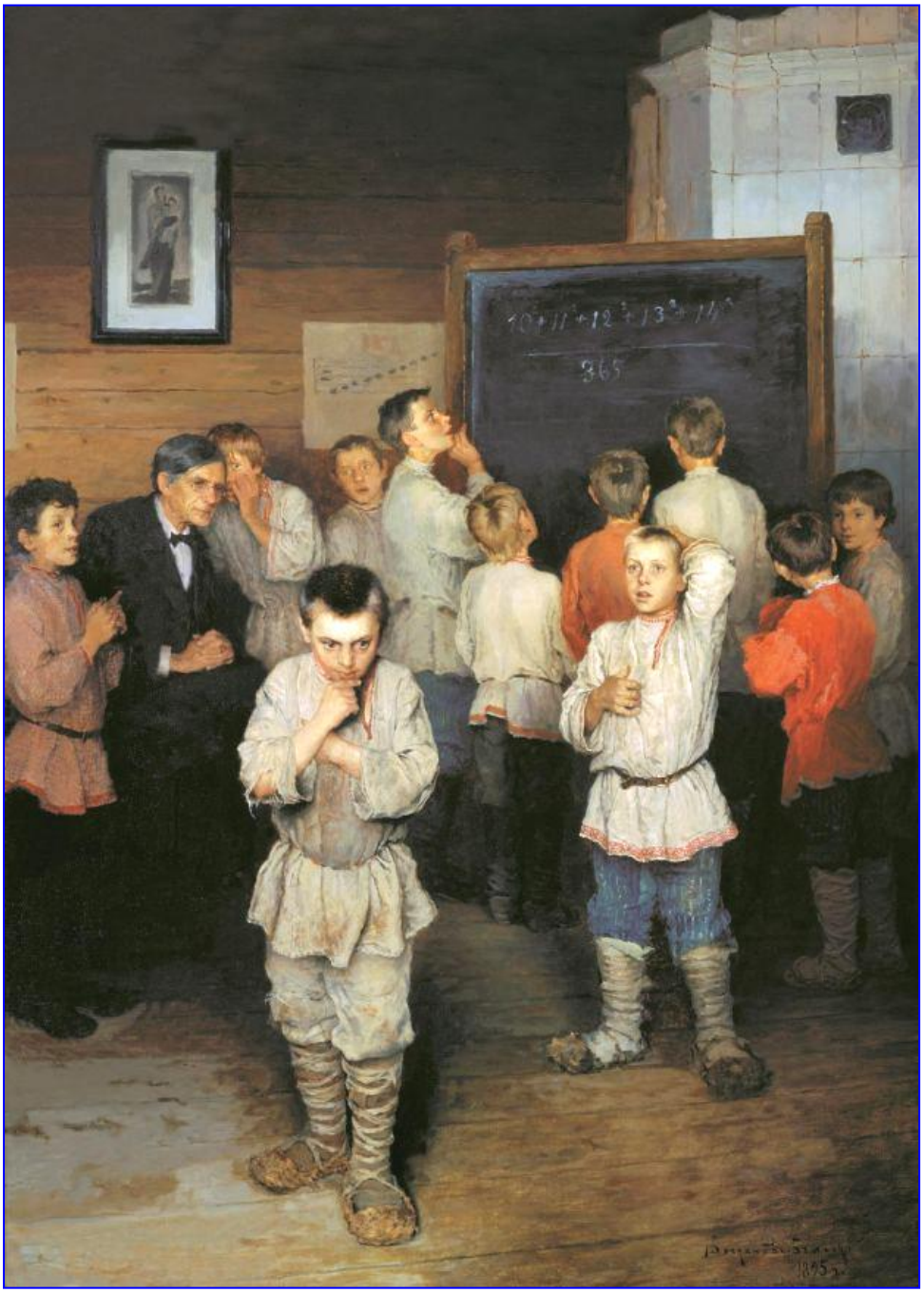


Poznámky učiteľa počtov a merby

Predovšetkým pre ZŠ
Tribečská ul. v Topoľčanoch,
učiteľom i žiakom,
pri 50. výročí založenia školy

vybral a zostavil
Dušan Jedinák
MMXVII

Úvodné rozjímanie emeritného učiteľa počtov a merby

Ešte si spomínam na svoju prvú základnú školu navštevovanú v Topoľčanoch (triedy boli v dvoch budovách, katolícka a židovňa; pozri obr.). Odvtedy už pretieklo veľa vody korytom rieky Nitry, neďaleko ktorej je aj

ZŠ na Tribečskej ulici v Topoľčanoch, kde asi zakončím svoje dlhoročné učiteľské pôsobenie. Skoro celý život som bol vlastne v školských osídlach (štúdium i pedagogické zamestnanie; pôsobil som na ZŠ, SŠ, VŠ i na MŠMŠ a v školskej inšpekcii, dokonca aj na prezenčnej vojenskej službe som bol učiteľom v poddôstojníckej škole). Asi je to možno predsa len mierne „úchylný“ osud.

V roku 2006 som vydal tlačou publikáciu **INŠPIRO-MAT** (výber myšlienok, výrokov i aforizmov pre učiteľov matematiky; ale nielen pre nich) http://www.era.topindex.sk/files/s208.pdf). Aj do tu teraz pripravených **Poznámok učiteľa počtov a merby** som vložil literárne spracované niektoré skúsenosti a poznatky z pedagogickej služby a publikačnej činnosti. Nechcel som zaradiť to, čo je v **INŠPIRO-MAT**e, niektoré kapitoly (*Z histórie M* a *Osobnosti M*) sú len torzom z iných materiálov, ktoré som už publikoval. Chcel by som, aby ponúkané **POZNÁMKY** používali nielen tvoriví učitelia, ale aj niektorí snaživí žiaci a rozvážni študenti. Ponúkam dlhou skúsenosťou získané, vybrané, spracované. Ak sa vám to pozdáva, povedzte to aj iným. Ak to viete vylepšiť, urobte to na vlastné náklady. Mne to už asi nestihnete povedať.

Zverejnením týchto materiálov chcem vyjadriť vzťah emeritného, stredoškolského i vysokoškolského, učiteľa školskej matematiky k vyučovaniu predmetu MATEMATIKA, hlavne v prostredí našich základných škôl. Ďakujem za spoluprácu riaditeľke ZŠ na Tribečskej ulici v Topoľčanoch, pani Mgr. G. Herodekovej, že mi umožnila, v mojom dôchodkovom veku, uplatniť teoretické úvahy i praktické skúsenosti v triedach pre intelektovo nadané deti, naozaj individuálnym prístupom.

Z obsahu:

1. Úvahy a zamyslenia; 2. Z histórie M; 3. Osobnosti M;
4. Ukážky testov a súborov úloh; 5. Vyriešené úlohy;
6. Aj dokazujeme; 7. O zaujímavých M-publikáciách;
8. Odkazy

Ak si niekto na moju pedagogickú činnosť predsa len spomenie, možno sa pozrie aj na webstránku: http://www.era.topindex.sk/. Sú tam „bubliny“ od učiteľa počtov a merby.

Prajem vám nezabudnuteľné zážitky z matematickej kultúry, nimi sa zmysluplne zušľachťujú rozum aj duch. Váš **D.J.**

Zušľachťovať matematickou kultúrou

Pýtajte sa: Prečo?

Asi nikto nepochybuje, že pre štúdium matematiky je nevyhnutné jasné a prehľadné uvažovanie so schopnosťou odhliadnuť od nepodstatných javov. *Matematika je veda o najzložitejších abstrakciách, k akým môže náš ľudský um dospieť* (A. N. Whitehead). Bez abstrakcie sa v matematike nedá pôsobiť. *Uvažovanie matematikov sa točí predovšetkým okolo používania podobností, ktoré sú pravým kľúčom od brány ich vedy* (Ch. S. Peirce). Ak odhaľujeme a zhŕňame všeobecné univerzálne myšlienkové metódy a idey, tak robíme matematiku. *Matematika je súčasťou všeobecnej kultúry. Ak sa snažíte iným ponúkať matematiku, treba im odovzdať porozumenie, motiváciu, myšlienky...* – to nám odkazuje M. Atiyah, významný anglický matematik. Niet dôležitejšej pedagogickej podmienky pre vyučovanie matematiky ako vzbudenie záujmu, motivácia, odpoveď na základnú otázku – prečo? Pre štúdium matematiky je nenahraditeľné poznanie ako vzniká a sa upevňuje proces ľudského myslenia, riešenia rôznorodých problémov, orientácia v logických a kvantifikovaných situáciách. Každá matematická téma vo vyučovaní matematiky požaduje aj znalosti vývoja (ontogenézy i fylogenézy) študovaných myšlienok. Uznávaný didaktik matematiky G. Polya odporúčal: *Motivovať nie vynútením, askézou, ale zaujatím a podaním problému zvnútra*. Vyučovanie matematiky v škole nesmie byť len systematické, ale aj psychologické, spojené s rozvojom celej osobnosti, intelektu, vôle i citu. *Ľudia si pamätajú, čo ich zaujíma, a chápu tie veci, ktorých pochopenie im robí radosť* (E. E. Moise). Naznačené odkazy pre učiteľskú prácu, aj pri štúdiu matematiky, možno stručne zhrnul P. R. Halmos: *Najlepší spôsob ako vyučovať druhých, je presvedčiť študentov, aby sa pýtali a tvorili. Nerobte im kázeň – povzbuďte ich k činnosti*.

So zaujatím

Dobre vyučovať matematiku môže iba človek, ktorý je sám ňou nadšený a chápe ju ako živú, rozvíjajúcu sa vedu. Takto vystihol základné predpoklady pre šírenie matematickej kultúry ruský matematik A. N. Kolmogorov. Aj on uznával, že iba myslením sa učíme myslieť. Vyučovací proces pri štúdiu matematiky má byť kultiváciou myslenia, argumentácie, definovania, odvodzovania a dokazovania. Pedagogicky dobre prepracovaný didaktický systém otázok, úloh a problémov má naznačovať objavné myšlienkové postupy, ponúkať nové pohľady a smery riešenia. Pri tom je potrebné podnecovať individuálny štýl myslenia a jeho spontánnosť, kritickú argumentáciu, vhodný obsah požadovaných vedomostí. Systematicky koncipované štúdium matematiky môže vytvárať hlboký intelektuálny zážitok primeraný mentálnym schopnostiam a rozumovým skúsenostiam s ohľadom na vek i kultúrne prostredie študentov. Významný fyzik a skvelý vysokoškolský učiteľ Richard P. Feynman, nositeľ Nobelovej ceny, charakterizoval okolnosti odovzdávania vedomostí myšlienkou: *Problém výučby možno vyriešiť len vtedy, keď si uvedomíme, že najlepšie vyučovanie je také, v ktorom existuje priamy, osobný vzťah medzi študentom a dobrým učiteľom – vtedy študent posudzuje názory, rozmýšľa o veciach, diskutuje o problémoch*.

Trvalá zodpovednosť

Dúfam, že každý učiteľ matematiky vníma matematickú obratnosť ako podstatnú a nenahraditeľnú zložku všeobecnej kultúry, ako možnosť zušľachťovať myšlienkové procesy a duchovné hodnoty

ľudských bytostí. Svojimi špecifickými prostriedkami môže aj školská matematika prispievať k rozvoju osobnosti každého človeka, ktorý chce užitočne uvažovať, myslieť, tvoriť. Rozvíjanie zmyslu pre úplnú argumentáciu, zdôvodňovanie faktov, nápaditá činnosť pri definovaní nových pojmov, hľadanie účinných dôkazov, uplatnenie vyváženého podielu intuície a dedukcie, obsažné a stručné, hospodárne a presné, jednoznačné a trvalé matematické úvahy i symbolika sú plnohodnotným argumentom pre každé plodné vedecké myslenie. Vznešene a filozoficky povedané: matematický rozum je prirodzeným putom medzi človekom a prírodou. Už Roger Bacon, anglický stredoveký učenec, vedel: *Kto podceňuje výsledky matematiky, škodí celej vede, lebo ten kto neovláda matematiku, nemôže poznať ostatné exaktné vedy a nemôže pochopiť svet*. Chcem pripomenúť učiteľom matematiky myšlienku, ktorou nás upozorňoval významný didaktik Hans Freudenthal: *Ak neuspejeme vo vyučovaní matematiky tak, aby bola užitočná, rozhodnú sa užívatelia matematiky, že matematika je príliš dôležitý vyučovací predmet, než aby mohla byť vyučovaná učiteľmi matematiky. To by bol však koniec matematického vyučovania*. Dúfam, že dokážeme stále lepšie pedagogicko-metodicky pripraviť a ukazovať krásu i úžitok základných matematických poznatkov nielen v školskom prostredí, ale aj v civilizačnom úsilí celej matematickej kultúry, ktorá zušľachtila spôsoby ľudského premýšľania, argumentácie, objavovania i dokazovania.

Povinnosť učiteľov – zmysluplný zážitok

Mnohé projekty, ktoré si pred seba ľudstvo postavilo, sa nedajú uskutočniť bez modernej matematiky, informatiky a výpočtovej techniky. *Každý počítač je svedectvom o tom, že svet je v určitom zmysle matematický* (J.D. Barrow). Matematický spôsob myslenia nekončí, ale začína. *Vzhľadom k nesmiernosti svojej látky je matematika (i moderná matematika) vedou v plienkach. Ak sa civilizácia bude ďalej rozvíjať, potom v budúcich dvoch tisícročiach bude najväčšou novinkou v ľudskom myslení nadvláda matematického rozumu* (A. N. Whitehead).

Profesor M. Hejný neraz pripomínal: *Analýzou v histórii matematiky možno získať užitočné predstavy o genéze myslenia a tieto potom aplikovať pri vyučovaní.* Aj to naznačuje povinnosť učiteľov matematiky pripravovať a ponúkať vo vyučovaní nášho predmetu zážitky matematickej kultúry, hlbšieho rozvoja myslenia, presvedčivej argumentácie a všeobecnej kultivovanosti človeka. Ak podporu ideovej a logickej dôslednosti matematických myšlienkových postupov ukotvíme aj mravnou zásadovosťou či príkladným osobným životom, naše výchovno-vzdelávacie pôsobenie sa asi bude limitne blížiť k dokonalosti. Jednoduchý zmysluplný pedagogický odkaz formuloval G. Piranian: *Ako učitelia máme mimoriadne dôležitú úlohu, aby sme mládeži odovzdávali niektoré z intelektuálnych hodnôt civilizovaného ľudstva. Našou úlohou je inšpirovať študentov, aby na základe svojich schopností dosiahli čo najvyššiu odbornú i ľudskú úroveň*.

Dôsledným vedením vyučovania školskej matematiky môžeme prispievať k zušľachťovaniu ľudských predstáv matematickou kultúrou.

Nevypočítateľná matematická radosť

Údiv

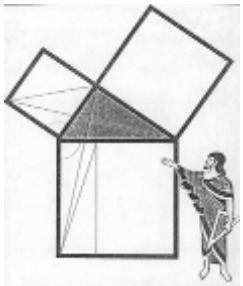
Zažili ste už radosť z objavu, užitočnej myšlienky, podnetného názoru? Vnímate vlastné poznávanie javov a ich súvislostí ako úžas zo schopnosti myslieť, uvažovať, zdôvodňovať? K tajomnej príležitosti ako systematicky vnímať prírodu a odhaľovať jej zákonitosti patrí aj matematika.

Matematická civilizácia

Každý civilizovaný človek s rozvinutou predstavivosťou pozoruje a klasifikuje javy, rozpoznáva súvislosti, hodnotí dosiahnuté výsledky, prijíma závery. Pochopiť realitu pomáha aj logicko-matematické myslenie so svojimi špecifikami. Skoro každý z nás spoznal v škole, že vyučovací predmet pôvodne zvaný "počty a merba" rozvíjal aj našu pozornosť, vytrvalosť, pracovitosť, systematickosť i kritickosť. Neskôr nám rôzne matematické disciplíny umožnili poznávať a hodnotiť javy z kvantitatívneho i kvalitatívneho pohľadu, príčinných súvislostí, prenikať do riešenia prírodovedných zákonitostí, spoločenskovedných problémov, technických konštrukcií i technologických postupov. Matematická veda nám pomáha účinne argumentovať, dokazovať, podnecuje našu pojmovú originalitu. Matematika sa stala jazykom i metódou pre poznanie vzťahov vo svete, v ktorom žijeme, myslíme a modelujeme našu situáciu.

Zmyslom matematického poznávania je hlbšie pochopenie vzťahov a štruktúr abstrahovaných pojmov pre riešenie reálnych problémov teórie i praktického života. Hlbšie matematické vedomosti a ich používanie umožňujú zušľachťovanie našich teoretických predstáv i praktických skutkov. Štúdium matematiky môže byť skoro pre všetkých záujemcov zmysluplnou, zaujímavou a podnetnou činnosťou. Skrz matematiku sa možno naučiť pohľadu do vnútra problému a zároveň i nadhľadu nad celú štruktúru. Reč matematiky je hutná, stručná a pomerne jednoznačná. Avšak dlhšiu dobu trvá, pokiaľ matematický systém pochopíme v celku a naučíme sa ho používať v rôznorodej problematike.

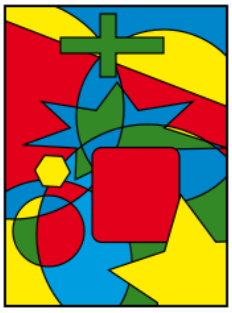
Ľudský rozum



Systematické pozorovanie a experimentovanie sú užitočné pomôcky pre ľudský intelekt. Abstrahovaním a zovšeobecnením odhalených vzťahov, doplnených o základné definície a uznané axiómy, sa pred človekom otvoril svet zdokonalených predstáv. Cez matematický prístup sme objavili svet ideálnych foriem spojených prostredníctvom stálych a nevyhnutných vzťahov, ktoré môže sledovať iba inteligentný rozum. Tým sme spoznali, že objavovanie súvislostí a odhaľovanie zákonov je možno jednou z najväčších ľudských radostí. Ak chápeme organizáciu, štruktúru, ktorá zjednocuje a vysvetľuje, máme skutočné potešenie z úspechov ľudského myslenia. Zázrakom je, že čisté myslenie môže vystihnúť realitu. Matematika sa stala organickou súčasťou technického a vedeckého sveta, ale zároveň ho aj presahuje. Naznačuje metodologický výhľad do ríše predstáv absolútnej bezčasovej dokonalosti.

Poznanie matematických zákonitostí (o počte, tvare, veľkosti) umožňuje uplatňovať odvodzovacie pravidlá a logické kalkuly, ponúka možnosť dokazovania správnych postupov i výsledkov matematických činností. Štúdium matematiky ovplyvňuje spôsoby uvažovania a argumentácie, orientuje ľudskú myseľ na triezvosť, nestrannosť, zdôvodňovanie a preverovanie prijatých záverov. Tým má matematika význam výchovný, kultúrny i rozmer etický. Matematickým skúmaním zušľachťujeme naše myšlienkové predstavy.

Matematika ako tvorivosť



Matematika skúma nekonečne malé i nekonečne veľké. Dotýka sa absolútnych hodnôt i neostrých hraníc. Z jednoduchých faktov generuje významné dôsledky. Útočí na všeobecnosť, neznáša spory. Vytvára logické systémy, štruktúruje predstavy. Axiomatizuje, definuje, dokazuje. Nemôže si byť však istá sama sebou. Matematika zostáva nezavŕšeným otvoreným tvorivým procesom ľudskej mysle skonštruovať univerzálny formálny jazyk umožňujúci postihnúť jednotu večnej všetko obsahujúcej Pravdy.

Aj matematika je odrazom Ducha v ľudskom vedomí, aby sa človek snažil odhrnúť závoj trvalého Tajomstva.

Didaktika ako profesionalita učiteľa matematiky

Úvod

Aj po dlhodobom pôsobení v učiteľských službách som presvedčený, že možno plným právom súhlasiť s názorom L.D. Kudriavceva: *Vyučovanie matematiky má byť podľa možnosti jednoduché, jasné, prirodzené a má byť postavené na rozumnú úroveň exaktnosti... Tvorivé ovládanie matematických metód, vedomosti a intuícia sa získavajú, zhromažďujú a rozvíjajú v procese zdĺhavej a úpornej práce.* Druhá veta platí aj o didakticko-pedagogických skúsenostiach a praktických učiteľských zručnostiach. Preto ponúkam niekoľko teoretických upozornení i myšlienkových námetov z didaktiky aj vyučovacej praxe. *Úroveň výučby matematiky je predovšetkým v úrovni učiteľa. Odborná erudícia je nevyhnutná podmienka, ale nepostačujúca* (D. Hrubý). Ak chcete byť úspešní v učiteľskom povolaní, nesmiete mať neprekonateľný odpor k didakticko-odborným postupom. Matematická kultúra môže byť vašim profesionálnym vybavením, ale v učiteľskom srdci by mal horieť plameň nezištnej výchovno-vzdelávacej obetavosti.

