KATEDRA DIDAKTIKY MATEMATIKY
MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA UNIVERZITY KARLOVY

CESTY K MATEMATICE II

Sborník konference

Praha, 22. a 23. září 2016

Jana Hromadová,
Antonín Slavík (ed.)

matfyzpress
NAKLADATELSTVÍ MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTY
UNIVERZITY KARLOVY

Autoři

doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc.
Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
Mgr. Roman Hašek, Ph.D.
RNDr. Radka Holečková
doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.
RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.
RNDr. Dag Hrubý
RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D.
RNDr. Martin Melcer, Ph.D.
RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D.
doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc.
doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.
RNDr. Libuše Samková, Ph.D.
RNDr. Jakub Staněk, Ph.D.
RNDr. Martina Štěpánová, Ph.D.
Mgr. Marie Tichá, CSc.

Recenzenti

doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
doc. RNDr. Leo Boček, CSc.
Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.
RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D.
RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D.
doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc.
RNDr. Pavla Pavlíková, Ph.D.
Mgr. Zuzana Pátíková, Ph.D.
doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.
doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
RNDr. Petra Surynková, Ph.D.
PhDr. Alena Šarounová, CSc.
RNDr. Martina Štěpánová, Ph.D.

ISBN 978-80-7378-326-6

ÚVODNÍ SLOVO

Ve dnech 22. a 23. září 2016 se v Profesním domě na Malostranském náměstí v Praze, v jedné z historických budov Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, koná 2. ročník celostátní konference *Cesty k matematice*. Organizuje ji Katedra didaktiky matematiky MFF UK[1], spolupořadatelem je Středočeská pobočka JČMF. Akce navazuje na konference *Jak připravit učitele matematiky*[2], *Matematika a reálný svět*[3] a *Cesty k matematice*[4] pořádané na stejném místě v letech 2010, 2012 a 2014.

Konference je určena pracovníkům fakult připravujících učitele matematiky, středoškolským učitelům matematiky, doktorandům a studentům vyšších ročníků, kteří se připravují na učitelskou profesi s aprobací matematika pro třetí stupeň, pracovníkům různých výzkumných institucí a dalším zájemcům o problematiku vzdělávání.

Konference je zaměřena na následující okruhy:

- rozvíjení kritického myšlení žáků ve výuce matematiky,
- heuristické strategie, objevování a ověřování hypotéz,
- zdůvodňování matematických vztahů, dokazování, protipříklady,
- role symbolického jazyka matematiky při argumentaci.

Součástí konference je výstavka učebnic, učebních textů a dalších publikací, učebních pomůcek, bakalářských a diplomových prací studentů učitelství obhájených na MFF UK.

Tento sborník obsahuje texty většiny konferenčních příspěvků. Seznam účastníků a některé další materiály jsou k dispozici na webové stránce konference `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/konference2016/`.

Děkujeme programovému a organizačnímu výboru za přípravu konference, řečníkům za přednesení příspěvků a dodání jejich písemné verze a recenzentům za pečlivou kontrolu všech textů a řadu podnětných připomínek.

[1] Programový výbor: Jarmila Robová (předsedkyně), Jindřich Bečvář, Martina Bečvářová, Leo Boček, Oldřich Odvárko, Antonín Slavík, Alena Šarounová (KDM MFF UK), Dag Hrubý (Gymnázium v Jevíčku). Organizační výbor: Jakub Staněk (předseda), Alena Blažková, Zdeněk Halas, Jana Hromadová, Petra Surynková, Martina Štěpánová (KDM MFF UK), Vlasta Moravcová (Gymnázium Na Pražačce), Jiří Vančura, Yulianna Tolkunova (doktorandi).

[2] Texty příspěvků z této konference byly publikovány ve sborníku J. Bečvář, M. Bečvářová, A. Slavík (ed.): *Jak připravit učitele matematiky.* Matfyzpress, Praha, 2010. Jsou též k dispozici v elektronické verzi na webové stránce `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/konf-cd2/`.

[3] Viz elektronický sborník A. Slavík (ed.): *Matematika a reálný svět.* Matfyzpress, Praha, 2012, `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/konference2012/sbornik.pdf`.

[4] Viz elektronický sborník A. Slavík (ed.): *Cesty k matematice.* Matfyzpress, Praha, 2014, `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/konference2014/sbornik.pdf`.

OBSAH

Program konference

CESTY K MATEMATICE

(Profesní dům, MFF UK, Malostranské náměstí 25, Praha 1)

Čtvrtek 22. 9. 2016 (refektář Profesního domu)

9,00 – 9,45	Registrace účastníků
10,00 – 10,20	Zahájení konference
10,20 – 11,10	P. Eisenmann: *Heuristiky ve výuce matematiky*
11,10 – 12,00	Z. Halas: *Historie a argumentace ve školské matematice*
12,00 – 13,30	Přestávka na oběd
13,30 – 14,00	M. Hykšová: *Zdůvodňování v počtu pravděpodobnosti*
14,00 – 14,30	J. Robová, O. Odvárko: *Důkazy, subdůkazy a pseudodůkazy*
14,30 – 15,00	L. Boček: *Důkazy v Matematické olympiádě*
15,00 – 15,30	Přestávka na kávu
15,30 – 16,00	R. Holečková: *Překvapení pro začátečníky*
16,00 – 16,30	H. Kommová: *Potřebují gymnazisté důkazy?*
16,30 – 17,00	D. Hrubý: *Implikace jako didaktický problém*
17,00 – 18,00	Přestávka na večeři
18,00 – 20,00	Kulturní program v refektáři Profesního domu

Pátek 23. 9. 2016 (posluchárna S9 v 1. patře)

9,00 – 9,30	R. Hašek: *Užití programu GeoGebra při zkoumání množin bodů daných vlastností*
9,30 – 10,00	L. Samková, M. Tichá: *O některých miskoncepcích souvisejících se schopností argumentovat*
10,00 – 10,30	J. Hora: *Elementární a „velká“ teorie čísel*
10,30 – 11,00	Přestávka na kávu
11,00 – 11,30	M. Melcer: *Umořování dluhů ve školské matematice*
11,30 – 12,00	V. Moravcová: *Vyjadřovací dovednosti žáků*
12,00 – 13,30	Přestávka na oběd
13,30 – 14,00	J. Bečvář: *Jak porozumím …*
14,00 – 14,30	M. Štěpánová: *Věta o majácích*
14,30 – 15,00	J. Staněk: *Úlohy diskrétní pravděpodobnosti*
15,00 – 15,30	Přestávka na kávu
15,30 – 16,00	J. Hromadová: *Dvě opomíjené planimetrické věty*
16,00 – 16,30	Z. Halas: *Místo důkazu ve školské matematice*
16,30 – 17,00	Závěr konference

HISTORIE A ARGUMENTACE VE ŠKOLSKÉ MATEMATICE

Zdeněk Halas

Systematické dokazování vět nacházíme v rozvinuté podobě poprvé v antických matematických textech. V nich se mimo jiné soustavně pojednává o logice a objevují se teoretické úvahy o tom, jak má vypadat deduktivně budovaná věda. V tomto příspěvku se tedy zaměříme na ukázky důkazů vybrané z antických textů ilustrující tehdejší různé způsoby dokazování a odvozování. Budeme přitom přihlížet k souvislostem se školskou matematikou. Nejprve však stručně zmíníme některé obecnější aspekty dokazování.

1 Prestiž matematických důkazů

Matematický důkaz je možno považovat za jeden z nezaměnitelných přístupů k vědeckému poznání. V Evropě se ve velmi systematické a rozvinuté podobě poprvé objevuje zejména v antickém Řecku. Úspěšně se však vyvíjel i v jiných kulturách. Díky vlivu, který měla antická věda na rozvoj naší společnosti, a také díky vlivu, který měly zejména Eukleidovy *Základy* na vyučování matematice v Evropě, se soustředíme právě na antickou matematiku.

Věty a jejich důkazy měly v antických textech, jak uvidíme dále, pevnou strukturu. Navíc soustavné odvozování složitějších výsledků z jednodušších, jako je tomu například v Eukleidových *Základech*, uspořádalo samotnou matematiku, která pak už nebyla pouhým souhrnem empirických poznatků, ale tvořila promyšlenou soustavu. Ta byla předmětem obdivu; Eukleidovo uspořádání matematiky bylo všeobecně pokládáno za vzor přesného uvažování.

Tato přesnost důkazů byla jedním z faktorů, který měl vliv na utváření evropské kultury. Matematický důkaz byl ceněn pro svou nezvratitelnost, soustavy matematických vět byly považovány za vzory toho, jak by měla deduktivně budovaná věda vypadat. Prestiž matematického důkazu byla občas dokonce zneužívána při kontaktu s jinými kulturami, když znalost důkazů jednotlivých vět byla považována za doklad nadřazenosti evropské vědy, kultury a v důsledku i náboženství.

Zprávy o takových případech využití vědy jako argumentu hovořícího pro nadřazenost jedné kultury nad druhou lze nalézt již v pramenech z doby byzantské. Jako disputátoři s islámskými učenci se osvědčili například Jan Gramatik a sv. Konstantin.[1] Také jistý student byzantského filosofa Lva Matematika se ocitl v otroctví u Arabů, kde se dostal na dvůr chalífa a zde udivoval svými znalostmi v matematických a filosofických disputacích.

Dalším příkladem (viz např. [4], str. 2–4) může být misie jezuitů v Číně. Koncem 16. století dorazili evropští misionáři k jižním hranicím Číny. Vstup

[1] Viz *Theophanes Continuatus*, 96 a *Život sv. Konstantina*, kap. 8–12.

do Číny však nebyl snadný, a tak zvolil jezuita Matteo Ricci strategii, v níž hrála věda klíčovou roli – jeho cílem bylo zaujmout čínské vzdělance. Jedním z prvních kroků byl překlad Eukleidových *Základů* do čínštiny. Připravil jej ve spolupráci s čínským konvertitou Sü Kuangčchi; vycházeli přitom z latinského překladu Claviova, s nímž se Ricci seznámil v Římě, když studoval na Collegio Romano. Tento překlad měl plnit více účelů, zde zdůrazněme dva z nich:

- *Základy* měly představovat znalost geometrie, která překonávala matematické poznatky dostupné tehdejším čínským učencům. Předpokládalo se, že tato hlubší znalost bude působit ve prospěch těch, kteří jsou jejími nositeli, tedy i evropských misionářů.
- Jistota a nezvratitelnost geometrických důkazů se měla přenášet i na teologické nauky, které byly předkládány podobným stylem argumentace, jaký se nachází v Eukleidových *Základech.*

Jeden z prvních větších intelektuálních kontaktů mezi Evropou a Čínou byl zprostředkován misionáři; matematický důkaz při tom hrál významnou roli. Pomineme-li pochybnou legitimitu takového postupu, máme zde příklad užití matematického důkazu mimo matematiku; ovlivnil nejen kontakty dvou kultur, ale i způsob argumentace v jiném oboru, v tomto případě v teologii.

2 Důkazy dle Aristotela

Snad nejznámějším dílem, v němž je axiomatické uspořádání vědy teoreticky vyloženo, jsou Aristotelovy *Druhé analytiky* [1]. Aristotelés v nich podrobně popsal, jakými zásadami se má deduktivně budovaná věda řídit. Inspiroval se přitom právě matematikou, a to zejména díky vysoké míře abstrakce a z toho plynoucí relativní jednoduchosti. V té době už existovalo více pokusů o sepsání základů – axiomaticky uspořádaných částí matematiky; v této souvislosti se nám dochovalo několik jmen: Hippokratés, León, Theudios. Aristotelés tedy popisuje již existující rozvinutý systém.

Shrňme několik nejvýznamnějších momentů z Aristotelových *Druhých analytik* [1]. V odstavci I, 3 je načrtnut základní program: vybudovat vědeckou disciplínu postupným dokazováním, z čehož pak také plyne nutnost vycházet z malého množství nedokazovaných tvrzení – axiómů. Aristotelés zde obhajuje názor, že *důkaz se má vést z toho, co je dřívější a známější*; dále také, že *ne každé vědění lze dokázat, nýbrž že vědění počátků je nedokazatelné.*

Dále Aristotelés argumentuje, že *přímý důkaz je lepší než nepřímý* (kapitola I, 26). Lze-li tedy něco dokázat přímo, není vhodné předkládat důkaz nepřímý.

Další jeho požadavek se týká nutnosti vycházet z podstatných předpokladů: dokazujeme-li například větu obecně o trojúhelnících, měla by být podle Aristotela (kap. I, 5) dokázána obecně – na základě vlastnosti „být trojúhelníkem“, nikoli jako souhrn různých dílčích důkazů pro trojúhelníky rovnostranné, rovnoramenné a různostranné, neboť v takových případech se vychází z vlastností, které nejsou potřebné a netýkají se trojúhelníku samotného (např. mít všechny strany stejně dlouhé). Věta o trojúhelnících obecně by měla být nezávislá na tom, jaký trojúhelník je,[2] tj. zda je např. rovnoramenný, či dokonce kovový a podobně. Aristotelés v takových případech klade na důkaz větší nároky, než je tomu dnes – souhrn důkazů v dílčích případech podle něho netvoří důkaz obecného tvrzení.

V *Prvních analytikách* (kap. II, 27) je pojednáno o tom, že argumentace v důkazu by měla být založena na tzv. *důkazných znacích*, neboť ty nutně „působí vědění“ – dokazovaná vlastnost z nich nutně vyplývá. Znamená to tedy vycházet z podstatných vlastností (důkazných znaků), například z „mít vysokou teplotu“ vyplývá, že má pacient horečku, ale ze znaku „mít zrychlené dýchání“ horečka nutně neplyne, není tedy znakem důkazným.

Ačkoli se může zdát, že požadavek užívání pouze důkazných znaků je přirozený, v matematice se jím dnes neřídíme v plném rozsahu. V Proklově komentáři k první knize *Základů* [9] se v odst. 206 uvádí příklad důkazu věty o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku založeného na předchozím výsledku, že *vnější úhel trojúhelníku je roven součtu obou protějších úhlů vnitřních.* Takto vedený důkaz[3] – z dnešního hlediska zcela v pořádku – dle Prokla trpí nedostatkem: využívá se zde pojem vnějšího úhlu trojúhelníku, jenž však není nutný, jelikož dokazujeme větu týkající se trojúhelníku a jeho vnitřních úhlů. Kdyby (hypoteticky) vnější úhly neexistovaly, platnost věty a jejího důkazu by to nemělo ohrozit. Mělo by se tedy vycházet pouze z trojúhelníku samotného, ne z dalších odvozených pojmů.

