posloupnost ⚀, ⚁, nebo prostě jen dvojici ⚀, ⚁ v libovolném pořadí.[4]

Při popsaném (nesprávném) řešení úloh a), b), c) v podstatě pracujeme s *evokovaným konceptuálním obrazem pravděpodobnosti* sestaveným z části generované naivně kombinatoricky pojatou *osobní definicí pravděpodobnosti* (tj. počítáme možnosti) společně s částí obsahující notoricky známou kombinatorickou úlohu týkající se a) současného hodu dvou stejných kostek (kombinace s opakováním), b) současného hodu dvou různých kostek (variace s opakováním), c) postupný hod stejnou kostkou (kombinatorický součin).

Ať už v dobré víře procvičit základní kombinatorické vzorce nebo sami sužováni popsanou *miskoncepcí* způsobenou (snad právě touto úlohou), mnohdy nevědomky pokračujeme v šíření jejího neblahého vlivu.[5]

Jaký je závěr!? Nejsme-li v kvantové mechanice, pak pravděpodobnost od sebe vždy rozpozná i na první pohled stejné předměty a i se stejnými kuličkami musíme proto nakládat jako s různými (nejedná-li se o *bosony*).

Problematiku hodu různými a stejnými kostkami můžeme uvést například následujícím *KoncepTestem*, nebo jeho zjednodušenou verzí pracující pouze s hodem třemi stejnými a třemi navzájem různými kostkami.

Současný hod třemi kostkami[6]

Při kterém z následujících hodů (A)–(C) dosáhneme s největší pravděpodobností tria ⚀, ⚁, ⚂ (v libovolném pořadí)? Případně zvolte některou z možností (D)–(E).

(A) při současném hodu třemi bílými kostkami;

(B) při současném hodu červenou, modrou a zelenou kostkou;

(C) při současném hodu dvěma bílými a jednou černou kostkou;

(D) $P(A) = P(B)$, $P(A) > P(C)$;

(E) $P(C) = P(B)$, $P(C) > P(A)$;

(F) $P(A) = P(C)$, $P(A) > P(B)$;

(G) $P(A) = P(B) = P(C)$.

Čtení z grafu

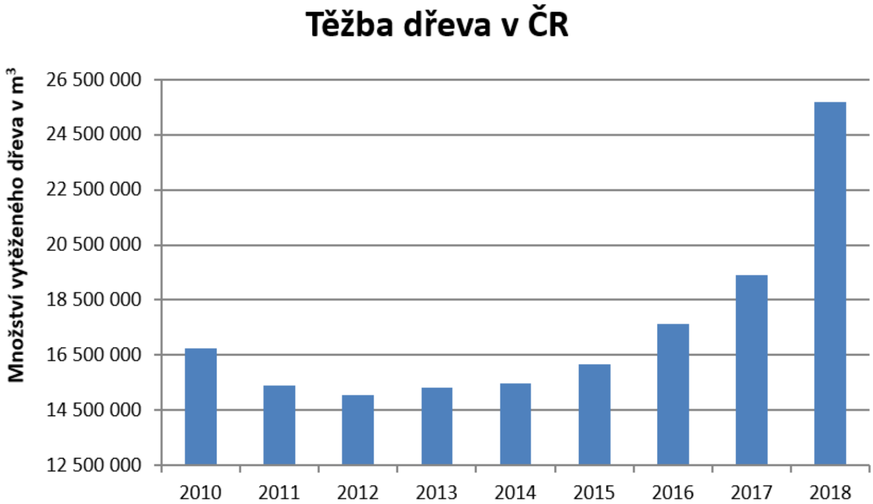
Přiložený sloupkový diagram (na obrázku 4) obsahuje data Českého statistického úřadu pro množství vytěženého dřeva v českých lesích v letech 2010–2018.

---

[4] Musím se přiznat, že tehdy jsem se, pro uchování svého duševního zdraví, rozhodl situace a), b), c) rozlišovat zpaměti ...

[5] Nutno poznamenat, že sám jsem se této špatné představy zbavil až díky dr. Staňkovi v 1. ročníku magisterského studia ...