Didaktika matematiky

Didaktiku matematiky (ďalej iba DM) chápeme ako matematicko-pedagogickú disciplínu, v ktorej skúmame proces štúdia i vyučovania matematiky, obsah, štruktúru, metódy i organizačné formy výchovno-vzdelávacieho procesu spojeného so školskou matematikou. V širšom kontexte DM odráža myšlienkové schopnosti človeka ako sebavzdelávajúcej sa osobnosti vnímať matematické javy ako medzisvet porozumenia medzi ním a prostredím, v ktorom žije. Úlohou DM je hlbšie pochopiť a rozvinúť obsah i formy matematického vzdelávania (ovládanie matematických pojmov a myšlienkových postupov, rozvoj rozumových schopností, argumentácie a exaktnej práce, kritické myslenie), analyzovať zákonitosti vyučovacieho procesu, jeho obsah a prostriedky, so zreteľom na psychiku žiakov i zásady učenia sa matematiky. DM tak môže byť odpoveďou na otázky komunikácie v školskej matematike, ale aj o rôznorodých matematických disciplínach, môže pripravovať humánnejší, praktickejší a zmysluplnejší vzťah človeka k štúdiu, vyučovaniu a používaniu matematickej kultúry.

Cieľom DM je aj hľadanie spôsobov pre vytvorenie podnetného prostredia, v ktorom si študent môže konštruovať poznávané skúsenosti a tým prehlbovať i rozširovať svoje matematické vedomosti a zručnosti. Podstatou tohto postupu je známy pedagogicko-psychologický fakt, že v základoch skutočného poznania je zážitok osobnej skúsenosti spracovaný do usporiadaného celku poznaných javov. K hlbším matematickým poznatkom musí v podstate každý človek prispievať vlastnou duchovnou konštrukciou, ochotou usporadúvať (triediť, hierarchizovať, hodnotiť) myšlienkovú štruktúru svojich poznatkov. Pre ľudskú matematickú poznávaciu sieť je zvlášť dôležitý genetický prístup narastania štruktúry postupným formovaním príčinných väzieb, logickej následnosti, časovo-dobových súvislostí, ale aj motivačno-emočných vzťahov. DM môže prispieť k uvedomeniu si užitočných pedagogicko-matematických javov, ich organizácii a vyhľadávaniu súvislostí i k tvorbe vhodných didaktických modelov. Tam sa dá ukázať ako možno rozvíjať kultúru matematického myslenia (obsah i formu) v zložke filozoficko-metodologickej, motivačno-popularizačnej aj v oblasti výchovného i praktického využitia.

Pri posudzovaní cieľov a hodnotení spracúvaných informácií DM rozlíšime dva základné prúdy:

- **obsahovo orientovaná DM** (výber učiva, metódy vyučovania, spracovanie učebníc, metodika vyučovacích postupov, didaktické spracovanie, názornosť a učebné pomôcky, logická konzistentnosť)
- **procesne orientovaná DM** (myšlienkové procesy, mechanizmus tvorby pojmov a činnosť s nimi, abstrahovanie, zovšeobecňovanie, argumentácia, komunikácia, prostredie myšlienkovej spolupráce, aktívna konštrukcia vlastného poznávania, odhaľovanie príbuzných javov v ich príčinnosti, tvorba modelov a ich kategorizácia, analýza didaktických situácií).

Nebudeme stavať proti sebe takto odlíšené základné prístupy. Spoločným zámerom oboch je didaktické spracovanie ideí, myšlienok a metód zaradených do školskej matematiky tak, aby teoretické poznatky nachádzali praktické uplatnenie i výchovný význam.

Poučenie z DM

Praktický učiteľ matematiky od DM očakáva:
- účinné zásady pre profesionálnu činnosť v súvislosti s vyučovaním školskej matematiky;
- zmysluplné motivačno-didaktické podnety pre zaujímavý priebeh štúdia matematiky;
- zdôvodnené spôsoby didaktickej redukcie pedagogicky užitočných poznatkov potrebných matematických disciplín;
- primerané návrhy vhodných motivácií i rôznorodých aplikácií pre školské vyučovanie;
- overené skúsenosti z analýzy didaktických situácií.

DM má z matematického prostredia sprístupniť umenie vidieť abstraktné vzťahy a príčinné súvislosti, umenie vytvárať nové užitočné pojmy a zmysluplné zovšeobecnenia, umenie kvantifikovať, vyčísliť a uplatniť efektívne identity, umenie vybadať algoritmus, konštrukčný postup, umenie správne argumentovať, logicky usudzovať a pôsobivo dokazovať. *Didaktika je naozaj niečo medzi vedou a umením* (J. Pišút).

Cez DM (ale nielen cez ňu) môžeme ponúkať a venovať viac pozornosti:
- spôsobom matematického myslenia, predstavivosti a heuristickým postupom;
- bohatšej ponuke príkladového a úlohového materiálu pre motiváciu i aplikáciu v konkrétnom školskom prostredí;
- častejšej tvorbe intelektuálnych i estetických zážitkov zo štúdia školskej matematiky;
- hlbšej interakcii vo vzťahoch medzi učiteľom a žiakmi pri vyučovaní matematiky;
- citlivejšiemu a efektívnejšiemu vnímaniu podstaty chýb v procese učenia sa;
- prevencii, diagnostike i odstraňovaniu formalizmu v chápaní matematických pojmov a vzťahov.

S matematikou v škole

Zodpovedné vyučovanie školskej matematiky má zabezpečiť:
- *primeranú výkonnosť* žiakov pre ďalšie vzdelávanie (splnenie vzdelávacieho štandardu, možnosť ďalšieho vzdelávacieho postupu)
- *potrebné znalosti a zručnosti,* aby porozumenie matematickým poznatkom viedlo k účinnej aplikácii v praktickom živote
- *efektívny rozvoj poznávacích schopností a intelektu* (organizácia súboru údajov, porozumenie algoritmom, manipulácia s abstraktnými pojmami, logické argumentovanie, hľadanie riešiteľských stratégií)
- *osobnostný a kultúrny všestranný rozvoj* (sebavedomie a sebaovládanie, možnosť ďalšieho vzdelávania, chápanie príčinných súvislostí, hodnotové zázemie, civilizačné tendencie, humánne a demokratické postupy).

Naznačme aj uznávané profesionálne kompetencie učiteľa matematiky:
- kvalitné odborné vedomosti a zručnosti z rôznych matematických disciplín;
- užitočné pedagogicko-psychologické schopnosti a zbehlosti v prístupe ku žiakom;
- osvedčené diagnostické predpoklady a diskrétne poznanie žiakov;
- perfektná znalosť učebných osnov a konkrétnych didaktických postupov;
- pohotová zručnosť vo vedení a riadení rozvíjajúceho vyučovania v matematických činnostiach,
- vnímavá spolupráca pre znovuobjavovanie matematických poznatkov;
- kladný vzťah pre rozvoj ľudskej osobnosti matematickou kultúrou.

Učiť možno predovšetkým skúsenosťami, na základe činností, na základe práce (F. Kuřina).

Činnosť je určená motívmi

Motivačné javy sú dominantné pre odhalenie rozmanitých stránok výchovno-vzdelávacieho procesu. Multifaktorová teória motivácie (*Skalková*) je základom pre úzku súvislosť medzi žiackou aktivitou a motivačným stavom. Nesmieme zabúdať, že motivačný systém ľudskej osobnosti nie je izolovaný. Motivácia žiaka je zložitý proces, v ktorom sa uplatňuje aj jeho citový vzťah k niekomu i niečomu, intelektuálne, vôľové i spoločenské procesy, ktoré práve a často rozhodujú o konkrétnom správaní. Nezanedbateľným impulzom s motivačným nábojom je aj intenzifikácia podnetnosti prostredia (podnety pre rozvíjanie myslenia, citového rozvoja, sociálnych vzťahov, podnety pre chápanie hodnôt i samostatnú tvorivú činnosť). Rozvíjanie pozitívnej motivácie k učebnej činnosti je aj v uplatnení rozmanitosti a originálnosti podnetov v rôznorodých oblastiach rozvíjajúcej sa žiackej osobnosti.

Nás bude zaujímať predovšetkým vymedzenie motivácie ako vzbudenia, udržiavania a nasmerovania žiackej aktivity do oblasti záujmu o matematické myslenie a k tomu príslušné argumentovanie, zdôvodňovanie, dokazovanie. Tu si môžeme zvoliť prostriedky vonkajšej motivácie (vtedy žiak koná, aby dosiahol určitý vonkajší cieľ, odmenu, výhodu, prospech) alebo vnútornej motivácie (aby sa uspokojil vnútorne – potešil z pochopenia, vlastnej činnosti, hry, objavu, získaných schopností a zručností). Vnútorná a vonkajšia motivácia sa môžu dopĺňať, prelínať. Školskú matematiku môžeme študovať pre jej vnútornú krásu a hlbokú zmysluplnosť, ale aj pre praktickú použiteľnosť v iných vedných odboroch a technických disciplínach. Ponúkané motivačné ciele a úlohy majú byť primerane obtiažne, ale dosiahnuteľné, významné a zaujímavé, s reálnou nádejou na uznanie alebo úspech.

Motivovanie ku školskej práci budeme chápať ako usporiadanie podnetov smerom k žiakovi, ako energetizujúce impulzy pre výchovno-vzdelávacie ciele vyučovania. Zmyslom tejto činnosti je, aby študent prijal ponúkané motívy za svoje, aby si ich zvnútornil pre svoj hodnotový rozmer požadovanej aktivity. Vo všeobecnosti môžeme zaradiť medzi metódy, formy a prostriedky motivácie študentov na vyučovaní (*Zelina*):

1. *motivácia pomocou výberu úloh a smeru rozvoja poznávacích funkcií* (kolatívnosť, taxonómia, konvergencia a divergencia myšlienkových procesov),
2. *motivácia spôsobom hodnotenia študentov* (výsledky za vopred daných podmienok, dôvera a povzbudenie, zohľadnenie procesu vo vzťahoch),
3. *motivácia vyučovacou stratégiou, štýlom riadenia vyučovacieho procesu, študijnou i medziľudskou komunikáciou* (individuálny prístup, skupinové vyučovanie, problémový výklad, heuristické metódy, tvorivé prístupy, neformálna i zodpovedná spolupráca),
4. *motivácia vzorom profesionálnej osobnosti učiteľa* (láska k predmetu i žiakom, práca na sebe a svojej kvalifikácii, obetavosť a nezištnosť).

Vzbudiť záujem o učebnú činnosť môžeme: motivačným rozprávaním, rozhovorom demonštráciou, aktualizáciou, hodnotením. Ponúkame aj pre učiteľov školskej matematiky niektoré uznávané aktivizačné prístupy (vonkajšej i vnútornej motivácie) pre usmernenie a udržanie záujmu žiakov:

- Prejavujte pred svojimi žiakmi úprimné nadšenie a osobný záujem o matematickú kultúru.
- Ukazujte význam matematických vedomostí v skutočnom prostredí, v konkrétnych aplikáciách, v bežnej technickej a vedeckej praxi.
- Uplatňujte tvorivosť a znovuobjavovanie poznatkov aktívnou myšlienkovou činnosťou svojich žiakov.
- Vytvárajte pestré intelektuálne prostredie, pravidelne obmieňajte tematiku, ukazujte neobvyklé postupy, hádanky aj ich prekvapivé riešenia.
- Nechajte žiakov experimentovať, súťažiť, odkrývať problémy, ponúkať nápady.
- Zvnútornite ich vedľajšie mimoškolské záujmy, podnety pre myšlienkovú aktivitu ich intelektuálnych schopností.
- Dajte svojim žiakom príležitosť, aby objavovali matematické poznatky z vlastnej iniciatívy.

Pre dlhodobý a špecifický proces štúdia školskej matematiky sú rozhodujúce **vnútorné motívy** (*zvedavosť, úsilie o získanie zručnosti, sklon k napodobňovaniu inej osoby alebo skupiny, potreba reagovať na iných ľudí a spolupracovať s nimi, vzťah k poznaniu pravdy, radosť z práce, tvorby, objavu, hry*), ktoré treba pravidelne uplatňovať, trvalo rozvíjať a neustále posilňovať [6].

Vzájomná komunikácia

Učiteľ, ktorý neverí, že môže žiaka zlepšiť, nemá už morálne právo učiť ho (L. D. Kudriavcev).
Vo vyučovaní matematiky je veľmi dôležité vytvoriť vhodnú komunikačnú klímu (zosúladená motivácia, otvorený dialóg, úspešná činnosť, ľudská spolupráca, spontánne porozumenie). Cieľom je pripraviť zmenu v kvalite psychiky žiaka (zdvihnutie sebadôvery vo vlastné schopnosti žiaka; zvýšenie túžby po poznaní; vyšší stupeň rozvoja myslenia; zapamätanie ako dôsledok porozumenia; zážitok úspechu vlastným pričinením; dialogická stratégia, spätná väzba aj pre žiakov, možnosť klásť otázky)

Možnosti pre priaznivú interakciu so žiakmi:

1. zabezpečenie ich pocitu dôstojnosti, zmysluplnosti a sebaúcty;
2. primeraná náročnosť, otvorenosť v posudzovaní, neposudzovať vzťahovačne, nezverejňovať nízke očakávania;
3. nepodsúvať vlastnú stratégiu (vnímať inú štruktúru žiackych skúseností);
4. ponúkať, podnecovať, neprepchávať;
5. vytvárať spoločné základné hodnoty i názory;
6. vyprovokovať k vlastným názorom, tvorivosti;

Vo vyučovaní matematiky treba z hľadiska komunikácie venovať zvýšenú pozornosť:

- textácii neštandardných úloh (nejasné formulácie, viacznačnosť, nejasný cieľ);
- názornej a konkrétnej prezentácií úlohy;
- odstraňovaniu chybných predstáv a formalizmu;
- rozvážnym a účinným podnetom pre spôsob myslenia vhodným smerom;
- nevyhnutnému objasneniu problémov, aby si žiak sám opravil svoju verziu porozumenia;
- vytvoreniu rovnakých príležitostí, rovnocennému posudzovaniu a hodnoteniu;

Podnecovať záujem o školskú matematiku

- Nech je vidieť na každom kroku vaše nadšenie pre matematickú kultúru, podložené odbornou a pedagogicko-didaktickou profesionalitou i humánnou orientáciou.
- Ukazujte význam matematických vedomostí v praktickom živote, pri riešení reálnych problémov, pri hre i zábave, v športe aj spoločenskom živote.
- Prepojte štúdium školskej matematiky s tým, čo žiakov zaujíma aj mimo školy, dotýkajte sa ich vnútorných predstáv i ambícií.
- Zapojte žiakov aktívne do vyučovania, využívajte ich názory, podporte ich vlastnú tvorivosť aj ochotu pre spoluprácu.
- Ponúkajte im logické hádanky, problémové úlohy, prekvapivé účinné intelektuálne postupy na ich myšlienkovej úrovni.
- Rozvíjajte ich kritické a samostatné myslenie, vyžadujte a podporujte ich sústredenosť, vytrvalosť a usilovnosť.
- Naznačte im radosť z poznania matematických štruktúr a pravidelností, ktoré usporadúvajú pestrú rôznorodosť našich skúseností a umožňujú ľudskému intelektu vytvárať efektívne pojmové modely, aby sme mohli zmysluplnejšie chápať svet, v ktorom žijeme.

Záver

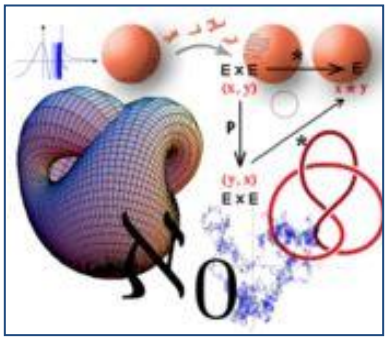
Zamyslime sa nad niektorými požiadavkami na učiteľa všeobecne a predpokladmi pre učiteľa matematiky zvlášť: Učiteľ má stelesňovať kladné charakterové, vôľové, pracovné, intelektuálne, citové, temperamentné a spoločenské vlastnosti. Mal by byť príkladom kladného prístupu

k mládeži, naplnený dôverou v silu výchovy, s nezištným darom pedagogického optimizmu. Vždy na vysokej úrovni morálnej i odbornej, s vyhraneným názorom na dianie vo svete. Človek ušľachtilého charakteru, vždy čestný, spravodlivý, statočný a zásadový. Zjednocujúci výchovu a vzdelávanie, uplatňujúci zhodu slova a skutku.

Od učiteľa matematiky sa určite očakáva zušľachťovanie intelektuálnych schopností, akými sú pozitívne vlastnosti myslenia - jeho konkrétnosť, logickosť, systematickosť, tvorivosť a samostatnosť. Učiteľ matematiky by mal vynikať zmyslom pre zdôvodňovanie faktov, obsažnosťou a hospodárnosťou úvah, schopnosťou abstrahovať poznatky, vytyčovať a riešiť problémové situácie, argumentovať, dokazovať, presvedčovať. Z vôľových a spoločensko-charakterových predpokladov treba uviesť: rozhodnosť, vytrvalosť, smelosť, cieľavedomosť, samostatnosť, trpezlivosť a citové sebaovládanie, láskavosť, vľúdnosť, srdečnosť, pochopenie, uznanlivosť, ohľaduplnosť. Nemal by mu chýbať ani zmysel pre humor a žart, slušnosť, družnosť i športová aktivita. Nie je to všetko a nie je toho málo. *Dobre vyučovať matematiku môže iba človek, ktorý je sám ňou nadšený a chápe ju ako živú, rozvíjajúce sa vedu* (A. N. Kolmogorov). *Najdôležitejšie je, aby vám vyučovanie prinášalo radosť. Táto radosť sa potom bude prenášať aj na vašich žiakov* (D. Hrubý, *Glosy a komentáre* – rukopis). Kvalitný učiteľ chápe matematiku, i tú školskú, ako vedecký i kultúrny odkaz myšlienkovej túžby ľudstva po systematicko-logickom poznaní, ktorý treba nielen používať, ale aj ďalej rozvíjať. Osobnosť učiteľa s vynikajúcimi odbornými i charakterovými vlastnosťami bola, je a vždy bude užitočným činiteľom pre povzbudenie mladých ľudí vo vzťahu k matematickej kultúre. Vzbudiť neuhasiteľný záujem o matematický spôsob nazerania na svet (v ktorom myslením vytvárame štruktúrované modely skúmaných javov) už tým, že pôsobivo a účinne školskú matematiku vyučujeme, by malo byť túžbou každého zodpovedného učiteľa matematiky.

L i t e r a t ú r a

[1] FISCHER, R. – MALLE, G.: *Človek a matematika*. Bratislava: SPN, 1992.
[2] FREUDENTHAL, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Klett, 1977.
[3] HEJNÝ, M. a kol.: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: UK-PedF, 2004.
[4] HEJNÝ, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN, 1989.
[5] HEJNÝ, M. – KUŘINA, F.: *Dítě, škola, matematika*. Praha: Portál, 2000.
[6] JEDINÁK, D.: *Smerom k motivácii štúdia matematiky*. In: Pedagogická orientace ´93, č. 8-9 , s. 59-69, Brno 1993.
[7] KOVÁČ, L.: *Krása a vznešenosť učiteľského povolania.* Bratislava: Bradlo, 1992.
[8] KUDRIAVCEV, L.D.: *Úvahy o súčasnej matematike a jej vyučovaní*. Bratislava: SPN, 1990.
[9] KUŘINA, F.: *Vyučování matematice a realita školy.* In: MFI č. 2/2006-2007 (Roč.16, X. 2006)
[9] KUŘINA, F.: *Realismus konstruktívních přístupů k vyučování matematice*. In: Vedecké štúdie KU, roč. 2, č. 1, s. 40-47, Ružomberok 2002.
[10] MACIASZEK, M.: *Vytváření didaktických dovedností učitele*. Praha: SPN, 1969.
[11] POLYA, G.*: Kak rešať zadaču.* Moskva: Učpedgiz, 1961.
[12] POLYA. G.: *Matematičeskoe otkrytije*. Moskva: Nauka, 1976.
[13] SKALKOVÁ, J.: *Obecná didaktika*. Praha: ISV, 1999.
[14] STREČKO, V.: *Desať kapitol z teórie vyučovania matematiky 1., 2*. Prešov: MPC, 2004.
[15] ZELINA, M.: *Aktivizácia a motivácia žiakov na vyučovaní*. Bratislava: KPÚ, 1999.