3 Důkazy v antice

V Eukleidových *Základech* nenacházíme pouze definice a věty, ale v geometrických knihách také konstrukce. V kontextu antické matematiky se věty a konstrukce tradičně označují souhrnným názvem *propozice*. V samotných *Základech* nejsou věty a konstrukce nijak zvlášť označovány; každá propozice začíná prostým číslem, za nímž následuje nečleněný text – znění propozice a důkaz. Důkazy vět jsou zakončeny formulí *Což bylo třeba dokázat*, konstrukce pak spojením *Což bylo třeba provést.*

Dnes jsme zvyklí na schéma „definice – věta – důkaz“. U Eukleida je struktura propozice bohatší, sestává standardně ze šesti částí, jejichž obecný popis nacházíme např. v Proklově komentáři k první knize *Základů* ([9], sepsán asi 800 let po Eukleidovi). S tímto členěním se seznámíme na konkrétním příkladě – do textu propozice I, 10 proto vložíme formou číslovaných nadpisů názvy

[2] Níže uvedeme kosinovou větu; může se zdát, že je v Eukleidových *Základech* dokázána ve dvou dílčích případech: trojúhelník tupoúhlý a ostroúhlý. U Eukleida se však nejedná o jednu větu o obecném trojúhelníku, jako je tomu dnes, ale o dvě různé věty s různým tvrzením (1. *čtverec strany proti úhlu tupému je větší než …* , 2. *čtverec strany proti úhlu ostrému je menší než …*)

[3] Tento postup je použit i v Eukleidových *Základech* (věta I, 32).

jednotlivých částí se stručným vysvětlením (kurzívou), překlad samotného Eukleidova textu vysázíme skloněně.

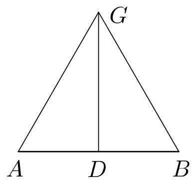
10

1. *Protasis – obecné znění věty či obecné zadání konstrukce (bez označení písmeny)*

   Danou ohraničenou přímou čáru rozdělit na poloviny.

2. *Ekthesis – označení jednotlivých objektů písmeny; součástí je obrázek*

   Buď ohraničená přímá čára AB;



3. *Diorismos – co se má dokázat či zkonstruovat (společně s ekthesis je vlastně zopakováním znění propozice, ale s konkrétními písmeny)*

   je třeba ohraničenou přímou čáru AB rozdělit na poloviny.

4. *Kataskeué – konstrukce (u některých vět chybí, není potřeba)*

   Nechť je na ní sestrojen rovnostranný trojúhelník ABG a rozdělme úhel AGB na poloviny přímou čárou GD; tvrdím, že přímá čára AB je rozdělena na poloviny v bodě D.

5. *Apodeixis – důkaz*

   Jelikož je totiž AG rovna GB, GD je společná[4], jsou dvě [přímé čáry] AG, GD rovny příslušným dvěma BG, GD. Úhel AGD je roven BGD. Základna AD je tedy rovna základně BD.

6. *Symperasma – závěr (zopakování protasis a standardní formule „Což bylo třeba dokázat/provést.“)*

   Daná ohraničená přímá čára AB je tedy rozdělena na poloviny v D; což bylo třeba provést.

V předložené struktuře je překvapivé, že se znění propozice opakuje, a to dokonce třikrát (části 1, $2+3$, 6). V protasis je vše formulováno pomocí obecných pojmů (trojúhelník, přímá čára, úhly při základně, úhel proti přeponě, apod.), čímž však leckdy vznikají tak komplikovaná souvětí, že jim bez ekthesis a diorismu snad ani nelze dost dobře porozumět. Lze se domnívat, že v dobách počátků rigorózního přístupu k matematice ještě přetrvávaly potíže s chápáním obecnosti; objekty označené písmeny už byly považovány za jakýsi

[4] Společná oběma trojúhelníkům *AGD, BGD*.

speciální případ obecného vyjádření. Často, zejména u vět, je pak závěr přesným zopakováním úvodní obecné formulace, jako by se tím chtělo naznačit, že důkaz v „konkrétním případě“ s označenými objekty nakonec přeci jen vede k důkazu zcela obecného tvrzení; nikde však není legitimita tohoto přechodu prokázána. V pozadí také mohla hrát svou roli filosofie: obecné formulace pracují s ideálními objekty nezávislými na „hmatatelném“ světě. Důkaz vedený tímto způsobem by však byl zcela nepřehledný, takže označení objektů je jistým ústupkem srozumitelnosti.

Dnes již označení objektů písmeny nepovažujeme za omezení obecnosti. Důkazy i samotné formulace vět jsou díky tomu stručnější a srozumitelnější. Porovnáním dnešních a Eukleidových formulací zřetelně vystupují veliké výhody moderní symboliky. V některých populárních knihách o matematice a fyzice se propaguje pravidlo, že *každý vzorec snižuje jejich prodejnost o polovinu.* Když je pak čteme, jsme leckdy svědky komplikovaných celostránkových (či dokonce vícestránkových) slovních popisů, které mají čtenáři přiblížit myšlenku snadno realizovatelnou výpočtem na jednom či dvou řádcích (např. vynásobení dvou komplexních čísel).

Eukleidovy *Základy* nejsou (z dnešního úhlu pohledu) učebnicí, i když tak byly (zejména některé části) po celá staletí používány. Přesto v nich lze vysledovat několik rysů, jež se v upravené podobě úspěšně uplatňují i v dnešních učebnicích:

- jednotlivá tvrzení jsou zřetelně zformulována,
- jednotné schéma postupu,
- ve formulacích důkazů vítězí srozumitelnost nad ideální přesností,
- obrázek je integrální součástí důkazu,
- jasná struktura, látka je díky soustavnému dokazování uspořádána, jednodušší předchází složitějšímu.

4 Věty a lémmata v antice

V předchozích kapitolách jsme viděli, že soustavné dokazování vede k uspořádání výsledků do soustavy vět, kde věty uvedené dříve jsou využívány při dokazování vět následujících. Zastavme se tedy alespoň stručně u antického pojetí věty a lémmatu.

Řecké *theóréma* (věta) znamená mimo jiné *předmět pozorování, předmět zkoumání,* případně pak také výsledek tohoto zkoumání, tj. *pravidlo, princip, teorie.* Oba tyto aspekty se promítají do antického chápání věty jako něčeho určeného k prozkoumání; bez důkazu tedy věta není úplná. Po řádném prozkoumání (tj. po opatření důkazem) pak lze větu dále používat, stává se součástí většího celku, někdy přejde až v jakési pravidlo.

Tento postup je nám důvěrně znám i dnes: řešíme nějaký problém, výsledkem jeho prozkoumání je věta a její důkaz, obsahující řešení. Věta je tak vlastně zlatým hřebem práce na nějakém dílčím problému. Postupně se pak tato věta zařadí do širšího rámce některé z matematických disciplín a po čase se sama stane prostředkem k vyřešení větších problémů. Když se seznamujeme s nějakou matematickou disciplínou, jsme v pokušení procházet jednotlivé věty; snadno se při tom může vytratit povědomí o původních problémech a radost z jejich vyřešení, i když jsou z hlediska celé rozsáhlé disciplíny pouze malými kamínky v mozaice – „pouhými“ nástroji k dosažení významnějších výsledků.

Jiným pokušením může být to, že se z věty stane pouhé pravidlo. Ztracená vazba na řešení původních problémů pak může vést k tomu, že „aspekt pravidla“ nabude převahy a nutnost důkazu se nenápadně vytratí. Někdy to může zajít tak daleko, že z původní věty vymizí i její předpoklady. Příkladem mohou být pravidla pro počítání s odmocninami; při užívání pravidla bez předpokladů je možno dojít i k následující „rovnosti“:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i\cdot i = i^2 = -1\,.$$

Lémma v antické matematice[5] označuje větu potřebnou k důkazu jiné věty. Pokud se však omezíme na geometrii, nabývá mírně odlišného významu: jedná se o propozici (tj. větu nebo konstrukci), kterou je třeba ověřit. Pokud tedy předpokládáme něco, co jsme zatím nedokázali, jedná se o lémma.

Proklos ve svém komentáři [9] popisuje tři metody dokazování lémmat. *Nejlepší je metoda analýzy, jíž se dohledává požadovaný výsledek zpět k uznávaným principům … Druhá je metoda rozlišování (diairesis), která rozděluje celek určený k ověření na jeho přirozené části a která poskytuje výchozí bod pro důkaz odstraněním částí nepodstatných pro ustavení toho, co je dokazováno. Tuto metodu Platón také uznával jako užitečnou ve všech vědách. Třetí je důkaz sporem (reductio ad impossibile), jíž se neukazuje přímo samotná věc, kterou chceme, ale vyvrácením jejího protějšku ustanovuje pravdu.*

5 Pluralita antické matematiky

Z předchozích kapitol, v nichž jsme vycházeli zejména z Aristotela a Eukleida, lze snadno nabýt dojmu, že celá antická matematika je budována přísně axiomaticky a výsledky jsou systematicky sestavovány do soustav axiómů, definic, vět a jejich důkazů.

Do této tradice můžeme řadit například samotné Eukleidovy *Základy* včetně podobně uspořádaných starších textů, jež se nám nedochovaly, Apollóniovo pojednání o kuželosečkách nebo některé spisy Archimédovy, např. *O kouli a válci.* Jako příklad uvedeme dvě věty ze *Základů*, které bychom dnes mohli označit jako různé případy kosinové věty.

U Archiméda je třeba zdůraznit i jeho spisy fyzikální, v nichž také postupuje axiomatickou metodou (*O rovnováhách rovinných útvarů*). Takto přísně odvo-

[5] Uvedený výklad tohoto pojmu je doložen u Prokla [9, odst. 211]. Samotné řecké slovo *lémma* znamená *to, co je přijato*, tedy *zisk, kořist; věštba; předpoklad.*

zené výsledky pak využívá ve své *Metodě*, kde nachází obsahy a objemy různých geometrických útvarů. Struktura *Metody* sice připomíná ostatní spisy založené na schématu *úvodní předpoklady – věta – důkaz*, ale odvození jsou založena na již dříve odvozeném zákonu rovnováhy na páce; dochází tak k prolínání matematiky a fyziky.[6] Navíc jsou zde podstatným způsobem zakomponovány infinitezimální úvahy. Jelikož je tento Archimédův přístup k hledání obsahů a objemů skutečně mocným nástrojem umožňujícím nacházet netriviální výsledky na základě elementární geometrie, uvedeme dále několik příkladů užití této metody.

Zcela jiného druhu jsou spisy Hérona z Alexandrie. Jeho *Metrika* jsou souhrnem výsledků týkajících se zejména obsahů a objemů geometrických útvarů. Některé jsou dokazovány, jinde je uveden výsledek s odkazem na autora. Jedná se tak o přehlednou příručku. Významným posunem oproti Eukleidovi a Apollóniovi je také užívání čísel ve spojitosti s délkami stran. Uváděny jsou také konkrétní příklady. Na ty je kladen důraz v jiných spisech hérónské tradice, které spíše připomínají praktické příručky pro řemeslníky: nehovoří se v nich o geometrických útvarech samotných, ale o jámě na hašení vápna, studni, dřevěném trámu a podobně. Způsob výpočtu objemu takových „těles“ je prezentován zpravidla na jednom konkrétním příkladě, kde každá z potřebných délek je reprezentována nějakým konkrétním číslem. Od matematické symboliky, geometrické terminologie (a samozřejmě i od důkazů) je zde zcela upuštěno.

Rozvinutou a na antiku unikátní symboliku naopak nacházíme v Diofantově *Aritmetice*. Diofantovi umožňuje řešit zcela nové typy úloh, které u výše zmíněných autorů nenacházíme.

Matematické věty i s důkazy nacházíme někdy i ve spisech, v nichž je matematika pouze prostředkem zkoumání jiných oblastí lidského vědění. Jedná se zejména o spisy astronomické; právě ve slavném astronomickém kompendiu, Ptolemaiově *Almagestu*, se nám dochovala první ucelená teorie pojednávající o délkách tětiv, která je v podstatě ekvivalentní s dnešní goniometrií.

Uveďme nyní několik příkladů antických důkazů, které budou reprezentovat různé přístupy k dokazování a odvozování výsledků.

6 Kosinová věta

Věty 12 a 13 ve II. knize Eukleidových *Základů* obsahují tvrzení, které bychom dnes mohli nazývat kosinová věta. Eukleidés ji zde uvádí v době, kdy goniometrie ještě vůbec neexistuje. Věta II, 12 je formulována pro tupoúhlý trojúhelník, věta II, 13 pak pro trojúhelník ostroúhlý. Jelikož jsou obě věty po formální stránce velmi podobné, uvedeme překlad pouze první z nich. Pro přehlednost navíc přidáváme formou nadpisů názvy jednotlivých částí (kurzívou) a celý text členíme do odstavců.

---

[6] Toto vnášení fyzikálních úvah do matematiky není v souladu s Aristotelovou zásadou, že je třeba zachovat „rod disciplíny“.

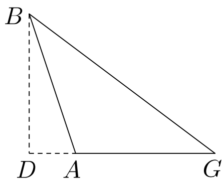
II, 12

Protasis (obecné znění věty)

V tupoúhlých trojúhelnících je čtverec strany proti tupému úhlu větší než (oba) čtverce stran tupý úhel svírajících (dohromady) o dvojnásobek obdélníku, jehož strany tvoří jedna ze stran svírajících tupý úhel, na niž dopadá kolmice, a vnější úsečkou omezenou kolmicí (vedenou k vrcholu) tupého úhlu.

Ekthesis (označení jednotlivých objektů písmeny)

Buď tupoúhlý trojúhelník ABG mající tupý úhel BAG a veďme z bodu B na prodlouženou GA kolmici BD.



Diorismos (co se má dokázat)

Tvrdím, že čtverec BG je větší než čtverce BA, AG[7] o dvojnásobek obdélníku o stranách GA, AD.

Kataskeué (konstrukce)

—

Apodeixis (důkaz)

Když se totiž úsečka GD rozdělí bodem A, bude čtverec DG roven čtvercům GA, AD a dvojnásobku obdélníku o stranách GA, AD.[8]

K oběma stranám přidejme čtverec DB; čtverce GD, DB jsou tak rovny čtvercům GA, AD, DB a dvojnásobku obdélníku o stranách GA, AD.

Čtverce GD, DB jsou však rovny čtverci GB, neboť úhel při D je pravý.

Čtvercům AD, DB je však roven čtverec AB; čtverec GB je tedy roven čtvercům GA, AB a dvojnásobku obdélníku o stranách GA, AD.

Takže čtverec GB je větší než čtverce GA, AB o dvojnásobek obdélníku o stranách GA, AD.

Symperasma (závěr – zopakování protasis, cbd.)

V tupoúhlých trojúhelnících je tedy čtverec strany proti tupému úhlu větší než (oba) čtverce stran tupý úhel svírajících (dohromady) o dvojnásobek obdélníku, jehož strany tvoří jedna ze stran svírajících tupý úhel, na niž dopadá

[7] Míní se: BG je větší než oba čtverce BA, AG dohromady. Eukleidés běžně uvádí dva nebo více útvarů za sebou, aniž by upozornil, že míní jejich souhrn.

[8] Citována věta II, 4.

kolmice, a vnější úsečkou omezenou kolmicí (vedenou k vrcholu) tupého úhlu; což bylo třeba dokázat.

