Konvexní geometrie

Ivan Netuka

Matematický ústav Univerzity Karlovy

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

Obsah

1. Konvexita kolem nás

Obsah

1. Konvexita kolem nás
2. Konvexní tělesa

Obsah

1. Konvexita kolem nás
2. Konvexní tělesa
3. Kouzlo pravidelných mnohostěnů

Obsah

1. Konvexita kolem nás
2. Konvexní tělesa
3. Kouzlo pravidelných mnohostěnů
4. Objem koule v $\mathbb{R}^d$

Obsah

1. Konvexita kolem nás
2. Konvexní tělesa
3. Kouzlo pravidelných mnohostěnů
4. Objem koule v $\mathbb{R}^d$
5. O kouli a krychli

Obsah

1. Konvexita kolem nás
2. Konvexní tělesa
3. Kouzlo pravidelných mnohostěnů
4. Objem koule v $\mathbb{R}^d$
5. O kouli a krychli
6. Překvapení s řezy konvexních těles

Obsah

1. Konvexita kolem nás
2. Konvexní tělesa
3. Kouzlo pravidelných mnohostěnů
4. Objem koule v $\mathbb{R}^d$
5. O kouli a krychli
6. Překvapení s řezy konvexních těles
7. Záhada univerzální pokličky

Obsah

1. Konvexita kolem nás
2. Konvexní tělesa
3. Kouzlo pravidelných mnohostěnů
4. Objem koule v $\mathbb{R}^d$
5. O kouli a krychli
6. Překvapení s řezy konvexních těles
7. Záhada univerzální pokličky
8. Záludnost izoperimetrické úlohy

Obsah

1. Konvexita kolem nás
2. Konvexní tělesa
3. Kouzlo pravidelných mnohostěnů
4. Objem koule v $\mathbb{R}^d$
5. O kouli a krychli
6. Překvapení s řezy konvexních těles
7. Záhada univerzální pokličky
8. Záludnost izoperimetrické úlohy
9. Obrazce a tělesa konstantní šířky
10. Konstantní šířka kolem nás

1. Konvexita kolem nás

1. Konvexita kolem nás

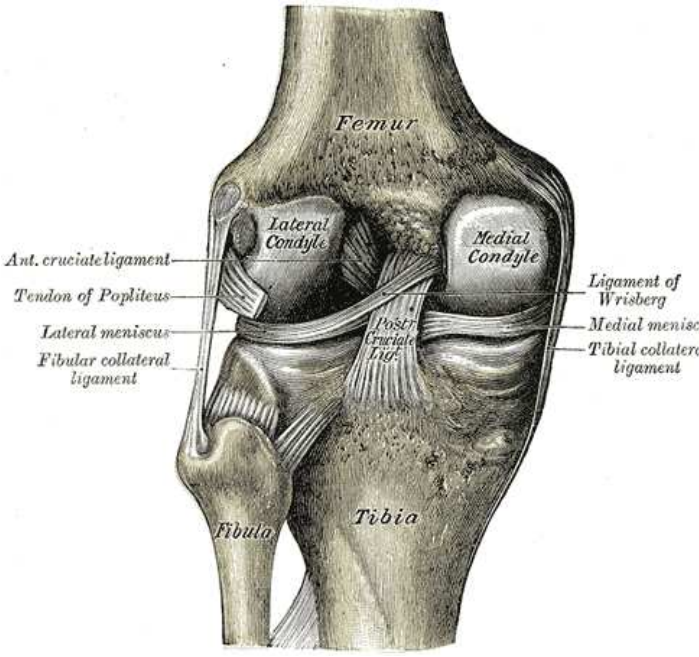
- **medicína**

1. Konvexita kolem nás

- **medicína**

Menisky

... Rozeznává se na nich: horní **konkávní** plocha, stýkající se s kondyly femuru, spodní plocha, která je v kontaktu s periférií příslušné kloubní plochy tibie; zevní neboli obvodová plocha (základna prizmatu), která je **konvexní** a velmi tlustá, připojená ke kloubnímu pouzdru; vnitřní neboli centrální okraj, který je **konkávní**, ostrý a jehož **konkavita** je obrácena ke středu styčné plochy.



z klasické Rouvièrovy francouzské učebnice anatomie

kondyl = kloubní hrbol; femur = stehenní kost; tibie = holenní kost

- **umění**

- **umění**

Tato socha odráží vliv kubismu vzájemnou optickou provázaností **konkávních** a **konvexních** tvarů a ve využití prázdna k vyjádření hmoty.

z publikace Poklady Izraelského muzea v Jeruzalému, Ženeva, 1985

Alexander Archipenko (1887–1964)
Žena, která si češe vlasy; bronz
Sbírky Izraelského muzea, Jeruzalém

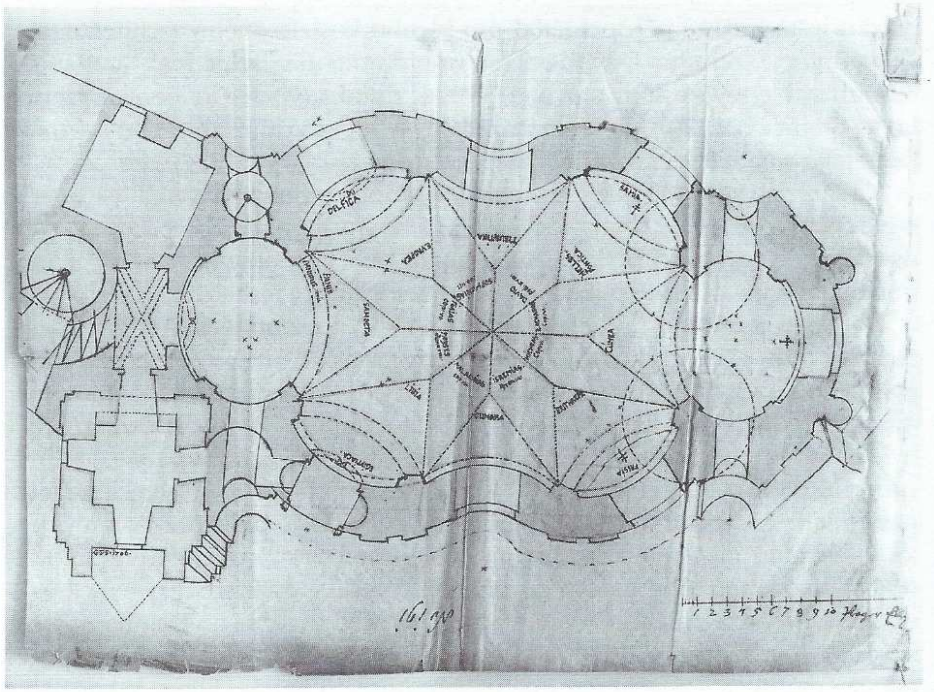
- **architektura**

- **architektura**

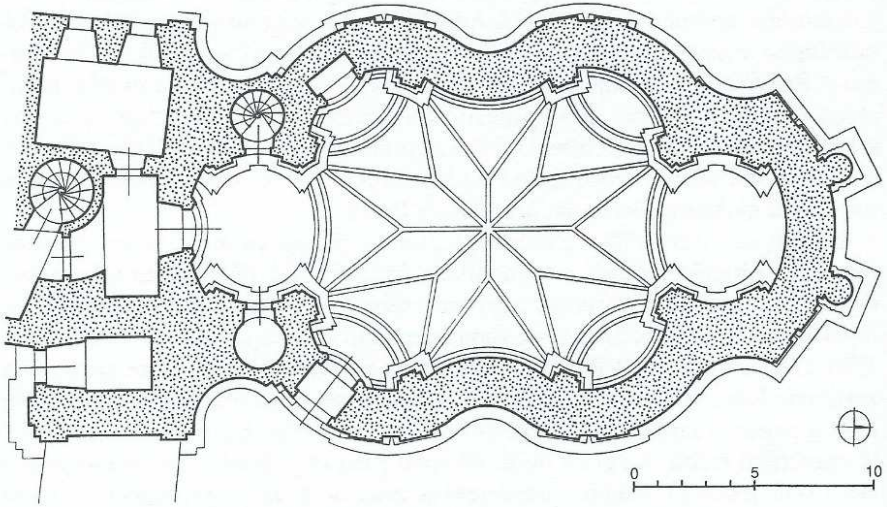
Zámecká kaple Zjevení Páně

(Smiřice, 1699–1701,
architekt Kryštof Dienzenhofer)

Kaple je ceněna jako velmi hodnotná barokní stavba. Její složitý **konkávně-konvexně** zprohýbaný půdorys má tvar mírně protáhlého osmiúhelníku.



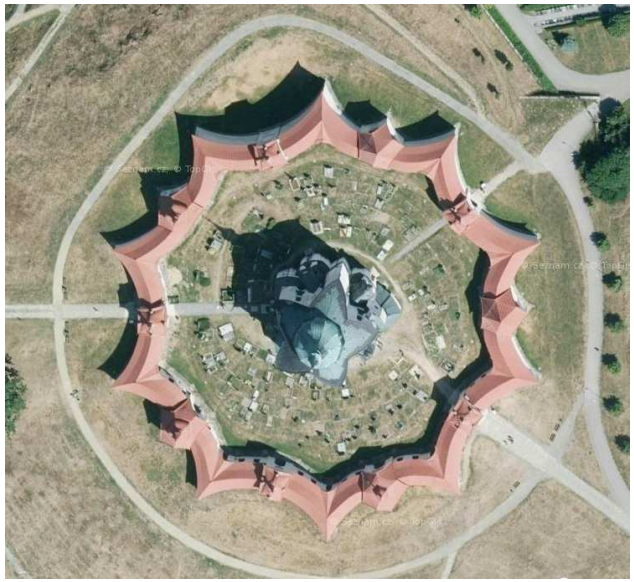
22 Smiřice, projekt zámecké kaple Zjevení Páně signovaný G. T. S. 1706