[6] Poznamenejme, že na řešení úlohy nemá vliv, zda házíme kostkami najednou, či postupně, jak již bylo naznačeno v předchozím textu.



Obr. 4: Graf k úloze **Čtení z grafu**

Na základě zběžného pohledu na graf lze konstatovat, že v roce 2018 byla průmyslová těžba dřeva . . .

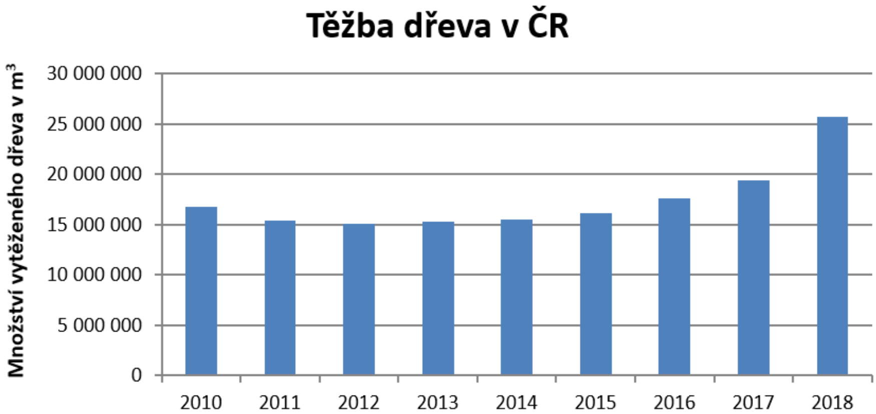
(A) . . . méně než dvakrát větší co v roce 2010.
(B) . . . přibližně dvakrát větší než v roce 2010.
(C) . . . přibližně třikrát větší než v roce 2010.
(D) Ani jedno z tvrzení (A)–(C) není pravdivé.

Správná odpověď je samozřejmě . . . (A) . . . , ne! Správně je (D). Úlohu **čtení z grafu** nelze považovat za dobrý *KoncepTest*. *KoncepTest* by neměl být postavený na chytáku nebo mít matoucí zadání. Sloupkový digram totiž neobsahuje údaje o průmyslové těžbě dřeva, ale o celkové těžbě dřeva. Mezi těmito pojmy je zásadní rozdíl, jak uvidíme dále v textu. Kdybychom otázku chtěli formulovat jako *KoncepTest*, museli bychom sousloví „průmyslová těžba“ upravit na „celková těžba“. Tímto bychom získali poměrně dobrou otázku cílenou na problematiku *matení grafy*, a to konkrétně za pomoci nenulové počáteční hodnotou svislé osy.

Jak úloha vznikla? Během výuky statistiky v devátém ročníku s žáky pravidelně probíráme i *matení grafy*. Obvykle tuto problematiku uvádím právě pomocí sady snazších *KoncepTestů*. Ve školním roce 2019/20 však z důvodu korona-krize bylo nutné postupovat poněkud odlišně. Žáci dostali za úkol prostudovat *matení grafy* na portálu realisticky.cz [6], a poté vytvořit duo vlastních grafů v duchu objektivní / manipulativní. Zadání úlohy **Čtení z grafu** vzniklo právě díky práci jedné žačky (krycí jméno Berenika), do jejíž zkrácené verze můžeme nahlédnout pod tímto odstavcem – grafy i přiložené *komentáře psané kurzívou* jsou autentické.

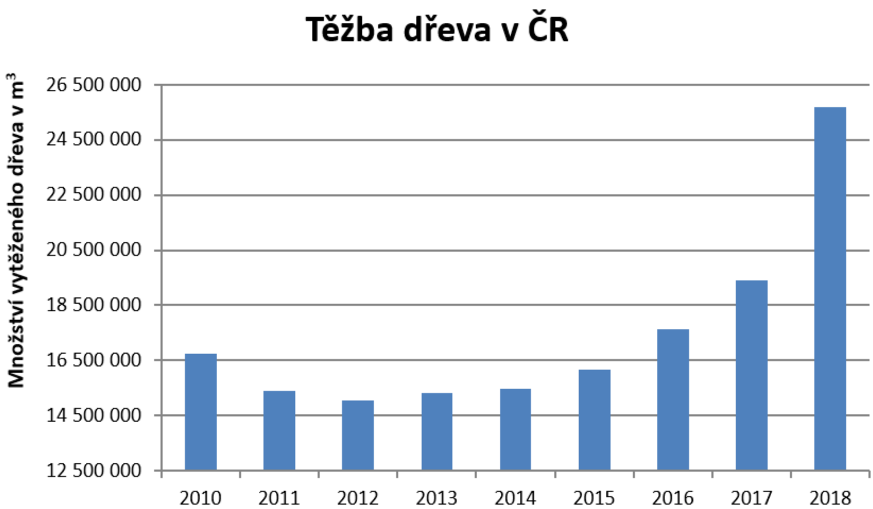
Zkrácená verze domácí práce žačky Bereniky