Pokud v symbolickém zápisu tvrzení věty

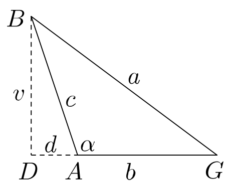
$$BG^2 = BA^2 + AG^2 + 2\,GA \cdot AD$$

nahradíme AD s využitím vztahů $\cos(180° - \alpha) = \frac{AD}{BA}$ a $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, dostáváme ihned kosinovou větu pro tupoúhlý trojúhelník:

$$BG^2 = BA^2 + AG^2 - 2\,BA \cdot AG \cdot \cos\alpha\,.$$

6.1 Kosinová věta – přepis důkazu moderní symbolikou

Hlavní myšlenka důkazu zapsaná moderní symbolikou je podstatně přehlednější, než slovní popisy a značení délek úseček pomocí koncových bodů.



K oběma stranám druhé mocniny součtu

$$(b + d)^2 = b^2 + d^2 + 2bd$$

přičtěme v^2:

$$[(b + d)^2 + v^2] = b^2 + [d^2 + v^2] + 2bd.$$

Z Pýthagorovy věty aplikované na oba pravoúhlé trojúhelníky (naznačeno hranatými závorkami) dostáváme přímo znění věty:

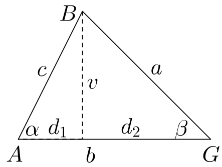
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bd.$$

Z tohoto Eukleidova výsledku získáme kosinovou větu substitucí $d = -c\cos\alpha$, která plyne ze vztahů $\cos(180° - \alpha) = \frac{d}{c}$ a $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Odvození téže věty pro ostroúhlý trojúhelník je v *Základech* uvedeno hned v následující větě II, 13. Je pozoruhodné, že Eukleidés uvádí jako první důkaz pro případ tupoúhlého trojúhelníku. V současných učebnicích je tomu zpravidla naopak; ostroúhlý trojúhelník je nám nějak „bližší“.

Podívejme se nyní na jádro Eukleidova důkazu pro případ ostroúhlého trojúhelníku zapsané pomocí moderní symboliky.



K oběma stranám druhé mocniny rozdílu $b - d_1 = d_2$:

$$b^2 + d_1^2 = 2bd_1 + d_2^2$$

přičtěme v^2:

$$b^2 + [d_1^2 + v^2] = 2bd_1 + [d_2^2 + v^2].$$

Z Pýthagorovy věty aplikované na oba pravoúhlé trojúhelníky (naznačeno hranatými závorkami) dostáváme přímo znění věty:

$$b^2 + c^2 = 2bd_1 + a^2.$$

Z tohoto Eukleidova výsledku získáme kosinovou větu substitucí $d_1 = c\cos\alpha$, která plyne ze vztahu $\cos\alpha = \frac{d_1}{c}$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Vidíme, že oba důkazy jsou velmi podobné. Případ *ostroúhlého* trojúhelníku může být považován dokonce za nepatrně *náročnější*, jelikož je třeba přičtením v^2 odstranit místo jediného d veličiny dvě: d_1 a d_2. Navíc se vychází z uměle upravené druhé mocniny rozdílu (oproti přirozeně uspořádanému součtu).

6.2 Kosinová věta – didaktická transformace důkazu

Začátek důkazů obou případů působí trochu uměle. Např. u tupoúhlého trojúhelníku by bylo vhodnější začít přímo Pýthagorovou větou

$$(b + d)^2 + v^2 = a^2$$

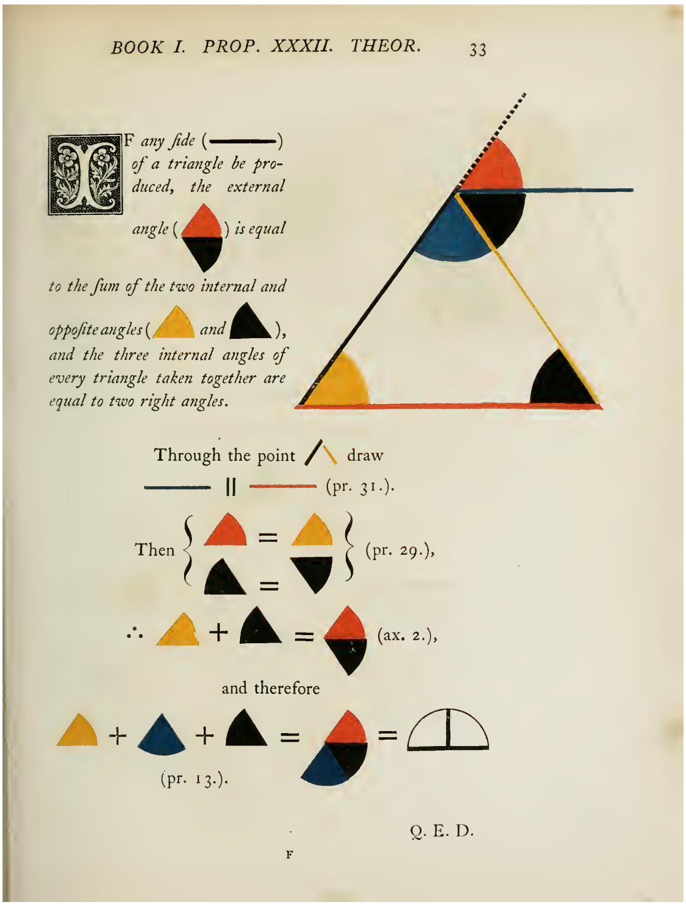
a dále pokračovat jednoduchou úpravou a aplikací Pýthagorovy věty:

$$b^2 + 2bd + [d^2 + v^2] = a^2 \quad \rightarrow \quad b^2 + 2bd + c^2 = a^2,$$

čímž jsme dostali náznak důkazu, který je krátký, přehledný a plyne zcela přirozeně.

Z porovnání s Eukleidovým postupem je zřejmé, že důkaz věty zařazené do soustavy axiomaticky budované disciplíny může být uspořádán jinak, než důkaz určený k předvedení na tabuli, na nějž jsou kladeny vyšší nároky. Není-li totiž předem zřejmé, proč je třeba provádět příslušné kroky, ztrácí výklad nejen na přehlednosti, ale také na atraktivnosti.

Pokud hovoříme o didaktických transformacích, zmíníme jeden zajímavý přístup k prezentaci důkazů, který zvolil v polovině 19. století Oliver Byrne. Prvních šest knih Eukleidových *Základů*, které tehdy byly v různých modifikacích základem vyučování geometrii, zpracoval ve své knize [3] tak, že ve znění každé věty i v jejím důkazu nahradil značení geometrických objektů tím, že je přímo narýsoval různými barvami. Tyto různobarevné objekty pak používal v důkazech. Jako příklad uveďme větu o součtu vnitřních úhlů trojúhelníku, neboť je její grafické zpracování velmi výrazné a názorné; dobře tak poslouží jako ukázka Byrneova přístupu.



O. Byrne, [3], věta I, 32 ze *Základů*
(součet vnitřních úhlů trojúhelníku)

7 Menaichmos – hyperbola a nepřímá úměrnost

Z děl matematiků působících před Eukleidem se nám dochovalo jen několik zmínek z pozdější doby. Jedním z nich je Menaichmos (polovina 4. stol. př. Kr.), který byl současníkem Eudoxa a Platóna. V krátkém úryvku[9] (necelé dvě strany) převádí problém nalezení dvou středních úměrných na úlohu nalézt průsečík dvou kuželoseček.

Modernizovaně řečeno, jsou-li dány veličiny a a b, je úkolem nalézt veličiny x a y takové, aby

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}\,.$$

Tuto soustavu lze upravit například na dvojici rovností

$$x^2 = ay, \qquad ab = xy$$

reprezentujících jedno ze dvou Menaichmových řešení, která se nám dochovala. Tím je původní úloha převedena na problém nalezení průsečíku dvou kuželoseček – paraboly a hyperboly.

Ponechme nyní stranou detaily Menaichmova textu a povšimněme si uvedené rovnice hyperboly: lze ji snadno napsat jako vztah reprezentující nepřímou úměrnost

$$y = \frac{ab}{x}\,.$$

Proč je však grafem nepřímé úměrnosti hyperbola?

Z pozice vysokoškolské matematiky je odpověď snadná: rovnici tvaru $xy = k$ lze pomocí lineární transformace $x = x' - y'$, $y = x' + y'$ ihned převést na rovnici $(x' - y') \cdot (x' + y') = k$, neboli na rovnici rovnoosé hyperboly

$$\frac{x'^2}{k} - \frac{y'^2}{k} = 1\,.$$

Transformace soustavy souřadnic (či alespoň otočení) však nemusí vždy patřit do standardní výbavy středoškoláka. Menaichmos tu přináší inspirativní pohled na hyperbolu jako křivku v rovině, pro jejíž body platí, že

součin vzdáleností od dvou různoběžek (asymptot) je konstantní.

To je vlastně geometrická interpretace vztahu $xy = k$, omezíme-li se na větev v 1. kvadrantu a $k > 0$: x je vzdálenost bodu hyperboly od jedné asymptoty (osy y) a y vzdálenost od druhé asymptoty (osy x).

Ukažme nyní, že tuto vlastnost mají všechny body vyhovující rovnici hyperboly známé z analytické geometrie:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \tag{1}$$

[9] Objevuje se v Eutokiově komentáři k Archimédovu spisu *O kouli a válci II*, viz [7], strany 92 až 96.

Asymptotami této hyperboly jsou přímky

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0\,, \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0\,. \tag{2}$$

Vzdálenosti libovolného bodu $X = [x, y]$ od těchto asymptot jsou

$$d_1(X) = \frac{\left|\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}\,, \qquad d_2(X) = \frac{\left|\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}\,.$$

Leží-li bod $X = [x, y]$ na hyperbole dané rovnicí (1), můžeme v součinu vzdáleností $d_1(X) \cdot d_2(X)$ nahradit součin výrazů vzniklých v čitateli jedničkou:

$$d_1(X) \cdot d_2(X) = \frac{\left|\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \cdot \frac{\left|\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}\,. \tag{3}$$

Výraz $\dfrac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$ neobsahuje proměnné x, y, je tedy vzhledem k nim konstantní. Vyhovují-li tudíž souřadnice bodu $X = [x, y]$ rovnici hyperboly (1), je součin $d_1(X) \cdot d_2(X)$ jeho vzdáleností od jejích asymptot (2) na volbě tohoto bodu X nezávislý. Tím jsme ověřili, že všechny body hyperboly dané rovnicí (1) splňují „Menaichmovu vlastnost“.[10]

Tuto vlastnost lze snadno pozorovat přímo na rovnici (1), jejíž levá strana nápadně připomíná po rozkladu na součin

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1$$

rovnici (3). Nyní si stačí uvědomit, že každý z těchto činitelů figuruje v čitateli výrazu vyjadřujícího vzdálenost bodu od asymptoty. Oběma činitelům chybí jen určitá konstanta ve jmenovateli a absolutní hodnota. Vhodnou konstantou (přesněji součinem převrácených hodnot norem normálových vektorů obou asymptot) je možno celou rovnici vynásobit. Absolutní hodnotu lze také doplnit, neboť pro všechny body větve hyperboly ležící vpravo od osy y jsou oba činitele kladné; pro všechny body větve ležící vlevo od osy y jsou sice oba činitele záporné, jejich součin je však kladný.

Menaichmův přístup k hyperbole tedy poskytuje zajímavou geometrickou interpretaci nepřímé úměrnosti a standardní rovnice hyperboly.

---

[10] Rovnici (3) splňují dvě hyperboly, obě mají asymptoty (2). Jedna hyperbola má větve nalevo a napravo od osy y, druhá má větve nad a pod osou x.

8 Archimédés – aplikace zákona rovnováhy na páce

Archimédés vyvinul unikátní metodu, pomocí níž nacházel obsahy a objemy různých geometrických útvarů. Spočívá v aplikaci upraveného[11] zákona rovnováhy na páce $V_1\, r_1 = V_2\, r_2$: geometrický útvar neznámého objemu V_2 a jiný útvar známého objemu V_1 jsou chápány jako souhrny všech jejich vzájemně rovnoběžných řezů, které jsou umístěny na vahadle tak, aby byly v rovnováze. Jsou-li známy jejich polohy (tj. vzdálenosti r_1 a r_2 od bodu, v němž je páka podepřena) i objem V_1 jednoho z těles, lze snadno dopočítat neznámý objem V_2 druhého tělesa.

Nejpodrobněji Archimédés o této metodě pojednal ve svém spisu *Metoda*, v němž také výslovně upozornil, že obsah či objem takto nalezený považuje pouze za předběžný výsledek, který je ještě nutno opatřit korektním důkazem. Je tomu tak proto, že útvary jsou chápány jako souhrn všech jejich vzájemně rovnoběžných řezů. Navíc se do geometrie vnáší mechanické úvahy.

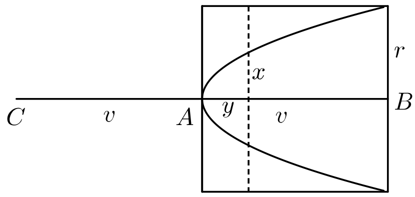
Zejména díky Eukleidovým *Základům* lze snadno nabýt dojmu, že celá antická matematika sestává pouze z přísně logicky řazených a dokazovaných vět. Právě Archimédova *Metoda* tento strnulý obraz zásadně narušuje a je jedním z textů, které ukazují na bohatství přístupů antických matematiků. Jelikož je tato metoda díky své mimořádné efektivnosti a jednoduchosti snadno použitelná na střední škole, předvedeme ji na několika příkladech, jež budeme čerpat přímo z Archimédova spisu *Metoda* (věty 4, 2 a 3), ovšem ve zjednodušené a modernizované podobě. Nástrojem přitom budou základní geometrické vztahy: podobnost trojúhelníků, věta Pýthagorova, Thalétova a věty Eukleidovy.

8.1 Objem úseče rotačního paraboloidu

Nejjednodušším, přitom však netriviálním příkladem užití Archimédovy metody je určení objemu úseče rotačního paraboloidu (*Metoda*, věta 4).

Uvažujme vahadlo CB podepřené v bodě A, $v = AC = AB$. Na něm nechť je umístěna úseč rotačního paraboloidu tak, že její osa splývá s ramenem AB, vrchol má v bodě A a její podstava o poloměru r je kolmá na osu. Tato úseč nechť je vepsána do válce, který s ní má společnou podstavu i osu. Oběma tělesy budeme vést libovolně řez rovinou kolmou na jejich společnou osu (čárkovaně). Vznikne tak kruhový řez v úseči paraboloidu (poloměr x) a kruhový řez ve válci (o poloměru r). Celá geometrická situace v osovém řezu je naznačena na následujícím obrázku.

[11] Ve fyzice je zákon rovnováhy na páce formulován ve tvaru $m_1\, r_1 = m_2\, r_2$. Od hmotností k objemům lze snadno přejít, předpokládáme-li, že jsou obě tělesa homogenní a mají stejnou hustotu ρ. Uvedený zákon pak lze psát ve tvaru $\rho\, V_1\, r_1 = \rho\, V_2\, r_2$, odkud vznikne dělením hustotou ρ upravený zákon rovnováhy na páce $V_1\, r_1 = V_2\, r_2$, jenž budeme dále používat.