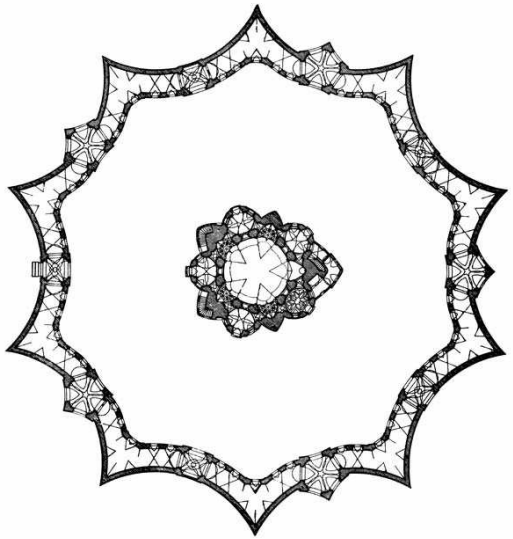


23 Smiřice, zámecká kaple Zjevení Páně, zaměření stávajícího stavu

Kostel svatého Jana Nepomuckého

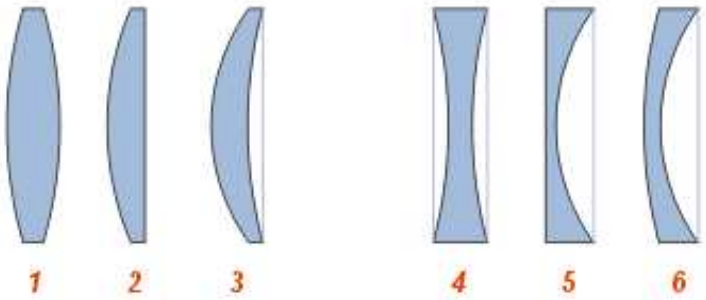
(Zelená hora, 1720–1722,
architekt Jan Blažej Santini-Aichel;
světové dědictví UNESCO)

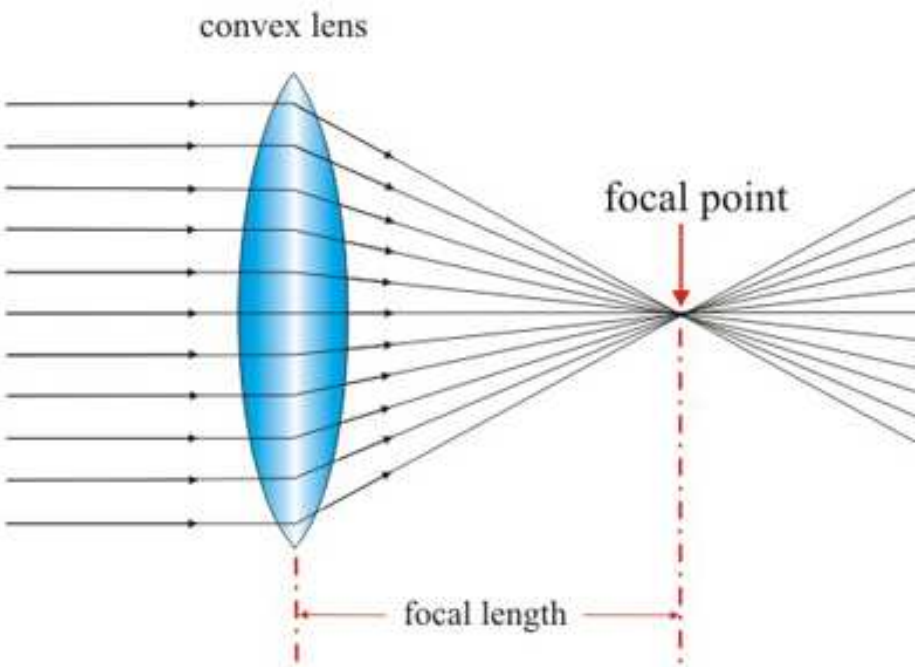


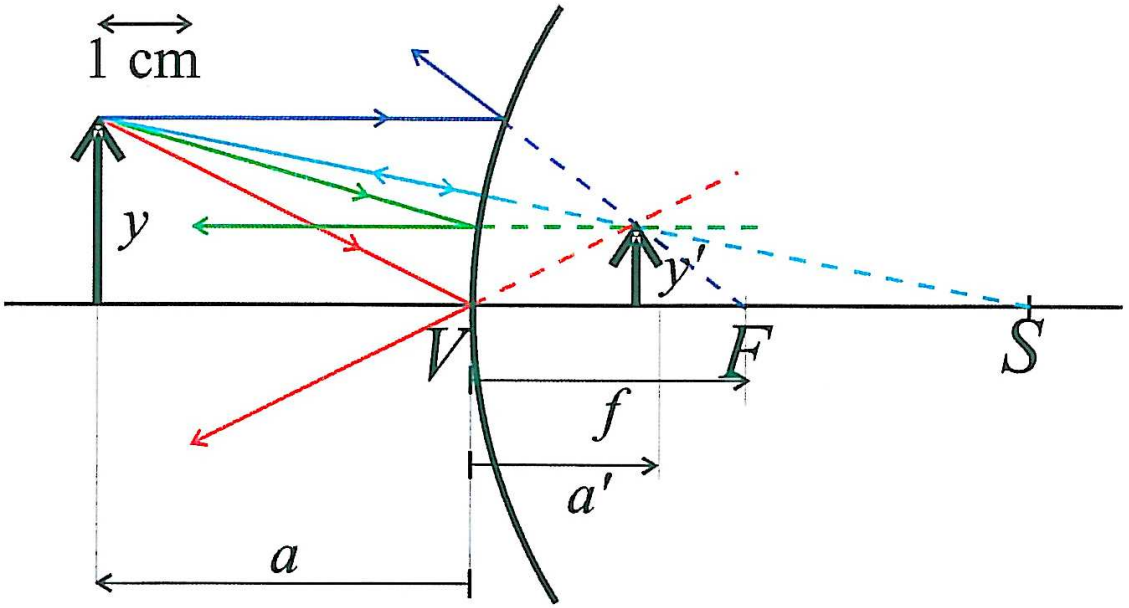


- **optika**

- **optika**

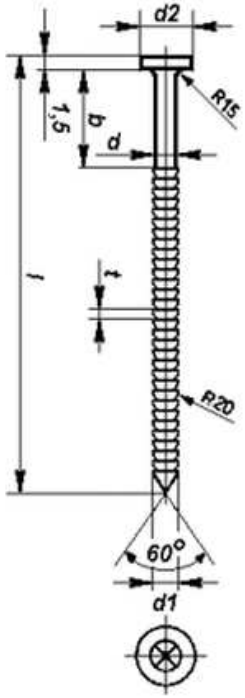


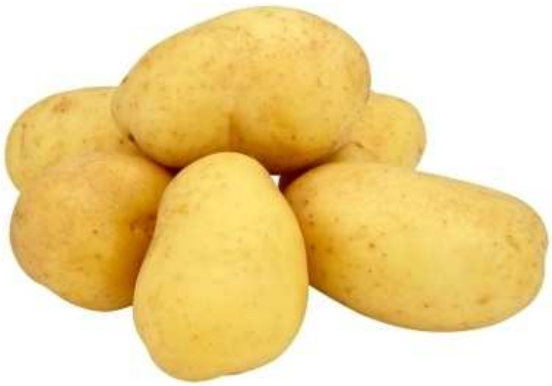



1 cm
y
y'
V
F
S
f
a'
a

- **zajímavost**: Konvexní hřebík

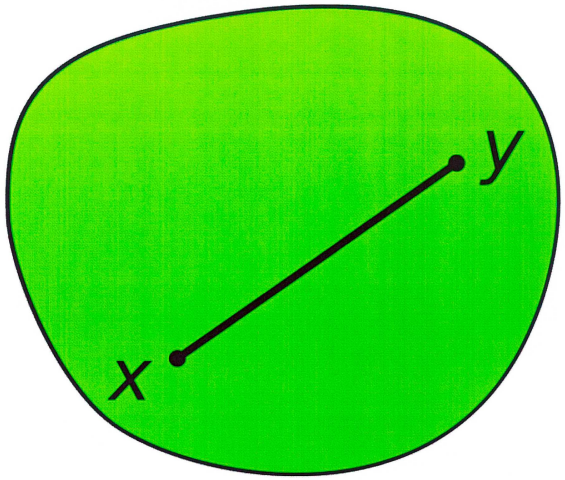
- **zajímavost**: Konvexní hřebík

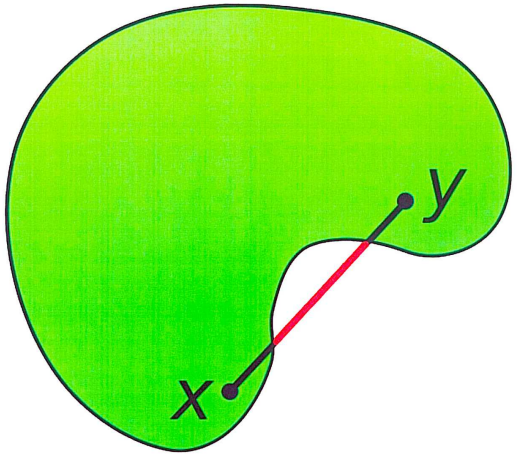




2. Konvexní tělesa

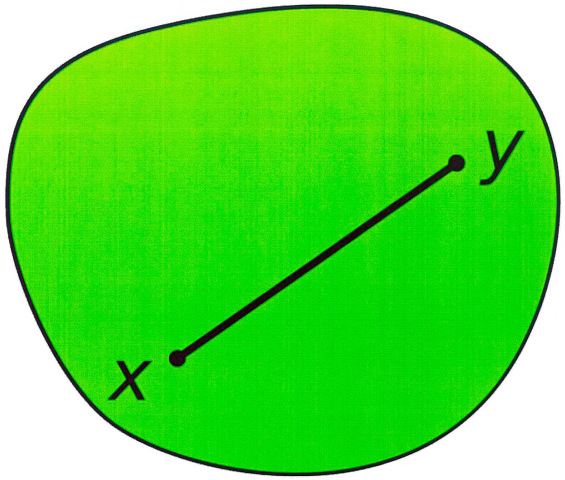
Množina $M \subset \mathbb{R}^d$ se nazývá **konvexní**, jestliže pro každé $x, y \in M$ je úsečka $\{tx + (1-t)y;\ 0 \le t \le 1\}$ obsažena v M.