Na úvod své práce uvedla Berenika přehledovou tabulku obsahující data Českého statistického úřadu mapující nahodilou a celkovou těžbu dřeva v letech 2010–2018. Poté již pokračovala komentovanými grafy:



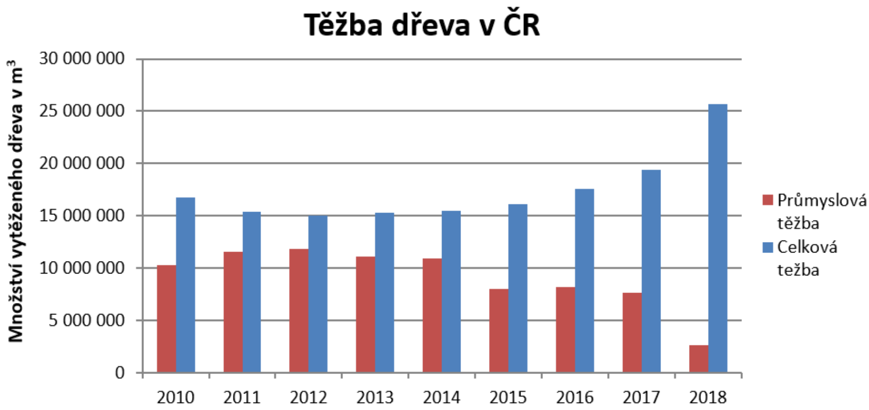
Obr. 5: Těžba posledních 8 let roste!

Těžba dřeva v ČR za poslední 4 roky rapidně stoupla! Lesy se kácí, ekosystém strádá a papírny profitují (viz obrázek 5)! Kdyby byl graf pojmenován takto a chyběla by legenda (podrobnější popis), tak bych usoudila, že se jedná pouze o člověkem iniciovanou těžbu → není to tak.



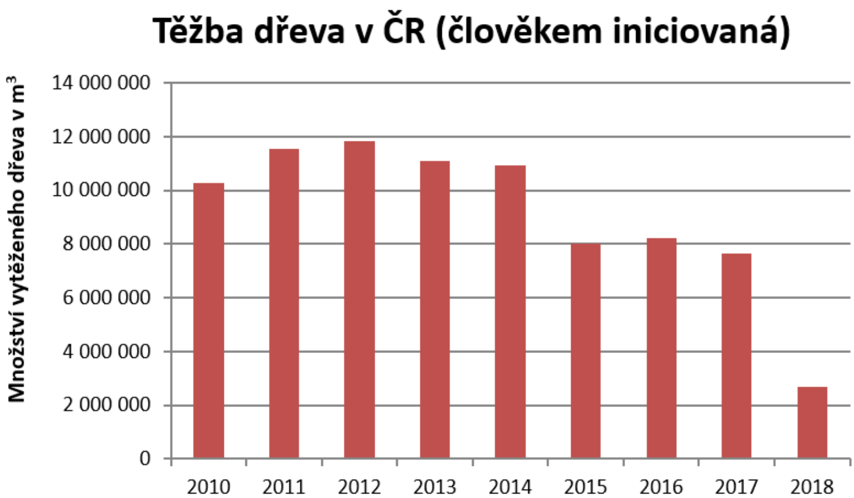
Obr. 6: Těžba dřeva vzrostla za 8 let třikrát!