Vyhovuje-li parabola (při našem označení) rovnici $y = ax^2$, lze psát

$$\frac{y}{v} = \frac{ax^2}{ar^2} = \frac{\pi x^2}{\pi r^2} = \frac{S_{\text{kruh\_paraboloid}}}{S_{\text{kruh\_válec}}}\,,$$

přičemž druhá rovnost vznikla prostým krácením a a rozšířením číslem π. Vzniklé výrazy v čitateli i ve jmenovateli pak lze interpretovat jako obsahy naznačených kruhů. Přepíšeme-li vzniklou rovnost ve tvaru

$$y \cdot S_{\text{kruh\_válec}} = v \cdot S_{\text{kruh\_paraboloid}}\,,$$

můžeme ji snadno interpretovat pomocí upraveného zákona rovnováhy na páce $r_1\,V_1 = r_2\,V_2$: kruh válce zůstávající na místě je v rovnováze s kruhem paraboloidu umístěným na konci vahadla C, tj. ve vzdálenosti v od bodu A.

Jelikož byl řez rovinou zvolen libovolně, platí uvedená rovnost pro všechny řezy vedené kolmo na společnou osu obou těles. Přeneseme-li tedy všechny kruhy z úseče paraboloidu do bodu C a umístíme-li je tam vždy svým těžištěm, budou v rovnováze se všemi kruhy válce zůstávajícími na místě.

Archimédés zde přechází od kruhů, které „vyplňují“ dané těleso, k tomuto tělesu samotnému. Získaný vztah mezi obsahy kruhů vyplňujících tělesa tak přechází ve vztah mezi objemy těchto těles. Přitom všechny kruhy paraboloidu přenesené svým těžištěm do bodu C nahradíme paraboloidem zavěšeným v tomto bodě a všechny kruhy válce zůstávající na místě nahradíme válcem, který vyplňují. Těžiště tohoto válce leží ve středu osy AB, můžeme jej tedy považovat za válec zavěšený ve vzdálenosti $\frac{v}{2}$ od bodu A. Dostáváme tak rovnost

$$\frac{v}{2} \cdot V_{\text{válec}} = v \cdot V_{\text{paraboloid}}\,.$$

Jelikož je objem válce znám, můžeme snadno dopočítat objem úseče rotačního paraboloidu, který je polovinou objemu opsaného válce:

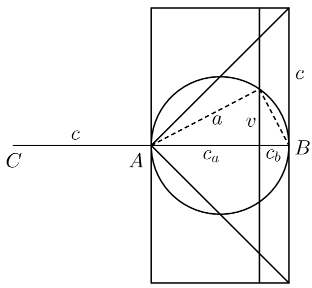
$$V_{\text{paraboloid}} = \frac{1}{2} \cdot V_{\text{válec}} = \frac{1}{2}\pi\, r^2\, v\,.$$

8.2 Objem koule

Určení objemu koule (*Metoda*, věta 2) není o mnoho komplikovanější. Uvažujme opět vahadlo CB podepřené v bodě A, $c = AC = AB$. Na něm nechť je umístěna koule o poloměru r tak, že její průměr $c = 2r$ splývá s ramenem AB. S ním také splývá osa válce a kuželu; podstava každého z těchto dvou těles má poloměr délky c, kužel má vrchol v bodě A. Situace v osovém řezu je naznačena na následujícím obrázku.

Veďme nyní řez válcem (a tedy i koulí a kuželem) rovinou kolmou k ose AB, kterou rozdělí na dva úseky: c_a a c_b.

Přirýsujeme-li trojúhelník (čárkovaně) nad průměrem $AB = c$, bude dle Thalétovy věty pravoúhlý. Při hledání vhodných vztahů tedy budeme moci využívat Pýthagorovu větu i Eukleidovy věty.



Poměr $\frac{c}{c_a}$ rozšíříme c, jmenovatel upravíme dle Eukleidovy věty o odvěsně a nakonec a^2 rozepíšeme pomocí Pýthagorovy věty:

$$\frac{c}{c_a} = \frac{c^2}{c\,c_a} = \frac{c^2}{a^2} = \frac{c^2}{c_a^2 + v^2}\,.$$

Rozšíříme-li poslední zlomek číslem π, můžeme jej interpretovat jako poměr obsahů jistých kruhů:

$$\frac{c}{c_a} = \frac{\pi c^2}{\pi c_a^2 + \pi v^2} = \frac{S_{\text{kruh\_válec}}}{S_{\text{kruh\_kužel}} + S_{\text{kruh\_koule}}}\,.$$

Po odstranění zlomků vznikne rovnost součinů

$$c \cdot (S_{\text{kruh\_kužel}} + S_{\text{kruh\_koule}}) = c_a \cdot S_{\text{kruh\_válec}}\,,$$

což můžeme interpretovat pomocí upraveného zákona rovnováhy na páce $r_1\,V_1 = r_2\,V_2$: kruh kuželu a kruh koule umístěné na jednom konci vahadla ve vzdálenosti c rovné průměru koule (tj. v bodě C) budou dohromady v rovnováze s kruhem válce zůstávajícím na místě.

Jelikož byl řez rovinou zvolen libovolně, platí uvedená rovnost pro všechny řezy vedené kolmo na AB. Přeneseme-li tedy všechny kruhy z kuželu a koule do bodu C a umístíme-li je tam vždy svým těžištěm, budou v rovnováze se všemi kruhy válce zůstávajícími na místě. Jelikož tyto kruhy vyplňují příslušná tělesa, přejdeme od vztahu mezi kruhy ke vztahu mezi těmito tělesy. Přitom všechny kruhy kuželu a koule přenesené svým těžištěm do bodu C nahradíme kuželem a koulí zavěšenými v tomto bodě; všechny kruhy válce zůstávající na místě dále nahradíme válcem, který vyplňují. Těžiště tohoto válce leží ve středu osy AB, můžeme jej tedy považovat za válec zavěšený ve vzdálenosti $\frac{c}{2}$ od bodu A. Dostáváme tak rovnost

$$c \cdot (V_{\text{kužel}} + V_{\text{koule}}) = \frac{c}{2} \cdot V_{\text{válec}}\,,$$

Vzniklou rovnost vydělíme c a dosadíme do ní známé objemy válce a kuželu; využijeme přitom rovnosti $c = 2r$, kde r je poloměr koule:

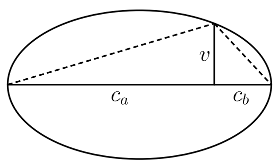
$$\frac{1}{3}\pi(2r)^2 \cdot 2r + V_{\text{koule}} = \frac{1}{2}\pi(2r)^2 \cdot 2r\,.$$

Odtud ihned dostáváme hledaný vztah pro objem koule

$$V_{\text{koule}} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})\pi(2r)^2 \cdot 2r = \frac{1}{6}\pi\, 8r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3\,.$$

8.3 Objem rotačního elipsoidu

Uvedený postup určení objemu koule lze velmi snadno modifikovat na případ rotačního elipsoidu (*Metoda*, věta 3), který vzniká rotací elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b kolem její hlavní osy.



Jediný rozdíl je v tom, že čárkovaný trojúhelník už není pravoúhlý, takže v úvodním vztahu nelze použít Eukleidovu a Pýthagorovu větu, tj. pro případ elipsy vzniklé v osovém řezu už nelze psát

$$c\, c_a = c_a^2 + v^2\,.$$

Tuto elipsu však lze převést na kružnici pomocí vhodné transformace souřadnic, např. dělením všech délek „ve směru“ hlavní poloosy číslem a a všech délek „ve směru“ vedlejší poloosy číslem b:

$$\frac{c}{a} \cdot \frac{c_a}{a} = \left(\frac{c_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{b}\right)^2\,, \tag{4}$$

čímž dostaneme vztah platný pro elipsu.

Platnost (4) lze ověřit pomocí analytické geometrie. Je-li

$$c = 2a, \quad c_a = a + x, \quad v = y,$$

dostaneme z (4) rovnici

$$\frac{2a}{a} \cdot \frac{a+x}{a} = \left(\frac{a+x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 ,$$

kterou lze upravit na tvar

$$\frac{a+x}{a^2} \cdot (2a - (a+x)) = \left(\frac{y}{b}\right)^2 ,$$

jehož levá strana je rovna $\frac{(a+x)\cdot(a-x)}{a^2} = \frac{a^2-x^2}{a^2}$, čímž skutečně dostáváme standardní rovnici elipsy

$$1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \left(\frac{y}{b}\right)^2 ,$$

na niž lze tedy vztah (4) převést.

Při určování objemu rotačního elipsoidu, který vznikne rotací elipsy (hlavní poloosa a, vedlejší poloosa b) kolem její hlavní osy, tedy budeme vycházet z rovnosti užité u koule:

$$\frac{c}{c_a} = \frac{c^2}{c_a^2 + v^2} ,$$

avšak transformované výše popsaným způsobem:

$$\frac{\frac{c}{a}}{\frac{c_a}{a}} = \frac{\left(\frac{c}{a}\right)^2}{\left(\frac{c_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{b}\right)^2} ,$$

neboli po vykrácení

$$\frac{c}{c_a} = \frac{c^2}{c_a^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 v^2} .$$

Porovnáním s postupem určení objemu koule je zřejmé, že poloměr r nahradíme v případě elipsoidu délkou hlavní poloosy a a člen obsahující v^2 reprezentuje kruh v elipsoidu, tj. v závěrečném vztahu pro výpočet jeho objemu se objeví koeficient $\left(\frac{a}{b}\right)^2$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 V_{\text{elipsoid}} = \frac{4}{3}\pi a^3 ,$$

odkud ihned dostáváme hledaný vztah pro objem rotačního elipsoidu

$$V_{\text{elipsoid}} = \frac{4}{3}\pi a b^2 .$$

9 Závěr

V první části textu jsme mohli pozorovat, že matematický důkaz byl zejména v obdobích intelektuálního rozkvětu ceněn pro vysokou míru jistoty vědění, kterou poskytoval. Většinu zásad správného vedení důkazu, které nacházíme ve velmi propracované podobě v Aristotelových dílech, užíváme dodnes. Některé však, podobně jako například podrobnou strukturu důkazů v Eukleidových *Základech*, považujeme v dnešní době za nadbytečné či zbytečně přísné. V antických textech se nám nicméně dochovalo mnohem více matematických spisů, než jen *Základy*; od dob před Eukleidem po období zániku antiky vznikaly texty velmi různorodé v přístupu k matematice, způsobu její prezentace i v samotných tématech.

Starořecké matematické spisy často obsahují výsledky prezentované hluboce promyšlenou formou. Jako jeden drobný příklad jsme uvedli ekvivalent dnešní kosinové věty; její odvození je v některých současných učebnicích složitější, než důkaz ve druhé knize *Základů*. Drobnou kuriozitou je inspirace Menaichmovým přístupem k hyperbole, jejíž body mají konstantní součin vzdáleností od dvou zadaných různoběžek. Celý text uzavírá několik příkladů užití Archimédovy metody, která je sice méně exaktním, přesto však mocným nástrojem k odvozování obsahů a objemů i poměrně složitých geometrických útvarů.

Věřím, že antická matematická díla patří ke skutečně klasickým spisům. Někdy inspirují postupy, které jsou elegantní, mocné, nestandardní, odvážné. Jindy nám připomínají naše vlastní úspěchy, například rozvinutou matematickou symboliku, a vedou nás k tomu, abychom si jich vážili; a nejen jich, ale i kořenů, z nichž současná matematika do značné míry vyrůstala.

Literatura

[1] Aristoteles, *Druhé analytiky*, přel. A. Kříž, pozn. K. Berka, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1962.

[2] B. Artmann, *Euclid – The Creation of Mathematics*, Springer, New York, 1999.

[3] O. Byrne, *The First Six Books of the Elements of Euclid*, William Pickering, London, 1847.

[4] K. Chemla (ed.), *The History of Mathematical Proof In Ancient Traditions*, Cambridge University Press, 2012.

[5] Euclid, *The Thirteen Books of the Elements*, vol. 1, 2nd ed., přel. T. L. Heath, Dover, 1956.

[6] *Eukleidovy Základy*, přel. Fr. Servít, JČM, Praha, 1907. `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Eukleides.pdf`

[7] J. L. Heiberg (ed.), *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii*, vol. III, Teubner, Lipsko, 1881.

[8] J. L. Heiberg (ed.), *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii*, vol. II, 2. vyd., Teubner, Lipsko, 1913.

[9] Proclus, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, přel. G. R. Morrow, Princeton University Press, 1970.

Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
halas@karlin.mff.cuni.cz

DŮKAZY, SUBDŮKAZY A PSEUDODŮKAZY

Jarmila Robová, Oldřich Odvárko

Příspěvek je zaměřen na užití důkazů ve výuce středoškolské matematiky. Jsou v něm uvedeny ilustrativní příklady důkazů, *subdůkazů* (částí důkazu) a *pseudodůkazů* (zdánlivých důkazů), které mohou motivovat žáky k potřebě argumentovat i k hledání chyb v předkládaných myšlenkových postupech.

1 Důkazy

K podstatě matematiky i její výuky od základní školy po školu vysokou patří zdůvodňování postupů, ověřování výsledků i dokazování předkládaných tvrzení. Přesné vymezení pojmu důkaz lze zformulovat v rámci formálně-axiomatického systému [1, 3], například v [3] se můžeme setkat s následujícím vymezením:

Důkazem v teorii T je konečná posloupnost formulí dané teorie taková, že každá formule je buď axióm, nebo je získána z předchozích formulí posloupnosti pomocí některého odvozovacího pravidla, které patří do daného systému.

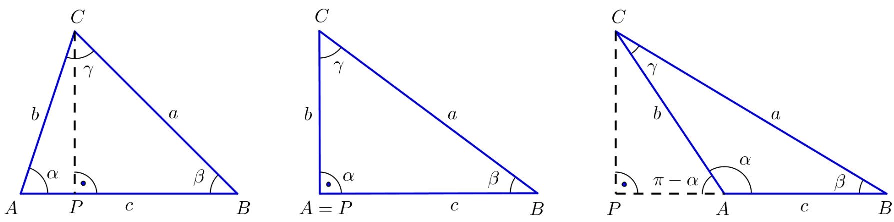
Tento striktní přístup k dokazování je pro potřeby výuky školské matematiky příliš formální a pro žáky by byl jen obtížně pochopitelný. K tomu, aby si žák uvědomil význam zdůvodňování i dokazování, je však třeba, aby se během výuky setkával s vhodnými úlohami a přístupy přiměřeně svému věku i matematickým znalostem a schopnostem.

Pro žáky základní školy bývá ověření platnosti předkládaného tvrzení pro konkrétní případ či názorný obrázek ilustrující dané matematické tvrzení často vhodnější než vlastní logický důkaz. Učitel by měl však žáky postupně vést k tomu, že ověření tvrzení pro jeden případ či uvedení obrázku samy o sobě nedokazují platnost předkládaného tvrzení, ale pomáhají jeho pochopení včetně porozumění a provedení důkazu. Ve výuce středoškolské matematiky by se již žáci měli častěji setkávat s důkazy důležitých tvrzení, například s důkazem sinové věty v tématu goniometrie [4].