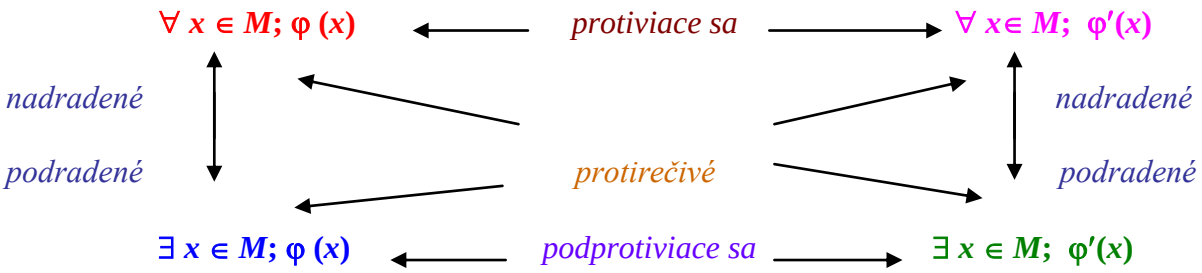
Črepky z histórie matematiky ako odkaz

Charakteristika egyptského pisára

Praktické potreby už v období starého Egypta utvárali matematiku ako metódu riešenia hospodárskych problémov (spotreba osiva, výnos z polí, meračské práce, stavba pyramíd). Jeden z moderných historických názorov ponúka túto charakteristiku: Pisári (*hierogramati, harpedonapti*) tvorili tretiu kastu egyptských kňazov. V náboženských sprievodoch sa objavoval pisár na treťom mieste. Mal na hlave perá, v rukách držal knihu, pravítko, kalamár a tyčinku na písanie. Do jeho povinností patrilo všetko, čo sa vzťahovalo na stavebnú činnosť chrámov a ich pozemkového vlastníctva. Pisári museli poznať hieroglyfy a vonkajšie ozdoby chrámov, vedieť zakresľovať tok Nílu. Museli mať vedomosti z astronómie, geometrie i geografie. Povinné znalosti pre nich boli sústredené do deviatich kníh zo 42 tých, ktoré boli určené pre nevyhnutné poznatky šiestich vrstiev kňazskej kasty. Je zrejmé, že matematické, astronomické a geografické vedomosti tvorili hlavnú odbornosť týchto pisárov.

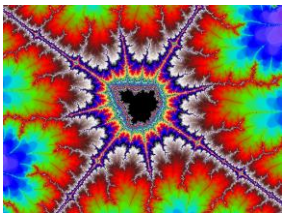
Štvorec protikladov

Carihradský mních a filozof **Michael Sellos**, v 11. storočí navrhol (pred ním podobnú schému používal aj vzdelaný rímsky rečník L.A. Apuleius už v 2. storočí) usporiadať všeobecný kladný výrok $\forall\, x \in M;\ \varphi(x)$, všeobecný záporný **výrok** $\forall\, x \in M;\ \varphi'(x)$, čiastočný kladný výrok $\exists\, x \in M;\ \varphi(x)$ a čiastočný záporný výrok $\exists\, x \in M;\ \varphi'(x)$ do štvorcovej schémy a vyznačiť ich logické vzťahy:



protirečivé (logicky protikladné, sporné, negácia, opak; jeden je pravdivý – druhý nepravdivý);
protiviace sa (kontrárne; nemôžu byť obidva pravdivé, ale môžu byť obidva nepravdivé);
podprotiviace sa (subkontrárne; môžu byť obidva pravdivé, nemôžu byť obidva nepravdivé);
podradenosť, nadradenosť vzhľadom na pravdivosť (subsumcia; pre neprázdnu M z pravdivosti nadradeného výroku vyplýva pravdivosť podradeného výroku, z nepravdivosti podradeného výroku vyplýva nepravdivosť nadradeného výroku).

Najkrajšie matematické vzťahy



Mnohí matematici sa zhodujú aj v estetickom posudzovaní odhalených matematických vzťahov. Citlivo vnímajú ich nečakanú jednoduchosť, stručnosť, súvislosť a všeobecnosť, hospodárnosť, formu i nevyhnutnú hĺbku. *Krásna matematická veta musí byť prekvapujúca a hlboká. Musí vám dať novú víziu matematiky* (Y. Haralambous). V jednej americkej ankete (z roku 1988) prideľovalo 74 pomerne známych matematikov body (0–10) pre 24 vybraných zaujímavých matematických tvrdení – vzťahov. Výsledky boli usporiadané do poradia podľa získaného bodového priemeru. Poradie prvých štyroch:

1. $e^{i\pi} + 1 = 0.$
2. Eulerova veta pre mnohosteny: $v + s = h + 2.$
3. Existuje nekonečne veľa prvočísiel.
4. Existuje presne päť pravidelných mnohostenov.

Čo si myslíte vy o krásach matematiky?

Poznámky z dejín matematiky

Vývoj matematiky
(stručný prehľad)

Odvtedy ako sme sa pozreli na svet očami matematiky, objavili sme veľké tajomstvo, prírodné modely ukazujú na podstatné princípy, podľa ktorých funguje celý vesmír (J. Stewart).

Matematické poznávanie má svoje historické, empirické, teoretické, logické a filozofické základy i podmienky rozvoja. Historické základy matematiky ukazujú jej súvislosť so spoločenskou praxou a naznačujú príslušné dobové podnety, motivácie a vlastné vývojové tendencie. Prvotné matematické poznatky boli získané empirickou cestou, overené praxou v medziach dobovej technológie, neskôr abstrakciou zovšeobecnené, idealizované, realizované myšlienkovými experimentmi. Teoretické základy matematiky sú tvorené systémom štruktúrnych a formálno–logických postupov s deduktívno-axiomatickým poňatím výstavby. Filozoficko-gnozeologický podklad obsahuje systém princípov a metód poznávacej činnosti v matematike (napr. vzťahy medzi deduktívnou, induktívnou, axiomatickou a konštruktívnou metódou, modelovanie teórií, pravdivosť a dokázateľnosť, konečné a nekonečné a pod.). Matematika je živý, rozvíjajúci sa myšlienkový poznatkový organizmus, ktorý sa neustále obsahovo rozširuje i prehlbuje.

Hlavné etapy vývoja:

1. Obdobie tvorby elementárnych matematických pojmov

→ *prehistória – 6. stor. pred n. l.*:
početné záznamy – vrubovky asi pred 28 000 rokmi, ornamenty na nádobách asi 5. – 4. tisíc rokmi pred n. l., Sumeri medzi Eufratom a Tigrisom mali číselné znaky asi 2800 rokov pred n. l., matematické úlohy a ich riešenie na staroegyptských dokumentoch (Rhindovom a Moskovskom papyruse) asi 1800 rokov pred n. l.

2. Obdobie matematiky konštantných veličín

→ *6. stor. pred n. l. – 4. stor. n. l.* – vytvorenie matematiky ako vedy v Grécku:
Táles – zaviedol pomery a úmery, pracoval s podobnosťou trojuholníkov, Pytagoras – kult a mystika čísel, nesúmerateľnosť úsečiek, Euklides – dedukcia z axióm, *Základy;* Archimedes – povrchy a objemy, pravidelné telesá. Apollonios, Diofantos;

→ *potom do konca 16. stor.* – obdobie elementárnej matematiky v stredoveku:
Boethius prekladal Platóna, Euklida do latinčiny, Alcuin z Yorku, Al Chvárizmí, zachovali arabskú M pre Európu, Leonardo Pisánsky (13.stor.) zhrnul dobové poznatky a zaviedol indicko–arabský zápis číslic, Thomas Bradwardinus a Nicole Oresme začiatkom 14. stor. dosiahli pozoruhodné matematické výsledky. V riešení rovníc vyšších stupňov uspeli začiatkom 16. stor. Tartaglia, Cardano, Bombelli, Viete.

3. Obdobie matematiky premenných veličín

→ *17. – 1/2 19. storočia*
– zavedenie analytickej geometrie (*Descartes, Fermat*),
– diferenciálny a integrálny počet (*Newton, Leibniz*),
– rozvoj matematickej analýzy (*Bernoulliovci, Laplace, Lagrange, Fourier, Cauchy, Euler, Gauss*),
– objav neeuklidovskej geometrie (*Lobačevskij, Bolyai, Gauss*).

4. Obdobie matematiky zovšeobecnených kvantitatívnych a priestorových vzťahov

→ *od 1/2 19 stor.*:
Cantor – teória množín;
Russell, Whitehead – rozvoj formálnej logiky;
Galois, Abel – teória grúp,
Wiener – kybernetika, počítače,
Gödel – nemožnosť úplne formalizovať matematiku a dokázať bezospornosť.

Kto sa obmedzuje len na súčasné, bez vedomosti o minulom,
ten nikdy súvislosti nepochopí (G.W. Leibniz).

Dejiny matematiky sú spoločenskovedná i matematická disciplína, významná hlavne pre didaktiku a vyučovanie matematiky. História matematiky podstatne odráža vývoj celej ľudskej civilizácie. Z matematiky sa stal nástroj ľudského ducha na správne a presné myslenie.

Úloha dejín matematiky:

- *nájsť zákonitý, historicky objektívny postup vývoja matematiky v spoločenských a kultúrnych súvislostiach z pôvodných prameňov;*
- *zhrnúť a interpretovať materiál z minulosti do zovšeobecňujúcich záverov;*
- *objasniť predmet matematiky a jeho zmeny, vzťah k iným vedám;*
- *presne stanoviť vnútornú logiku vývoja matematiky, príčiny špecifík jej rozvoja, obsah a vývoj základných problémov;*
- *ukázať spoločenské zázemie i praktické aplikácie matematiky.*

Poznanie základných javov z histórie matematiky umožňuje:

- *poznať a prehĺbiť význam matematiky a jej prakticko-spoločenského uplatnenia;*
- *zvýrazniť motiváciu štúdia matematiky všeobecne a niektorých konkrétnych didaktických postupov zvlášť;*
- *lepšie chápať filozoficko-metodologické pozadie matematických abstrakcií a idealizácií v nadväznosti na celú štruktúru ľudského myslenia;*
- *sprístupniť dobové spoločenské zázemie a úlohu ľudských osobností významných matematikov;*
- *popularizovať okolnosti tvorivého bádania v matematických disciplínach.*

Psychické procesy najviac ovplyvňujúce rozvoj matematického myslenia:

- *schopnosť poznávať časovo-priestorové súvislosti;*
- *pamäť, schopnosť uchovať si vo vedomí to, čo vnímal, pozoroval, prežil;*
- *predstavivosť, schopnosť myšlienkovo abstrahovať a idealizovať, definovať pojmy a uvažovať o nich;*
- *viera v kauzalitu, myšlienkové spájanie podobných javov, ich príčin a následkov;*
- *schopnosť tvoriť algoritmy, pravidlá hry, harmonickú spoluprácu.*

Vo vývoji matematiky boli aj zásadné problematické situácie:

1. kríza: objav iracionálnych čísel, nesúmerateľnosť úsečiek, napr. na vyjadrenie $\sqrt{2}$ nestačí konečný počet číslic (neukončený neperiodický rozvoj)

2. kríza: pojem nekonečne malej veličiny, definícia limity, problém spojitosti

3. kríza: existencia aktuálneho nekonečna, mohutnosť nekonečných množín, paradoxy teórie množín a matematickej logiky

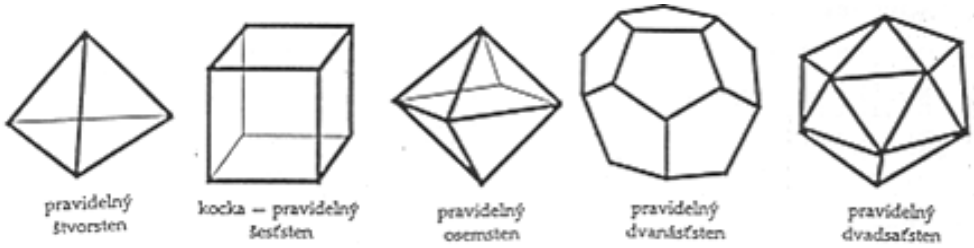
Pozorované javy sveta, v ktorom žijeme, vieme skúmať aj matematicky (zdôraznením merateľného a vyčísliteľného, schopnosťou kvantifikovať, abstrahovať a zovšeobecňovať pravidelnosti, študovať špeciálne ideálne myšlienkovo-logické štruktúry, vytvárať modely na základe dedukcie v axiomatickej sústave definícií, viet a logických dôkazov, algoritmizovať úspešné myšlienkové postupy, vylučovať protirečenia a vnímať aj vlastné systémovo-metodologické obmedzenia). Matematika sa stala medzisvetom porozumenia medzi prírodou a ľudskou mysľou, putom medzi človekom a svetom, v ktorom žije, sprostredkujúcou sférou medzi konkrétnym zmyslovým a ideálnym duchovným prostredím.

- *História matematiky môže pripomenúť veľké problémy a veľké ciele, ..., môže naučiť pokore tvárou v tvár veľkým dielam minulosti* (M. Kline, 1908–1992).
- *Na dějinách matematiky můžete sledovat celý myšlenkový vývoj lidstva. Vezměte si jména velkých filozofů a zjistíte, že to byli matematici. Od Platóna až po Husserla*
(P. Vopěnka, 1935–2015).

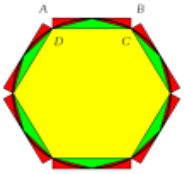
Matematika bez svojej histórie neexistuje.

Platónske telesá

Pred 2500 rokmi mali etruské deti obľúbenú hračku – pravidelný dvanásťsten (vykopávky v Monte Loffa pri Padove). Hračka z Ptolemaiovej doby, vystavená v egyptologických zbierkach Britského múzea v Londýne, má tvar pravidelného dvanásťstena. Ktoré telesá spĺňajú definíciu pravidelného mnohostena? Tie, ktoré sú konvexné, majú všetky steny zhodné pravidelné *n*-uholníky a pri každom vrchole je zoskupený rovnaký počet hrán (stien). Takýchto telies je len päť a majú prezývku *platónske*.
V starom Grécku ich vlastnosti študoval aj filozof Platón (427–347 pred n. l.).



Zamyslite sa nad tvrdením, že platónskych telies (ako typov) je len a práve päť.

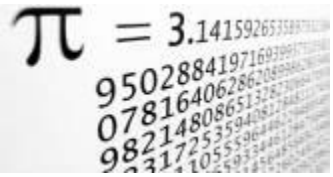


Pí je Ludolfovo číslo

Už 2000 rokov pred naším letopočtom Sumeri vyjadrili pomer medzi obvodom kruhu a jeho priemerom v tvare 25/8 (t. j. 3,125). V starom Egypte (asi 1900 pred n. l.) odhadli tento pomer ako $(16/9)^2$ (teda 3,1605). *Archimedes* (asi 287–212 pred n. l.) určil pomocou porovnania dĺžky obvodu vpísaných a opísaných pravidelných mnohouholníkov zmienený pomer medzi čísla 3 + 10/71 a 3 + 1/7. *Klaudius Ptolemaios* (asi 85–165) okolo roku 150 vyjadril spomínaný pomer zlomkom 377/120. Ďalšie priblíženia boli tieto: okolo roku 500 *Arjbhata* 62832/20000, *Bhaskara* 3927/1250. *Leonardo Pisánsky* uvádzal okolo roku 1222 vyčíslenie pre tento pomer ako 3,141818. V roku 1596 holandský učiteľ šermu Ludolf van Ceulen (1540–1610) vyčíslil a zverejnil spomínané číslo na 20 desatinných miest, posmrtne bol (1615) zverejnený jeho výpočet na 35 desatinných miest. Na jeho pamiatku dostalo pomenovanie *Ludolfovo číslo*.

Pomer ***p*/*d*** (***p*** – periféria, t. j. obvod, ***d*** – diametros, t. j. priemer) zaviedol roku 1647 *W. Oughtred* (1574–1660). Výsledok pomeru označil ako **π** roku 1706 *W. Jones* (1675–1749). Natrvalo zaviedol do matematiky spomínaný pomer ako číslo **π** *Leonhard Euler* (1707–1783), ktorý toto označenie ustavične používal (od roku 1736) vo svojich spisoch. To, že číslo **π** nie je racionálne (nedá sa presne vyjadriť ako podiel dvoch celých čísel) dokázal roku 1761 *J. H. Lambert* (1728–1777). V dnešnej dobe samočinné počítače chrlia milióny cifier Ludolfovho čísla **π**. Vy si môžete zapamätať toto veľmi známe číslo tak, že si namiesto slov nasledujúcej básničky dosadíte postupne počet písmen jednotlivých slov. Skúste si to:

Mám, ó bože, ó, dobrý, zapamätať si takýto čísel rad. Veľký slovútny Archimedes, pomáhaj trápenému, daj mu moc naspamäť znať krásne aj slávne síce, ale tak protivné nám, ach, číslice Ludolfove.



π = 3,14159265358979323846264338327 9 …

Kto a kedy zaviedol matematické symboly?

Symbol + (pre sčítanie) a − (pre odčítanie) v tlači použil roku 1489 ako prvý J. Widmann (1462–1498) v knihe *Šikovné a pekné počítanie pre všetkých kupcov.* Znak **x** pre násobenie zaviedol roku 1631 W. Oughtred (1574−1660) v diele *Kľúč k matematike*. Symbol **:** pre delenie použil Johnson roku 1633. Znak · pre násobenie zaviedol G.W. Leibniz (1646–1716) roku 1698. Ešte predtým (1631) tento znak použil T. Hariott (1561–1621), ktorý vtedy použil aj symboly > , < pre vyjadrenie vzťahov väčší a menší. Symbol ∞ pre nekonečno zaviedol roku 1655 J. Wallis (1616–1703). Značku = pre rovnosť prvý raz použil R. Record (1510–1558) roku 1557. Novšie symboly boli uvedené takto: G. Peano (1858–1932) zaviedol symboly ∪, ∩ pre zjednotenie a prienik množín (1888), symbol ∈ (byť prvkom množiny) roku 1894, symbol ∃ (existenčný kvantifikátor) roku 1897. Všeobecný kvantifikátor ∀ zaviedol G. Gentzen (1909–1945), symbol ∅ pre prázdnu množinu A. Weil (1906–1998).

DELENIE TROCHU INAK

Jeden z najstarších známych **algoritmov delenia,** pochádza od *Gerberta z Aurilacu***.** Vznikol okolo roku 980. Je výhodný najmä pre delenie jednociferným deliteľom „blízkym“ číslu 10.

Pozri, ako sa to robí:

12 321 : 8 =

12 321: (10 – 2) = 1232 + 246 + 49 + 10 + 2 + 1 = **1 540** (zv. 1)

1
+ 2464
2465
5
+ 492
497
7
+98
105
5
+20
25
5
+4
9 (v poslednom kroku je jednoduchšie 9 : 8 = 1 zv. 1)

Možno je to nezvyčajná otázka: Bol niekedy v histórii pápežom človek, ktorý bol aj uznávaným matematikom? Správna odpoveď znie – áno, francúzsky matematik Gerbert z Aurilacu **(**bol neskôr pápežom s menom Silvester II**.).** Narodil sa medzi rokmi 930 až 945 v Auvergene. Dostal úplné vzdelanie, mimoriadne prospieval v matematike i astronómii. Osud ho priviedol aj do Španielska, kde tento francúzsky kňaz ako jeden z prvých európskych učencov študoval arabskú matematiku. V tej dobe bola v Cordobe arabská vysoká škola (s bohatou knižnicou arabských, gréckych a latinských textov), kde sa prednášala aj matematika. Gerbert skvele popularizoval dielo Boethiovo, časti Euklidových *Základov* i praktickú geometriu. Ovládal počítanie na abaku – sčítacej doske. Namiesto kamienkov používal žetóny s číselnými znakmi. V jeho *Knihe o delení čísel* a *Pravidlách o počítaní na abaku* možno spoznať termíny *delenec* a *deliteľ*. V pojednaní *Geometria* (94 článkov) vysvetlil základné pojmy (bod, čiara, plocha, teleso), jednoduché poznatky a metódy výpočtov výšok, hĺbok a vzdialeností. V časti o zememeračských praktikách spomína počítanie s figurálnymi číslami. Zorganizoval školu v Remeši, kde vyučoval disciplíny kvadrívia (aritmetika, geometria, astronómia, hudba). Okrem matematiky sa zaoberal aj logikou, filozofiou i astronómiou. Napísal pojednania o dialektike, teológii aj o politike. V Magdeburgu skonštruoval slnečné hodiny, keď predtým skúmal polohu Polárky. Zaoberal sa mnohostranným využitím astrolábu (prístroj na meranie uhlov v súdobej astronómii). Gerbert z Aurilacu ako učenec, výnimočná osobnosť na poli cirkevnom i politickom, posunul západné myslenie bližšie k prameňom antickej filozofie a vedy, podnietil aj záujem o samostatné pozorovanie a skúmanie. Študoval Vergília, uplatňoval novoplatónsky štýl myslenia. Stal sa vplyvným mužom svojej doby, oslňoval všestrannosťou a prenikavosťou svojho umu. Vynikal aj ako široko vzdelaný a originálny učiteľ. Ako učený arcibiskup ravenský radil aj cisárovi Otovi III. (panoval 995–1002) a ten ho určil roku 999 za pápeža. Gerbert bol prvý Francúz na pápežskom stolci a prijal meno Silvester II., v tejto funkcii prispel k organizácii cirkvi v Poľsku i v Uhorsku. Uhorskému kráľovi Štefanovi I. poslal (r.1001) kráľovskú korunu. Vyhlásil za svätého pražského biskupa Vojtecha. S úspechom sa zapísal do dejín cirkvi i matematiky. Gerbert z Aurilacu zomrel 12. mája 1003.