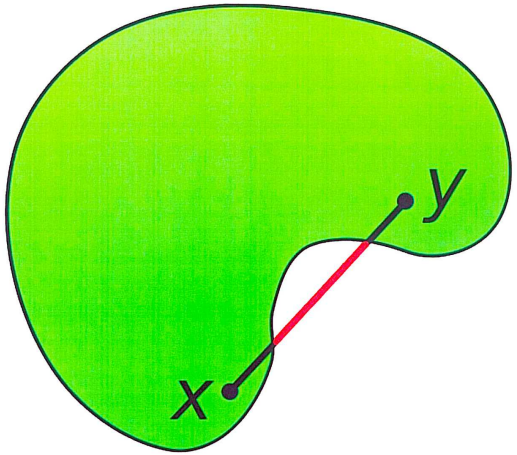




2. Konvexní tělesa

Množina $M \subset \mathbb{R}^d$ se nazývá **konvexní**, jestliže pro každé $x, y \in M$ je úsečka $\{tx + (1-t)y;\ 0 \le t \le 1\}$ obsažena v M.





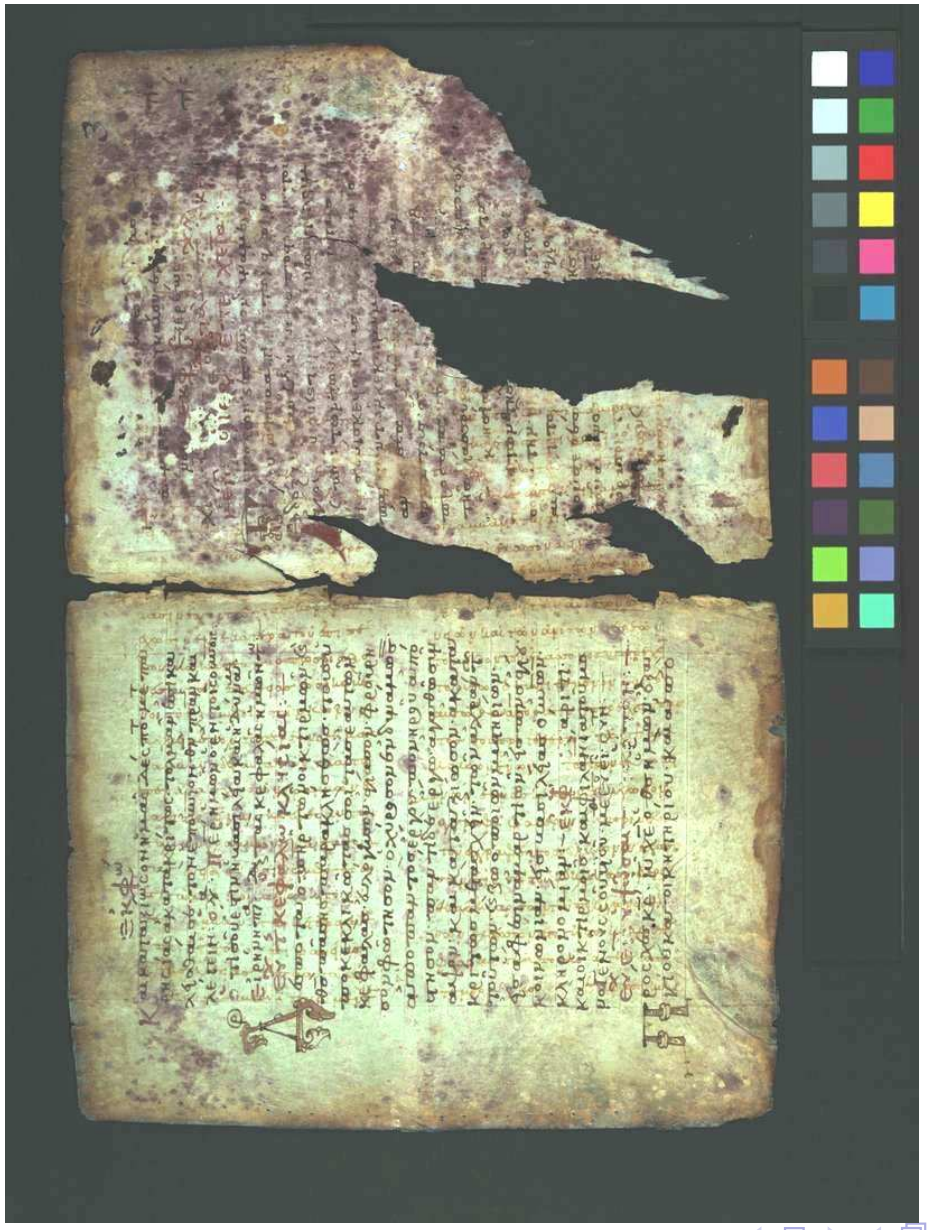
Konvexní množina $M \subset \mathbb{R}^d$ se nazývá **konvexní těleso** (pro $d = 2$ **konvexní obrazec**), jestliže M je omezená a uzavřená (= kompaktní) a má neprázdný vnitřek.

Archimédés (287–212 př. n. l.)

O kouli a válci; axióm 4

Konkávními na touž stranu nazývám takové plochy, že když na nich vezmeme libovolné dva body, padnou přímé vedené mezi těmito body buď všechny na touž stranu plochy, anebo některé na touž stranu, některé na plochu, na druhou stranu však nepadne žádná.

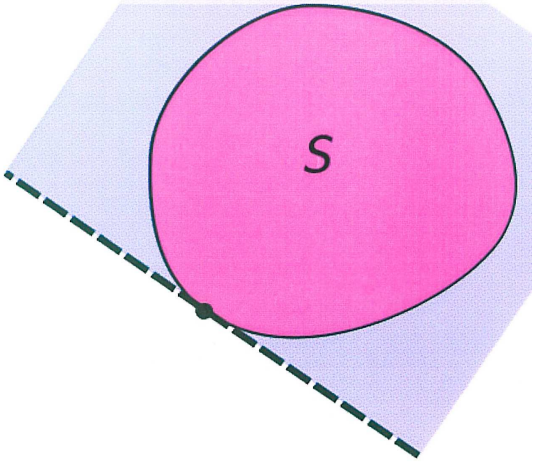
δ΄. Ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλας καλῶ τὰς τοιαύτας ἐπιφανείας, ἐν αἷς ἂν δύο σημείων λαμβανομένων αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσιν τῆς ἐπιφανείας, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ᾽ αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία.

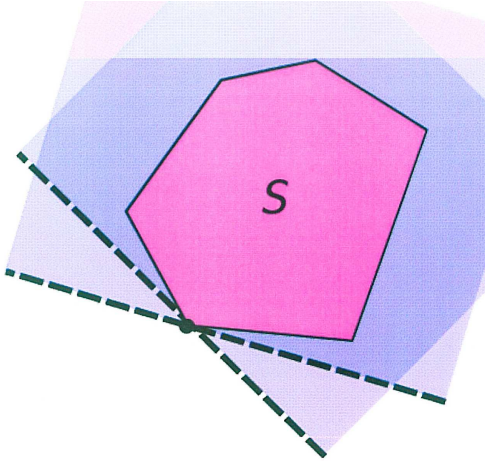


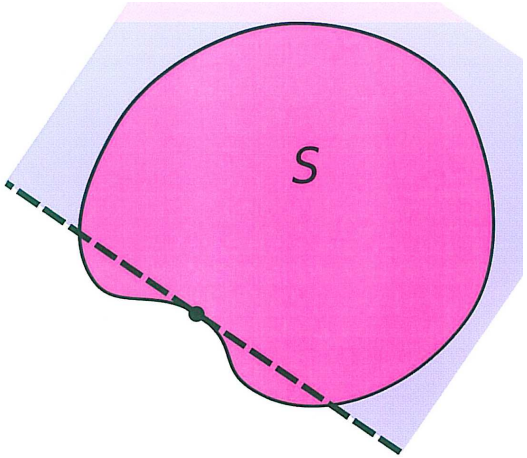
Nechť F je uzavřená podmnožina $\mathbb{R}^d$ a x je bod hranice množiny F. Nadrovina $H = H_F(x)$ se nazývá **opěrná nadrovina množiny F v bodě x**, jestliže F je obsažena v jednom z uzavřených poloprostorů určených nadrovinou H.

Nechť F je uzavřená podmnožina $\mathbb{R}^d$ a x je bod hranice množiny F. Nadrovina $H = H_F(x)$ se nazývá **opěrná nadrovina množiny F v bodě x**, jestliže F je obsažena v jednom z uzavřených poloprostorů určených nadrovinou H.

Věta. Uzavřená množina $F \subset \mathbb{R}^d$ je konvexní, právě když v každém bodě x hranice množiny F existuje (alespoň jedna) opěrná nadrovina.







Archimédés: O kouli a válci; axióm 3

Podobně jsou [konkávními na touž stranu] také některé ohraničené plochy, které sice samy v rovině neleží, ale své hranice v rovině mají a které buď budou ležet celé na téže straně roviny, na níž mají své hranice, nebo nic nemají na straně druhé.

γ΄. Ὁμοίως δὲ καὶ ἐπιφάνειαί τινές εἰσιν πεπερασμέναι, αὐταὶ μὲν οὐκ ἐν ἐπιπέδῳ, τὰ δὲ πέρατα ἔχουσαι ἐν ἐπιπέδῳ, αἳ τοῦ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ τὰ πέρατα ἔχουσιν, ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔσονται ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα.

Konvexní geometrie (= studium konvexních množin) je rozvinutá a respektovaná matematická disciplína.

Mathematical Reviews (MathSciNet) eviduje od roku 1940 v oddíle **52 Convex and discrete geometry** 19 540 publikací.