Sinová věta. *Pro každý trojúhelník ABC, jehož vnitřní úhly mají velikosti α, β, γ a strany délky a, b, c, platí:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Nejdříve dokážeme platnost vztahu $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, přičemž rozdělíme množinu všech trojúhelníků v rovině na tři disjunktní podmnožiny v závislosti na velikosti úhlu α (ostrý, pravý, tupý), resp. v závislosti na možné poloze vrcholu A vzhledem k bodům B, P, kde P je pata kolmice vedené bodem C ke straně AB (obr. 1a, b, c).



Obr. 1a, b, c: Důkaz sinové věty

S využitím délky úsečky CP vyjádříme součiny $b \cdot \sin\alpha$ a $a \cdot \sin\beta$ a dospějeme k závěru, že se rovnají, neboť postupně platí:

- pro ostrý úhel α (obr. 1a):

$$|CP| = |AC|\sin\alpha = b\sin\alpha$$
$$|CP| = |BC|\sin\beta = a\sin\beta$$

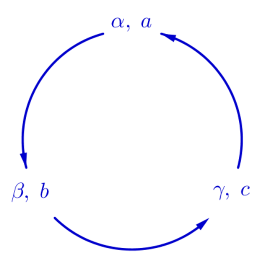
- pro pravý úhel α (obr. 1b):

$$|CP| = |AC| = b = b\sin\tfrac{\pi}{2} = b\sin\alpha$$
$$|CP| = |BC|\sin\beta = a\sin\beta$$

- pro tupý úhel α (obr. 1c):

$$|CP| = |AC|\sin(\pi-\alpha) = b\sin(\pi-\alpha) = b\sin\alpha$$
$$|CP| = |BC|\sin\beta = a\sin\beta$$

Důkazy zbývajících rovností $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ a $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$ se provedou jednoduše s využitím cyklické záměny (obr. 2).



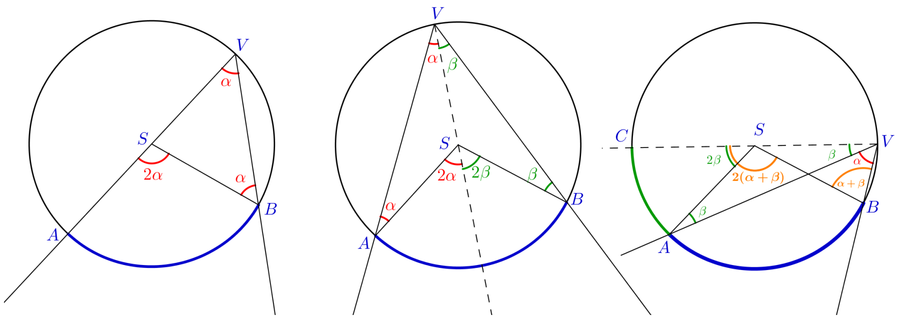
Obr. 2: Cyklická záměna

2 Subdůkazy

V gymnaziálních učebnicích se můžeme setkat s tím, že zdůvodnění platnosti matematického tvrzení probíhá formou *subdůkazů*. Subdůkazem zde rozumíme důkaz provedený pouze pro vlastní podmnožinu objektů, pro které má tvrzení platit. Ilustrujme si tento přístup na několika konkrétních příkladech. Jako první uvedeme větu o obvodových a středových úhlech příslušných k danému oblouku kružnice [5].

Věta o obvodových a středových úhlech. *Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku.*

V případě zdůvodnění vztahu mezi velikostmi obvodového a středového úhlu příslušných ke stejnému oblouku AB kružnice k se středem S obvykle ve výuce postupujeme tak, že nejprve provedeme rozklad množiny všech středových úhlů podle délky oblouku kružnice, ke kterému přísluší (menší oblouk než půlkružnice, půlkružnice, větší oblouk) a žákům ukážeme subdůkaz pro menší oblouk. Tento případ rozdělíme také na tři části podle vzájemné polohy středu S a obvodového úhlu AVB (obr. 3a, b, c).



Obr. 3a, b, c: Věta o obvodových a středových úhlech – menší oblouk

Na obr. 3a je zachycena situace, kdy střed kružnice S leží na rameni obvodového úhlu AVB o velikosti α. Na základě poznatku, že v libovolném trojúhelníku je velikost vnějšího úhlu u jednoho vrcholu rovna součtu velikostí vnitřních úhlů u zbývajících dvou jeho vrcholů, a s pomocí rovnoramenného trojúhelníku SVB zdůvodníme požadovanou vlastnost:

$$|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle SVB| + |\sphericalangle SBV| = 2\,|\sphericalangle AVB|$$

Na obr. 3b vidíme, že bod S je vnitřním bodem obvodového úhlu AVB, využijeme tedy pomocnou polopřímku VS, čímž situaci převedeme na předchozí případ. Opět využijeme uvedeného poznatku o vnějším úhlu u vrcholu S v rovnoramenných trojúhelnících SVA, SVB. Tedy platí:

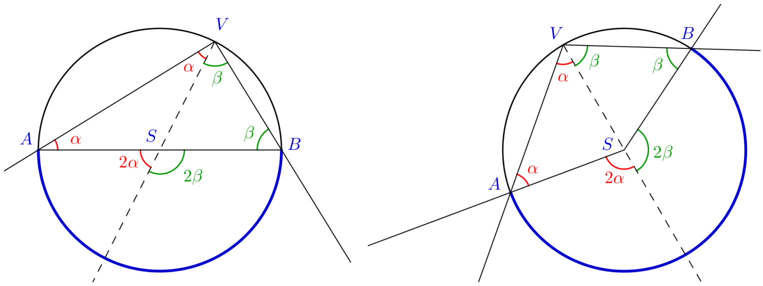
$$|\sphericalangle ASB| = 2\,|\sphericalangle AVB|$$

Na obr. 3c je zachycena situace, kdy bod S leží vně obvodového úhlu AVB. I v tomto případě s využitím pomocné polopřímky VS určíme v rovnoramenných trojúhelnících SVA, SVB velikost vnějšího úhlu u vrcholu S:

$$|\sphericalangle CSA| = 2\,|\sphericalangle CVA| = 2\beta$$
$$|\sphericalangle CSB| = 2\,|\sphericalangle CVB| = 2(\alpha + \beta)$$

Pro středový úhel ASB pak platí:

$$|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle CSB| - |\sphericalangle CSA| = 2(\alpha + \beta) - 2\beta = 2\alpha$$



Obr. 4a, b: Věta o obvodových a středových úhlech – půlkružnice, větší oblouk

V případě obvodového úhlu příslušného k půlkružnici (obr. 4a) a k většímu oblouku (obr. 4b) je zřejmé, že bod S je vždy vnitřním bodem obvodového úhlu AVB, tedy důkaz je zcela analogický s případem z obr. 3b. Subdůkazy pro půlkružnici a větší oblouk můžeme ponechat žákům jako cvičení. Považujeme však za důležité, aby žáci byli seznámeni s tím, že zdůvodnění tvrzení pro jednu podmnožinu objektů, tj. pro menší oblouk, ještě není kompletním důkazem obecného tvrzení. V případě subdůkazu pro půlkružnici můžeme využít Thaletovu větu, kterou žáci již znají ze základní školy.

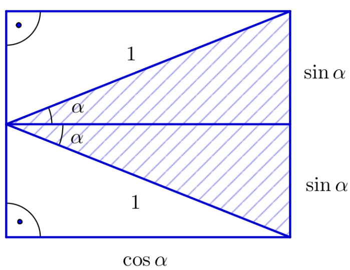
Další ilustrace se týká sinu dvojnásobného úhlu [2].

Věta o sinu dvojnásobného úhlu. *Pro každé reálné číslo α platí:*

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$$

Ke zdůvodnění platnosti vztahu využijeme obrázek 5, dále předpokládáme znalost definicí goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku a vzorce pro obsah S trojúhelníku ABC:

$$S = \frac{1}{2} a v_a = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$$



Obr. 5: Sinus dvojnásobného úhlu

Obsah vyšrafovaného trojúhelníku (obr. 5) je podle výše uvedeného vzorce

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 2\alpha.$$

Současně je obsah tohoto trojúhelníku roven polovině obsahu celého obdélníku, tj.

$$S = \cos\alpha \sin\alpha.$$

Porovnáním těchto obsahů získáme požadovanou rovnost.

Uvedené zdůvodnění je názorné a pro žáky přehledné. Je třeba však žáky upozornit, že uvedeným postupem-subdůkazem jsme zdůvodnili platnost vzorce pouze pro $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ale nelze daný postup analogicky převzít. Tvrzení pro všechna reálná čísla α lze například dokázat s využitím součtového vzorce pro $\sin(\alpha + \beta)$ [4].

Podívejme se na další příklad, kterým jsme se inspirovali v jedné vyučovací hodině matematiky.

Věta. *Kosinus je sudá funkce.*

Definičním oborem funkce kosinus je množina všech reálných čísel. Zvolíme libovolné reálné číslo, např. $x = \frac{\pi}{4}$, a prověříme, zda platí vztah $\cos\frac{\pi}{4} = \cos(-\frac{\pi}{4})$. Z jednotkové kružnice plyne, že $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $\cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ověřili jsme, že pro zvolené x platí $f(x) = f(-x)$, tedy proto je kosinus sudá funkce.

Subdůkaz se v tomto případě omezil na jednoprvkovou podmnožinu množiny všech reálných čísel. Analogicky bychom mohli postupovat pro další jednoprvkové podmnožiny, ale v reálném čase bychom tento důkaz nikdy nedokončili. Záludnost uvedeného postupu, kdy místo logického zdůvodnění vlastnosti pro všechna reálná čísla použijeme její prověření pomocí dosazení jedné konkrétní hodnoty, se naplno projeví v ilustraci uvedené v následující části.

3 Pseudodůkazy

Pseudodůkazem neboli zdánlivým důkazem rozumíme postup, ve kterém jsou použity logicky chybné úvahy a metody, které se mohou žákům na první pohled jevit jako správné. Nejedná se tedy o procesy, ve kterých se dopustíme pouze numerické chyby či chyby v úpravě výrazů. Uvedeme opět několik konkrétních příkladů.

Příklad. *Funkce $f : y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ je sudá.*

Definičním oborem funkce f je množina všech reálných čísel. Zvolíme libovolné reálné číslo, např. $x = \frac{\pi}{4}$, a prověříme, zda platí vztah $\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) = \cos(-(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}))$. Z jednotkové kružnice víme, že $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $\cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pro zvolené x platí, že $f(x) = f(-x)$, tedy daná funkce f je sudá.

Uvedeným postupem jsme „prokázali" sudost dané funkce, přitom se však jedná o funkci sinus, které je lichá. S obdobnou situací se můžeme například setkat při řešení nerovnic.

Příklad. *Množinou řešení nerovnici* $\sqrt{2x-1} \leq x$ *s neznámou* $x \in \mathbb{R}$ *je* $\mathbb{R}$.

Nejdříve umocníme výrazy na obou stranách nerovnice a postupně upravíme:

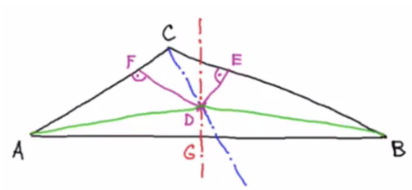
$$\begin{aligned} 2x - 1 &\leq x^2 \\ 0 &\leq x^2 - 2x + 1 \\ 0 &\leq (x-1)^2 \end{aligned}$$

Poslední nerovnost platí pro všechna reálná čísla. To „dokážeme“ dosazením několika konkrétních hodnot, např. $x = 1$, $x = 2$, čímž „prověříme správnost“ nalezeného řešení a dospějeme k závěru, že řešením je množina $\mathbb{R}$. Nevzali jsme však v úvahu definiční obor výrazu s druhou odmocninou, kterým je interval $\left\langle \frac{1}{2}, \infty \right)$.

Ve výuce matematiky hrají důležitou roli obrázky a názorná schémata. Při využití obrázku v matematických důkazech bychom však měli být opatrní, neboť při využití neadekvátního obrázku můžeme namísto důkazu vytvořit pseudodůkaz a dospět tak k chybným závěrům. Známým příkladem je pseudodůkaz uvedený v další ilustraci, který lze například nalézt v publikacích [6, 7].

Příklad. *Všechny trojúhelníky jsou rovnoramenné.*

Uvažujme obecný trojúhelník ABC na obrázku 6.



Obr. 6: Všechny trojúhelníky jsou rovnoramenné (zdroj: [8])

Nejdříve sestrojíme osu strany AB procházející středem G této strany, dále osu úhlu ACB a průsečík D těchto os. Z bodu D vedeme kolmice ke stranám a, b, jejich paty označíme E, F. Platí:

$$\begin{aligned} \Delta DCF &\cong \Delta DCE \quad (usu) \\ |CF| &= |CE| \end{aligned}$$

Rovněž platí:

$$\begin{aligned} \Delta ADG &\cong \Delta BDG \quad (sus) \\ |AD| &= |BD| \end{aligned}$$

Také platí:

$$\begin{aligned} \Delta ADF &\cong \Delta BDE \quad (Ssu) \\ |AF| &= |BE| \end{aligned}$$

Odtud:

$$\begin{aligned} |AF| + |CF| &= |BE| + |CE| \\ |AC| &= |BC| \end{aligned}$$

Trojúhelník ABC je tedy rovnoramenný.

V tomto případě nás na scestí zavedl náčrtek situace na obrázku 6, neboť průsečík zmíněných os nemůže ležet uvnitř trojúhelníku a také jedna z pat kolmic vždy leží na prodloužení příslušné strany trojúhelníku. Současně si můžeme uvědomit, že v rovnoramenném trojúhelníku vždy osa základny splývá s osou úhlu ležícího proti základně trojúhelníku.

Falešné úsudky často vznikají z nedostatečných znalostí či pochopení matematické teorie, a to zejména v případech, čím abstraktnější a méně známá je zkoumaná oblast matematiky [6]. Pseudodůkazy, ve kterých „zdůvodníme“ platnost evidentně nepravdivého tvrzení jako v poslední ilustraci, lze využít ve výuce jako motivační prvek. Prostřednictvím takových pseudodůkazů můžeme u žáků vyvolat potřebu důkazu, tj. motivovat žáky ke zdůvodnění platnosti daného tvrzení či naopak k vyvrácení hypotézy.

4 Závěr

Vyučování důkazům patří k nejnáročnějším činnostem v práci učitele matematiky, a to zejména proto, že pro většinu žáků jsou úlohy důkazového typu obtížné, a proto i neoblíbené. Přesto by učitel neměl na tento aspekt výuky matematiky rezignovat. Jedním z cílů gymnaziálního vzdělávání je seznámit žáky s teoretickými základy různých vědních oborů včetně hlavních metod práce, aby se žák mohl zodpovědně rozhodnout, kterému z nich se chce dále věnovat ve studiu na vysoké škole. Argumentování, zdůvodňování a dokazování patří k základním způsobům práce v matematice, a je-li naším cílem předat žákům jisté znalosti z matematiky, nelze tyto znalosti odtrhnout od metod, kterými se k nim dospělo.