A. M. S. BOETHIUS – majster dialektiky a pomocník mnohých

Pôsobil v základoch

Medzi tých, ktorí podnecovali významné rozhodnutia o osude vytvárajúcej sa západnej Európy na pomedzí 5. a 6. storočia, patrí aj autonómny rímsky vzdelanec a aristokrat Anicius Manlius Severinus Boethius (okolo 480–524). Narodil sa v Ríme, v patricijskej rodine. Mal možnosť navštevovať vynikajúce školy, ovládal rovnako dobre grécky ako latinsky, čítal Cicera i Senecu, preštudoval Aristotela i Platóna. V Aténach študoval aristotelskú, stoickú a novoplatónsku filozofiu. Neskôr bol prijatý do služieb ostrogótskeho panovníka Teodoricha (asi 453–524), ktorý vládol asi od roku 471. Na jeho dvore Boethius pôsobil aj v mnohých dôležitých funkciách štátnej správy (roku 510 bol konzulom). Z nejasných príčin (mocenský zápas iných, politické či náboženské spory) upadol do nemilosti (obvinený zo zrady), bol väznený a bez súdneho prejednania násilne zavraždený (asi 23. 10. 524).

Inšpiroval ďalších

Kresťanský neoplatonik Boethius podstatne prispel k tomu, aby sa vedomosti starovekého Grécka stali filozofickým základom pre celý Západ. Bol mostom medzi antickou a stredovekou kultúrou. Prispel k prepojeniu gréckej múdrosti a kresťanskej zvesti. Zaslúžil sa o pretlmočenie antického duchovného dedičstva (prekladal a vhodne komentoval diela Aristotela, Platóna i Porfýlia) do základov ranokresťanskej filozofie a teológie. Svojimi prácami inšpiroval mnohých mysliteľov stredoveku. Vytvoril odbornú latinskú filozofickú terminológiu, pripravil nové pojmy scholastického teologického slovníka. Zvýraznil zmysel i význam procesu učenia sa, naznačil hodnotu spojenia toho, čo robíme, s tým, čo vieme. Vytvoril, použil a radikálne obhajoval princíp preniknutia pravdy viery myslením. *Pokiaľ to dokážeš, spájaj vieru s rozumom.*

Sprostredkúval vedomosti

Boethius získal na pomedzí odchádzajúcej antickej kultúry a nastupujúceho sveta stredoveku výstižné charakteristické označenie „posledný Riman a prvý scholastik“. Vedel, že *všetko čo poznávame, nie je chápané podľa svojej prirodzenosti, ale skôr podľa schopností poznávajúcich*. Jeho zásluhou prehovoril latinsky k Rimanom Pytagoras, Ptolemaios, Nikomachos, Euklides, Archimedes. Boethius uznal: *Číslo bolo v mysli Stvoriteľa bezpochyby prvotným vzorom stvorených vecí... Všetka náuka o pravde je zahrnutá v mnohosti a veľkosti*.

Prekladal, komentoval, pretváral. Sedem slobodných umení rozdelil na odvetvie literárne - *trívium* (gramatika, rétorika, dialektika) a oblasť vedeckú – *kvadrívium* (aritmetika, geometria, astronómia a muzika). Napísal k nim úvody, ale zachovali sa len spisy venované aritmetike a hudbe – harmónii. Zhrnul aritmetiku Nikomacha z Gerasy (žil okolo roku 100 n. l.), písal o prvočíslách, zložených číslach, pomeroch prirodzených čísiel a úmerách, t.j. rovnostiach pomerov.

V podstate je matematika

[Na nasledujúcom obrázku je znázornená prvá stránka Boethiovej *Aritmetiky*, začiatok textu s venovaním Simmacovi, (Kodex N 258 sup., Biblioteca Ambrosiana, 13. stol.)]

Napríklad zaviedol pre čísla $a > p > b$

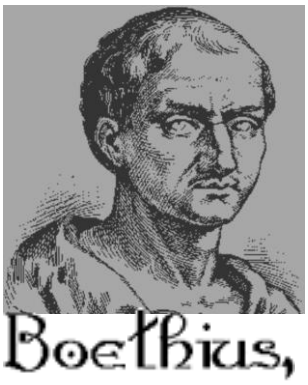
aritmetický priemer p čísiel *a, b* ako rovnosť $\frac{a-p}{p-b} = \frac{a}{a}$,

geometrický priemer p čísiel *a, b* ako $\frac{a-p}{p-b} = \frac{a}{p}$,

harmonický priemer p čísiel *a, b* ako $\frac{a-p}{p-b} = \frac{a}{b}$.

Muziku – harmóniu chápal ako klasifikáciu číselných vzťahov, matematické výpočty intervalov. Ladenie bolo pre neho získaním správnych a ideálne čistých pomerov. Z geometrie preložil aj prvé štyri knihy Euklidových *Základov*. Pomerne dosť ovplyvnil aj postupy logiky a argumentácie. Preložil a komentoval Aristotelove *Kategórie*, *O vyjadrovaní* i niektoré jeho ďalšie spisy o logike. Boethius sám vypracoval *Dve knihy o hypotetickom úsudku* a *Dve knihy o kategorickom úsudku*. Naznačil význam prísnej logickej argumentácie a presného definovania pojmov (napr. *Večnosť je úplné, súčasné a dokonalé vlastnenie neohraničeného a nikdy nekončiaceho života*.) Spoznal, že *nemôže dosiahnuť poznanie božských vecí ten, kto nie je vôbec zbehlý v matematike*. Podľa niektorých jeho učebníc sa učilo možno až tisíc rokov. Boethius nesporne prispel k priblíženiu antickej vzdelanosti budúcim generáciám stredovekých učencov.

Vyhľadávať múdrosť



Vo väzení napísal Boethius podnetné filozofické dielo *Útecha z filozofie*. Naznačil v ňom aj to, že k ľudskej slobode a šťastiu prispieva čistý duch a dobrá vôľa každého človeka. Boh bol pre neho „najvyššia dobrá vôľa“. Človeka chápal ako indivíduum, teda niečo vlastné, osobitne utvorené a jedinečné. Boethius kládol dôraz na ľudskú individualitu a poznávaciu aktivitu. Bol presvedčený o trvalej významnosti ľudského postavenia v celku existujúceho sveta. Potvrdil, že zodpovedné slobodné ľudské konanie je zároveň slávou i bremenom každého človeka. *Cnostní ľudia sú vždy silní, zatiaľ čo špatní bývajú vždy slabí; jedni aj druhí túžia po dobre, ale iba cnostní ho naozaj dosiahnu.* Jeho *Útecha z filozofie* bola v stredoveku po biblii najprekladanejším literárnym dielom a stala sa „povinným čítaním“ vyspelých študentov. Postupne ponúkala odpovede na problémy morálky i štátnej správy. Vzniklo k nej veľmi veľa komentárov od ľudí význačných i menej známych.

Už do základov stredoveku položil predstavu, že humanizmus a prírodoveda nemusia byť protikladné. Boethius ako originálny duch, filozof i matematik, vzdelaný gréckou kultúrou a presvedčený kresťanstvom, sa usiloval prispieť k výstavbe svetového poriadku, k jednote práva, mravov a vzdelanosti. Cesta k uplatneniu spojenia schopností rozumu a viery sa ukázala ako kľukatá a tŕnistá. *Aby sme poznali veľkú lásku, musíme najprv blúdiť a až potom sa dať na správnu cestu.*

Beda Venerabilis (Ctihodný) – učenec doznievajúcej patristiky

Výpočty pohyblivých sviatkov

Termín kresťanských veľkonočných sviatkov je určený na prvú nedeľu po prvom jarnom splne Mesiaca. Dátum veľkonočnej nedele sa pohybuje v kalendári v určitej postupnosti s periódou 28·19 = 532 rokov (tzv. veľkonočný cyklus). K tým, ktorí podstatne prispeli k základným postupom výpočtu veľkonočných sviatkov (Computus paschalis) patrí aj írsky benediktínsky mních Beda Venerabilis (asi 672/675 – **26. 5. 735**). Vypočítal dátumy Veľkej noci pre roky 532 – 1063.

Kláštorný život

Pochádzal z Northumbrie. Príliš skoro sa stal sirotou a tak ho sedemročného dali príbuzní na výchovu do kláštora Wearmouth. Celoživotným domovom bol pre neho, od roku 682, kláštor Jarrow pri ústí rieky Wear. Získal bohaté a všestranné vedomosti, zvládol biblickú gréčtinu i hebrejčinu. Svojou obdivuhodnou usilovnosťou v štúdiu, vyučovaní i spisovaní poznatkov sa vypracoval na známeho učenca, ktorý zanechal literárne dielo (väčšinou v latinčine) z oblasti nielen vieroučnej a mravoučnej, ale aj zemepisu, dejepisu prírodných vied i matematiky. Nikdy však nezanedbával svoje mníšske povinnosti. *Aj keď som dodržiaval predpísaný režim a denne sa zúčastňoval chrámového spevu, moje hlavné potešenie spočívalo v štúdiu, učení a písaní.*

Z diela

K hlavným úspechom jeho učiteľskej činnosti patria výklad Písma, komentáre, kázne. Z historických spisov sú významné päťzväzkové *Cirkevné dejiny Anglicka* od čias Caesara až do roku 731. Zachytil aj základné historické údaje o kresťanských mučeníkoch.

Beda Venerabilis sa zaujímal aj o prírodu. Uznával učenie o guľatosti Zeme, popísal príliv a odliv mora v súvislosti s pohybom Mesiaca. Spísal (r. 701) traktát *De natura rerum – O prírode.* V práci *De temporum ratione – O počítaní času* (z roku 725) vysvetlil, okrem iného, ako možno pomocou zmeny polohy rúk a prstov na nich znázorniť čísla až do milióna.(Jednotky boli reprezentované polohami prstov ľavej ruky, desiatky kombináciami polôh prstov a palca ľavej ruky, stovky polohami prstov pravej ruky, tisíce kombináciami polôh prstov a palca pravej ruky, desaťtisíce, stotisíce a milióny polohami rúk a trupu.) Vedel pracovať so zlomkami. V zbierke úloh *De arithmeticis propositionibus* sa objavujú aj záporné čísla. Odrazom súdobých pomerov je aj Bedove konštatovanie: *Kto vie deliť, tomu sa žiadna záležitosť nebude zdať ťažká. Ja poznám veľa zložitých vecí, ale nič nie je zložitejšie ako operácie so zlomkami.*

Význam

Poeta, filozof a teológ Beda Venerabilis pôsobil v čase latinskej západnej patristiky (obdobie stredovekej filozofie v dobe formovania kresťanstva). Zanechal trvalé stopy na poli teológie a kresťanskej kultúry, stal sa aj cirkevným učiteľom a bol vyhlásený za svätého. Prijal a presadil datovanie udalostí od narodenia Krista (anno Domini). Stal sa „otcom anglických dejín“. Je považovaný aj za astronóma, lebo analyzoval výsledky pozorovaní pohybu Slnka a Mesiaca v astronomických tabuľkách a výpočtoch. Zistil, že dĺžka roka nie je určená presne.

Vďaka Bedovi sa do celej Európy rozšírilo nielen počítanie na prstoch a rukách, ale aj výraznejšia učenosť v gramatike, v metrike i v rétorike. Beda Venerabilis (Ctihodný) patril medzi najvýznamnejších učencov svojej doby.

Alcuin z Yorku – bystrý mladík stredoveku

Veľmi staré úlohy

Asi poznáte príhodu o vlkovi, koze a hlávke kapusty a ich prevoze cez rieku za daných podmienok. Táto úloha je veľmi stará. Nachádza sa aj v spise *Úlohy na bystrenie rozumu mladých,* už z 8. storočia. Autorom tejto práce, ktorá obsahuje napríklad aj úlohy o psovi a králikovi, o sto mericiach pšenice a ďalšie, je Alcuin z Yorku (asi 735 – 804) učiteľ, filozof i básnik na dvore Karola Veľkého (747 – 814) v Aachene okolo roku 781. Jeho latinské meno Alcuin (Albinus) pochádza z keltského Alh-win, čo znamená priateľ chrámu.

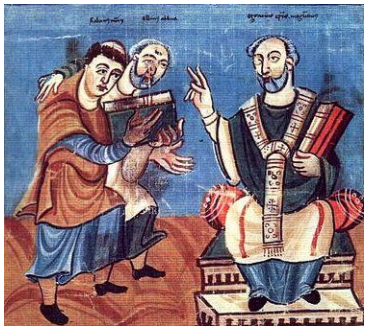
Doba a prostredie

York je arcibiskupské sídlo so starou kultúrnou tradíciou a známou kláštornou školou. Tam sa okolo roku 735 narodil anglosaský učenec Alcuin. Vyštudoval a potom prednášal v miestnom kláštore. Od roku 781 viedol kultúrne a školské záležitosti panovníka (od roku 768) Karola Veľkého, šíril v jeho ríši vzdelanie (elementárne, artistické i teologické). Základom boli modlitby, žalmy a spev, sedem slobodných umení (gramatika, rétorika, logika, aritmetika, geometria, hudba, astronómia), Biblia a komentáre cirkevných Otcov. Cieľom bolo spoznať a začleniť zmysluplné antické poznatky do kresťanskej kultúry. Metódou boli otázky a odpovede s ohľadom na proces vnímania, pamäti a obrazotvornosti. Jednou zo zásad bola myšlienka: *Rozumne sa pýtať, znamená vyučovať*. Alcuin spísal traktáty o gramatike, rétorike, dialektike i muzike, filozofické a teologické spisy aj pojednania z histórie. Filozofiu chápal ako ľudskú schopnosť systemizovať problémy viery, ako skúmanie prírody a poznávanie javov ľudských i božích. Zvlášť vnímal logiku ako umenie rozumu, ktoré usporadúva poznanie javov ľudských i božských. Radil cisárovi aj v politických otázkach. Od roku 796 bol opátom v kláštore sv. Martina v Tours, kde vybudoval úspešnú školu pre šírenie vzdelanosti vo Francúzsku. Alcuin z Yorku zomrel 19. 5. 804 a jeho telo je pochované v kláštornom kostole v Tours.

Bystrý um

Už spomínaný spis *Úlohy na bystrenie umu mladých* (*Propositiones ad acuendos iuvenes*) je zbierkou 53 počtárskych úloh. V nej je ukázané napríklad riešenie úlohy ako rozdeliť 100 mincí medzi 100 osôb, aby muži dostali po troch, ženy po dvoch a každé dve deti spolu po jednej minci. Alcuin uvádza riešenie, podľa ktorého bolo zo 100 osôb 11 mužov, 15 žien a 74 detí. Iné z ďalších päť riešení neuvádzal. (Určte tieto ďalšie riešenia, v podstate rovnice o dvoch neznámych, v množine prirodzených čísel.) Súčasťou tejto zbierky sú aj zadania úloh na postupnosti (napr. o počte holubov na 100 priečkovom rebríku, ak na jednotlivých priečkach holuby sedia postupne v počte 1, 2, 3,....,100), na výpočet obsahov, ale aj zadania kombinatorických úloh alebo rôzne výpočtové zadania a úlohy s nematematickou základnou úvahou.

Historické zázemie



Karolínska renesancia priniesla oživenie vzdelávania v starších kláštorných školách a začínajúcich školách pri katedrálach. Írsky mních Alcuin z Yorku usporiadal zásadné výroky autorít (*Beda Venerabilis, Isidor, Boethius, Augustín, Cicero*) pre školské potreby. Prispel k celkovej obnove a reforme vzdelania vo Franskej ríši (*Karol Veľký* sa stal cisárom v Ríme roku 800). Ukazuje sa, že aj podnety zo začiatku stredoveku, ktoré sú ešte stále súčasťou školskej matematiky, patria k európskemu kultúrnemu dedičstvu a vytvárajú historické korene rôznych matematických disciplín.

Roger BACON – dôraz na skúsenosť a premýšľanie

Stredoveké štúdiá

Medzi najstaršie vysoké školy patria univerzity v Paríži a v Oxforde, ktoré sa stali bránou k vrcholnej scholastike (vyučovať a učiť sa bolo „in"; čas metafyzického ducha, kde premýšľajúci človek bol viac než stroj a peniaze). Základom stredovekého štúdia bolo sedem slobodných umení: gramatika, rétorika, dialektika, aritmetika, geometria, astronómia a hudba. Jedným z najkritickejších mužov oxfordskej scholastiky bol františkánsky mních Roger Bacon (asi 1214–1292/94)**:** *Hľadal som priateľstvo všetkých múdrych mužov a presadil, aby boli mladí ľudia vyučovaní jazykom a geometrii, číslam a tabuľkám a mnohým iným potrebným veciam.*

Osudy života

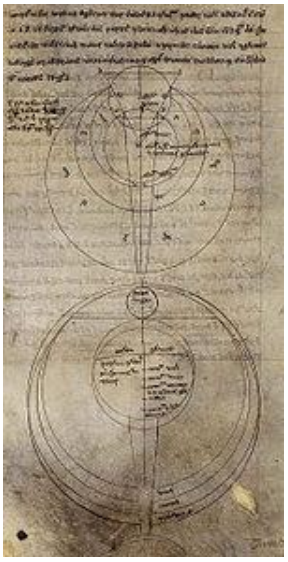
Dôkladnú znalosť všetkých odborov niekdajšej vedy (matematiky, medicíny, teológie a filozofie) získal v Oxforde a v Paríži (1244–1250). Mal značný ohlas ako prírodovedec a univerzálny mysliteľ. Viac ako tridsaťročný vstúpil do reholy františkánov a dôverne sa oboznámil s jej myšlienkovým svetom. Stretol sa s Albertom Veľkým, Alexandrom z Halesu, Bonaventúrom i Tomášom Akvinským. Keď sa jeho priateľ G. Fulconi stal pápežom Klementom IV. (1265–1268), požiadal Bacona o zaslanie jeho diela. Za kritiku panovníkov i rádových predstavených sa Bacon dostal do kláštorného väzenia v Paríži aj Oxforde (1271–1292). Zomrel (asi 11.6.1294) opustený a zneuznaný.

Roger Bacon zvýrazňoval úlohu znalosti jazykov (hebrejčiny, gréčtiny, arabčiny) pre lepšie pochopenie diel Aristotela, Avicenu i Averroesa, ale aj Biblie. Pri skúmaní prírodných javov požadoval väčší dôraz na pokus, fyzikálnu skúsenosť. *Bez skúsenosti nemožno nič dostatočne poznať... Iba skúsenosť dáva istotu, a nie logický dôkaz.* Sám rozpracoval niektoré fyzikálne idey, napr. v optike, magnetizme a praktickej fyzike (využitie strelného prachu, vízia nových technických prostriedkov). Zovšeobecnenie vnútornej a vonkajšej skúsenosti videl v abstrakcii a v matematizácii, ktorú treba následne preveriť v praxi. Na ceste za experimentálnym poznaním podporoval vnútornú intuíciu, šikovnosť rúk a matematické zovšeobecnenie. *Polovicou vedy je kladenie správnych otázok.* V optike, v astronómii i v teórii hudby odhalil matematickú povahu vecí. Krásu videl prameniť zo svetla a harmónie.

Smerom k istote

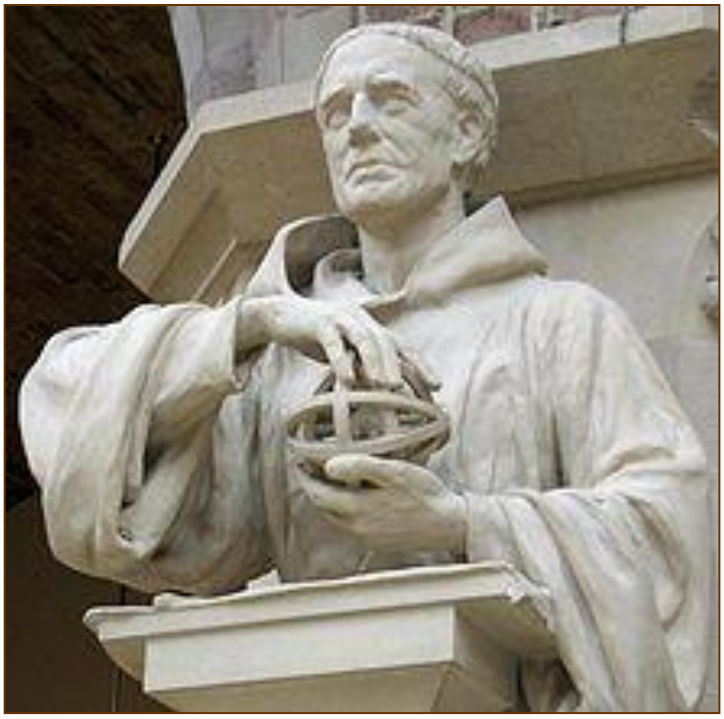
V diele *Opus maius* (*Väčšie dielo*) uvažoval o príčinách ľudskej nevedomosti, o vzťahu medzi filozofiou a teológiou, o využití jazykových náuk, o význame matematiky a experimentálnom poznaní i o etike. *Opus minor* (*Menšie dielo*) je súhrn Baconových najhlavnejších myšlienok, *Opus tertium* (*Tretie dielo*) je prehľad téz hlavného spisu. *Filozofia rozvíja božskú múdrosť pomocou vedy a umenia.* Roger Bacon spájal idealizmus a empirizmus, dôsledne odlišoval teológiu a profánne vedy. Uprednostnil výskum konkrétnych predmetov proti prílišnému odvolávaniu sa na autority. Uznal, že experiment je nielen zdrojom poznania, ale aj rozhodujúcim kritériom pravdivosti. *Ani najdokonalejšie argumenty nič nedokazujú, pokiaľ nie sú závery overené skúsenosťou.* Ľudský rozum a skúsenosť vnímal ako nespochybniteľné autority v oblasti prírodných vied. Zdôrazňoval, že exaktné skúmanie reálnych skutočností spolu s matematickým popisom vedie ku koreňom istoty. Ocenil nevyhnutnosť metodickej precíznosti, exaktnosti a dôslednosti v overovaní prírodovedných poznatkov.