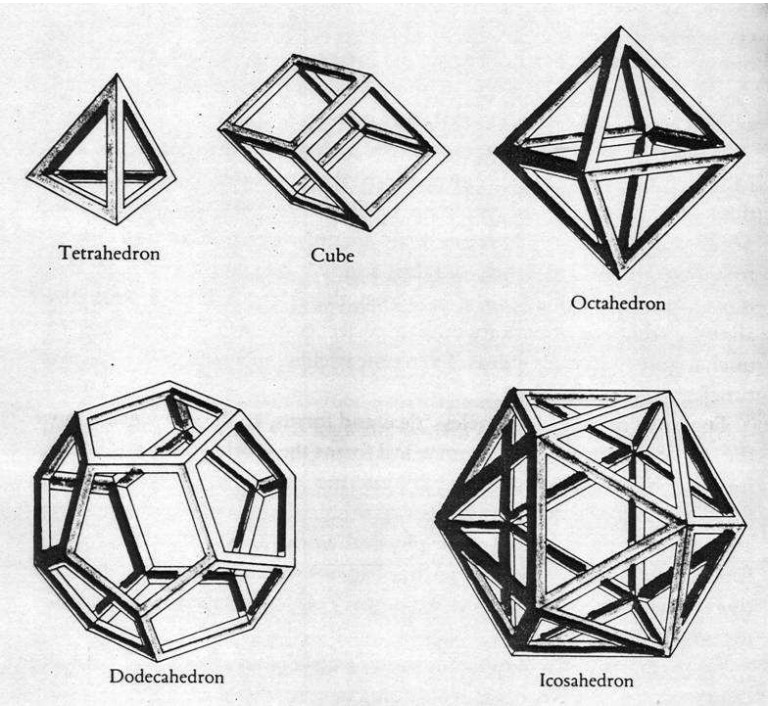
3. Kouzlo pravidelných mnohostěnů

Množina $M \subset \mathbb{R}^3$ se nazývá **konvexní mnohostěn**, jestiže M je průnikem konečně mnoha uzavřených poloprostorů a M je omezená množina s neprázdným vnitřkem.

3. Kouzlo pravidelných mnohostěnů

Množina $M \subset \mathbb{R}^3$ se nazývá **konvexní mnohostěn**, jestiže M je průnikem konečně mnoha uzavřených poloprostorů a M je omezená množina s neprázdným vnitřkem.

Pravidelný mnohostěn: všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a v každém vrcholu se stýká stejný počet stěn.



Nechť M je pravidelný mnohostěn, jeho stěny jsou n-úhelníky ($n \geq 3$) a v každém vrcholu se stýká k stěn ($k \geq 3$).

Vnitřní úhel pravidelného n-úhelníku je $(1 - \frac{2}{n})\pi$, tedy platí $k(1 - \frac{2}{n})\pi < 2\pi$, neboli

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} > \frac{1}{2}, \quad (n-2)(k-2) < 4, \quad n, k \geq 3.$$

Nechť M je pravidelný mnohostěn, jeho stěny jsou n-úhelníky ($n \geq 3$) a v každém vrcholu se stýká k stěn ($k \geq 3$).

Vnitřní úhel pravidelného n-úhelníku je $(1 - \frac{2}{n})\pi$, tedy platí $k(1 - \frac{2}{n})\pi < 2\pi$, neboli

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} > \frac{1}{2}, \quad (n-2)(k-2) < 4, \quad n, k \geq 3.$$

Vyhovují pouze tyto dvojice $\{n, k\}$:

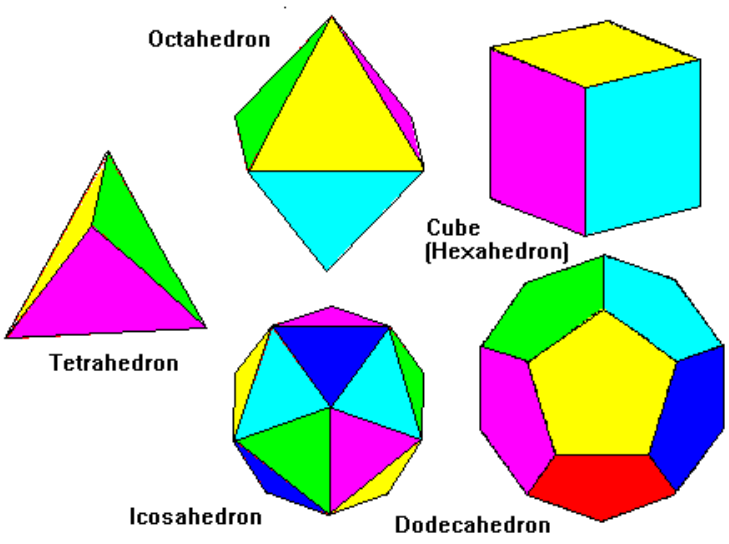
$\{3, 3\}$ čtyřstěn

$\{4, 3\}$ krychle (šestistěn)

$\{3, 4\}$ osmistěn

$\{3, 5\}$ dvanáctistěn

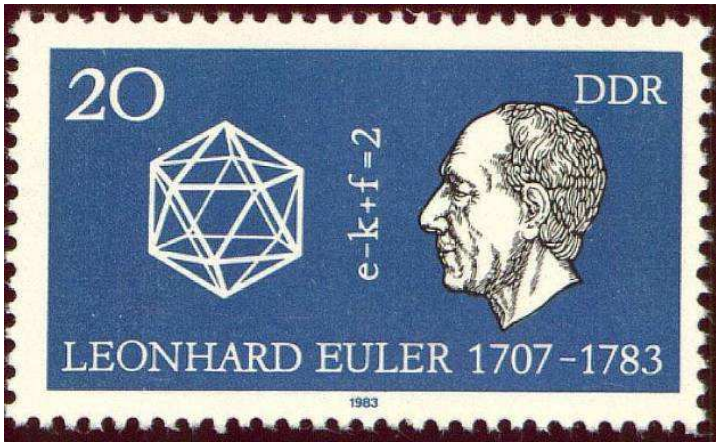
$\{5, 3\}$ dvacetistěn



L. Euler (1707–1783)

Pro počet vrcholů (N_0), hran (N_1) a stěn (N_2) konvexního mnohostěnu v $\mathbb{R}^3$ platí **Eulerův vzorec** (1752):

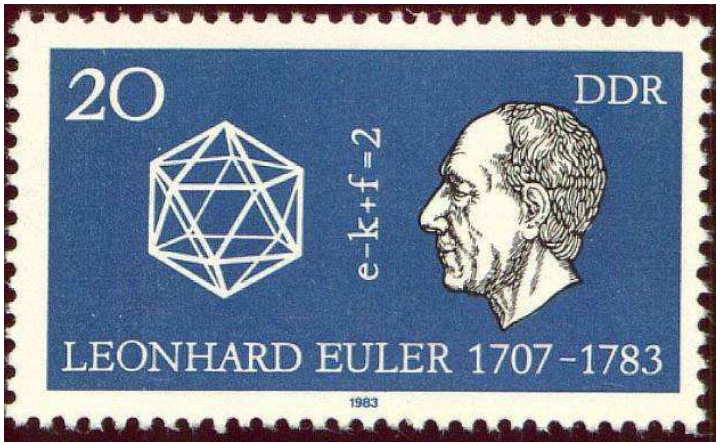
$$N_0 - N_1 + N_2 = 2.$$



L. Euler (1707–1783)

Pro počet vrcholů (N_0), hran (N_1) a stěn (N_2) konvexního mnohostěnu v $\mathbb{R}^3$ platí **Eulerův vzorec** (1752):

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2.$$



Protože $N_1 = \frac{n}{2}N_2$, $N_0 = \frac{n}{k}N_2$, pro pravidelný mnohostěn opět dostáváme $(n-2)(k-2) < 4$.

E. Steinitz (1871–1928)

Věta (E. Steinitz, 1906)**.** Nechť N_0, N_1, N_2 jsou přirozená čísla. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) existuje konvexní mnohostěn v $\mathbb{R}^3$ mající N_0 vrcholů, N_1 hran a N_2 stěn,

(ii) $N_0 - N_1 + N_2 = 2$, $N_0 \leq 2N_2 - 4$, $N_2 \leq 2N_0 - 4$.

Analogie Steinitzovy věty pro mnohostěny v prostorech dimenze větší než tři je **otevřeným problémem**.

4. Objem koule v $\mathbb{R}^d$

Objem d-rozměrné koule o poloměru 1 označme v_d.

Integrální počet:

$$v_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{(\frac{d}{2})!}, \ d \text{ sudé} \qquad v_d = \frac{2^{\frac{d+1}{2}} \cdot \pi^{\frac{d-1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot d}, \ d \text{ liché}$$

$$v_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}, \ d \in \mathbb{N}, \ \text{kde } \Gamma(t) := \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx, \ t > 0.$$

Platí: $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.

Snadné: $v_1 < v_2 < \cdots < v_5$, dále $v_5 > v_6 > v_7 \ldots$

Snadné: $v_1 < v_2 < \cdots < v_5$, dále $v_5 > v_6 > v_7 \ldots$

Stirlingův vzorec (A. de Moivre, J. Stirling, 1730)**:**

$$\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right) \sim \sqrt{2\pi} e^{-\frac{d}{2}} \left(\frac{d}{2}\right)^{\frac{d+1}{2}}.$$

Tedy: $v_d \sim \left(\sqrt{\frac{2\pi e}{d}}\right)^d \to 0$ pro $d \to \infty$.

Objem koule $B(r)$ o poloměru r je roven $\mathrm{vol}_d\big(B(r)\big) = v_d r^d$.

Snadné: $v_1 < v_2 < \cdots < v_5$, dále $v_5 > v_6 > v_7 \ldots$

Stirlingův vzorec (A. de Moivre, J. Stirling, 1730)**:**

$$\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right) \sim \sqrt{2\pi} e^{-\frac{d}{2}} \left(\frac{d}{2}\right)^{\frac{d+1}{2}}.$$

Tedy: $v_d \sim \left(\sqrt{\frac{2\pi e}{d}}\right)^d \to 0$ pro $d \to \infty$.

Objem koule $B(r)$ o poloměru r je roven $\mathrm{vol}_d\big(B(r)\big) = v_d r^d$.

Jaký je poloměr koule B mající objem 1?

Poloměr B je $\sim \sqrt{\frac{d}{2\pi e}}$.