Dojem, že nadměrně kácíme a plundrujeme naše lesy, by umocnilo i posunutí osy y – začíná až v 12 500 000 m^3 (viz obrázek 6).



Obr. 7: Srovnání průmyslové a celkové těžby dřeva

Těžba dřeva pro lidské a průmyslové zpracování se u nás ve skutečnosti snížila. Většina dřevin, co v původním grafu byly uvedeny, jako vytěžené, se vytěžily „nahodilou těžbou“. To znamená, že byly vyvráceny větrem, postiženy kůrovci a jinými parazity, apod. Většina takového dřeva je ponechána v lesích (vyvrácené stromy), nebo zničena (jedinci postižení parazity), pouze část je odvezena a průmyslově zpracována. Na obrázku 7 je možno nahlédnout jakou část celkové těžby dřeva v českých lesích zaujímá těžba průmyslová.

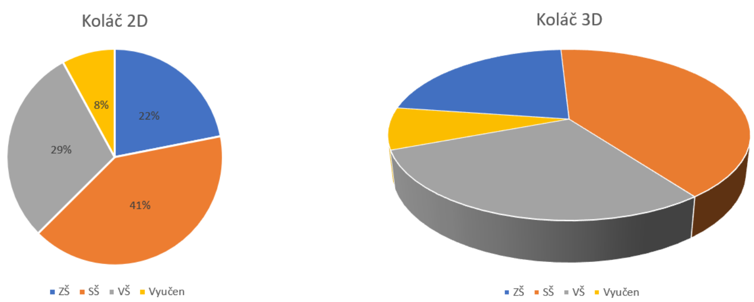


Obr. 8: Průmyslová těžba dřeva za posledních 8 let klesla

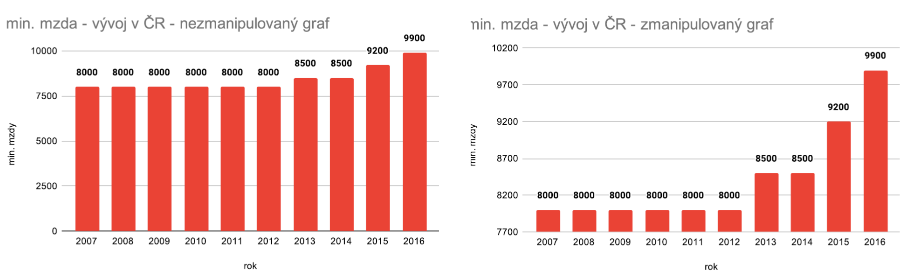
Lidskou/průmyslovou těžbu, tedy to, co opravdu člověk těžil úmyslně jsem sama dopočítala. Správný graf pro ilustraci průmyslové těžby dřeva v letech 2010–2018 je možno nahlédnout na obrázku 8.

Další sady grafů vytvořené žáky můžeme nahlédnout na obrázcích 9, 10, 11, 12 a 13. Obrázky 9 a 13 reprezentují *matení grafy* skrze užití logaritmického měřítka jedné z os. Obrázek 10 ztělesňuje ukázkové zneužití 3D kruhového diagramu. Obrázek 11 je dalším zástupcem *manipulativních grafů* s nenulovým počátkem svislé osy. Konečně, obrázek 12 zastupuje grafy s úmyslně vypuštěnými body na časové ose, a mezi jednotlivými údaji jsou tak nestejné časové úseky.