Experiment a myslenie

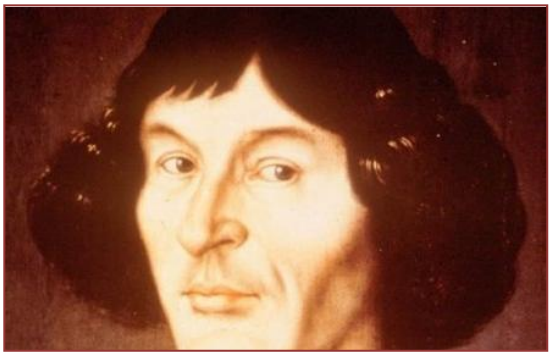


Matematika sú dvere a kľúč k vede. Veci tohto sveta nemožno poznať bez matematických vedomostí. Matematiku (v širšom a súdobom zmysle) vnímal Roger Bacon ako myšlienkový postup najbližší prirodzenému poznávaniu cez skúsenosť a premýšľanie. Matematické úkony sú prístupné už malým deťom. Pomerne dôrazne naznačil: *Kto podceňuje výsledky matematiky, škodí celej vede, lebo ten, kto nepozná matematiku, nemôže poznať exaktné vedy a nemôže pochopiť svet.* Matematické poznatky vnímal ako základ všetkého vedeckého poznania a odkázal aj nám: *Chcel by som vysloviť predpoveď, že čím viac záhad prírody rozriešime, tým viac odvetví matematiky budeme nútení používať.* Roger Bacon uprednostnil skoro až mystickú intuíciu, ktorú sa snažil preverovať experimentom a popisovať matematicky. *Máme dva spôsoby poznávania: špekuláciu (teóriu) a experiment.* Pochopil, že prírodné vedy majú viesť ľudí k zdokonaleniu sveta, v ktorom žijeme. *Bez experimentu nemôžeme nič zodpovedne poznať. Argument vec dokazuje teoreticky, ale nedáva dostatočnú istotu v odstránení pochybností; náš um nedospeje k jasnej pravde, pokiaľ ju nenájde experimentálnou cestou.* Vyznačil význam i úlohy experimentálnych skúseností, aby vychádzajúc z teórie smerovali k matematizácii celého ľudského poznania. *Všetko poznanie závisí od teoretickej sily matematiky.*

Experimentálne vedomosti o prírode môžu prispieť aj k prehĺbeniu kresťanskej viery. Aj dnes si uvedomujeme, tak ako naznačil Roger Bacon, podstatnú odlišnosť zmyslového a rozumového poznania. Správne vedecké postupy môžu predstavovať premostenie k harmonickej a pevnej syntéze zjavenej viery a ľudského rozumu, aby sme postupne vylúčili príčiny našich omylov, *pretože kým zotrvávajú v ľudskom srdci, rozum nemôže uznať pravdu*. Kritický duch Rogera Bacona nám ponúkol zvýraznenie významu experimentálneho a matematického poznávania voči zostarnutým mienkam zdedených autorít. Napriek ťažkému životnému osudu a nepochopeniu zostal Roger Bacon verný presvedčeniu, že rozum i viera môžu nájsť oporu v experimentálnej vede i v kresťanskej teológii. *Láska dokáže nájsť vstup nielen do srdca otvoreného, ale aj do srdca obrneného...*



Študentom základnej školy



Úlohou všetkých vied je vzďaľovať človeka od zla, usmerňovať jeho myseľ k väčšej dokonalosti.

Mikuláš KOPERNÍK
(1473–1543)

1. V pondelok a v stredu vždy prší, v sobotu je hmla a ostatné dni v týždni svieti slnko. Ktorý deň v týždni treba začať 44 dňové prázdniny, aby bolo počas nich čo najviac slnečných dní?

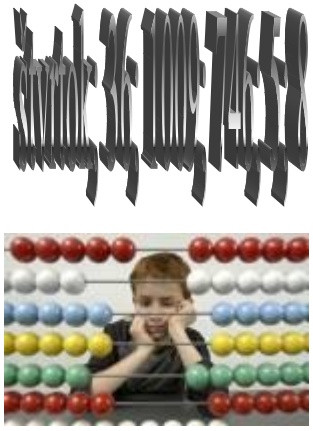
2. My dvaja spolu sme našli 70 húb. Medzi mojimi je presne 5/9 dubákov. Medzi tvojimi je presne 2/17 šampiňónov. Koľko húb som našiel?

3. Moje šťastné číslo je trojciferné. Tvoje šťastné číslo je dvojciferné. Rozdiel našich šťastných čísel je 989. Stanov súčet našich šťastných čísel.

4. Stanovte, najviac koľko číslic môžeme škrtnúť z 1000-ciferného čísla 200820082008... 2008 tak, aby ciferný súčet vzniknutého čísla bol 2008.

5. Mám 9 mincí a každá má hodnotu 2 centy. Ty máš 8 mincí a každá má hodnotu 5 centov. Stanov najmenší počet mincí, ktoré si musíme vymeniť, aby sme mali rovnakú hodnotu v centoch.

6. Predstav si, že máš 108 červených a 180 zelených guliek. Všetky musíš roztriediť do vreciek tak, aby pomer červených ku počtu zelených bol v každom vrecku rovnaký. Aký najmenší počet guliek môže byť v jednom vrecku?



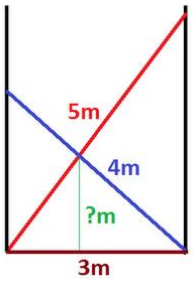
M – úlohy pre ZŠ (1)

1. Stanovte deväťciferné číslo, v ktorom sa každá z číslic 1, 2,..., 9 vyskytuje práve raz a pritom platí, že číslo tvorené prvými dvoma číslicami kódu (zľava) je deliteľné dvoma, číslo tvorené prvými tromi číslicami kódu je deliteľné tromi, číslo tvorené prvými štyrmi číslicami kódu je deliteľné štyrmi atď., až napokon číslo tvorené všetkými deviatimi číslicami kódu je deliteľné deviatimi.

2. Sirup je potrebné riediť v pomere 2 : 9. Predtým ho niekto rozriedil v pomere 3 : 5. V akom pomere teraz treba rozriediť ten predpripravený koncentrát, aby to bolo tak, ako to má byť?

3. Z 33 účastníkov konferencie ovládalo 8 ruský a anglický jazyk, 14 anglický a slovenský jazyk a iba 5 slovenský a ruský jazyk. Traja účastníci ovládali všetky tri jazyky. Počet tých, ktorí ovládali iba jeden z týchto troch jazykov bol pre každý jazyk rovnaký. Stanovte koľko účastníkov ovládalo slovenský, koľko ruský a koľko anglický jazyk, keď každý účastník ovládal aspoň jeden z nich.

4. Do "dvojrozmernej studne" s vodorovným dnom a zvislými stenami vzdialenými od seba 3 metre sme hodili dve rovné palice dĺžok 4 a 5 metrov, ktoré sa ustálili v pozícii zaznačenej na obrázku. Ako vysoko od dna leží bod, v ktorom sa tieto palice "pretínajú"?



5. Stanovte počet šesťmiestnych prirodzených čísel, ktoré neobsahujú cifru 2 ani cifru 4.

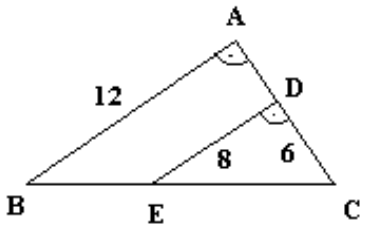
6. Odvoďte vzorec pre výpočet obsahu kosoštvorca pomocou dĺžok jeho uhlopriečok.

7. Stanovte, koľko litrov vody je potrebné priliať do 58 litrov liehu s koncentráciou 94 %, aby sme dostali lieh s koncentráciou 58 %.

8. Do nepriehľadného vrecúška sme vložili štyri modré, dve červené a jednu zelenú guľku. Náhodne vyberieme jednu guľku, zaznačíme si jej farbu a vložíme naspäť. Znovu vyberieme náhodne ďalšiu guľku a zaznačíme si jej farbu. Aká je pravdepodobnosť, že pri týchto dvoch výberoch ani raz nevytiahneme červenú guľku?

9. Keby bol každý schod o 3 cm nižší, bolo by ich na rozhľadňu o 60 viac. Keby bol každý schod o 3 cm vyšší, bolo by ich o 40 menej. Aká vysoká je rozhľadňa?

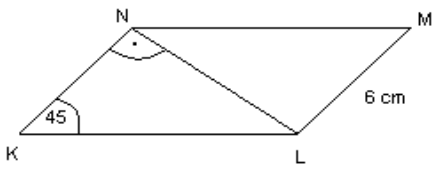
10. Stanovte veľkosť úsečky *BC*, ak údaje o veľkostiach úsečiek *AB*, *ED*, *CD* sú uvedené v cm na obrázku.



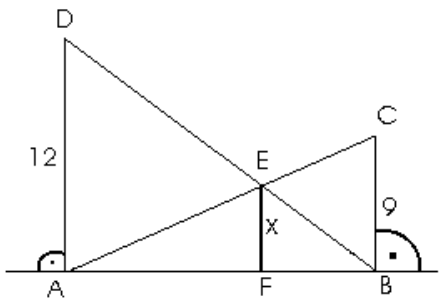
Matematika je *široká nádherná krajina, otvorená pre všetkých, ktorým myslenie prináša skutočnú radosť* (W. Fuchs).

M – úlohy pre ZŠ (2)

1. Čo sa stalo, ak sa ukázalo, že tvrdenie *Ak je dnes utorok, tak sme v Belgicku,* nebolo pravdivé?
2. My dvaja spolu sme našli 70 húb. Medzi mojimi je presne 5/9 dubákov. Medzi tvojimi je presne 2/17 šampiňónov. Koľko húb som našiel?
3. Žiak prečítal knihu za 12 dní. Ak by prečítal každý deň o 5 strán viac, prečítal by ju o 4 dni skôr. Koľko strán má táto kniha?
4. Stanovte, koľko prirodzených čísel menších ako 1000 možno napísať len pomocou cifier 1, 5, 7 (cifry sa môžu opakovať).
5. Podstava nádrže tvaru kvádra má rozmery 6 m a 9 m. Napustením 405 hl vody sa naplnila nádrž na 15 % svojho objemu. Stanovte hĺbku nádrže.
6. Päť robotníkov vyrobí za 6 dní 70 výrobkov. Koľko výrobkov vyrobí 9 rovnako výkonných robotníkov za 10 dní?
7. Cena vstupeniek vzrástla o 40 %, za vstupenky sa vybralo len o 26 % viac. O koľko percent klesla návštevnosť predstavenia?
8. Stanovte obsah kosodĺžnika *KLMN* (pozri obrázok):



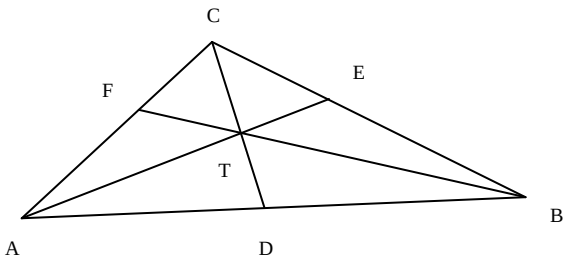
9. V našom meste je 3/5 žien vydatých za 2/3 mužov. Aká časť obyvateľstva je slobodná (nežije v manželstve)?
10. Stanovte, koľko rokov mal matematik A. MORGAN (1806–1871), keď prehlásil: *V roku x^2 som mal x rokov.*
11. V pravouhlom trojuholníku *ABC* sú odvesny dlhé 6 *cm* a 8 *cm*. Stanovte dĺžku polomeru kružnice opísanej trojuholníku *ABC.*
12. Čerstvé huby obsahujú 88 % vody, sušené iba 14 % vody. Koľko kg čerstvých húb treba nazbierať, aby sme získali 3 kg sušených?
13. Stanovte súčet prirodzených čísel $p + q$, ak viete, že $p \cdot q = 10000$ a žiadne z čísel p, q nie je deliteľné desiatimi.
14. Knižka má očíslovaných 972 strán (prirodzené čísla od 1 do 972 vrátane). Stanovte, koľkokrát sa na očíslovaných stránkach vyskytuje číslica 7.
15. Stanovte, akú časť zmiešaného lesa chcú lesníci vyrúbať, ak ich vedúci nevinne vyhlásil: *Budeme rúbať iba sosny, ktorých je v našom zmiešanom lese 99 %. Po výrube budú sosny tvoriť 98 % všetkých ponechaných stromov.*
16. Vypočítajte veľkosť *x* (údaje sú na obrázku):



Matematika nie je ilustrovaný časopis, ktorý možno začať čítať na ktorejkoľvek strane... Matematika učí vytvárať presnými logickými úvahami platné závery... (profesor Š. Schwarz)

VYBRANÉ ÚLOHY Z PYTAGORIÁDY

1. Stanovte, koľko rôznych trojuholníkov možno „vyčítať“ z obrázku:



2. Stanovte, o koľko eur je sveter drahší ako košeľa, keď sveter a dve košele stoja 28 eur a dva svetre spolu s jednou košeľou stojí 44 eur.
3. Stanovte, aký počet číslic napíšem, ak očíslujem (1, 2, 3,...) všetky strany v zošite, ktorý má 20 listov.
4. Stanovte rozdiel najväčšieho štvorciferného prirodzeného čísla deliteľného štyrmi a najmenšieho štvorciferného prirodzeného čísla deliteľného dvomi.
5. Stanovte, koľko šnúr by navlieklo osem strojov za 30 minút, ak viete, že za 20 minút navlečie jeden stroj 12 šnúr.
6. Stanovte súčet všetkých prirodzených deliteľov čísla 150.
7. Stanovte počet čísel, ktoré použijem, ak píšem za sebou prirodzené čísla od 1 do 40 (vrátane).
8. Stanovte počet žiakov, ktorí zaplatili za poistné po 5 €, ak viete, že poistné na jedného žiaka bolo buď 3 € alebo 5 € a 30 žiakov zaplatilo spolu 130 €.
9. Stanovte obsah obdĺžnika, ak jeho obvod je 80 cm a dĺžky jeho strán sú v pomere 3 : 5.
10. Stanovte, o koľko je polovica šestiny menšia ako dve tretiny z troch šestín.
11. Stanovte počet rôznych trojciferných nepárnych prirodzených čísel, ktoré možno vytvoriť z cifier 3, 4, 5, 6, 7 bez opakovania.
12. Stanovte, v akom pomere je obvod ΔKLM a obvod ΔXYZ, ak v ΔKLM sú body X, Y, Z stredy strán.
13. Stanovte najväčšie štvorciferné prirodzené číslo, ktorého súčin cifier je 1080.
14. Vo vnútri štvorca $ABCD$ je rovnostranný ΔABK. Stanovte veľkosť uhla CKB.
15. Stanovte, o koľko percent sa zväčší povrch kocky, ak jej hranu zväčšíme o 20 %.
16. Stanovte, koľko motorov opravia priemerne siedmi mechanici za päť dní, ak viete, že traja mechanici opravia priemerne za tri dni deväť motorov.
17. Stanovte počet všetkých prirodzených trojciferných čísel, v zápise ktorých sa vyskytuje aspoň raz číslica nula.
18. Body A, B, C sú stredy strán ΔKLM. Body E, F, G sú stredy strán ΔABC. Stanovte obsah ΔKAC, ak viete, že obsah ΔEFG je 9 cm^2.
19. Stanovte súčet všetkých prirodzených párnych deliteľov čísla 2014.
20. Stanovte, ktorou číslicou končí dekadický zápis čísla 2014^{2014}.

(**16**; **16**; **71**; **8996**; **144**; **372**; **71**; **20**; **375**; ¼ ;
36; **2 : 1**; **9853**; **75°**; **44**; **35**; **171**; **36**; **2160**; **6**)

20 úloh ako vedomostný štandard z matematiky ZŠ

1. Usporiadajte podľa veľkosti: $\frac{5}{12}, \frac{3}{8}, \frac{4}{9}$.

2. Vydeľte na dve desatinné miesta a stanovte aj zvyšok: 5,263 : 0,52 .

3. Stanovte, koľko rôznych desatinných čísel možno zostaviť len pomocou číslic 0, 3, 5, ak každú z týchto číslic použijeme v čísle práve raz.

4. Usporiadajte čísla 2^{100}, 3^{75}, 5^{50} vzostupne a uveďte dôvody pre svoje tvrdenie.

5. Traja kamaráti si rozdelili guľôčky v pomere 6 : 5 : 4. Niektorí dvaja z nich dostali spolu 126 guľôčok. Stanovte, koľko mali kamaráti všetkých guľôčok spolu.

6. Bazén na kúpalisku je dlhý 50 m a široký 12,5 m. Na pláne mesta je znázornený ako obdĺžnik s obsahom 1 cm^2. Stanovte v akej mierke je plán.

7. Spomedzi všetkých druhov húb je 70 % nejedlých. Spomedzi všetkých nejedlých druhov húb je15% smrteľne jedovatých. Stanovte, koľko % zo všetkých druhov húb sú smrteľne jedovaté.

8. Vyriešte v R: $\frac{1}{3x-6} = \frac{1}{2-x}$.

9. Stanovte polomer *r* kruhu, ak pre obsah *S* kruhu platí $S = \pi \cdot r^2$.

10. Stanovte súčet dvoch čísel, ak ich rozdiel je 37 a pri vydelení väčšieho menším dostaneme podiel 3 a zvyšok 3.

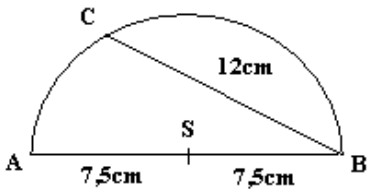
11. Stanovte, aká je priemerná rýchlosť vozidla, ktoré prejde trať rýchlosťou 60 km/h a vracia sa späť po rovnakej trase rýchlosťou 40 km/h.

12. Stanovte veľkosť vnútorného uhla pravidelného desaťuholníka.

13. Ak viete, že *cos* α = *sin* 27°, stanovte čomu sa rovná α $(0 \le \alpha \le 90^\circ)$.

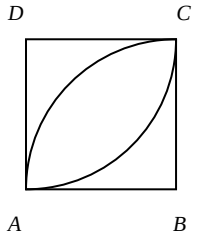
14. Stanovte, akú vlastnosť má trojuholník *KLM*, ak pre bod *P* z niektorej jeho strany platí $|KP| = |PL| = |PM|$.

15. Stanovte obsah trojuholníka *ABC* z údajov na obrázku:



16. V rovnobežníku *ABCD* platí: $|AB| = 10$ cm, $|AC| = 15$ cm a vzdialenosť bodu *D* od priamky *AC* je 2 cm. Stanovte vzdialenosť bodu *D* od priamky *AB*.

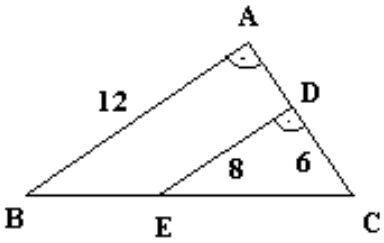
17. Stanovte obsah "oka" vo štvorci *ABCD* so stranou 4 dm, ak oblúky *AC* sú časti kružníc so stredmi v *B* a v *D*.



18. Tri steny určitého kvádra majú obsah 6 cm^2, 10 cm^2 a 15 cm^2. Stanovte veľkosť objemu tohto kvádra.

19. V rovine je daná úsečka *AB* s veľkosťou 4 cm. Stanovte množinu všetkých vrcholov *C* v rovine, pre ktoré je obsah trojuholníkov *ABC* 4 cm^2.

20. Stanovte veľkosť úsečky *BC*, ak údaje o veľkostiach daných úsečiek v centimetroch sú uvedené na obrázku.



Kto je nevinný?

Úloha:

Niekto z podozrivých *A*, *B*, *C* v galérii odcudzil obraz.
Traja svedkovia o udalosti pravdivo vypovedali takto:

1. *Podozrivý C bol v galérii práve vtedy, keď tam nebol žiaden z dvojice A, B.*

2. *V galérii nebol podozrivý C alebo nebola pravda, že tam bol aspoň jeden z dvojice A, C.*

3. *Ak nie je pravda, že v galérii bol podozrivý A zároveň s B, potom tam bol podozrivý C.*

Kto je nevinný?

Riešenie:

Zapíšeme si výpovede svedkov pomocou logických spojok.