Nechť H je nadrovina procházející počátkem. Pak řez $B \cap H$ je $(d-1)$-dimenzionální koule o poloměru $\sim \sqrt{\frac{d}{2\pi e}}$, tedy její $(d-1)$-dimenzionální objem je

$$\sim v_{d-1}\left(\sqrt{\frac{d}{2\pi e}}\right)^{d-1} = \left(\sqrt{\frac{d}{d-1}}\right)^{d-1} \to \sqrt{e} \text{ pro } d \to \infty,$$

neboť

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \sqrt{e}.$$

Pro velká d je tedy $\mathrm{vol}_{d-1}(B \cap H) \sim \sqrt{e} > \sqrt{2}$.

Opatrnější počítání dává tento odhlad (*k zapamatování*):

$$\mathrm{vol}_{d-1}(B \cap H) > \sqrt{2} \text{ pro } d \geq 10.$$

5. O kouli a krychli

Otázka: Pro kterou nadrovinu H procházející počátkem má řez ($=$ průnik $K \cap H$) krychle $K := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$ maximální $(d-1)$-dimenzionální objem?

5. O kouli a krychli

Otázka: Pro kterou nadrovinu H procházející počátkem má řez ($=$ průnik $K \cap H$) krychle $K := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$ maximální $(d-1)$-dimenzionální objem?

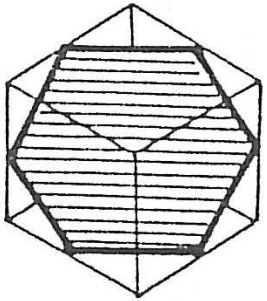
Pro $d = 2$ je odpověď $\sqrt{2}$.

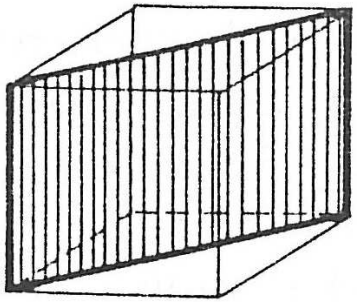
5. O kouli a krychli

Otázka: Pro kterou nadrovinu H procházející počátkem má řez (= průnik $K \cap H$) krychle $K := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$ maximální $(d-1)$-dimenzionální objem?

Pro $d = 2$ je odpověď $\sqrt{2}$.

Pro $d = 3$ se nabízí rovina H procházející počátkem kolmá na tělesovou úhlopříčku. Řez $K \cap H$ je šestiúhelník o obsahu $\frac{3}{4}\sqrt{3}$.





Obdélníkový řez, jehož dvě protilehlé strany splývají s protilehlými hranami krychle má obsah $\sqrt{2} > \frac{3}{4}\sqrt{3}$.

Domněnka: Pro všechna d je maximum $\mathrm{vol}_{d-1}\big(K \cap H\big)$ rovno $\sqrt{2}$.

V roce 1986 ji K. Ball dokázal metodami teorie pravděpodobnosti (!) a Fourierovy analýzy.

Domněnka: Pro všechna d je maximum $\mathrm{vol}_{d-1}\big(K \cap H\big)$ rovno $\sqrt{2}$.

V roce 1986 ji K. Ball dokázal metodami teorie pravděpodobnosti (!) a Fourierovy analýzy.

H má rovnici $\sum_{j=1}^{d} a_j x_j = 0$, $\sum_{j=1}^{d} a_j^2 = 1$

$$\mathrm{vol}_{d-1}\big(K \cap H\big) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\ a_1 t}{a_1 t} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin\ a_d t}{a_d t} dt$$

$$\text{a} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin\ t}{t} \right|^p dt \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p}}, \quad p \geq 2$$

Otázka: Jakou část objemu zaujímá koule vepsaná do krychle?

Výpočtem: 52,2% v $\mathbb{R}^3$, v $\mathbb{R}^8$ však již méně než 2% (!)

Vysvětlení (?): vrchol krychle v K má od středu krychle vzdálenost $\frac{\sqrt{d}}{2}$, takže koule *opsaná* K má poloměr $\frac{\sqrt{d}}{2}$ a tato koule má objem $v_d\left(\frac{\sqrt{d}}{2}\right)^d \to \infty$ pro $d \to \infty$.

6. Překvapení s řezy konvexních těles

Problém (H. Busemann, C. M. Petty, 1956)**:** Nechť C, D jsou konvexní *symetrická tělesa* v $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ taková, že pro každou nadrovinu H procházející počátkem je

$$\mathrm{vol}_{d-1}\big(C \cap H\big) \leq \mathrm{vol}_{d-1}\big(D \cap H\big).$$

Platí pak $\mathrm{vol}_d\big(C\big) \leq \ \mathrm{vol}_d\big(D\big)$?

My už odpověď známe: obecně NE!

Protipříklad: $d \geq 10$, $C := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$, $D :=$ koule o středu v počátku o objemu *nepatrně menším* než 1. Pak

$$\mathrm{vol}_{d-1}\big(C \cap H\big) \leq \sqrt{2} < \mathrm{vol}_{d-1}\big(D \cap H\big) \text{ a } \mathrm{vol}_d(C) > \mathrm{vol}_d(D).$$

Protipříklad: $d \geq 10$, $C := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$, $D :=$ koule o středu v počátku o objemu *nepatrně menším* než 1. Pak

$$\mathrm{vol}_{d-1}\big(C \cap H\big) \leq \sqrt{2} < \mathrm{vol}_{d-1}\big(D \cap H\big) \text{ a } \mathrm{vol}_d(C) > \mathrm{vol}_d(D).$$

negativní odpověď: $d \geq 12$ (1975), $d \geq 10$ (1988), $d \geq 7$ (1990), $d \geq 5$ (1992, 1994)

pozitivní odpověď: $d = 2$ (snadné), $d = 3$ (1994), $d = 4$ (1999)

Protipříklad: $d \geq 10$, $C := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$, $D :=$ koule o středu v počátku o objemu *nepatrně menším* než 1. Pak

$$\mathrm{vol}_{d-1}\big(C \cap H\big) \leq \sqrt{2} < \mathrm{vol}_{d-1}\big(D \cap H\big) \text{ a } \mathrm{vol}_d(C) > \mathrm{vol}_d(D).$$

negativní odpověď: $d \geq 12$ (1975), $d \geq 10$ (1988), $d \geq 7$ (1990), $d \geq 5$ (1992, 1994)

pozitivní odpověď: $d = 2$ (snadné), $d = 3$ (1994), $d = 4$ (1999)

Překvapení: Do dimenze 4 včetně má problém pozitivní řešení, dimenzí 5 počínaje negativní.

7. Záhada univerzální pokličky

Pro omezenou neprázdnou množinu $M \subset \mathbb{R}^d$ definujeme průměr M rovností

$$\operatorname{diam} M := \sup\{|\, x - y \,| : x, y \in M\}.$$

7. Záhada univerzální pokličky

Pro omezenou neprázdnou množinu $M \subset \mathbb{R}^d$ definujeme průměr M rovností

$$\operatorname{diam} M := \sup\{|\, x - y \,| : x, y \in M\}.$$

Věta. Nechť C je konvexní obrazec v $\mathbb{R}^2$ o průměru ≤ 1. Potom pro obsah C platí $\mathrm{vol}_2(C) \leq \frac{\pi}{4}$ (= obsah kruhu o průměru 1).

7. Záhada univerzální pokličky

Pro omezenou neprázdnou množinu $M \subset \mathbb{R}^d$ definujeme průměr M rovností

$$\operatorname{diam} M := \sup\{|\, x - y \,| : x, y \in M\}.$$

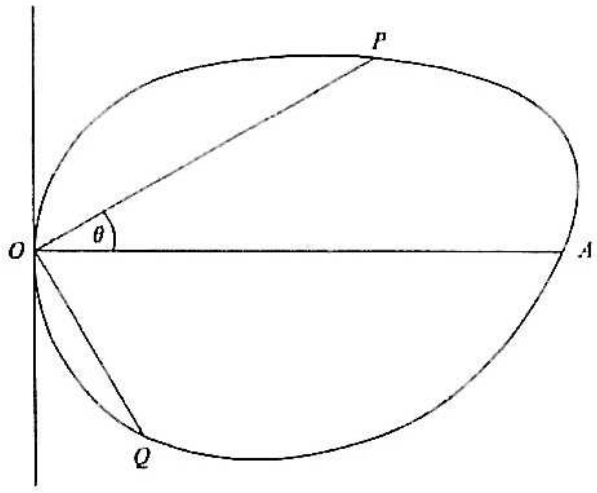
Věta. Nechť C je konvexní obrazec v $\mathbb{R}^2$ o průměru ≤ 1. Potom pro obsah C platí $\mathrm{vol}_2(C) \leq \frac{\pi}{4}$ (= obsah kruhu o průměru 1).

Polární souřadnice:

$$\mathrm{vol}_2(C) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r^2(\theta) + r^2(\theta - \tfrac{\pi}{2})\right) d\theta$$

Pýthagorova věta:

$$OP^2 + OQ^2 = PQ^2 \leq 1$$



Konvexní obrazec K se nazývá **univerzální poklička**, jestliže každou množinu o průměru 1 lze přikrýt shodnou kopií obrazce K.

H. Lebesgue (1875–1941)

Problém (H. Lebesgue, 1914)**:** Jaký je minimální obsah univerzální pokličky?

Dodnes nevyřešeno!

Konvexní obrazec K se nazývá **univerzální poklička**, jestliže každou množinu o průměru 1 lze přikrýt shodnou kopií obrazce K.

H. Lebesgue (1875–1941)

Problém (H. Lebesgue, 1914)**:** Jaký je minimální obsah univerzální pokličky?

Dodnes nevyřešeno!