Literatura

[1] J. Blažek, B. Kussová, *Množiny a přirozená čísla (na náměty P. Vopěnky)*, SPN, Praha, 1977.

[2] F. Kuřina, *Rozumět nebo umět*, Matematika–fyzika–informatika 21 (2011), 193–206.

[3] P. Květoň, *Kapitoly z didaktiky matematiky*, Pedagogická fakulta v Ostravě, 1982.

[4] O. Odvárko, *Matematika pro gymnázia: Goniometrie*, Prometheus, Praha, 1994.

[5] E. Pomykalová, *Matematika pro gymnázia: Planimetrie*, Prometheus, Praha, 1993.

[6] R. Thiele, *Matematické důkazy*, SNTL, Praha, 1985.

[7] J. Vančura, *Časté chyby v řešení matematických úloh*, závěrečná práce, MFF UK, Praha, 2015.

[8] Matika Mailem: *Hra*. `http://matikamailem.cz/the-game/`

doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
robova@karlin.mff.cuni.cz

doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
odvarko@karlin.mff.cuni.cz

ZDŮVODŇOVÁNÍ V POČTU PRAVDĚPODOBNOSTI

Magdalena Hykšová

V příspěvku se budeme věnovat různým způsobům zdůvodňování ve středoškolském učivu o pravděpodobnosti. Zaměříme se především na podmíněnou pravděpodobnost (např. problematika falešně pozitivních a falešně negativních testů) a posuzování věrohodnosti (např. usuzování o účinnosti léků či léčebných metod). Podíváme se na konkrétní příklady z reálného světa a porovnáme různé přístupy k jejich řešení a zdůvodňování obecných postupů.[1]

1 Výčet možností

Bohatým zdrojem zajímavých motivačních úloh pro výuku počtu pravděpodobnosti je oblast hazardních her. Jejich rozbor lze často založit na jednoduchém výčtu všech možností, které mohou nastat, a výčtu možností příznivých, kdy získáme nějakou výhru. Přitom se mohou studenti poměrně přirozeně seznámit s pojmem *střední* či *očekávané hodnoty* výhry, resp. zisku.

Jednoduché a zároveň poučné příklady poskytují výherní hrací přístroje; na nich si studenti také uvědomí, že pravidla jsou vždy nastavena tak, aby z dlouhodobého hlediska zajistila zisk provozovatelům heren a kasin, nikoli hráčům, a snad se tím sníží pravděpodobnost, že v dospělosti podlehnou hráčské vášni (anebo se alespoň budou věnovat například pokeru, kde mohou uplatnit své schopnosti a výsledek ovlivnit).

Příklad: výherní hrací přístroj

V restauraci je provozován starý výherní hrací přístroj se třemi válci, z nichž každý obsahuje celkem deset symbolů. Na prvním válci je jedno srdce, dvě podkovy, dva čtyřlístky, dvě jahody, jeden banán a dva citróny, na druhém je jedno srdce, jedna podkova, dva čtyřlístky, jedna jahoda, jeden banán, dva citróny a dvě švestky a na třetím je jedno srdce, dvě podkovy, jeden čtyřlístek, jedna jahoda, jeden banán a čtyři švestky. Sázka na jednu hru činí 2 Kč. Za tři srdce se vyplácí výhra 300 Kč, za tři podkovy 200 Kč, za tři čtyřlístky 100 Kč, za tři jahody 10 Kč a za tři banány 2 Kč. Vypočítejte pravděpodobnosti jednotlivých výherních kombinací. Kolik procent ze vsazené částky činí očekávaná výhra?

Řešení

Každý ze tří válců obsahuje deset „políček“, existuje tedy celkem $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ možných výsledků. Výherní kombinace *tři srdce* se přitom objeví v jediném případě, protože každý válec obsahuje právě jedno srdce. Pravděpodobnost, že se válce zastaví právě na této kombinaci, je tedy $1/1000 = 0{,}001$,

[1] Více příkladů z této oblasti, bezprostředně použitelných ve výuce, jsme se snažili poskytnout ve sbírce [3]. Z další literatury zaměřené na pochopení základních principů teorie pravděpodobnosti, motivaci pro její studium a rozvoj pravděpodobnostního myšlení zde připomeňme alespoň knihy [1], [2] a [4].

tj. 0,1 %. Výherní kombinace *tři podkovy* se objeví ve čtyřech případech (první a třetí válec obsahují po dvou podkovách), příslušná pravděpodobnost je proto $4/1000 = 0{,}004$, tj. 0,4 %. Podobně *tři čtyřlístky* se objeví rovněž ve čtyřech případech, *tři jahody* ve dvou případech a *tři banány* v jednom případě.

Můžeme si tedy představit, že při dlouhém opakování automat vyplatí přibližně v jednom z 1000 případů výhru 300 Kč, ve čtyřech případech 200 Kč, ve čtyřech případech 100 Kč, ve dvou případech 10 Kč, v jednom případě 2 Kč a ve zbývajících 988 případech nebude vyplaceno nic; hráč přitom zaplatí pokaždé 2 Kč. Při 1000 opakováních tedy bude vyplaceno průměrně

$$(300 \cdot 1 + 200 \cdot 4 + 100 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 2 \cdot 1)\ \text{Kč} = 1522\ \text{Kč},$$

na jednu hru pak připadá *střední* či *očekávaná výhra*

$$\left(\frac{300 \cdot 1 + 200 \cdot 4 + 100 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{1000}\right)\ \text{Kč} = 1{,}522\ \text{Kč},$$

což představuje 76,1 % ze vsazené částky.

Dodejme, že výraz vlevo můžeme zapsat ve tvaru obvyklém pro střední hodnotu, tj. jako součet součinů jednotlivých výher a příslušných pravděpodobností,

$$\left(300 \cdot \frac{1}{1000} + 200 \cdot \frac{4}{1000} + 100 \cdot \frac{4}{1000} + 10 \cdot \frac{2}{1000} + 2 \cdot \frac{1}{1000} + 0 \cdot \frac{988}{1000}\right)\ \text{Kč},$$

a studenty tak nenásilně přivést k obecnému pojmu střední hodnoty náhodné veličiny.

Studenti, kteří jsou s tímto pojmem již obeznámeni, jej mohou samozřejmě použít hned na začátku. Popsané výsledky lze shrnout do následující tabulky:

Výherní kombinace	**Počet možností**	**Pravděpodobnost** p_i	**Výhra** x_i	**Součin** $x_i p_i$
Tři srdce	1	0,001	300 Kč	0,300 Kč
Tři podkovy	4	0,004	200 Kč	0,800 Kč
Tři čtyřlístky	4	0,004	100 Kč	0,400 Kč
Tři jahody	2	0,002	10 Kč	0,020 Kč
Tři banány	1	0,001	2 Kč	0,002 Kč
Celkem	1	**0,012**		**1,522 Kč**

2 Četnosti a podmíněná pravděpodobnost

Úlohy týkající se podmíněných pravděpodobností jsou pro řadu studentů značně neoblíbené, odvození využívající Bayesův vzorec příliš nechápou a závěrům pak často ani nevěří. Založí-li se však řešení na úvahách o četnostech, stanou se snadno pochopitelnými i pro matematicky nejméně zdatné jedince.

V této části bychom zároveň chtěli poukázat na motivační potenciál podobných úloh. Studenti si často neuvědomují souvislost probíraného učiva s reálným světem; přitom zrovna pravděpodobnost – a podmíněná pravděpodobnost obzvlášť – nás provází takřka na každém kroku a většina z nás se nejednou setká s potřebou jejího výpočtu. Typickým příkladem jsou testy zjišťující přítomnost různých nemocí či vad. Studenti si mohou docela snadno představit, že se s nimi někdy setkají, ať už v roli lékaře, který by měl být schopen správně interpretovat jejich výsledky a učinit správné závěry, v roli pacienta, který se má s výsledkem testu nějakým způsobem vyrovnat, anebo třeba v roli politika, který má možnost ovlivnit, zda bude určitý test použit k plošnému screeningu.

Úlohy tohoto typu se mohou týkat vyšetření na přítomnost HIV (třeba jen rutinního v rámci preventivní prohlídky například při nástupu do nového zaměstnání či v průběhu těhotenství), mamografického vyšetření prsu, testů pátrajících po vývojových vadách plodu a podobně.[2] V tomto příspěvku se zaměříme na test, jehož cílem je odhalit karcinom prostaty. Toto téma je dodnes velice aktuální; stále se například vedou diskuse o tom, zda by se takovéto vyšetření nemělo provádět plošně a pravidelně u všech mužů nad určitou věkovou hranici. Aniž bychom chtěli jakkoli zpochybňovat význam prevence a snah o včasné odhalení nádorových onemocnění, poukážeme v následujícím příkladu na to, že podobná rozhodnutí nejsou vždy tak jednoduchá, jak by se na první pohled mohlo zdát, a rozhodně se nejedná jen o otázku potřebných finančních prostředků.

Příklad: vyšetření PSA

Pan Opatrný šel v šedesáti letech na preventivní zdravotní prohlídku. Lékař mu v rámci odběru krve nechal vyšetřit i tzv. PSA marker, který se používá k odhalení karcinomu prostaty, a potom mu oznámil, že výsledek tohoto testu vyšel pozitivní. Nyní je pan Opatrný objednán ke specialistovi, který má na základě opakovaného testu a dalších vyšetření doporučit, co dále. Mezitím hledá informace o testu PSA. Kromě jiného se dočetl, že PSA je zkratka pro *prostatický specifický antigen*, bílkovinu produkovanou buňkami prostaty. Hladina bývá zvýšená u většiny nemocných s karcinomem prostaty, kromě toho ale i z řady jiných příčin. Pro upřesnění se zkoumá ještě poměr tzv. volné a vázané bílkoviny PSA, což umožní zvýšit tzv. senzitivitu testu přibližně na 80 % a specificitu na 90 %. Pan Opatrný dále našel, že *senzitivita* testu udává pravděpodobnost, že osoba s danou nemocí bude mít pozitivní test, a *specificita* udává pravděpodobnost, že zdravá osoba bude mít test negativní. Nakonec si

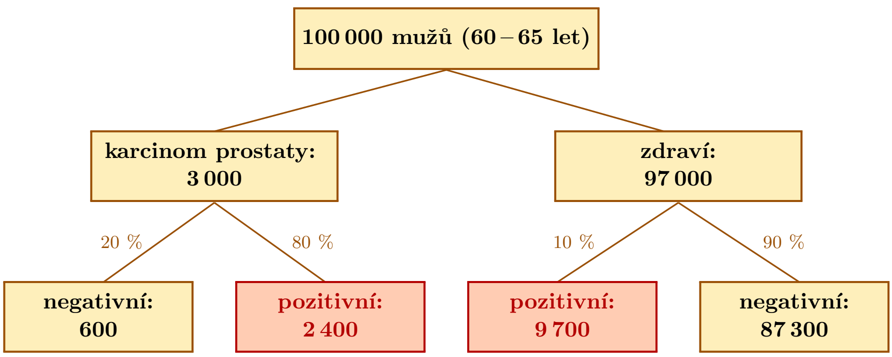
[2] Tyto příklady jsou rozebrány v citované sbírce [3].

uvědomil, že pravděpodobnost, že má rakovinu, nemusí být zrovna 80 nebo 90 %, jak se mu zpočátku zdálo. Aby správnou hodnotu vypočítal, začal hledat informace o výskytu karcinomu prostaty v České republice. Dočetl se, že výskyt tohoto onemocnění výrazně narůstá s věkem: zatímco na 100 000 mužů ve věku 45 až 49 let připadá přibližně 100 mužů, o nichž je známo, že s nemocí žijí, ve věkové kategorii 60 až 65 let to jsou již přibližně 3000 nemocných.

a) Dokážete panu Opatrnému poradit, jaká je po prvním pozitivním testu pravděpodobnost, že má skutečně rakovinu prostaty?
b) Co když bude ve stejné situaci muž, kterému je 46 let?
c) Jak se vyhlídky pana Opatrného změní, když mu specialista oznámí, že vzhledem k rodinné anamnéze je v jeho případě riziko vzniku karcinomu prostaty například devětkrát vyšší než u běžné populace?

Řešení

a) Uvažujme pro názornost 100 000 Čechů ve věku 60 až 65 let. Podle zadání mají přibližně 3000 z nich karcinom prostaty (KP), ostatní jsou v tomto ohledu zdraví (Z). Přibližně 80 % nemocných bude mít pozitivní test (T^+), ostatní nemocní budou mít test falešně negativní. Pozitivní test však bude mít také 10 % zdravých mužů:



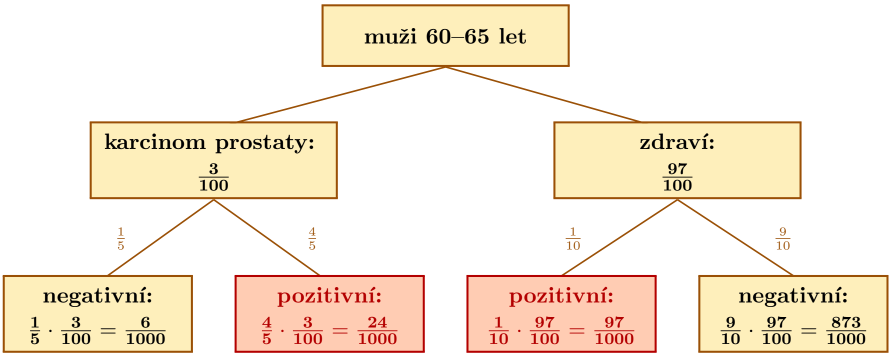
Pozitivní test tedy vyjde celkem 12 000 mužů, z nichž jen 2 400 má karcinom prostaty; zbývajících 9 700 má výsledek falešně pozitivní. Pravděpodobnost, že šedesátiletý muž, jemuž vyšel pozitivní test PSA, má skutečně karcinom prostaty, je tedy

$$P(KP\,|\,T^+) = \frac{2\,400}{2\,400 + 9\,700} \doteq 0{,}198, \quad \text{tj. necelých 20 \%.}$$

Situaci můžeme znázornit také tabulkou, z níž snadno vyčteme stejný výsledek:

	Karcinom prostaty	**Zdraví**	**Celkem**
Pozitivní	**2 400**	**9 700**	**12 100**
Negativní	600	87 300	87 900
Celkem	3 000	97 000	100 000

Místo absolutních četností můžeme pracovat také s četnostmi relativními, které přímo vyjadřují pravděpodobnosti jednotlivých jevů:

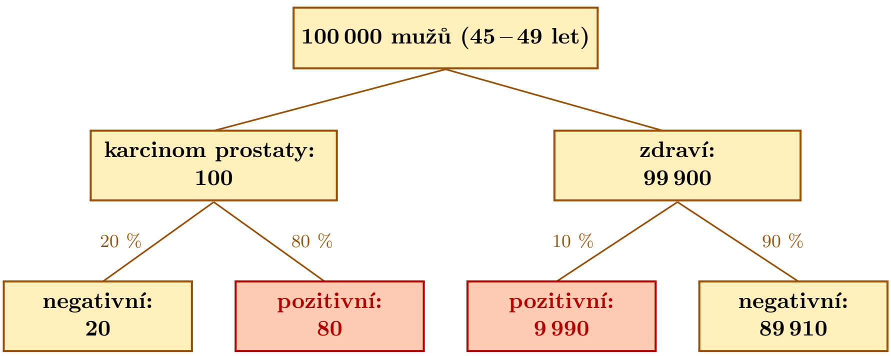


Na tomto schématu je dobře vidět souvislost s Bayesovým vzorcem, který představuje jinou (i když pro mnoho lidí méně pochopitelnou) možnost, jak problémy tohoto typu řešit:

$$P(KP\,|\,T^+) = \frac{P(KP \cap T^+)}{P(T^+)} = \frac{P(KP \cap T^+)}{P(T^+|KP)P(KP) + P(T^+|Z)P(Z)}$$

$$P(KP\,|\,T^+) = \frac{24}{24+97} \doteq 0{,}198$$

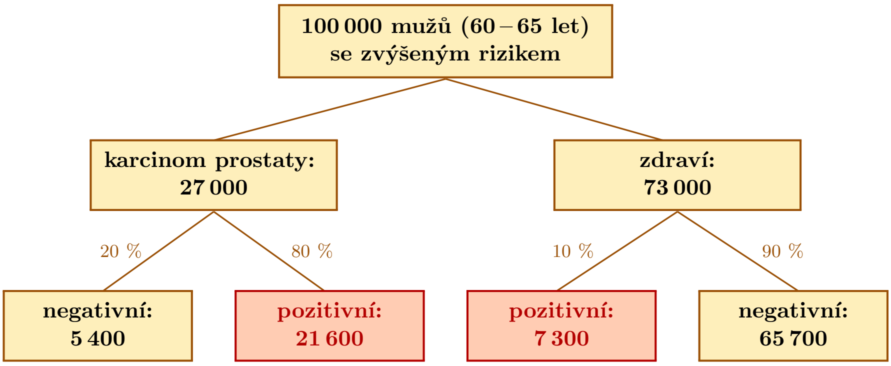
b) Nyní máme uvažovat muže ve věku 46 let. Postup řešení je stejný jako v předchozím bodě, jen budeme místo 3 000 uvažovat pouze 100 nemocných na 100 000 obyvatel:



Hledaná pravděpodobnost je nyní

$$P(KP\,|\,T^+) = \frac{80}{80 + 9\,990} \doteq 0{,}008, \quad \text{tj. } 0{,}8\ \%.$$

c) Při devítinásobně vyšším riziku vzniku karcinomu prostaty vychází hledaná pravděpodobnost méně optimisticky:



$$P(KP\,|\,T^{+}) = \frac{21\,600}{21\,600 + 7\,300} \doteq 0{,}747, \quad \text{tj. } 74{,}7\ \%.$$

Na tomto příkladu je dobře patrné, že pravděpodobnost, že pacient, jemuž vyšel pozitivní test, skutečně trpí danou chorobou, závisí nejen na kvalitě testu, ale zcela zásadně také na výskytu nemoci v populaci. Je-li nemoc vzácná, může být i při velké přesnosti testu vysoká pravděpodobnost falešně pozitivního výsledku; bez znalosti těchto souvislostí pak mnoho lidí prožívá zbytečný strach, než je dalším vyšetřením přítomnost nemoci vyloučena.[3]

V případě karcinomu prostaty se navíc většina urologických společností staví k jeho plošnému vyhledávání rezervovaně především z jiných, závažnějších důvodů. Jedním problémem je velké množství zbytečně provedených biopsií, které jsou často spojeny s nežádoucím krvácením či infekcí. Hlavní potíž je pak v tom, že nádory prostaty se na rozdíl od jiných nádorových onemocnění často vyskytují ve formě, která není agresivní a pacienta neohrožuje na životě, či probíhá tak pomalu, že se za pacientova života vůbec nestačí projevit. Na jedné straně je tedy díky vyšetřování PSA rakovina prostaty zachycena ve většině případů o deset a více let dříve, než tomu bylo v minulosti, nádory jsou častěji ohraničené na prostatu, méně agresivní a včas zahájená léčba znamená pro většinu pacientů vyléčení. Na druhé straně má léčba řadu nepříjemných vedlejších účinků, které výrazně snižují kvalitu života (velmi často je to například inkontinence a impotence), takže není žádoucí, aby ji podstupovali zbytečně i ti, jimž by nádor za jejich života nezpůsobil vážnější problémy. Typ nádoru se zkoumá pomocí biopsie a řadě pacientů se nakonec doporučí pouze dlouhodobé sledování. V této souvislosti dodejme, že z údajů rozsáhlé studie zahrnující více než 162 tisíc mužů ve věku 55 až 69 let ze sedmi evropských center vyplynulo, že aktivní, plošné vyšetřování v pravidelných intervalech sice vedlo ke snížení úmrtnosti na karcinom prostaty (ve srovnání s běžnou populací), ale za cenu

[3]To je společný problém nejrůznějších screeningů, které umožňují (často za cenu poměrně vysoké falešné pozitivity) vyčlenit v prvním kole většinu zdravých osob a dále pak vyšetřovat jen ty, u nichž je podezření, že danou nemoc mají; k tomu se obvykle používají metody, které jsou sice přesnější, ale také dražší či znamenají výraznější zásah do organismu.

velkého počtu pacientů, kteří museli léčbu podstoupit: v období sledování 11 let bylo nutno vyšetřit 1055 mužů a následně z těchto léčit 37, aby se zabránilo jednomu úmrtí na karcinom prostaty.[4]

3 Posuzování věrohodnosti

S medicínou – a tedy s naším zdravím a životem – souvisí i poslední téma, na které bychom se v tomto příspěvku chtěli podívat, totiž posuzování věrohodnosti. Je-li třeba prokázat, že určitý výsledek nastal například díky pozitivnímu působení jistého léku či procedury, zvláštním schopnostem jedince apod., může se určit pravděpodobnost, že by ke stejnému nebo ještě výraznějšímu výsledku (např. stejně nebo ještě více uzdravených pacientů) došlo vlivem náhody za předpokladu, že by žádný pozitivní účinek neexistoval. Tato pravděpodobnost se nazývá *p-hodnota*; je-li nižší než stanovená hranice (nejčastěji 5 %, někdy se požaduje jen 1 % nebo ještě méně), považuje se obvykle výsledek za statisticky významný, tj. prokazující, že k němu nedošlo pouhou náhodou.[5]

Příklad: účinnnost léčby

Představme si, že určitá nemoc, která se vyskytuje velmi vzácně a dosud se na ni nepodařilo nalézt účinnou léčbu, vede k úmrtí ve 25 % případů. Farmaceutická firma vyvine nový lék, o němž prohlásí, že snižuje úmrtnost na tuto chorobu. Pro ověření je objednána odborná studie. Předpokládejme, že k prokázání účinnosti je požadována p-hodnota menší než 5 %.

a) Lék byl podán deseti pacientům a všichni přežili. Prokazuje takováto studie účinnost léku?
b) Kolika pacientům by musel být lék podán, aby skutečnost, že všichni přežili, prokázala jeho účinnost?
c) Lék byl podán 20 pacientům, z nichž 18 přežilo a 2 zemřeli. Prokazuje takováto studie účinnost léku? Co když jich přežije 19 a 1 zemře?

Řešení

a) Pro každého z deseti pacientů je pravděpodobnost přežití bez účinného léku 75 %. Pravděpodobnost, že všichni přežili čistě náhodou, aniž by byl lék účinný, je proto

$$\underbrace{0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdots 0{,}75}_{10\times} = 0{,}75^{10} \doteq 0{,}0563, \text{ tj. } 5{,}63\ \%.$$

Vypočtená p-hodnota je větší než 5 %, studie proto není dostatečně průkazná.

b) Pro n pacientů je p-hodnota rovna $0{,}75^n$; řešíme tedy nerovnici

$$0{,}75^n < 0{,}05.$$

[4] Podrobnější informace lze nalézt na webových stránkách českých a zahraničních onkologických a urologických institucí, například: `http://www.cus.cz`, `http://www.linkos.cz`, `http://www.uroweb.cz`, `http://www.cancer.gov` aj.

[5] Připomeňme, že hypotéza, že žádný pozitivní účinek neexistuje, se obvykle označuje jako *nulová*, zatímco hypotéza, podle níž k pozitivnímu účinku dochází, se označuje jako *alternativní*.

Po zlogaritmování dostaneme

$$n \log 0{,}75 < \log 0{,}05, \quad \text{tedy} \quad n > \frac{\log 0{,}05}{\log 0{,}75} \doteq 10{,}41.$$

Nejmenší přirozené číslo splňující tuto podmínku je $n = 11$. K prokázání účinnosti by tedy lék musel být podán alespoň jedenácti pacientům a všichni by museli přežít.

c) Hledejme pravděpodobnost, že by se stejný nebo ještě výraznější výsledek objevil pouhou náhodou, tj. že by alespoň 18 z 20 pacientů přežilo náhodou i v případě, že by byl lék neúčinný. Tato pravděpodobnost je součtem pravděpodobnosti, že přežije právě 18 pacientů a zbývající dva zemřou (přitom existuje $\binom{20}{2}$ možností, jak vybrat tyto dva pacienty), pravděpodobnosti, že přežije právě 19 pacientů a jeden zemře, a pravděpodobnosti, že přežije všech 20 pacientů:

$$\binom{20}{2} \cdot 0{,}75^{18} \cdot 0{,}25^2 + 20 \cdot 0{,}75^{19} \cdot 0{,}25^1 + 0{,}75^{20} \doteq 0{,}0923, \text{ tj. } 9{,}23\ \%,$$

což je více než požadovaná hranice 5 %. Studie tedy účinnost léku neprokazuje.

Nyní vypočítejme pravděpodobnost, že by náhodou přežilo alespoň 19 z 20 pacientů, kdyby byl lék neúčinný:

$$20 \cdot 0{,}75^{19} \cdot 0{,}25^1 + 0{,}75^{20} \doteq 0{,}0243, \text{ tj. } 2{,}43\ \%.$$

Nalezená p-hodnota je nižší než požadovaná hranice 5 %, účinnost léku je proto prokázána.

Literatura

[1] J. Anděl, *Matematika náhody*, Matfyzpress, Praha, 2007.

[2] G. Gigerenzer, *Calculated Risks. How to Know When Numbers Deceive You,* Simon & Schuster, New York, 2002.

[3] J. Robová a kol., *Sbírka aplikačních úloh ze středoškolské matematiky,* Prometheus, Praha, 2014.

[4] J. S. Rosenthal, *Struck by Lightning: The Curious World of Probabilities*, Harper Collins, Toronto, 2005 [český překlad: M. Hykšová, *Zasažen bleskem. Podivuhodný svět pravděpodobností*, Academia, Praha, 2008].

RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D.
Ústav aplikované matematiky
Fakulta dopravní ČVUT
Na Florenci 25
110 00 Praha 1
hyksova@fd.cvut.cz

PŘEKVAPENÍ PRO ZAČÁTEČNÍKY

Radka Holečková

Do školy jsem jako učitelka matematiky a deskriptivní geometrie nastoupila v lednu 2012. Rok a půl jsem učila nejdříve 4 hodiny matematiky týdně, poté 6 hodin matematiky týdně. Na plný úvazek jsem začala vyučovat v září 2014.

Moje představy o výuce matematiky se postupně vyvíjely a já se tento vývoj pokusím shrnout ve svém příspěvku.

1 Matné vzpomínky na středoškolská léta

Vystudovala jsem osmileté gymnázium. Z nižších ročníků gymnázia si pamatuji velmi málo, snad jen kreslení obrázků u slovních úloh o pohybu. Tento způsob znázornění daného problému mi vyhovuje dodnes a snažím se jím zaujmout i své žáky. Důkaz Pythagorovy věty jsme asi neprobírali, na druhou stranu se mi vybavuje, jak jsme v sextě dokazovali Eukleidovy věty právě pomocí věty Pythagorovy. Kromě toho si však na žádný důkaz nevzpomínám. Přesto nemůžu říct, že by se tehdejší výuka nesla ve stylu „kuchařky“. Absenci důkazů jsem však nepociťovala jako křivdu. Když už jsem chtěla vědět něco navíc, spíš mě zajímaly další postupy a fascinovalo mě, že fungují.

Naopak si živě vzpomínám na to, že jsme měli dobře vymezené matematické pojmy. Některý učitel tomu říkal definice a zapisoval je slovně i matematickou symbolikou. Jiný učitel „jen“ napsal znění definice na tabuli, aniž by slovo definice jako takové použil. Ať se učitel přikláněl ke kterékoli variantě, každý z nich si dával záležet na tom, abychom my studenti matematickým pojmům rozuměli.

Na střední škole mi vlastně nejvíc vyhovovalo to, že v učebním plánu pro poslední dva ročníky byly zahrnuty semináře. Studenti navíc nebyli nijak omezeni v jejich výběru. Nerozlišovala se přírodovědecká větev od humanitní. Zkrátka byla vypsána nabídka seminářů a student si mohl vybrat třeba kombinaci seminářů matematika a dějepis. Tak se stalo, že v maturitním ročníku jsem měla osm hodin matematiky týdně. Ač bez důkazů, byly pro mě velkým přínosem v tom, že jsem získala velkou praxi v počítání příkladů, což mi nyní jako učitelce jedině prospělo. Při kontrolování studentů u tabule jsem rychlejší a spíš najdu chybu. (Také si živě pamatuji vlastní chyby a tuším, po čem pátrat.)

2 Před nástupem do role učitelky

Lásku k důkazům a neprůstřelné argumentaci ve mně vybudoval až matfyz. Fascinovalo mě, jak do sebe vše krásně zapadá a trochu mi bylo líto, že jsem se k této části matematiky nedostala dřív.

Časem jsem začala uvažovat o tom, do jaké míry se dají matematické postupy používané na střední škole zdůvodňovat. Těžko se dá začít axiomaticky od prvních hodin. Tak jak tedy?

Bohužel jsem si však nestihla pořádně rozmyslet, do jaké míry budu matematické postupy vysvětlovat studentům ve svých hodinách. Nastoupila jsem během třetího ročníku studií na MFF UK na střední průmyslovou školu. Pohltily mě těžkopádné učitelské začátky, které přišly ještě před pedagogickými praxemi. Tehdy jsem byla ráda, že jsem (snad) schopná vysvětlit postupy řešení úloh, že mluvím srozumitelně, že si všimnu, že se někdo hlásí … Zkrátka jsem měla víc starostí sama se sebou než se studenty.

3 O několik let později

Krušné začátky mám, doufejme, za sebou a dnes můžu říct, že kde to uznám za vhodné, ukážu důkaz, popřípadě naznačím, proč daný postup funguje.

Ze středoškolské matematiky (mějme na mysli okruhy ke státní maturitě z katalogu požadavků platného od školního roku 2015/2016) jsem zatím vyučovala všechna témata až na exponenciální a goniometrické rovnice a planimetrii.

Ve svých hodinách se snažím vysvětlovat látku co nejjednodušeji, proto hledám jakousi rovnováhu mezi řečí matematiky a řečí středoškoláků. Uvádím tedy definice, které se pak navíc snažím okomentovat na nějakém příkladu, nebo je nějak opsat, aby studenti lépe pochopili její význam.