1. $C \Leftrightarrow (A' \wedge B')$
2. $C' \vee (A \vee C)'$
3. $(A \wedge B)' \Rightarrow C$

Zistíme pravdivostné hodnoty týchto výrokov pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt. Na zistenie toho, kto bol nevinný, je treba vyhovieť všetkým svedkom súčasne, a preto nás bude zaujímať pravdivosť výrokov 1, 2, 3 súčasne

A	B	C	A'	B'	C'	$C \Leftrightarrow (A' \wedge B')$	$C' \vee (A \vee C)'$	$(A \wedge B)' \Rightarrow C$	$(1 \wedge 2 \wedge 3)$
1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0

V tabuľke vidíme, že všetci traja svedkovia sa zhodnú len v jedinom prípade – keď platia výroky *A* a *B* a pritom neplatí výrok *C*.
Na základe tohto možno tvrdiť, že ***podozrivý C je zaručene nevinný***.

Rozhovor dvoch matematikov

Úloha:

Dvaja matematici (***A***; ***B***) sa takto zhovárali:

A: *Súčin veku mojich troch synov je 36.*

B: *Táto informácia mi nestačí na určenie veku každého z nich.*

A: *Súčet veku mojich synov je rovnaký ako počet okien na dome, ktorý vidíme pred sebou.*

B: *Ani teraz sa nedá určiť vek tvojich synov.*

A: *Najstarší z mojich synov má čierne vlasy.*

B: *Ďakujem, to stačí, už poznám vek tvojich synov.*

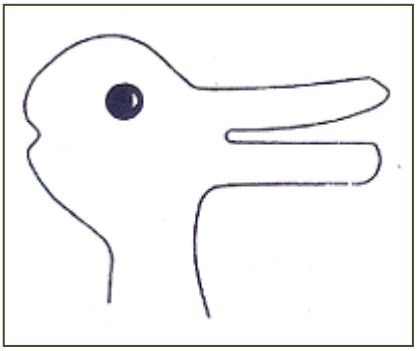
Koľko rokov má každý zo spomínaných synov?
Koľko okien bolo na budove, ktorú videli pred sebou?

Riešenie:

Vek synov je celočíselný. Rozložme číslo 36 na súčin troch kladných celých čísiel a zapíšme do tohto riadku hneď aj súčet ich veku:

$1 \cdot 1 \cdot 36$	*38*
$1 \cdot 2 \cdot 18$	*21*
$1 \cdot 3 \cdot 12$	***16***
$1 \cdot 4 \cdot 9$	***14***
$1 \cdot 6 \cdot 6$	***13***
$2 \cdot 2 \cdot 9$	***13***
$2 \cdot 3 \cdot 6$	***11***
$3 \cdot 3 \cdot 4$	***10***

Teraz jasne vidíme, prečo ***B*** nemohol po druhej odpovedi určiť vek synov – na budove bolo 13 okien. To znamená, že sú dve možnosti pre vek synov: buď 1, 6, 6 alebo 2, 2, 9. Matematik ***A*** v poslednej odpovedi (***najstarší*** z mojich synov) naznačil, že ***najstarší*** jeho syn ***nie je z dvojičiek*** (mali by rovnaký vek). Teda synovia majú vek **dva, dva** a **deväť** rokov.



Percentá sú zradné čísla pomerné

Úloha č. 1 (Presné percento)

V triede je menej než 50 detí. Chlapcov je presne 72 percent z počtu dievčat. Aký je presný počet detí v tejto triede?

Riešenie:

A. Ak si označíme počet chlapcov x a počet dievčat y, tak musí platiť $x + y < 50$ a zároveň $x = \frac{72}{100}y$. Aby $x = \frac{18}{25}y$ bolo celé kladné číslo (to má byť počet chlapcov), tak treba zvoliť y z množiny {25, 50, 75, ...} a potom x bude z množiny {18, 36, 54, ...}. Ak máme splniť požiadavku $x + y < 50$, to je možné len pre $x = 18$ a $y = 25$. V triede je 18 chlapcov a 25 dievčat, spolu 43 detí.

B. Označme si počet dievčat d. Potom počet chlapcov je $0{,}72 \cdot d$. Chlapcov a dievčat spolu je $1{,}72 \cdot d$. Podľa zadania úlohy má byť $1{,}72 \cdot d < 50$ a $d \in N$.

Ak si túto podmienku upravíme, dostaneme $d < \frac{50}{1{,}72}$, teda $d \in \{1, 2, 3, \dots, 29\}$.

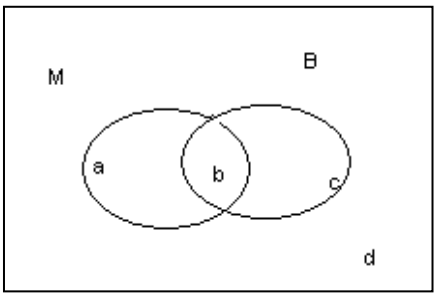
Vieme, že aj $0{,}72 \cdot d$ musí byť kladné celé číslo (je to počet chlapcov), to ale znamená, že $\frac{72 \cdot d}{100} = \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot d}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{18 \cdot d}{25}$ má byť celé kladné číslo. To splníme, ak zvolíme $d = 25 \cdot k$, kde $k \in N$. Pretože hľadáme $d < 29$, vyhovuje iba $d = 25$. To znamená, že v triede je 25 dievčat, 18 chlapcov ($0{,}72 \cdot 25 = 18$). V triede je 43 detí.

Úloha č. 2 (Modrookí blonďáci):

Percento modrookých medzi blonďákmi je väčšie ako percento modrookých medzi všetkými ľuďmi sveta. Vyplýva z toho, že percento blonďákov medzi modrookými je väčšie ako percento blonďákov medzi všetkými ľuďmi sveta? Zdôvodnite.

Riešenie:

Využijeme množinovú schému ($a, b, c, d \in N$), kde $M = a + b$ je počet modrookých ľudí, $B = b + c$ je počet blonďákov, $L = a + b + c + d$ je počet všetkých ľudí. Potom zadanie úlohy znamená porovnanie zlomkov



$$\frac{b}{b+c} > \frac{a+b}{a+b+c+d} \Leftrightarrow b \cdot d > a \cdot c$$

$$\frac{b}{a+b} > \frac{b+c}{a+b+c+d} \Leftrightarrow b \cdot d > a \cdot c$$

Áno, vyplýva to; príslušné nerovnice sú ekvivalentné.

Úloha č. 3 (Sušené huby):

Čerstvé huby obsahujú 88 % vody, sušené iba 14 % vody. Koľko kilogramov čerstvých húb treba nazbierať, aby sme získali 3 kg sušených ?

Riešenie:

Nech sa huby skladajú iba z vody a sušiny:
1 kg čerstvých húb obsahuje 0,12 kg sušiny; 0,88 kg je tam vody.
1 kg sušených húb obsahuje 0,86 kg sušiny; 0,14 kg je tam vody.
3 kg sušených húb obsahuje 2,58 kg sušiny.
Aby sme mali 2,58 kg sušiny potrebujeme 2,58 : 0,12 = 21,5 kg čerstvých húb.

Úloha č. 4 (Úspora energie):

Boli zverejnené tri rôzne, od seba nezávislé, vynálezy, ktoré zabezpečovali úsporu 20 %, 35 % a 25 % energie. Niektorí „tiež odborníci" z toho usúdili, že pri súčasnom použití týchto troch vynálezov bude celková úspora 20 + 35 + 25 = 80 % energie. Je to naozaj tak? O koľko percent poklesne spotreba energie pri súčasnom uplatnení spomínaných troch vynálezov?

Riešenie:

A. Nech je pôvodná spotreba energie 100 energetických jednotiek (*ej*). Po uplatnení vynálezu s 20 % úsporou bude spotreba 80 *ej*. Po uplatnení vynálezu s 35 % úsporou bude spotreba 80 - 0,35·80 = 80 - 28 = 52 *ej*. Ak uplatníme aj tretí vynález (25 % úspora energie) bude spotreba 52 - 0,25·52 = 52 - 13 = 39 *ej*.
Ušetrí sa 100 - 39 = 61 *ej*. To znamená, že spotreba poklesne o 61 %.

B. Prvý vynález má spotrebu 0,8 pôvodnej spotreby energie, druhý 0,65 z tej zmenšenej a tretí 0,75 z tej už dvakrát zmenšenej. Pretože vynálezy sa uplatnia naraz a sú nezávislé, tak celková spotreba je 0,8 · 0,65 · 0,75 = 0,39 pôvodnej spotreby energie. To znamená, že úspora je 61 %.

Úloha č. 5 (Pomerné zmeny v percentách):

Stanovte, ako sa zmenil počet dievčat, ak sa počet všetkých žiakov v triede znížil o 10 %, ale počet dievčat vzrástol pritom z 50 % na 55 % .

Riešenie:

Chlapci i dievčatá sú žiaci. Pôvodný počet žiakov bol x. Po znížení o 10 % ich bolo $(0{,}9 \cdot x)$; pôvodný počet dievčat bol $(0{,}5 \cdot x)$ a po zmene bol počet dievčat $(0{,}55 \cdot 0{,}9 \cdot x) = 0{,}495 \cdot x$; pretože pôvodný počet dievčat bol $0{,}5 \cdot x$, určíme zmenu počtu dievčat percentuálne:
100 % ..... $0{,}5 \cdot x$
1 % ..... $0{,}005 \cdot x$

Zmenený počet $(0{,}495 \cdot x)$ je z pôvodného počtu $(0{,}5 \cdot x)$ presne 99 %, lebo $\frac{0{,}495 \cdot x}{0{,}005 \cdot x} = 99$.

Dievčat zostalo 99 % z pôvodného počtu, teda počet dievčat sa znížil o 1 % .
Očakávali ste, že sa počet dievčat znížil? Výpočet vás presvedčil?

Úloha č. 6 (Zradné percento):

Akú časť zmiešaného lesa chcú lesníci vyrúbať, ak ich vedúci nevinne vyhlásil: *Budeme rúbať iba sosny, ktorých je v našom zmiešanom lese 99 %. Po výrube budú sosny tvoriť 98 % všetkých ponechaných stromov.*

Riešenie:

Označme počet všetkých stromov pred výrubom x. Počet sosien je teda $0{,}99 \cdot x$ a počet všetkých ostatných stromov je $0{,}01 \cdot x$; po výrube m stromov (sosien) bude počet sosien $0{,}98 \cdot (x - m)$ a počet ostatných $0{,}02 \cdot (x - m)$. Chceme poznať pomer m/x. Pretože sa majú vytínať iba sosny, počet iných stromov sa nezmení:
$0{,}01 \cdot x = 0{,}02 \cdot (x - m)$, teda $0{,}02 \cdot m = 0{,}01 \cdot x$ a to znamená,
že pomer $m/x = (0{,}01/0{,}02) = 1/2$. **Lesníci chcú vyrúbať polovicu lesa!**

Nielen usilovnosť

Úloha:

Knižka má očíslovaných 972 strán (prirodzené čísla od 1 do 972 vrátane).
Stanovte, koľkokrát sa na týchto očíslovaných stránkach vyskytuje číslica 7.

Riešenie:

Predstavme si čísla od 1 do 972 napísané pod sebou.
Určíme počet číslic 7 na miestach jednotiek. V každej desiatke (od začiatku) napísaných čísel je na mieste jednotiek jedna 7, desiatok je medzi 972 číslami práve 97, teda počet 7 na miestach jednotiek je 97.
Na mieste desiatok je 7 v stovke čísel 10 krát (70, 71, ... 79). V postupnosti 972 čísel je stoviek 90. To znamená spolu 90 číslic 7 na mieste stoviek, ale musíme pridať ešte sedmičky na mieste desiatok za čísla 9**7**0, 9**7**1, 9**7**2. Spolu ich je 93.
Na mieste stoviek je cifra 7 v číslach **7**00, **7**01,... **7**99, teda 100 krát.
Spolu je číslic 7 teda 97 + 93 + 100 = 290.
Na stránkach očíslovaných od 1 do 972 vrátane je použitá cifra 7 práve 290 krát.

Aspoň a *práve*

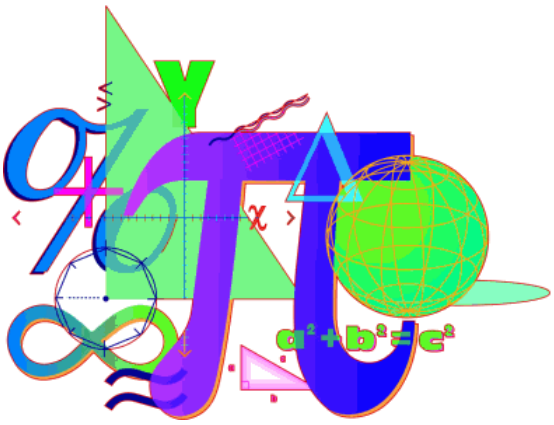
Úloha:

Vo vrecku je 30 guliek. Ak náhodne vyberieme 12 guliek, vždy bude medzi nimi *aspoň jedna* biela. Ak náhodne vyberieme 20 guliek, vždy bude medzi nimi *aspoň jedna,* ktorá nie je biela. **Stanovte** práve koľko bielych guliek je vo vrecku.

Riešenie:

Ak náhodne vyberieme 12 guliek a vždy bude medzi nimi *aspoň jedna* biela, to znamená, že vo vrecku je *aspoň* 19 bielych guliek.
Ak náhodne vyberieme 20 guliek a vždy bude medzi nimi *aspoň jedna*, ktorá nie je biela, to znamená, že vo vrecku je *aspoň* 11 guliek, ktoré nie sú biele.
Pretože vo vrecku je *práve* 30 guliek (19 + 11 = 30), znamená to, že *práve* 19 guliek je bielych a *práve* 11 guliek nemá bielu farbu.

Vo vrecku bolo práve 19 bielych guliek.



Vtipné riešenia zaujímavých úloh

Voda vo víne?

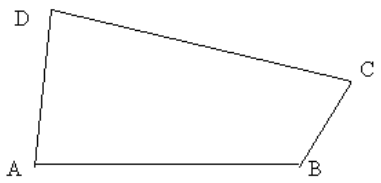
Máme dve rovnaké nádoby tak, že v jednej je víno a v druhej voda, vždy do rovnakej výšky, ale nie až po okraj (rovnaké objemy vína a vody). Zoberieme lyžicu vína a prelejeme ju do nádoby s vodou a premiešame. Potom zoberieme lyžicu tejto zmesi a nalejeme do nádoby s vodou. Stanovte, čoho je po tomto úkone viac, vína v nádobe s vodou alebo vody v nádobe s vínom.

Riešenie: *Chcete hádať? Rozmýšľajte, spočítajte si to pre konkrétne hodnoty.*
Nech sú objemy vody i vína po jednom litre. Nech lyžica má objem 0,1 litra. Po prvom preliatí je v nádobe s vodou 1 liter vody a 0,1 litra vína. Potom na druhé preliatie pripadá do 0,1 litrovej lyžice [(0,1 · 10) : 11] vody a [(0,1 · 1) : 11] vína. Teda v nádobe s vodou zostalo [(0,1 · 10) : 11] vína. A do nádoby s vínom sa dostalo druhým preliatím tiež [(0,1 · 10) : 11] vody.
Vína v nádobe s vodou je rovnako ako vody v nádobe s vínom.

Skúsme úlohu vyriešiť abstraktnou úvahou.
Tekutina je v nádobe s vínom po spomínanom úkone v rovnakej výške, čiže nezmenený objem. V nádobe síce odbudlo vína (to sa dostalo do nádoby s vodou), ale pribudlo vody. Keby bol úbytok väčší (alebo menší) ako prírastok, tak by tekutiny v nádobe bolo buď menej (alebo viac) než na začiatku. Teda v nádobe s vínom je úbytok vína, ktoré je teraz v nádobe s vodou, rovnako veľký ako prírastok vody, ktorý sa dostal do nádoby s vínom.
V nádobe s vínom je práve toľko vody ako vína v nádobe s vodou. *Vyberte si, ktorý postup vás presvedčil.*

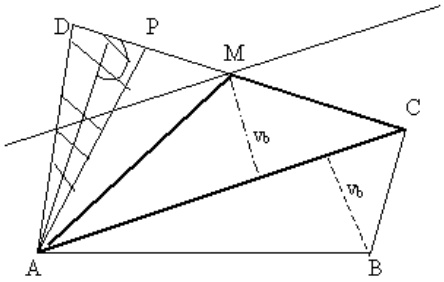
Rafinovane premyslené, logicky účinné

Rozdeľte štvoruholník ABCD (na obr.1) priamkou cez A na dva útvary s rovnakým obsahom. Zdôvodnite postup.



obr. 1

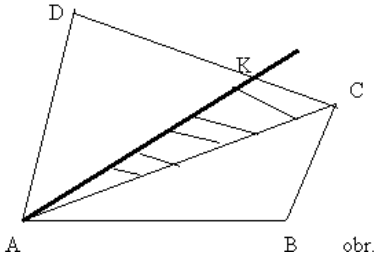
Riešenie:
Vidíme, že priamka *AC* rozdelí štvoruholník na dva trojuholníky s nerovnakým obsahom, ale so spoločnou stranou. Ak využijeme výšku trojuholníka *ACB* na stranu *b* v opačnej polrovine, dostaneme dva trojuholníky s rovnakým obsahom a jeden ďalší trojuholník *AMC* (pozri obr. 2).



obr. 2

Ak teraz rozpolíme úsečku *DM* bodom *P*, trojuholníky *AMP* a *APD* budú mať rovnaký obsah, lebo majú rovnaké základne $|PM| = |DP|$ a spoločnú výšku. Ak teraz od bodu *C* nanesieme na rameno *CD* vzdialenosť *DP* (dostaneme bod *K*), tak ukážeme, že útvary *AKD* a *ABCK* majú rovnaký obsah (pozri obr. 3).

$|KC| = |DP|$



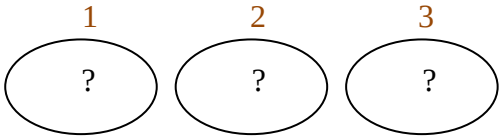
obr. 3

Štvoruholník *ABCK* sa skladá z trojuholníkov *ABC*, *ACK*.
Obsah trojuholníka *ACK* je zhodný s obsahom trojuholníka *APD* (zhodné základne, tá istá výška, obr. 2).
Celý štvoruholník *ABCD* (obr. 2) sa skladal zo štyroch trojuholníkov, po dvoch trojuholníkoch s rovnakými obsahmi. Teraz sme ukázali, že útvar *ABCK* (obr. 3) má polovičný obsah z celého, teda druhá časť (trojuholník *AKD*) má tiež polovičný obsah celého štvoruholníka.

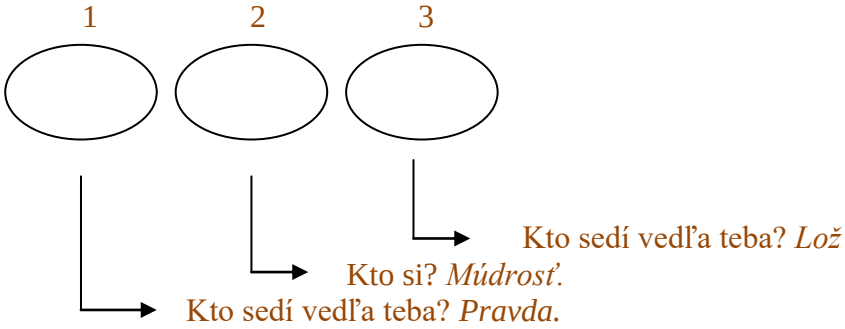
Všímaj si pravdu

Vo veštiarni sedia vedľa seba tri bohyne: *Pravda, Lož a Múdrosť*. *Pravda* vždy hovorí pravdu, *Lož* vždy klame a *Múdrosť* hovorí tak aj onak (niekedy pravdu, niekedy lož). Zistite, v akom poradí sedia bohyne, ak postupne odpovedali na otázky takto:
Kto sedí vedľa teba? *Pravda*. Kto si? *Múdrosť*. Kto sedí vedľa teba? *Lož.*

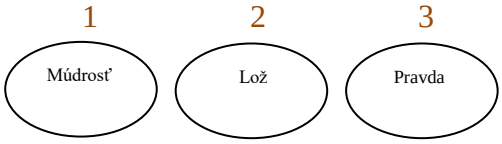
Riešenie: Znázornime si situáciu aj graficky:



Po ich vyjadrení na otázky zapíšme ich odpovede :



A. Sledujme, kde by mohla byť *Pravda*, aby vyjadrenia zodpovedali danému stavu. Ak by na prvom mieste bola *Pravda*, jej odpoveď nesúhlasí. Ak by bola *Pravda* na druhom mieste, tiež odpoveď nie je v súlade s jej zásadou hovoriť vždy pravdu. Tak nech je na treťom mieste. Potom na druhom je naozaj *Lož* a na prvom *je Múdrosť*.



B. Úlohu môžeme vyriešiť aj rozpísaním všetkých možností a vyhodnotením príslušných odpovedí.

1	**2**	**3**	odpovede
P	L	M	nie
P	M	L	nie
L	M	P	nie
L	P	M	nie
M	L	P	vyhovuje
M	P	L	nie

Labutia pieseň

Vyriešte rovnicu $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=2$, pre navzájom rôzne prirodzené čísla x, y, z, t.