Komentář: Poklička musí pokrýt kruh o průměru 1 (*dolní odhad*); není těžké dokázat, že pravidelný šestiúhelník o délce strany $\frac{1}{\sqrt{3}}$ je univerzální poklička (*horní odhad*):

$$0,785 \doteq \frac{\pi}{4} \leq \mathrm{vol}_2(K) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \sim 0,886$$

2015: $\quad 0,832 \leq \mathrm{vol}_2(K) \leq 0,844$

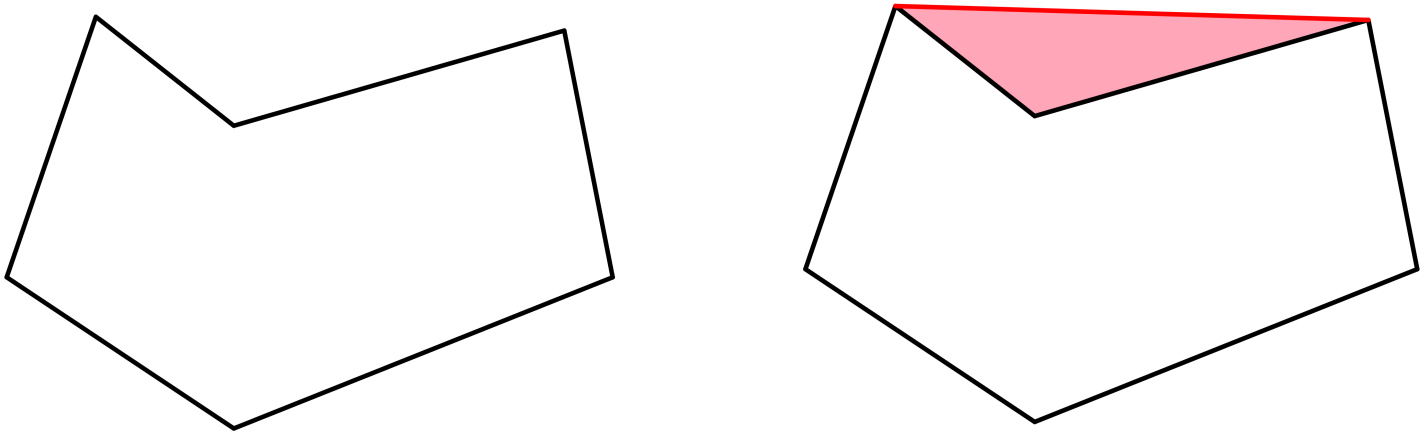
8. Záludnost izoperimetrické úlohy

Problém: Mezi rovinnými obrazci daného obvodu L najít obrazec s největším obsahem A.

8. Záludnost izoperimetrické úlohy

Problém: Mezi rovinnými obrazci daného obvodu L najít obrazec s největším obsahem A.

Poznámka: Stačí uvažovat konvexní obrazce.



Řešení: Kruh (s obvodem L).

Jeho poloměr r je $\frac{L}{2\pi}$, jeho obsah je $\pi r^2 = \frac{L^2}{4\pi} \geq A$.

Izoperimetrická nerovnost

$L^2 - 4\pi A \geq 0$ a rovnost nastává, **právě když** obrazec je kruh.

Izoperimetrická nerovnost

$L^2 - 4\pi A \geq 0$ a rovnost nastává, **právě když** obrazec je kruh.

J. Steiner (1736–1863)

Úvaha J. Steinera (1838, 1842)**:**

Steiner ukázal: pro každý konvexní obrazec, který **není** kruh, existuje (geometrická) metoda, pomocí níž lze najít konvexní obrazec o stejném obvodu a větším obsahu.

Steinerův závěr: Řešením izoperimetrické úlohy je kruh.

Izoperimetrická nerovnost

$L^2 - 4\pi A \geq 0$ a rovnost nastává, **právě když** obrazec je kruh.

J. Steiner (1736–1863)

Úvaha J. Steinera (1838, 1842)**:**

Steiner ukázal: pro každý konvexní obrazec, který **není** kruh, existuje (geometrická) metoda, pomocí níž lze najít konvexní obrazec o stejném obvodu a větším obsahu.

Steinerův závěr: Řešením izoperimetrické úlohy je kruh.

Chybný závěr!

Dokáži Vám: Mezi přirozenými čísly je číslo 1 největší. (!)

"Důkaz" (O. Perron, 1913): Pro každé přirozené číslo, které není 1, existuje metoda, pomocí níž lze najít větší přirozené číslo (stačí vzít druhou mocninu). Závěr (stejně tak chybný !): číslo 1 je největší přirozené číslo.

Dokáži Vám: Mezi přirozenými čísly je číslo 1 největší. (!)

"Důkaz" (O. Perron, 1913): Pro každé přirozené číslo, které není 1, existuje metoda, pomocí níž lze najít větší přirozené číslo (stačí vzít druhou mocninu). Závěr (stejně tak chybný !): číslo 1 je největší přirozené číslo.

Poučení: Slovo *největší* (*nejmenší*) je v matematice nebezpečné! Nelze zaměňovat supremum (infimum) za *maximum* (*minimum*)!

Dokáži Vám: Mezi přirozenými čísly je číslo 1 největší. (!)

"Důkaz" (O. Perron, 1913): Pro každé přirozené číslo, které není 1, existuje metoda, pomocí níž lze najít větší přirozené číslo (stačí vzít druhou mocninu). Závěr (stejně tak chybný !): číslo 1 je největší přirozené číslo.

Poučení: Slovo *největší* (*nejmenší*) je v matematice nebezpečné! Nelze zaměňovat supremum (infimum) za *maximum* (*minimum*)!

Důkaz **existence** (pro izoperimetrickou úlohu) je v *zásadě* analogický důkazu, který z analýzy známe z 1. ročníku.

Věta. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom existuje $x_0 \in [a, b]$ takové, že $f(x) \leq f(x_0)$, $x \in [a, b]$. Jinak řečeno: funkce f nabývá v bodě x_0 maxima.

Věta. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom existuje $x_0 \in [a, b]$ takové, že $f(x) \leq f(x_0)$, $x \in [a, b]$. Jinak řečeno: funkce f nabývá v bodě x_0 maxima.

Důkaz. Nechť $s := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ a nechť $s_n < s$ a $s_n \nearrow s$. Existují body $x_n \in [a, b]$, takové, že $f(x_n) \geq s_n$.

Podle **Bolzanovy-Weierstrassovy věty** existují indexy $n_1 < n_2 < \dots$ a bod $x_0 \in [a, b]$ takové, že $x_{n_k} \to x_o$. Protože f je spojitá funkce, je $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$. Protože $f(x_{n_k}) \geq s_{n_k}$, je $f(x_0) = s$.

W. Blaschke (1885–1962)

Pro konvexní tělesa: Zavede se vzdálenost dvou konvexních obrazců, dokáže se tzv. Blaschkeho věta o vybrané posloupnosti a dokáže se, že obsah konvexního obrazce je spojitá funkce.

9. Obrazce a tělesa konstantní šířky

Nechť $C \subset \mathbb{R}^d$ je konvexní těleso a $w > 0$. Jestliže vzdálenost každých dvou (různých) opěrných nadrovin tělesa C je rovna w, pak C se nazývá **těleso** (pro $d = 2$ **obrazec**) **konstantní šířky** w.

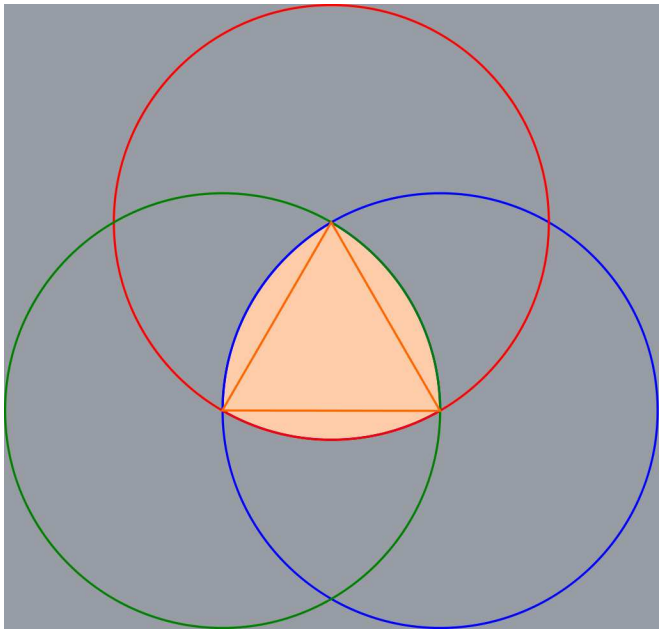
9. Obrazce a tělesa konstantní šířky

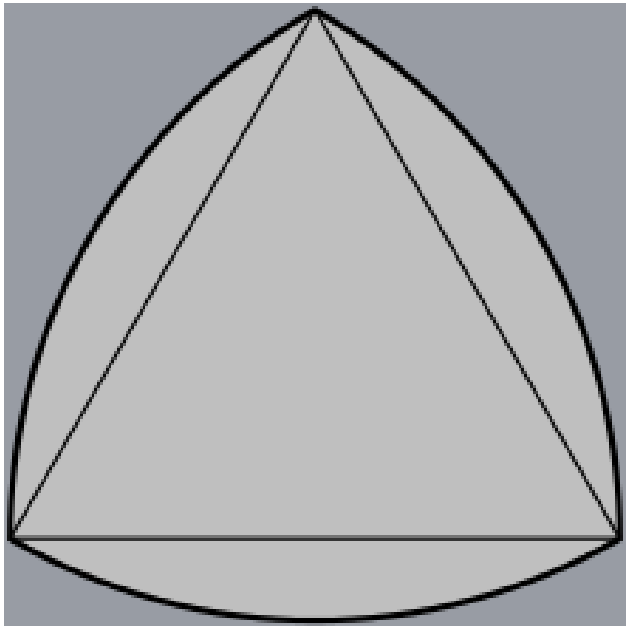
Nechť $C \subset \mathbb{R}^d$ je konvexní těleso a $w > 0$. Jestliže vzdálenost každých dvou (různých) opěrných nadrovin tělesa C je rovna w, pak C se nazývá **těleso** (pro $d = 2$ **obrazec**) **konstantní šířky** w.