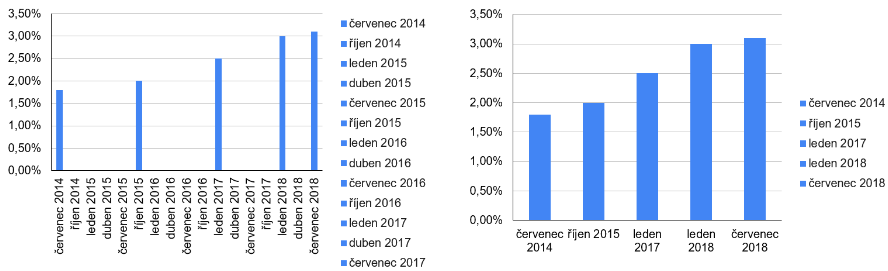
Obr. 9: Logaritmické měřítko osy



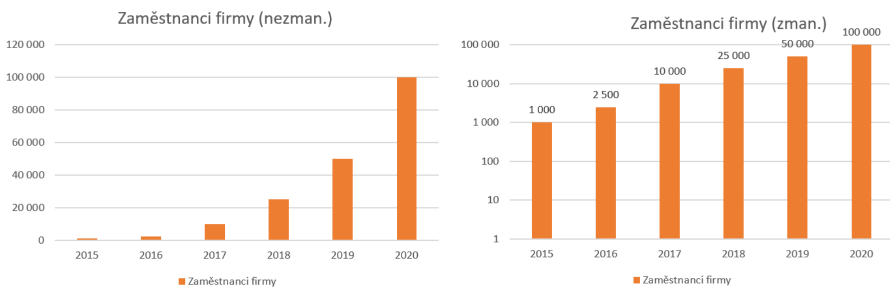
Obr. 10: 3D kruhový diagram



Obr. 11: Nenulový počátek osy y



Obr. 12: Vypuštěné body na časové ose



Obr. 13: Logaritmické měřítko osy y

Problematika *matení grafy* je nedílnou součástí zdravého *konceptuálního obrazu statistiky* i základní občanské uvědomělosti, a měla by jí proto být během výuky *statistiky* věnována patřičná pozornost.

Šťovíkův hrachový experiment

Sedlák Šťovík je horlivým příznivcem a pěstitelem biopotravin. Nedávno se na trhu objevilo nové hnojivo na přírodní bázi, jehož účinnost je zapotřebí otestovat. Šťovík proto svůj hrachový záhon rozdělil na dva stejné záhonky, přičemž na jednom pěstoval hrách obvyklým způsobem, a druhý pak hnojil novým hnojivem. Na závěr svých experimentů z obou záhonků náhodně sklidil po 40 hrachových luscích a spočítal, kolik kuliček se v každém nachází. Získal následující data:

Počet kuliček v luscích ze záhonku nehnojeného novým hnojivem:
4 6 5 6 5 6 4 6 4 9 5 3 6 7 5 4 6 4 6 5 6 7 4 6 5 2 8 6 5 6 5 5 5 4 4 4 6 7 5 6

Počet kuliček v luscích ze záhonku hnojeném novým hnojivem:
6 7 7 4 9 5 6 7 8 9 8 9 7 7 9 8 7 6 6 7 9 7 7 7 8 9 4 7 4 8 9 9 8 6 7 8 6 8 7 8

Může na základě popsaného experimentu sedlák Šťovík rozhodnout účinnost nového hnojiva? Diskutujte, zda je jeho experiment popsán dostatečně, či nikoli. Svá stanoviska vysvětlete.

Tato otevřená otázka se nejlépe hodí jako úvod do problematiky *statistických šetření*. Žáky můžeme vyzvat k odeslání vlastních odpovědí skrze chytré telefony (přes *Socrative*, *Mentimeter*, atd.), a ty poté anonymně promítnout na tabuli.

Krom nesprávných konstatování, že je experiment dostatečně popsán, správně proveden a že lze na základě aritmetického průměru tvrdit ... se obvykle objevují následující výroky:

- „Není řečeno, zda jsou na obou záhoncích stejné světelné či jiné podmínky."
- „Na jednou ze záhonků může být mnohem více lusků než na druhém."
- „Jak zaručí, že hnojivo neprosakuje i na druhý záhonek?"
- „Co když kuličky mají jinou hmotnost, neměl by je spíše zvážit?"
- „Co když hnojený hrách chutná jinak, například hůře, než nehnojený?"

Proč je strohé konstatování o dostatečném popisu experimentu považováno za nesprávné? Co je vlastně cílem úlohy? Abychom dovedli designovat dobrý experiment, musíme mu být schopni kriticky oponovat. Nemluvě o schopnosti kriticky posoudit závěry cizí i vlastní práce. Konečně, je vhodné poukázat na skutečnost, že problematika statistických šetření sahá nad rámec výpočtu zvolené míry polohy či variability.