Riešenie: Pretože zlomky majú byť rôzne, musí pre aspoň jeden z nich, napr. $\frac{1}{x}$, platiť $\frac{1}{2}<\frac{1}{x}<2$, t.j. $2>x>\frac{1}{2}$. Teda pre $x\in N$ z toho vyplýva, že $x = 1$. Potom $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=1$ a tiež $\frac{1}{3}<\frac{1}{y}<1$ t.j. $3>y>1$, teda pre $y\in N$ je $y = 2$. Ešte potom potrebujeme, aby $\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{2}$; tu bude znovu platiť napr. pre z nerovnica $\frac{1}{4}<\frac{1}{z}<\frac{1}{2}$ t.j. $4>z>2$ v N, z toho vyplýva, že $z = 3$. Potom už vyhovuje iba $t = 6$. Platí: $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{6+3+2+1}{6}=2$.

Neuveriteľný rébus

Úloha: Doplňte za každú • jednociferné *prvočíslo,* aby bolo znázornené násobenie správne:

```
      • • •
  ×     • •
    • • • •
  • • • •
  • • • • •
```

Riešenie:

Jednociferné prvočísla sú iba: 2, 3, 5, 7. Pretože súčiny 2×2, 2×3, 2×5, 2×7 nemajú na konci prvočíslo, môže byť poslednou cifrou oboch čísel iba 3, 5 alebo 7. Teda dvojice 3, 5; 5, 3; 5, 5; 5, 7; 7, 5. Skúšame ...

Jediné riešenie je:

```
  7 7 5
×   3 3
  2 3 2 5
2 3 2 5
2 5 5 7 5
```

Vynájsť sa aj z mála

Úloha: V znázornenom zápise súčinu dvoch kladných celých čísel stanovte nezapísané číslice (sú naznačené bodkami):

```
    • • •
  × • • •
  • • • •
3 2 7 5
• • •
• • • • •
```

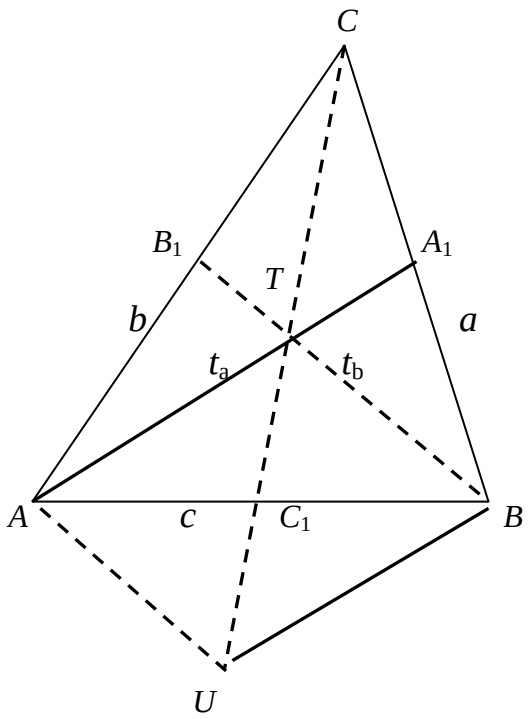
Riešenie:

Musíme vychádzať z toho mála, čo vidíme a z toho, čo o násobení vieme.
Ak rozložíme číslo 3275 na súčin prvočísiel dostaneme $3275 = 5^2 \cdot 131$,
teda aby sme dostali toto číslo ako súčin trojciferného a jednociferného čísla treba $655 \cdot 5$. Potom násobenec bude 655 a druhá cifra násobiteľa 5. Pretože tretí čiastočný súčin je trojciferný, tak prvá číslica násobiteľa musí byť iba 1. Aby prvý čiastočný súčin bol štvorciferný a celkový súčin iba päťciferný, tak posledná cifra násobiteľa môže byť len 2. Naznačený súčin je

```
    6 5 5
  × 1 5 2
----------
  1 3 1 0
3 2 7 5
6 5 5
----------
9 9 5 6 0
```

DVA ZAUJÍMAVÉ DÔKAZY

Dokážeme, že všetky tri ťažnice trojuholníka prechádzajú spoločným bodom T, ktorý sa volá ťažisko.



1. Narysujeme ťažnice t_a, t_b ($t_a = AA_1$, $t_b = BB_1$).
2. Ich priesečník označme písmenom T.
3. Narysujeme polpriamku CT.
4. Na polpriamke CT zostrojme bod U tak, aby platilo $|CT| = |TU|$.
5. Bod U spojme úsečkami s bodmi A, B. Dostaneme štvoruholník $AUBT$.
6. V trojuholníku UBC je úsečka TA_1 strednou priečkou, lebo $|UT| = |TC|$ a $|BA_1| = |A_1C|$.
7. Priamky UB a TA_1 sú rovnobežky.
8. Podobná situácia je aj v trojuholníku AUC. Priamky TB_1 a UA sú rovnobežky.
9. Štvoruholník $AUBT$ je teda rovnobežník.
10. Spojnice jeho protiľahlých vrcholov AB, UT sú uhlopriečky. Uhlopriečky rovnobežníka sa navzájom rozpoľujú.
11. Teda bod C_1 je stredom úsečky AB i úsečky TU.
12. Úsečka CC_1 je tiež ťažnica, lebo spája vrchol trojuholníka C so stredom C_1 protiľahlej strany.

Záver: Všetky tri ťažnice trojuholníka prechádzajú práve jedným spoločným bodom T.

Ukážeme, že také neexistujú

Dokážte, že neexistujú prirodzené čísla x, y, aby vyhovovali rovnici $x^2 - 5y + 8 = 0$.

Ak upravíme danú rovnicu na tvar $y = 1 + \frac{x^2+3}{5}$, vidíme, že $x^2 + 3$ by malo byť deliteľné piatimi (pretože y má byť prirodzené číslo). To ale znamená, že $x^2 + 3$ by malo byť číslo, ktorého posledná cifra je buď 0 alebo 5. Z toho vyplýva, že x^2 by malo mať na konci číslicu buď 7 alebo 2.

Ak si predstavíme všetky x ako prirodzené čísla, na konci ktorých sú len cifry 0, 1, 2, ... , 8, 9 jasne vidíme, že x^2 môže mať na konci len cifry 0, 1, 4, 9, 6, 5 a to znamená, že nikdy tam nie je 2 ani 7. Preto **neexistujú** požadované prirodzené čísla x, y, aby vyhoveli danej rovnici.

Nebude to tak – nemôže sa to stať

Úloha 1: Ukážte, prečo **sa nemôže stať**, aby súčet troch rôznych prvočísiel bol 1234 a ich súčin 87654321.

Riešenie: Medzi všetkými prvočíslami je iba jedno párne, dvojka (2). Ak by súčet troch prvočísiel mal byť párny (1234), tak práve jedno z tých prvočísiel musí byť 2 (ďalšie dve prvočísla budú nepárne a ich súčet bude párny). Ak je v súčine našich prvočísiel dvojka, tak ich súčin bude párny, ale to je potom v spore s tým, že tento súčin by mal byť nepárny (87654321). Teda **sa nemôže stať**, čo sa v úlohe požaduje.

Úloha 2: Dokážte, že súčet druhých mocnín štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel **nemôže byť** druhou mocninou niektorého prirodzeného čísla.

Riešenie: Súčet druhých mocnín štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel znamená $n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + (n + 3)^2 = 4n^2 + 12n + 14 = 4\cdot(n^2 + 3n + 3) + 2$, kde $n \in N$.
Pozrime sa „čo robia“ druhé mocniny prirodzených čísel:
$1^2 = 1,\ 2^2 = 4,\ 3^2 = 9,\ 4^2 = 16,\ 5^2 = 25,\ 6^2 = 36,\ \ldots$
Ak je p párne, t.j. $p = 2\cdot k$, tak $p^2 = 4\cdot k^2$, teda každá druhá mocnina párneho čísla je deliteľná štyrmi.
Druhé mocniny nepárnych čísel sú vždy nepárne
$[(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1]$.
Náš hľadaný súčet $4\cdot(n^2 + 3n + 3) + 2$ je párny, teda príslušné $p \in N$ je tiež párne a to ale znamená, že p^2 má byť aj deliteľné štyrmi.
Ale náš súčet $4\cdot(n^2 + 3n + 3) + 2$ nie je deliteľný štyrmi.
Teda také $p \in N$ neexistuje, aby pre $n \in N$ platilo $4\cdot(n^2 + 3n + 3) + 2 = p^2$.
Dokázali sme, že súčet druhých mocnín štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel **nemôže byť** druhou mocninou niektorého prirodzeného čísla.

Úloha 3: Dokážte, že **neexistuje** také $n \in N$, pre ktoré by $(n^2 + n + 1)$ bolo druhou mocninou niektorého prirodzeného čísla.

Riešenie: Určite pre každé $n \in N$ platí $n^2 < (n^2 + n + 1) < (n^2 + 2\cdot n + 1) = (n + 1)^2$.
Ale medzi dvoma druhými mocninami po sebe idúcich prirodzených čísel žiadna druhá mocnina prirodzeného čísla neexistuje a to znamená, že $(n^2 + n + 1)$ **nemôže byť** druhou mocninou niektorého prirodzeného čísla.
Iný postup: Nech také $n, p \in N$ existujú. Potom by muselo platiť $n^2 + n + 1 = p^2$ a $p > n$, teda aj $n + 1 = p^2 - n^2 \Rightarrow n + 1 = (p - n)\cdot(p + n)$.
Ak $p = 1$, tak $n + 1 = (1 - n)\cdot(1 + n) \Rightarrow 1 - n = 1 \Rightarrow n = 0$, to nevyhovuje (0 nie je prirodzené číslo).
Ak $p > 1$, tak $n + p > n + 1$ a preto $(p - n)\cdot(p + n) > n + 1$ (vieme, že $p > n$), teda neplatí $n + 1 = (p - n)\cdot(p + n)$.
Ukázali sme, že predpoklad existencie prirodzených čísiel s požadovanou vlastnosťou vedie vždy k sporu. **Neexistujú** žiadne $p, n \in N$ tak, aby platilo $n^2 + n + 1 = p^2$.

Čím je vlastne matematika, prečo svet tancuje tak, ako matematika píska?

(BARROW, J. D.: *Pí na nebesích*. Praha: Mladá fronta, 2000.)

Známy matematik a šíriteľ matematickej kultúry György Polya (1887–1985) charakterizoval matematické rozvažovanie ako najlepšiu príležitosť pozorovať proces myslenia. Spoznal, že matematikou nadobúdame cvik v metóde rozumového uvažovania, ktoré potom môžeme použiť na štúdium ktoréhokoľvek predmetu. Známy český matematik zaoberajúci sa aj filozofiou a históriou matematického poznávania Petr Vopěnka (1935 - 2015) je presvedčený, že *matematika sprevádza ľudstvo v celej jeho kultúrnej histórii a prináša závažné objavy, bez ktorých sa nemôže kultúrna civilizácia vôbec zaobísť*. V praktickej i teoretickej úspešnosti je čaro i zmysluplnosť matematických úvah.

O počítaní, myslení a existencii matematických objektov pojednáva horeuvedená publikácia. Ponúka 6 kapitol zaujímavého čítania o zmysle matematiky, jej mystike i efektívnom použití. Matematika sa stala jazykom súčasnej vedy. Z kultu pre čísla v pytagorovskej dobe (6. stor. pred n. l.) vyrástla matematika na najmohutnejší výtvor ľudského ducha. Matematické postupy a symboly ponúkli najjednoduchšie a najúčinnejšie formy uloženia informácií. Matematika sa stala zvláštnou súčasťou sveta, v ktorom žijeme. Naznačuje, že podstata vecí spočíva v nemennom svete ideálov.

Prvá kapitola spomínanej knižky naznačuje silu ľudskej abstrakcie, ktorá meraním a vyčíslením vzájomných pomerov odhaľuje podobnosti a spracúva ich do logických súvislostí axiomatizovaných systémov. Historický priebeh rozvoja počítania je obsahom druhej kapitoly. Forma bez obsahu je názov ďalšej časti, v ktorej spoznáme Hilbertov program, Gödelove prekvapivé tvrdenia o formálnom systéme klasickej matematiky i bourbakistické štrukturalistické snahy, aby sme sa dozvedeli, že *matematika popisuje najzákladnejšie pochody sveta v oblastiach úplne oddelených od tých oblastí ľudskej skúsenosti, ktoré zohrali úlohu v našom vývoji, a to nás vedie k presvedčeniu, že skutočne má nejaký skrytý význam.*

O matematickej tvorivosti, invencii, zložitosti i jednoduchosti niektorých redukcií dostupných informácií spolu s psychologickými stránkami matematického myslenia sa hovorí vo štvrtej kapitole. Ako veľmi protikladné sa ukázali filozoficko-matematické názory Hilberta a Brouwera, Cantora i Kroneckera. Intuicionizmus ponúkol základy matematiky ako ľudskú činnosť vznikajúcu z toho, ako naše myslenie odkrýva význam každej skúsenosti v tom, že ju ukladá do postupnosti jednotlivých prvkov. Transfinitná aritmetika otvorila Cantorovi rastúce schodisko nekonečien i so svojimi paradoxmi. Piata kapitola publikácie odkrýva nové paradigmy, aby skonštatovala, že *súbor všetkých možných diskrétnych zmien je vyšší stupeň nekonečna ako počet kontinuálnych zmien.*

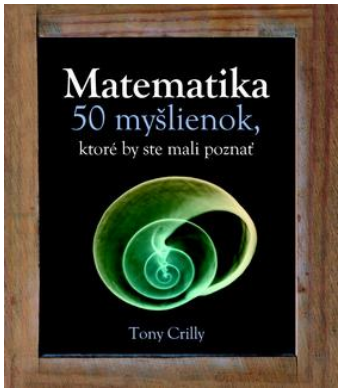
Platónske nebo nad a vo mne je pôsobivý nadpis poslednej kapitoly, v ktorej sa veľkým oblúkom porovnávajú názory dvoch–troch tisícročí. Zažiari Platónova predstava ideálnych objektov, Leibnizova existencia matematických právd nezávislých na mysli človeka, Gödelove ovplyvňovanie ľudskej mysle matematickými entitami, Penroseho matematické videnie v oceáne pravdy. Dozvieme sa aj to, že matematická pravda nie je algoritmická. Bourbakisti kľudne prehlásili: *Dvadsaťpäť storočí opravujú matematici svoje chyby a vidia, ako sa tým ich veda obohacuje, a nie ochudobňuje, a to im dáva právo dívať sa do budúcnosti s kľudom v duši.* David Hilbert (1862–1943) sa nezištne pýtal: *Ak je matematické myslenie nedokonalé, kde máme hľadať pravdu a istotu?* Matematika zostala pre nás ako odkaz hlbokého tajomstva o povahe ľudského rozumu i záhad vesmíru, ako dôsledok našej jednoty s kozmickým bytím. *Matematika je odtlačok ducha života do ľudského vedomia* (C. Bragdon).

Súčasťou knižky je obsiahly prehľad anglickej literatúry o povahe i dejinách matematiky. V závere je uvedených asi 30 titulov z českej knižnej produkcie podobného zamerania.

Spomínaná publikácia patrí predovšetkým do rúk učiteľom matematiky na všetkých stupňoch našich škôl, ale nielen im, aby rozšírenie matematicko-kultúrneho obzoru viedlo k zvýšeniu povedomia o schopnostiach ľudského myslenia a uvažovania. Uvedená knižka prináša informácie o matematike, ktorá nás presahuje ako náboženstvo, ktoré je systémom myslenia obsahujúce nedokázateľné tvrdenia.

Čo si predstaviť pod matematickou kultúrou?

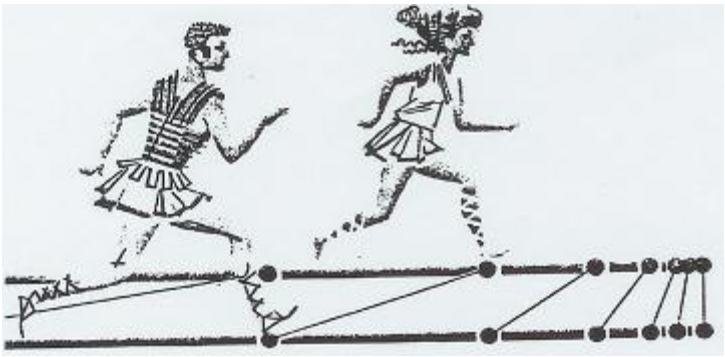
Rád vysvetľujem, čo vnímam pod pojmom matematické kultúra. Ako stredoškolský učiteľ počtov a merby, aj ako vysokoškolský didaktik školskej matematiky som často ponúkal myšlienku:



Matematika je široká nádherná krajina otvorená pre všetkých, ktorým myslenie prináša skutočnú rad osť (W. Fuchs). Zdá sa mi, že publikácia Matematika – 50 myšlienok, ktoré by ste mali poznať (autor Tony CRILLY; vydal SLOVART, Bratislava 2011), napĺňa túto predstavu vecným matematickým obsahom. Stručne, jasne a prehľadne sa dostanete medzi grupy i matice, magické štvorce i zlaté obdĺžniky. Spoznáte niektoré dokonalé čísla, Pascalov trojuholník, fraktály i Gaussovu krivku. Lepšie pochopíte pojmy: nekonečno, topológia, chaos, pravdepodobnosť. Zoznámite sa s Fibonacciho postupnosťou, Euklidovým algoritmom, Veľkou Fermatovou vetou i Riemannovou hypotézou. Môžete si ujasniť postulát o rovnobežkách, problém štyroch farieb, rozdelenie pravdepodobností, úlohu obchodného cestujúceho. Prakticky uvažujúci čitatelia sa určite s radosťou zoznámia nielen s nemožnosťou niektorých základných geometrických konštrukcií, ak by mohli použiť iba pravítko a kružidlo, ale aj s bayesovskou filozofiou podmienenej pravdepodobnosti. Môžu sa zamyslieť nad problémom rovnakého dátumu narodenia v roku v nejakej skupine ľudí, alebo nad dedičnými znakmi z hľadiska algebry genetiky.
Pre všetkých záujemcov budú užitočné kombinatorické pojmy i základné postupy kódovania, finančná matematika aj teória hier.

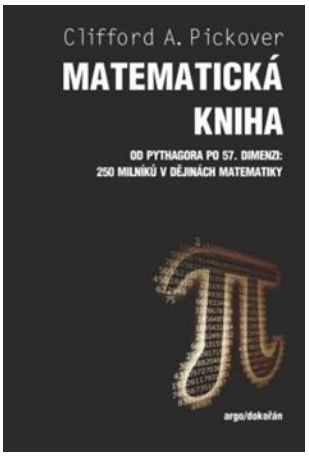
Matematická kultúra sa rozvíja už tisícročia úsilím mnohých bystrých ľudí. Naozaj nebude na škodu, ak sa pozriete do tejto knižky so sympatickým náznakom hlbšieho matematického obsahu aj v historických súvislostiach. Spomínaná publikácia má 208 strán, obsahuje krátky výkladový slovník základných matematických pojmov a abecedný register zásadných hesiel i spomínaných osobností. Ak sa s touto knižkou dôvernejšie zoznámite, určite mi dáte za pravdu, že som vám dobre poradil, pretože takto pripravený prehľad prináša skutočnú radosť pre matematickou kultúrou zaujatého človeka.

Pod matematickou kultúrou si predstavujem intelektuálne špecifické prostriedky, ktoré môžu prispievať k rozvoju osobnosti každého človeka, ktorý chce užitočne uvažovať, logicky myslieť, úspešne rozumovo tvoriť. Rozvíjanie zmyslu pre úplnú argumentáciu, zdôvodňovanie faktov, nápaditá činnosť pri definovaní nových pojmov, hľadanie účinných dôkazov, uplatnenie vyváženého podielu intuície a dedukcie, obsažné a stručné, hospodárne a presné, jednoznačné a trvalé matematické úvahy a symbolika sú plnohodnotným argumentom pre každé plodné myslenie, pre širší aj hlbší rozvoj matematickej kultúry. Matematická kultúra, ako medzisvet porozumenia vybudovaný medzi prírodou a človekom, bude možno natrvalo vypreparovaná aj ako metóda pre úspešnú súčinnosť abstraktných ideálov a praktických harmónií. Rozvoj matematických postupov je veľký dar pre kultiváciu ľudského myslenia a v spojení s prírodnými vedami aj pre rozvoj všeobecného humánneho prostredia.



Pozoruhodná encyklopédia pre motiváciu matematickej kultúry

PICKOVER, C.A.: *Matematická kniha*
(Od Pythagora po 57. dimenzi: 250 milníků v dějinách matematiky).
Praha: Argo/Dokořán, 2012.