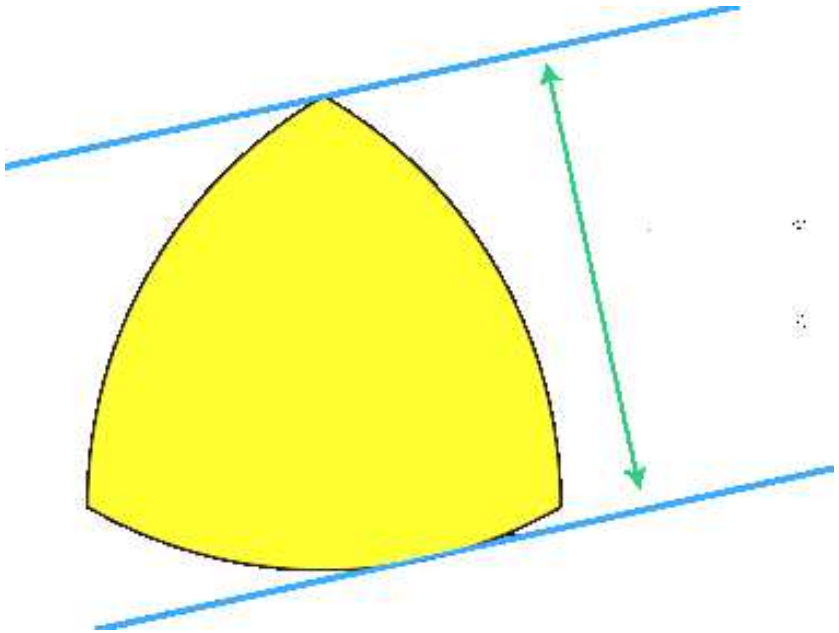
Příklad: koule v $\mathbb{R}^d$

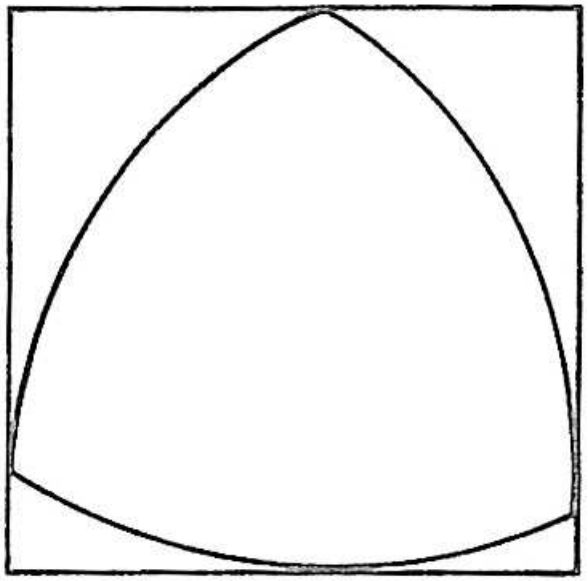
F. Reuleaux (1829–1905)

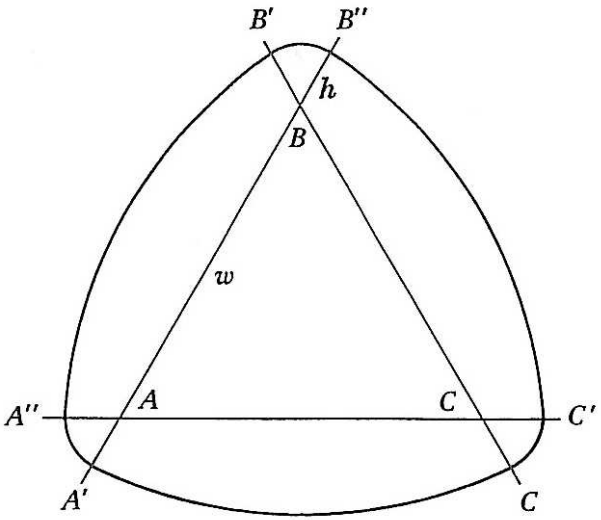
- Reuleauxův trojúhelník v $\mathbb{R}^2$ (šířky w)

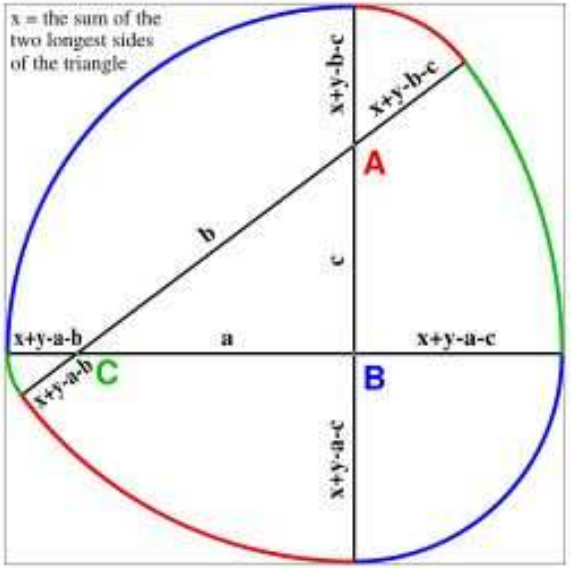









B′
B″
h
B
w
A″
A
C
C′
A′
C


x = the sum of the
two longest sides
of the triangle
x+y-b-c
x+y-b-c
A
b
c
x+y-a-b
a
x+y-a-c
x+y-a-b
C
B
x+y-a-c

- pro n liché; Reuleauxův n-úhelník, analogie Reuleauxova trojúhelníku

- pro n liché; Reuleauxův n-úhelník, analogie Reuleauxova trojúhelníku

Obvod kruhu o průměru w je roven πw.

J. E. Barbier (1839–1889)

Věta (J. E. Barbier, 1860)**.** Je-li C obrazec konstantní šířky w, pak je obvod C roven πw.

Důsledek izoperimetrické nerovnosti: Mezi všemi konvexními obrazci konstantní šířky w má kruh o průměru w největší obsah.

Nejmenší obsah?

- pro n liché; Reuleauxův n-úhelník, analogie Reuleauxova trojúhelníku

Obvod kruhu o průměru w je roven πw.

J. E. Barbier (1839–1889)

Věta (J. E. Barbier, 1860)**.** Je-li C obrazec konstantní šířky w, pak je obvod C roven πw.

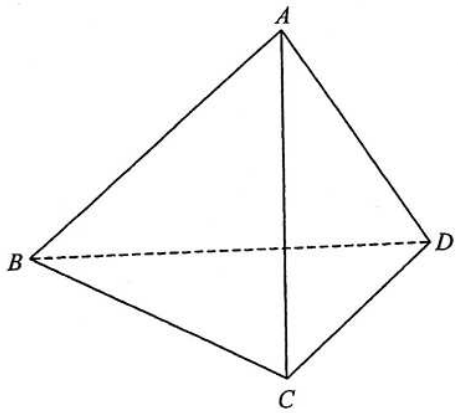
Důsledek izoperimetrické nerovnosti: Mezi všemi konvexními obrazci konstantní šířky w má kruh o průměru w největší obsah.

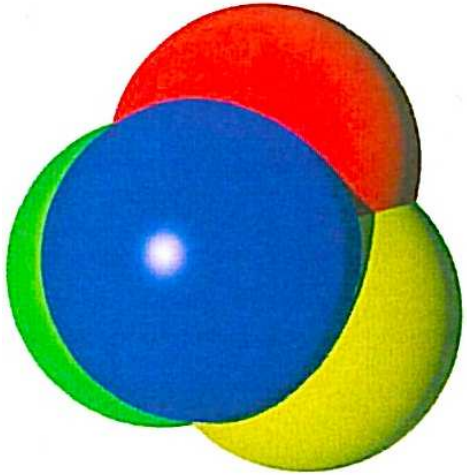
Nejmenší obsah?

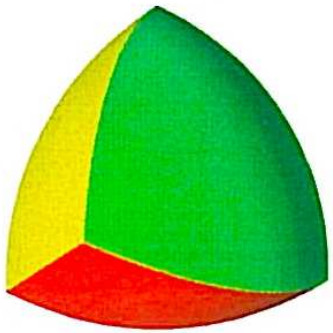
Věta (H. Lebesgue, 1914, W. Blaschke, 1915)**.** Mezi všemi konvexními obrazci konstantní šírky w má Reuleauxův trojúhelník o průměru w nejmenší obsah.

Situace v $\mathbb{R}^3$

Reuleauxův čtyřstěn?



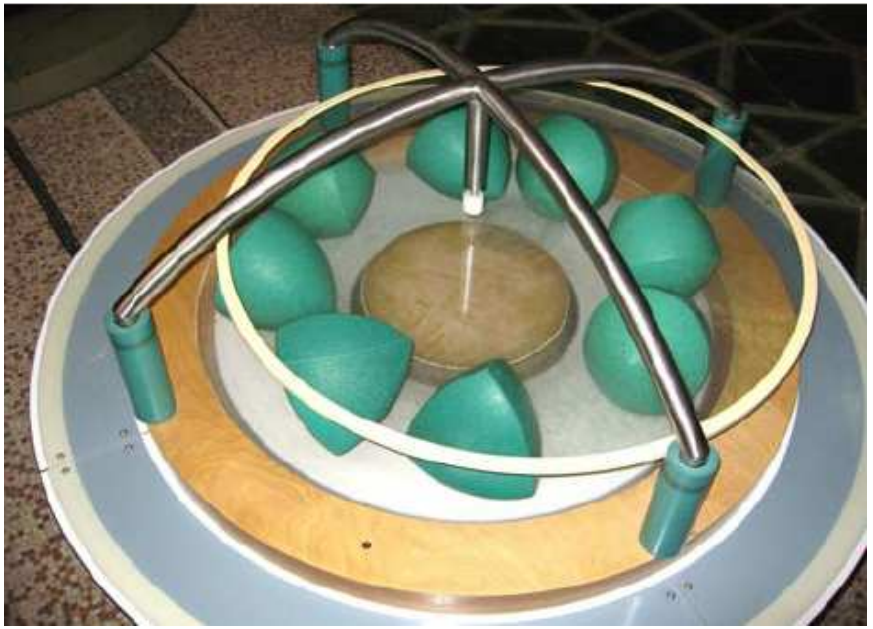




NE, nemá konstantní šířku (*šířka* kolísá v rozmezí 2,5%)

E. Meissner (1883–1939)

V roce 1911 navrhl modifikaci, jejímž výsledkem je těleso konstantní šířky, tzv. **Meissnerovo těleso**.



Domněnka: Meissnerovo těleso minimalizuje objem mezi všemi trojdimenzionálními konvexními tělesy dané konstantní šířky.