Paďurovo měření

V rámci své disertační práce pan Paďura změřil výšku svých 20 kamarádů, a poté výpočtem určil průměrnou výšku v této skupině jako 182 ± 5 cm. Druhého dne však s hrůzou zjistil, že kdosi zlomyslný jeho měřidlo ještě před měřením zkrátil o 1 cm.

Mezi následujícími zvol pravdivé tvrzení.

(A) Pan Paďura bude muset upravit pouze průměrnou výšku.
(B) Pan Paďura bude muset opravit pouze průměrnou odchylku.
(C) Pan Paďura bude muset opravit jak průměrnou výšku tak i průměrnou odchylku.
(D) Pan Paďura nebude muset upravit ani jednu z diskutovaných hodnot.
(E) Bez opětovného měření není možné rozhodnout o pravdivosti (A)–(D).

Otázka okolo popravy

Král Dobromysl nerad vidí své poddané trpět. Nedávno se jeho strážím podařilo lapit neznámý počet lapků větší než 4 (stráže nejen vypadají, ale i nesvedou napočítat do pěti). Král proto nechá pro výstrahu současně 4 náhodně vybrané kriminálníky pověsit na náměstí. Než jsou však odsouzenci vybráni a rozsudek vykonán, Dobromysl umírá a na jeho místo nastupuje jeho syn Krutoslav, který se původní rozsudek rozhodne upravit. Stále budou popraveni 4 náhodně vybraní lapkové, ale každý jiným způsobem. Jak se liší počet možných poprav oproti původní verzi krále Dobromysla?

(A) Bude stejný.
(B) Bude 4 krát větší.
(C) Bude 16 krát větší.
(D) Bude 24 krát větší.
(E) Bude 64 krát větší.
(F) Bez přesného počtu zajatých lapků nelze rozhodnout.

KoncepTest **Otázka okolo popravy** testuje žákovské porozumění vztahu mezi *kombinacemi* a *variacemi* (bez opakování). Aniž bychom znali přesný počet lapků, ze kterého vybíráme, lze dospět k závěru, že ve druhém případě bude počet možných realizací popravy 4! krát větší než v prvním. Na každou čtveřici „prostě jen pověšených“ lapků totiž připadá 4! variací, alias distribucí mezi Krutoslavem připravená muka.

Postupujeme-li pak *kombinatorikou* v posloupnosti: *kombinatorický součin*, *variace*, *permutace*, *kombinace*, můžeme **Otázku okolo popravy** použít i jako motivační úlohu pro odvození vztahu mezi počtem *variací* a *kombinací*.

Sázka na narozeniny

Pro jednoduchost uvažme pouze existenci nepřestupného roku o délce 365 dní. Kolik nejméně lidí musí být přítomno v místnosti, aby se nám (teoreticky) vyplatila sázka, že alespoň dva z nich budou mít narozeniny ve stejný den?

Sázku na narozeniny můžeme koncipovat jako otevřenou otázku, nebo ji opatřit výběrem z několika možných odpovědí. Můžeme rovněž vyzvat žáky, aby se pokusili určit přibližné řešení za pomoci *Excelu*, či jiného programu. Úlohu lze také formulovat jednodušeji a ptát se například v duchu:

Uvažme test, ze kterého je možno získat 0, 1, 2, ... , nebo 10 bodů. Kolik nejméně žáků musí psát test, aby se nám (teoreticky) vyplatila sázka, že zde budou přítomni alespoň dva žáci se stejným počtem bodů? Předpokládejme, že počty bodů, které žáci dostanou z tohoto testu určuje učitel zcela náhodně.

Správné řešení originální otázky můžeme shlédnout například na YouTube ve videu [7], případně připravit další *KoncepTest* týkající se slavného *Monty Hall problému* [8].