Čo-to z histórie matematiky poznám: *Stirlingov vzorec, Peanova krivka, Kleinova fľaša, Kochova vločka, Hilbertov hotel, Turingov stroj, Möbiova funkcia, Benfordov zákon, Gödelova veta, zábavná matematika M. Gardnera, teória katastrof* i *Rubikova kocka*. Náhodne som listoval a značil si to, čo som ešte nepoznal: *Ulamova špirála, Banachov-Tarského paradox, Ramseyova teória, Conwayove výhonky, Shewesove číslo, Boyova plocha, Jungova veta, Thuevova-Morseova postupnosť, Bieberbachova domnienka, Hausdorffova dimenzia, Brunova konštanta, Dioklova kisoida, Torricelliho trumpeta, Jonesov polynóm, Franklinov magický štvorec, Bertramiho pseudosféra, Perkove uzly, Sylvestrove matice, Grayov kód, Reuleauxov trojuholník, Alexandrova rohatá sféra, Penroseovo dláždenie, Ikedov atraktor, Mengerova špongia.*

Clifford Alan Pickover (* 1957) autor knižky (hmotnosť 1469 g; 544 strán, pevná väzba s obalom) je americký editor v oblasti vedy, matematiky a sience fiction. Napísal takmer 50 populárno-vedeckých kníh, ktoré sa prevažne zaoberajú matematikou a prírodnými vedami, ale aj históriou i umením, náboženstvom, mimozemskými civilizáciami. O svojej publikácii konštatoval: *Při psaní Matematické knihy mě vedl záměr poskytnout širšímu publiku stručného průvodce po významných myšlenkách matematiky a jejich tvůrcích prostřednictvím hesel natolik krátkých, aby je bylo možné projít během pár minut.*

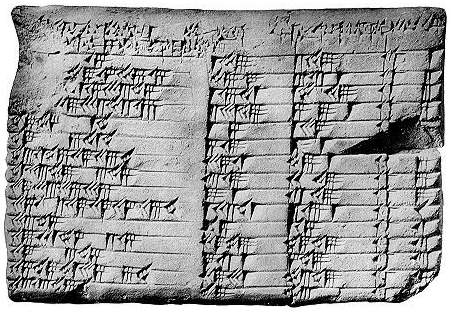
Matematická kniha ponúka pestrý a zaujímavý prehľad podnetných označení, pojmov, udalostí, vzťahov a súvislostí zo sveta matematických vied. Jednotlivé kapitoly sú usporiadané chronologicky, vždy s celostránkovou grafickou farebnou ilustráciou. Krása matematiky je nielen vo vecnej podstate, ale aj v znázornení funkcií a ich grafov, v logických štruktúrach relácií a vlastnostiach operácií. Publikácia nás môže presvedčiť, že matematické zákonitosti sprístupňujú racionálnu intelektuálnu analýzu nielen prírodného prostredia v ktorom žijeme, ale aj náš myšlienkový svet, ktorým vytvárame naše ľudské chápanie. Kniha poskytuje intelektuálne vzrušenie množstvom informácií i pestrosťou grafického vybavenia. Je tým, čo chcel autor dosiahnuť: *Atraktívna kniha, bohatá čo do histórie i detailov, esteticky zaujímavá, príťažlivá pre študentov i bežných čitateľov.*

Matematika umožňuje pochopenie javov prístupných intelektuálnej racionálnej analýze štruktúr, farby oblohy, tvaru ulít, pohybu galaxií i stavby kryštálov. Celá moderná vyspelá technika a progresívne technológie vieme pochopiť a myšlienkovo konštruovať len s matematickými poznatkami. Naše chápanie sveta, v ktorom žijeme, je mozaika poznatkov na základe počtu a merby, ktoré vykryštalizovali do kaleidoskopu matematických vied. Publikácia, o ktorej hovoríme, podnecuje predstavivosť smerom k matematickej kultúre, k zušľachťovaniu nášho myslenia a tvorivého chápania nielen matematickej skutočnosti. Číselnými štruktúrami a matematickými funkciami sa dajú charakterizovať nielen hudobné harmónie, ale aj zmeny elektromagnetického poľa. Moderná výpočtová technika umožňuje aplikáciu matematickej logiky i grafiky, ponúka úžasné vhľady i pohľady do netušených štruktúr nášho materiálneho sveta. Abstraktná matematika nám umožňuje pohľad do reálnej budúcnosti

materiálnej aj myšlienkovej. Náš vesmír, okolo nás i v našich hlavách, je možno nečakanou matematickou štruktúrou. Vnútorná povaha skutočnosti je zrejme matematická.

Ako bezbrehý priateľ citátov som si z knižky odpísal:
Matematika videná zo správneho uhlu pohľadu ponúka nielen pravdu, ale aj vrcholnú krásu – krásu chladnú a strohú, podobnú kráse sochy (B. Russell). *Matematika dosiahla taký stupeň abstrakcie, že celý rad nových prelomových problémov nedokážu pochopiť ani experti* (K. Devlin). *Dnes rozumieme fyzikálnym zákonom s ich extrémnou presnosťou a univerzálnosťou len vďaka matematike* (M. Atiyah). *Matematika je pre mňa disciplína, ktorá kultivuje stav neustáleho úžasu nad povahou myslenia, jeho medzami a našim miestom v kozme* (C.A. Pickover).

Čo ma udivilo: ----------
Plimpton 322 – babylonská hlinená tabuľka obsahujúca pytagorovské trojice čísel zapísané klinovým písmom asi okolo roku 1800 pred n. l.



V roku 1822 zostrojil anglický matematik Charles Babbage (1792-1871) mechanický stroj, ktorý dokázal riešiť polynomické funkcie. Dokázal viac ako je násobenie a delenie, poradil si aj s tabuľkami. Prvé z týchto strojov boli obrovské a ťažké zariadenia, pozostávajúce až z 25 000 súčiastok. Neskôr sa postupne zjednodušovali, až vznikol stroj, ktorý sa už dal položiť aj na stôl.
Zázraky nie sú porušením platných zákonov, ale... signálom existencie zákonov vyšších (Ch. Babbage).

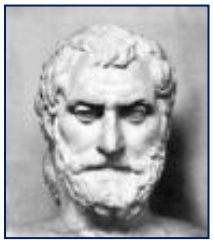
Maďarský sochár a architekt Ernő Rubik (*1944)vynašiel a skonštruoval (1974) šesťfarebnú mechanickú kocku, skladajúcu sa zo 27 malých, mechanicky otáčajúcich sa, kociek. Úlohou je farebne pomiešanú kocku poskladať tak, aby každá z jej šiestich strán mala jednu farbu. Existuje dohromady 43 252 003 274 489 856 000 konfigurácií, a kocka nikdy nemôže byť premiešaná tak, aby sa nedala poskladať. Už sa vie (od roku 2010), že kocku možno vždy zložiť najviac dvadsiatimi ťahmi. Od roku 2008 je známy plastový robot (autor H. Andersson), ktorý pomocou optického senzora a bez pripojenia k externému počítaču, zloží Rubikovu kocku.

Každý učiteľ počtov a merby – matematiky by mal mať túto knihu často v rukách a pravidelne rozširovať jej údaje medzi svojimi poslucháčmi. *Matematika je úžasná a šialená vec, plná imaginácie, fantázie a tvorivosti, ktorú neohraničujú malicherné detaily hmotného sveta, ale len sila nášho vnútorného svetla* (G. Chaitin).

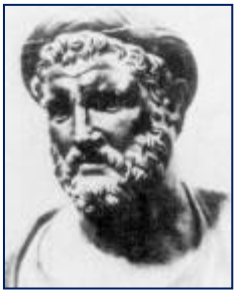
Výstižnejší názov spomínanej publikácie: ***Podnetné info o javoch a veciach matematických***.

Výchovný odkaz starovekých matematikov

Významní myslitelia starovekého Grécka, s filozofickým založením a nadaním aj pre matematiku, nám zanechali odkazy aj pre výchovné pôsobenie:



Táles (asi 624 – 547 pred n. l.): *Nerobme to, čo odsudzujeme u druhých... Neber od otca, čo je zlé... Smutná je nečinnosť, škodlivá nemiernosť, obťažná nevzdelanosť... Nebohatni nesprávnym spôsobom... Nestačí mať čisté ruky, treba mať ducha čistého...*
Najťažšia vec – poznať sám seba. Najľahšia vec – radiť druhým.



Pytagoras (asi 570 – 496 pred n. l.): *Boh dal človeku dve ruky, aby ho neobťažoval s každou maličkosťou... Úlohou výchovy je prebudiť v človeku génia... Pravé a dokonalé priateľstvo znamená spojiť veľa vecí a tiel v jedno srdce a jediného ducha... Najkratšie odpovede – áno a nie – vyžadujú najdlhšie rozmýšľanie... Z každého polena Merkura nevyrežeš... Rob veľké veci bez sľubov... Mlč, alebo povedz niečo, čo je lepšie ako mlčať.*

Platón (asi 427 – 347 pred n. l.): *Aký kto je, také dielo vytvára... Najušľachtilejšia sila našej duše je schopnosť, ktorá sa spolieha na meranie a výpočet... Matematika ponúka skvelý prostriedok pre objavenie právd, ktoré sú bez účasti rozumu nedostupné... Počty a merba vedú k rozumovému poznávaniu, k pravde a lepšiemu pochopeniu všetkých náuk... Pri lepšom chápaní všetkých ostatných vied bude nesmierne vo výhode ten, kto sa zaoberal geometriou, pred tým, kto to nerobil... Tí, ktorí majú vrodené nadanie pre matematiku, prejavujú obvykle vlohy ku všetkým vedám...*
Preto nesmie byť táto veda obmedzovaná, ale aj ľudia s najušľachtilejšou prirodzenosťou sa ju musia učiť... Dieťaťu radi prepáčime, keď sa bojí tmy. Tragické začne byť, keď sa v mužnom veku bude báť svetla... Pri hre spoznáme človeka za hodinu lepšie než pri rozhovore za celý rok... Mienka más nech ťa robí čoraz ostražitejším, no nikdy pre ňu nestrácaj rozum... Cnosť a bohatstvo sa k sebe majú tak, ako keby ležali na váhach, na ktorých jedna miska klesá, keď druhá stúpa.

Aristoteles (asi 384 – 322 pred n. l.): *Všetci ľudia od prirodzenosti túžia po poznaní... Činnosť rozumu je život. Umenie je nejaký tvorivý stav, spojený so správnym úsudkom... Skutočná božská činnosť, ktorá sa vyznačuje najvyššou blaženosťou, je asi teoretická činnosť... Pytagorovci spoznali, že vzťahy a zákony hudobnej harmónie sú založené na číslach a tak i všetky ostatné predmety, ako vyplýva z ich prirodzenosti, sa zrejme číslam zapáčili...*
Iba málo ľudí vie, že šťastie vyplýva z osobnej dokonalosti.

Euklides (asi 340 – 287 pred n. l.): *Ani pre kráľov neexistuje ku geometrii zvláštna cesta... Ak chceš objaviť to, čo nikto nevidí a nevie, musíš klásť múdre otázky...* Istý žiak sa pri vyučovaní spýtal Euklida: Aký zisk budem mať, ak sa túto poučku naučím? Euklides zavolal otroka a rozkázal: *Dajte mu tri oboly* (vtedajšie peniaze), *lebo tento človek musí zarábať tým, čo sa učí.*

Ak

***Ak** jasnú myseľ nestratíš, keď všetci navôkol blázniac obvinia ťa v zlosti,*
v nevere iných ak sám dokážeš si veriť, no zvážiť aj iných pochybnosti,
***ak** vládzeš čakať, neznaviac sa pritom, lžou neodpovieš, ak ťa oklamali,*
nenávisť druhých nesplatíš tým citom, no nebudeš sa tváriť dokonalý,
***ak** dokážeš sniť, nedať však snom vládu, myslieť, no dumy neurobiť cieľom,*
do očí pozrieť víťazstvu i pádu, a rovnaký byť k tým dvom nepriateľom,
***ak** zvládzeš počuť nožmi pokrivené, v nástrahu bláznom priame svoje slová,*
***ak** z ruín vecí, čo žil si len pre ne, zodratou dlaňou tvoriť začneš znova,*
***ak** dokážeš dať výhry na hromádku a staviť všetko na jeden ťah kariet,*
prehrať a začať znova od začiatku a slova o tej strate neprevravieť,
***ak** dokážeš dať povel srdcu, svalom, nech slúžia ďalej, aj keď odumreli,*
kráčať, keď nič už v tebe nezostalo, len vôľa, ktorá vydržať im velí,
***ak** udržíš si hrdosť vraviac k davu, prostotu zasa, kráľmi obklopený,*
***ak** nezohne ti hnev, či priazeň hlavu, **ak** napriek úcte nik ťa neprecení,*
***ak** vtesnáš pritom do minúty prísnej, šesťdesiat sekúnd behu z celej sily,*
tvojou sa stane Zem i poklady z nej a bude z teba človek, syn môj milý!

R. KIPLING (1865–1936)

Úloha osemnástej ťavy

Umierajúci beduín zanechal svojim trom synom 17 tiav s odkazom, aby najstarší z nich dostal polovicu, prostredný tretinu a najmladší devätinu. Bezradní synovia nedokázali splniť otcovu vôľu. Ťavy nechceli usmrtiť ani predať, celočíselná deliteľnosť sa nedala uplatniť. Poprosili múdreho starého Araba o radu.

Rozhodnutie bolo zaujímavé. Arab ponúkol do hry svoju jedinú ťavu. Bratia rozdeľovali teda 18 tiav na polovicu, tretinu a devätinu. Najstarší si zobral 9 tiav, stredný syn dostal 6 tiav a najmladší dve. Spolu teda rozdelili 17 tiav a múdremu radcovi vrátili jeho vlastnú ťavu. Rozišli sa v pokoji.

Je zrejmé, že beduín svojim rozhodnutím nerozdelil celý svoj majetok ($1/2 + 1/3 + 1/9 = 17/18 < 1$), ale múdrou odvahou starého Araba ponúknuť svoju ťavu do rozdelenia (osemnásta ťava je 1/18 nového celku), úloha získala vtipnú celočíselnú riešiteľnosť. Láskavá ochota nebola vôbec poškodená. Kto vie, ako to posudzuje Otec beduín vo večnosti.

O čom hovorí toto podobenstvo?

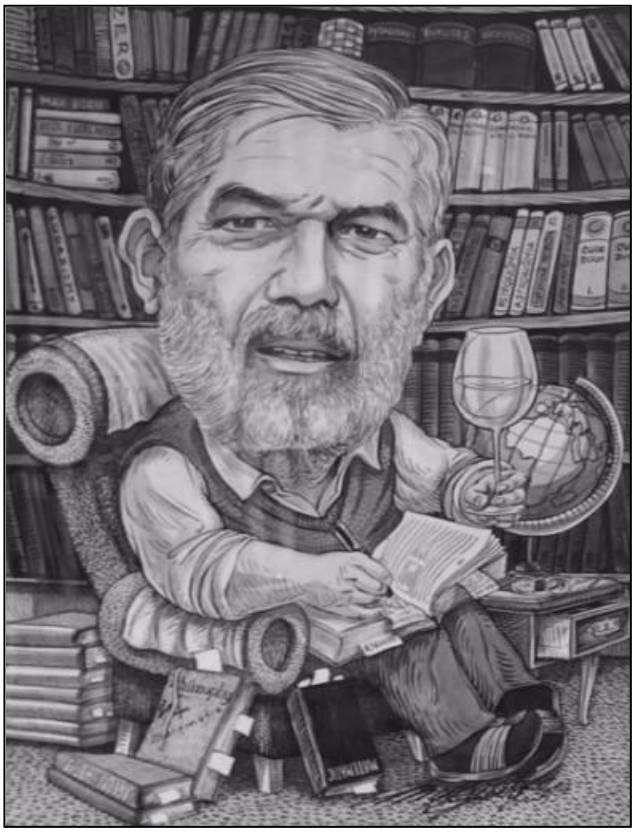
Vždy ešte čosi chýba. Sú praktické úlohy, na ktoré nestačí strohý výpočet, ale je potrebná darujúca dobrá vôľa. Aj keď nebol presne dodržaný text úlohy, bol splnený jej múdry zámer.

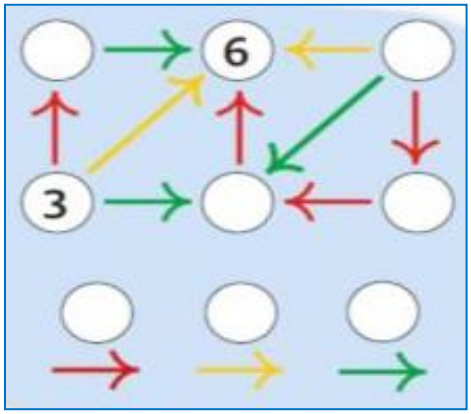
Nezištná spolupráca – úloha osemnástej ťavy.

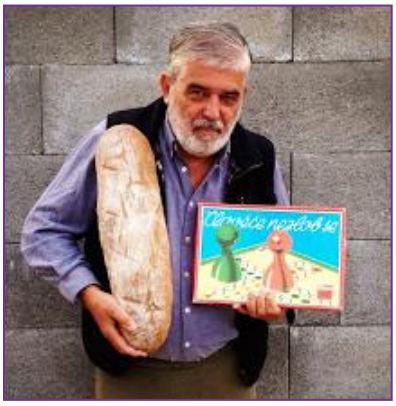
Možno je to tak, že najväčšou cnosťou nie je múdrosť,
ale úprimná láska.
Zdá sa, že dobročinnosťou možno liečiť
aj nejednoznačné úlohy praktickej matematiky.

Láskavú matematiku (počty aj merbu) v blízkom okolí Vám želá

Dušan Jedinák.







Blíži sa staroba …

Pane, ty vieš lepšie ako ja, že deň za dňom starnem a raz budem naozaj starý. Chráň ma pred domýšľavosťou, že musím pri každej príležitosti, ku každej téme niečo povedať. Zbav ma veľkej náruživosti chcieť dávať do poriadku záležitosti druhých. Nauč ma, aby som bol uvážlivý a ochotný pomáhať. Mám vrásky a šedivé vlasy. Nechcem sa sťažovať, ale tebe to poviem, Pane – bojím sa nemohúcnosti v starobe. Pociťujem, ako sa mi stráca telesná sila a prichádzam o telesnú krásu. Býval som pyšný, že sa stále môžem porovnávať s mladými. Teraz cítim a uznávam, že už toho nie som schopný. Daj teda môjmu srdcu silu, aby som prijal život tak, ako ho ty riadiš. Nie mrzuto, nie so skleslou náladou, nie ako odchádzajúci, ale s vďakou, pripravený urobiť všetko, k čomu ma ešte povoláš. František SALESKÝ (1567 – 1622)

Skoro vždy som si predstavoval školu ako harmóniu rozumu a citu, zodpovednosti a spravodlivosti, mravnosti a charakteru, humanity a demokracie, statočnosti a zušľachtenia. Miesto a proces, kde hľadaním postupnosti mravných hodnôt ukazuje sa cesta za významom i zmysluplným charakterom života. Chcel som, aby vzdelávanie prispievalo oslobodením ducha k múdrosti a láskavosti, k zárukám dôstojnosti človeka a rozvoju jeho jedinečnosti a neopakovateľnosti. Tušil som, že je potrebné pripraviť prostredie vzájomnej spolupráce, mravnej obrody i radosti z neustáleho činorodého poznávania. Uznával som, že charakterové a mravné hodnoty sebazdokonaľovania zdôrazňujú vnútornú slobodu a osobnú zodpovednosť každej ľudskej osobnosti.

Už viem, že učiť možno slovami, ale vychovávať možno iba príkladom. Ak nemožno inak, tak aj náznakom odstrašujúcim. Spisovateľ Karel Čapek nám odkázal: *Učiteľ, ktorý má rád svoj učebný predmet a sám si ho neustále spracúva a rozširuje, ktorý svoju náuku považuje za tak krásnu a pre život potrebnú, že poctivo a túžobne chce z nej pre žiakov vybrať to najcennejšie a ideovo najvyššie, je dobrý a k dokonalosti smerujúci pedagóg…*

Spoznávaním rozmanitých stránok prírody i spoločenského života odhaľujeme až neuveriteľnú harmóniu pravdy o duchovnej podstate sveta i života, v ktorom môžeme spracúvať informácie, vytvárať myšlienkové modely a očakávať aspoň intuitívny dotyk s mohutnosťou Toho, ktorý je nevyhnutnou podstatou, prvou príčinou i večným zmyslom.

Poznámky učiteľa počtov a merby

MMXVII

© *Dušan Jedinák*

Dušan JEDINÁK (*1944), absolvent učiteľského štúdia matematiky a fyziky na MFF UK v Prahe, dlhšie pôsobil ako stredoškolský profesor Gymnázia v Topoľčanoch, aj ako školský inšpektor ÚIC v Bratislave. Od školského roku 1997/98 do roku 2007/2008 sa venoval príprave budúcich učiteľov matematiky na Trnavskej univerzite v Trnave. Zaoberal sa problematikou motivácie školskej matematiky a popularizácie prírodných vied, hlavne odborným i ľudským odkazom významných osobností z tejto oblasti, didaktikou vyučovania a dejinami matematiky. Publikoval odborné práce nielen z didaktiky vyučovania, dejín matematiky a fyziky, z oblasti motivácie a popularizácie svojich vyučovacích predmetov, ale aj z problematiky rozvoja školstva i postavenia učiteľov v systéme vzdelávania a výchovy. Od šk. roku 2008/2009 pôsobil aj na ZŠ Tribečská ul. v Topoľčanoch. Jeho personálnu bibliografiu vydala *Tríbečská knižnica* v Topoľčanoch (1999: ISBN 80-88761-19-0 a 2010: ISBN 978-80-88761-49-5).