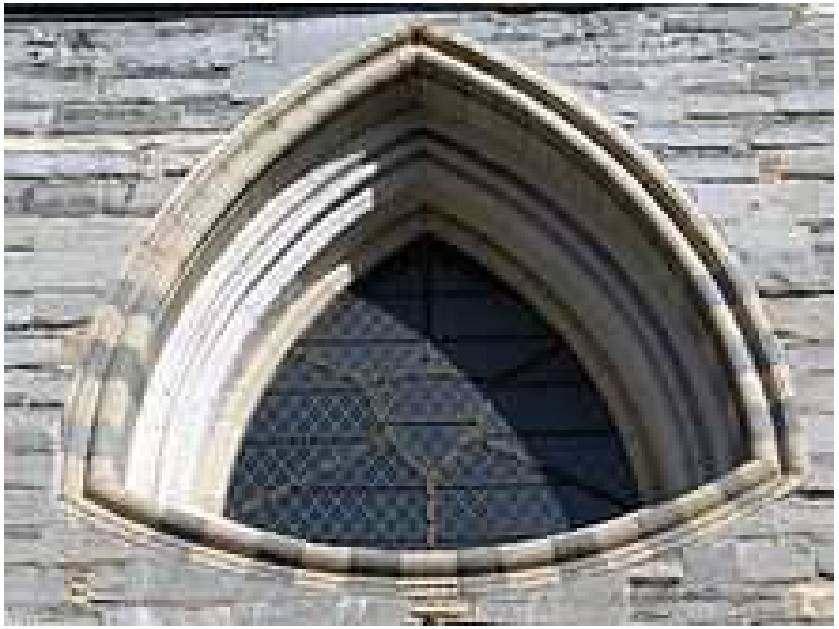
Otevřený problém!

Domněnka pro **rotační** tělesa konstantní šířky: řešením je těleso získané rotací Reuleauxova trojúhelníku.

Potvrzena až v roce 2009 (!).

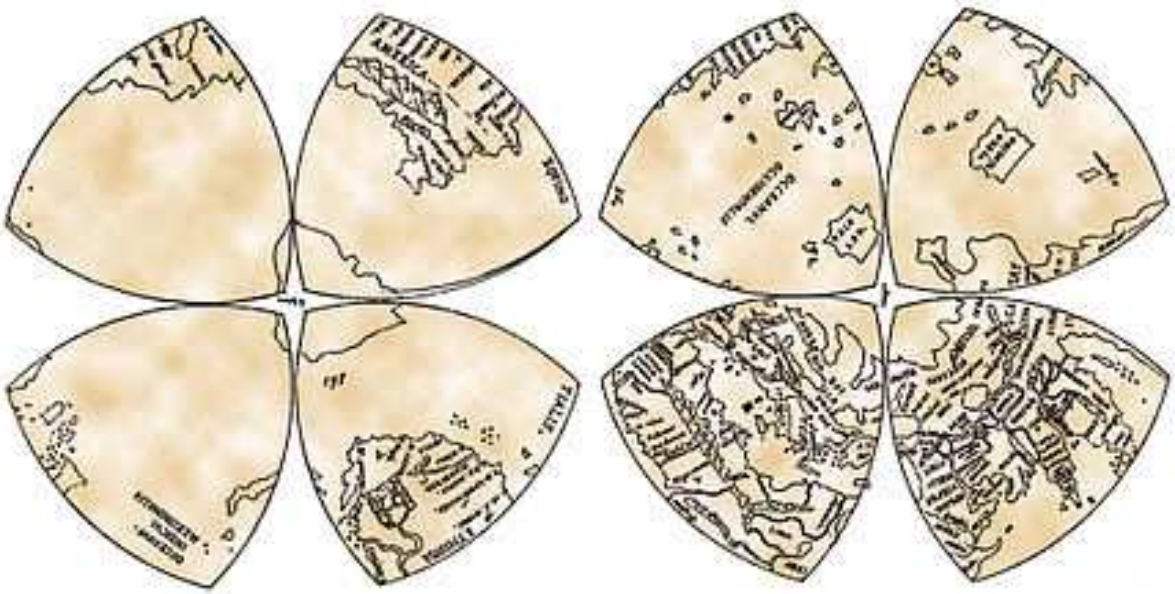
10. Konstantní šířka kolem nás

- **gotické okno (Bruges)**



- **trojúhelníková budova (Kolín nad Rýnem)**

- **mapa světa (Leonardo da Vinci)**



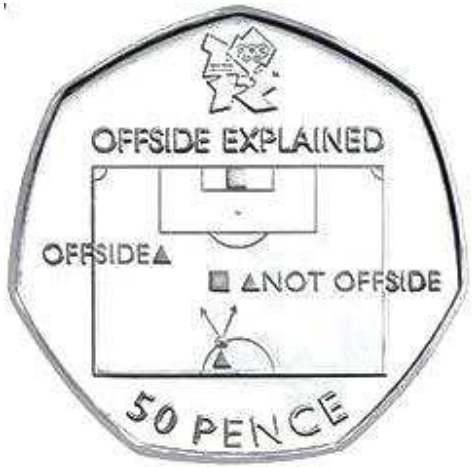
- **trsátko**

- **mince**

ELIZABETH II · D · G · REG · F · D
2017

ONE POUND

CANADA
1987-2017
DOLLAR


OFFSIDE EXPLAINED
OFFSIDE
NOT OFFSIDE
50 PENCE

- **knoflíky**

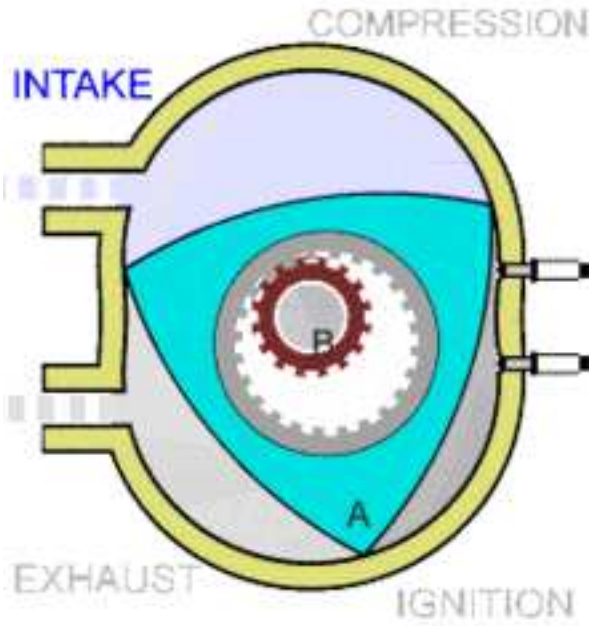
- **trojúhelníkové tužky**

- **logo**

BERKELEY CENTER FOR NEW MEDIA

- **krytka vodního ventilu (San Francisco)**

- **Wankelův motor**



United States Patent [19]

Steffens, Jr.

[11] **Patent Number: 5,485,970**

[45] **Date of Patent: Jan. 23, 1996**

[54] **SEAT BELT PRETENSIONER**

[75] Inventor: **Charles E. Steffens, Jr.**, Washington, Mich.

[73] Assignee: **TRW Vehicle Safety Systems Inc.**, Lyndhurst, Ohio

[21] Appl. No.: **210,931**

[22] Filed: **Mar. 21, 1994**

[51] **Int. Cl.**[6] **B60R 22/46**

[52] **U.S. Cl.** **242/374**

[58] **Field of Search** 242/374; 297/478, 297/480; 280/806

[56] **References Cited**

U.S. PATENT DOCUMENTS

3,606,378	9/1971	Prostran .	
4,014,479	3/1977	Nilsson et al.	242/374
4,151,967	5/1979	Lindblad	242/374
4,232,836	11/1980	Fohl	242/374
4,286,758	9/1981	Inukai et al. .	
4,371,125	2/1983	Andres .	
4,444,010	4/1984	Bendler .	
4,455,000	6/1984	Nilsson	242/374
4,508,288	4/1985	Nilsson	242/374
4,558,832	12/1985	Nilsson .	
4,840,325	6/1989	Higuchi et al. .	
4,871,131	10/1989	Bernier et al. .	
5,248,110	9/1993	Hiruta et al.	242/374

FOREIGN PATENT DOCUMENTS

2505626	8/1976	Germany	242/374

OTHER PUBLICATIONS

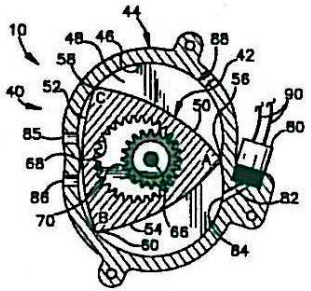
Pipe, "Principles of the Wankel Engine", 1974, pp. 1–112, Indianapolis, Ind.

Primary Examiner—John P. Darling
Attorney, Agent, or Firm—Tarolli, Sundheim & Covell

[57] **ABSTRACT**

An apparatus (10) for tensioning belt webbing (14) around an occupant of a vehicle to restrain movement of the occupant includes a rotary trochoidal motor (40). The motor (40) includes a housing (44) having a wall with an inner surface (46) defining a chamber (48). A rotor (42) is rotatable in the chamber and has fluid engagement surfaces (50, 52, 54). An output shaft (66) is supported for rotation relative to the housing (44). A fluid source (80) is actuatable to supply fluid under pressure into the chamber (48) and against the fluid engagement surfaces (50, 52, 54) of the rotor (42) to rotate the rotor in a first direction of rotation in the chamber to thereby rotate the output shaft (66). A belt webbing engagement member (22) is engageable with the belt webbing (14) to tension the belt webbing. The output shaft (66) is interconnected with the belt webbing engagement member (22) to transmit force from the rotating output shaft to the belt webbing engagement member to tension the belt webbing (14).

19 Claims, 6 Drawing Sheets



- **posun filmového pásu**

- **posun filmového pásu**

- **vrtání čtvercových otvorů**

https://www.youtube.com/watch?v=L5AzbDJ7KYI

Děkuji za pozornost.

Děkuji prof. Martině Bečvářové za grafické ztvárnění prezentace.