4 Závěr

Na míru porozumění danému *konceptu* můžeme nahlížet skrze kvalitu a košatost odpovídajícího *konceptuálního obrazu*. S každým dalším příbuzným pojmem, úlohou, či situací *konceptuální obraz* roste, až se z něj stává poměrně rozsáhlá a komplikovaná kognitivní struktura. Ne vždy je však tato struktura veskrze kompaktní a harmonická. *Konceptuální obraz* může obsahovat i trhliny, slepá zákoutí a vzájemně rozporuplné části – zvané též *potenciální faktory kognitivního konfliktu*. Nejsou-li však odporující si části evokovány současně, nikdy se o jejich nesouladu nemusíme dozvědět. Pokud však *evokovaný konceptuální* *obraz* obsahuje *potenciální faktory kognitivního konfliktu*, nastává *kognitivní konflikt* a tyto se stávají *aktivními faktory kognitivního konfliktu. Kognitivní konflikt* pak zpravidla vede ke konstruktivní rekonstrukci *konceptuálního obrazu.*

V příspěvku byl ukázán možný rozpor pramenící z „naivně kombinatorického" uchopení *osobní definice klasické pravděpodobnosti*, a sice pouhého hledání počtu možností při řešení odpovídající kombinatorické úlohy (tj. v nesprávné identifikaci *elementárního jevu*). Žáci sužováni touto *miskoncepcí* například vnímají úlohy spočívající v určení pravděpodobnosti s jakou a) při hodu dvěma stejnými a za b) při hodu dvěma různými kostkami padne duo ⚀, ⚁ jako dva zcela rozdílné problémy, ačkoli z hlediska *pravděpodobnosti* jde o tutéž úlohu.

Je jen a pouze na nás, zda podlehneme tlaku veřejnosti, svých tříd, rodičů, osobního komfortu či samotných škol a nabídneme žákům pohodlnou cestu dlážděnou „snadnou matematikou" přímo do sladkého neporozumění v podobě nedostatečně rozvinutých *konceptuálních obrazů* plných skrytých rozporů a trhlin, nebo své žáky záměrně budeme vystavovat obtížným otázkám a úlohám ve snaze vyvolat u nich *konstruktivní kognitivní konflikt* či jinak zkvalitňovat jejich stávající porozumění.

5 Poděkování

Příspěvek byl podpořen Grantovou agenturou Univerzity Karlovy (projekt číslo 680119). Dále děkuji svým žákům, obzvláště pak členům reflexní skupiny, jejichž cenné názory a připomínky přispěly zásadní způsobem ke zkvalitnění výuky matematiky skrze *peer instruction.*

Literatura

[1] E. Mazur, *Peer instruction: a user's manual*, Prentice Hall, 1997.

[2] D. Tall, S. Vinner, *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and contunuity*, Educational Studies in Mathematics 12 (1981), 151–169.

[3] T. Zadražil, *Metoda peer instruction ve výuce geometrie*. In J. Hromadová, A. Slavík (ed.): *Cesty k matematice III*, MatfyzPress, 2018, 59–68.

[4] T. Vickrey et al., *Research-Based Implementation of Peer Instruction: A Literature Review*, Cell Biology Education 14 (2015), es3.

[5] M. Gregor Novak, *Just-in-time teaching: blending active learning with web technology*, Prentice Hall, 1999.

[6] M. Krynický, *Matení grafem* [online], [cit. 7. 7. 2020]. Dostupné z: `http://www.realisticky.cz/hodina.php?id=418`.

[7] *YouTube: Jak nás klame intuice 1 (Provaz kolem země, koleje, paradox narozenin) s docentem Mirko Rokytou* [online], [cit. 7. 7. 2020]. Dostupné z: `https://youtu.be/cuBbmeLwZGg`.

[8] *YouTube: Monty hall problem – Jak nás klame intuice 2 – S docentem Mirko Rokytou* [online], [cit. 7. 7. 2020]. Dostupné z: `https://youtu.be/uSKSER0gFbU`.

Mgr. Tomáš Zadražil
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`tomas.zadrazil@gmail.com`

CESTY K MATEMATICE IV
Sborník konference

18. až 20. května 2021

Jana Hromadová, Antonín Slavík (ed.)

Vydal MatfyzPress
nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 636. publikaci.

Vydání první
Praha 2021

Publikace neprošla recenzním ani lektorským řízením nakladatelství MatfyzPress.
Nakladatelství MatfyzPress neodpovídá za kvalitu a obsah textu.
Publikace byla vydána pro potřeby konference Cesty k matematice.

ISBN 978-80-7378-442-3