Co se týče logiky a důkazů, dokazuji Pythagorovu větu, vzorec pro kořeny kvadratické rovnice, součet několika prvních členů aritmetické posloupnosti … , ale samozřejmě ne u každého tématu věnuji čas důkazu, někdy pouze shrnu postup s náznakem logického zdůvodnění.

Po tomto úvodu ukazuji postup řešení úloh krok po kroku a se studenty látku procvičuji. Snažím se, aby studenti se zájmem o logické zázemí matematiky nebyli ochuzeni, ale vždy chci vyhovět i slabším, kteří zkrátka vyžadují jednoduchý návod, jak něco spočítat. Zdaleka ne pokaždé však logická argumentace a vysvětlení postupu padne na úrodnou půdu a student řeší úlohu postupem, který zdůvodnit nelze.

V následujících odstavcích se pokusím předvést, co se odehrálo v jedné hodině matematiky prvního ročníku střední průmyslové školy.

4 Příhoda z hodiny: MAT pro 1. ročník SŠ – nerovnice v podílovém tvaru

V tematickém plánu jsou před nerovnice v podílovém tvaru zařazeny kvadratické rovnice a nerovnice. Studenti tedy mají procvičeno hledání kořenů kvadratické rovnice pomocí vzorců pro diskriminant a kořeny, i pomocí Viètových vzorců. Kvadratickou nerovnici řešíme metodou nulových bodů. Metodu nulových bodů posléze využíváme i při řešení nerovnic v podílovém tvaru.

Vysvětlování postupu řešení nerovnice v podílovém tvaru začínám tím, že si nejdříve spočítáme nulové body dané nerovnice. Poté studenty vyzvu, aby dosazovali jiná čísla než nulové body a zjistili, jestli výsledek vychází kladný či záporný. Postupně se je snažím přivést k závěru, že nulové body rozdělí reálnou osu na otevřené intervaly, pro které platí, že ať dosadíme do výrazu kterékoli číslo z daného intervalu, výsledek vychází u každého čísla kladný, nebo u každého čísla záporný.

Postup zapisujeme do tabulky, z které pak určíme množinu řešení nerovnice. Zápis příkladu tedy vypadá zhruba takto:

$$\frac{x-1}{x+3} \geq 0$$

Nulové body: -3, 1

	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$\frac{x-1}{x+3}$	$+$	$\times$	$-$	0	$+$

Když dojdeme v postupu k tomuto kroku, nabádám studenty, aby si znovu přečetli nerovnici v zadání: „Výraz má být větší nebo roven nule.“ Řešením tedy je množina:

$$K = (-\infty; -3) \cup \langle 1; +\infty)$$

Dále následuje procvičování příkladů k upevnění dané látky. Během toho si studenti všimnou, že tabulka standardně vychází tak, že se v kolonkách intervalů střídají znaménka. Stačí tedy dosadit do výrazu pouze jedno číslo, např. -4, díky tomu zjistíme, že pro interval $(-\infty; -3)$ vychází výraz kladný. Pro sousední interval $(-3; 1)$ vyjde tedy záporný a pro poslední interval $(1; +\infty)$ opět kladný.

V loňském školním roce jsem se během toho dočkala překvapení, které přišlo zhruba po třech hodinách nerovnic, kdy už většina žáků měla naučený postup. Ozval se student s klasickým: „Paní učitelko, mně to nevyšlo!“ Vydala jsem se k lavici a očekávala numerickou chybu. Chyba však nastala úplně jinde. Studentův zápis v tabulce:

	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$\frac{x-1}{x+3}$	$-$	$\times$	$+$	0	$-$

Oznámila jsem studentovi, že zápis plusů a mínusů má přesně obráceně, a zeptala se, jak na to přišel. „No, ten zobáček má špičku vpravo, takže uprostřed tabulky bude plus a na krajích mínus.“

Tímto vysvětlením mě student značně vyděsil, protože jsem si nepamatovala, že bych někdy něco takového říkala. Student ještě dodal, že kdyby byla špička doleva, je uprostřed mínus a na krajích plus. Snažila jsem se mu připomenout, že alespoň jedno číslo do výrazu dosadit musíme, abychom zjistili, jaké znaménko vychází pro daný interval. Poté teprve můžeme využít poučku, že u sousedních intervalů je znaménko jiné. Student argumentoval: „Ale v předcházejících deseti příkladech to vyšlo, až teď ne!“

Prohlédla jsem předchozí stránky jeho sešitu a zjistila, že v tomto má pravdu. Předcházející nerovnice byly zadané tak, že studentovi vyšel správný výsledek, přestože se držel špatného postupu, ve kterém vůbec nebral v potaz zadaný výraz na levé straně a jen koukal na znaménko nerovnosti. „Vždyť vy vůbec neberete v potaz výraz vlevo. Znaménko samo o sobě vám neřekne, jaký má být správný výsledek, na to se nemůžete spoléhat. Aspoň jedno číslo dosadit musíte.“

Bez obalu přiznám, že mi tehdy došly argumenty a nezmohla jsem se na nic jiného, než že jsem dokola opakovala, že jeho postup nemá logické odůvodnění. Nelze přece argumentovat tím, že když to vyjde desetkrát, musí to vyjít pojedenácté. Student však stál na svém a nešlo mu na mysl, že když jeho postup desetkrát fungoval, tak jak mohl po jedenácté selhat. Ke správnému postupu se pak uchýlil, ale jeho výraz na tváři svědčil o tom, že stále nerozumí tomu, proč to pojedenácté nemuselo vyjít.

Není to první případ, kdy se setkávám s chybou, která mi vznikla před nosem a já bych si jí bývala nevšimla, kdyby se student neozval.

5 Zamyšlení do budoucna

Jsem teprve v začátcích a rozhodně se nepovažuji za zkušenou učitelku. Po těchto zážitcích mě k tématu konference, která je zaměřená na logiku, zdůvodňování a důkazy ve středoškolské matematice, napadá něco dalšího.

Dá se předcházet chybám?

Zatím jsem nejčastěji učila látku prvního ročníku – množiny, výroky, výrazy, rovnice a nerovnice. První rok jsem si všímala, kdy studenti dělají chyby a jaké chyby jsou nejčastější. V dalším roce jsem se vzniku častých chyb snažila předcházet, volit slova tak, aby nedošlo k nedorozumění.

S tím se momentálně potýkám trochu více, než s myšlenkou, jak často nasazovat ve výuce důkazy. Nechci tím říct, že bych logickou argumentaci odsunula na vedlejší kolej. Spíš bych ráda přišla na to, jak ji podat srozumitelně dnešním středoškolákům.

Vycházím z chyb, které udělali, a snažím se jim předcházet. V budoucnu při výuce nerovnic rozhodně zdůrazním, že je bezpodmínečně nutné dosadit alespoň jedno číslo různé od nulových bodů do zadaného výrazu a zjistit, jestli výsledek je kladný nebo záporný.

Dále se zamyslím nad tím, jakou skladbu příkladů volit. Ve výše zmíněné příhodě jsem nezmínila, že samozřejmě probíráme i speciální případy. Jak se ale ukázalo, budu muset přemýšlet i nad tím, jaké příklady v hodinách či domácích úkolech použít, aby byly rozmanitější. Snad se díky tomu podaří, aby se popsaná příhoda z hodiny na střední škole neopakovala.

6 Závěr

Matně se pamatuji na poučku Komenského, že je mnohem snazší studenta naučit něco nového, než ho přeučit zažitý postup, který nefunguje. Do budoucna se proto pokusím vměstnat do hodinové dotace logickou argumentaci formulovanou tak, aby nedocházelo k překvapením, která jsou pro začátečníka velmi nečekaná.

RNDr. Radka Holečková
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební
Dušní 17
110 00 Praha 1
radka-holeckova@seznam.cz

IMPLIKACE JAKO DIDAKTICKÝ PROBLÉM

Dag Hrubý

Impulzem k napsání tohoto článku byl následující text z knihy [1, s. XXXIX]: „Přesně, co Frege nechtěl a před čím varoval, se stalo. Logika se stala kalkulem, původně zamýšlená logika matematiky se stala matematickou logikou, matematickou disciplínou, podobnou jiným matematickým oborům. A tento nový obor rozkvetl ve dvacátém století do neobyčejné dokonalosti a krásy a jako plod ze sebe vydal počítače – právě v oblasti počítačů (v informatice, computer science) našel nejdokonalejší uplatnění. Logika jako kalkul (počet, počítání) se stala logikou počítačů. To mělo ovšem své závažné důsledky. Jedním z nich je, že se po dvou tisíci letech přestala vyučovat ve školách (gymnáziích i univerzitách) logika jakožto prostředek k péči o jazyk, ke kultivaci přesného vyjadřování. Nahrazena byla kalkulem a ten se nakonec ukázal být tak kontraproduktivní, že v některých zemích (např. Rakousku) nakonec došlo k zákazu vyučování takové logiky. Nyní stojíme před problémem, jak obnovit vyučování logiky v původním smyslu (tj. jako jazyka)."

Vzal jsem si do ruky českou učebnici matematiky pro gymnázia [2], která obsahuje učivo logiky. Byl jsem velmi překvapen, když jsem zjistil, že slovo logika se zde vůbec nevyskytuje. Učivu z logiky je věnována kapitola s názvem *Základní poučení o výrocích* v rozsahu necelých třiceti stran. Přitom ještě v nedávné minulosti měla logika své vlastní učebnice. Učebnice [3], [4] měly rozsah 205 stran. Je pozoruhodné, že učebnice [2] neobsahuje ani pojmy jako jsou predikát, predikátový počet. Rámcový vzdělávací program pro gymnázia (RVP G) [5] očekává od žáků následující výstupy: *Žák čte a zapisuje tvrzení v symbolickém jazyce matematiky, užívá správně logické spojky a kvantifikátory, rozliší definici a větu, rozliší předpoklad a závěr věty, rozliší správný a nesprávný úsudek, vytváří hypotézy, zdůvodňuje jejich pravdivost a nepravdivost, vyvrací nesprávná tvrzení, zdůvodňuje svůj postup a ověřuje správnost řešení problému.* Pochybuji, že by většina současných studentů gymnázia splňovala očekávané výstupy požadované v RVP G. Při současných podmínkách výuky matematiky na gymnáziích v ČR pokládám tyto výstupy za téměř nereálné. V učebnici [2] se navíc pojmy úsudek a hypotéza vůbec nevyskytují, což může ale souviset s tím, že učebnice byla napsána dříve než RVP G. Z druhé strany nelze říci, že by učebnice [2] prezentovala logiku jako výše uvedený kalkul. Myslím si, že by učivo logiky na gymnáziu zasluhovalo širší záběr. Předpokládám, že dobrý učitel matematiky na gymnáziu neskončí s logikou v prvním ročníku v rámci dané učebnice, ale po celou dobu studia dbá o rozvíjení jazyka matematiky a usiluje o kultivaci přesného vyjadřování. Logice by měla být věnována pozornost zejména v posledních dvou ročnících gymnaziálního studia. Jistým řešením by bylo napsání nové učebnice pro gymnázia s názvem „Základy logiky a teorie množin", která by obsahovala také historii hlavních etap vývoje matematiky a ukázala na vztah matematiky, filosofie a umění. Nyní se již budu věnovat slíbenému tématu uvedenému v názvu tohoto článku.

Jako výchozí bod použiji následující text z knihy [6, s. 341]: „Nesamozřejmost pojmu logické platnosti ukazuje samotný vývoj logiky jako vědecké disciplíny, počínající velkou (i když málo zdokumentovanou) roztržkou peripatetické a megarsko-stoické školy ohledně toho, zda je základním úsudkovým principem *kategorický sylogismus* nebo *pravidlo kondicionálu,* a končící takzvanou *Grundlagenstreit* ve dvacátém století, iniciovanou Brouwerovým zpochybněním zdánlivě nezpochybnitelných rozumových principů jako vyloučený třetí.“ Tento text můžeme studentům gymnázia zatajit nebo ho podat ve srozumitelnější formě, avšak učitel matematiky by se o tento text mohl zajímat hlouběji. Připomeňme si, že peripatetickou školou rozumíme školu, kterou založil a ve které vyučoval Aristotelés. Název je odvozen podle jejího kolonádního sloupořadí (peripatos), nebo proto, že Aristotelés vyučoval své žáky procházeje se s nimi (peripatein – chodit okolo, procházet se) [7]. Kategorický sylogismus je obvyklým typem úsudku používaným pro běžnou argumentaci vysvětlování. Je to úsudek složený ze tří kategorických soudů (dvě premisy a závěr), v němž se vyskytují celkem tři pojmy. Aristotelovu logiku lze charakterizovat jako logiku pojmu, a tedy ji lze považovat za určitou anticipaci současné predikátové logiky. Megarsko-stoická škola se zabývala především logikou složených soudů, které vznikají z jednoduchých subjekt-predikátových soudů složením pomocí tzv. logických spojek a analýzou vztahů vyplývání, které mezi nimi nastávají. Stoikové na rozdíl od Aristotela neanalyzují vnitřní strukturu výroku, stavební jednotkou není pojem, ale výrok. Sylogistika, která tímto způsobem vznikne, je anticipací současné výrokové logiky. Stoicko-megarský sylogismus se nazývá *hypotetický sylogismus* [8, 9]. Z pohledu současného pojetí výuky matematiky na gymnáziu je pro učitele matematiky bližší pojetí megarsko-stoické školy než školy peripatetické a tedy silnější příklon ke kondicionálu než ke kategorickému sylogismu. Význam aristotelské sylogistiky z hlediska matematického pojetí poklesl [10]. Prvními logiky, kteří podali relativně ucelený výklad implikace byli megarikové Diodóros Kronos a Filón. Pro implikaci používali názvu *synémmeon* „spojení,“ resp. „to, co je spojeno“ a oba ji shodně vymezovali jako složený výrok vytvořený pomocí spojky *ei* resp. *eiper.* Kondicionál (podmiňovací způsob) je slovesný způsob, jímž se vyjadřuje, že uskutečnění určitého děje nebo stavu je podmíněno jistými okolnostmi. Formy podmínkových souvětí se spojkou *ei* se začaly v řečtině utvářet v období, které předcházelo vzniku nejstarších památek řecké literatury. Podmínkové věty se spojkou *ei* jsou použity na řadě míst homérských eposů. Např. v Iliadě, zpěv 5, verš 273: „*kdybychom tyto dva zajali, nabyli bychom slávy*“ [11]. S klíčovým vymezením implikace přichází Filón Megarský (kolem roku 300 př. n. l.). Z tohoto důvodu je nazývána jako *filónská implikace.* Jiný, historické souvislosti nezohledňující název této implikace je *materiální implikace.* Implikaci odpovídá na úrovni přirozeného jazyka spojka *jestliže, pak.* Forma výroku je: *jestliže p pak q.* Spojce *jestliže, pak* odpovídá symbol „$\Rightarrow$“. Výsledná forma takovýchto výroků pak je: $p \Rightarrow q$. Podle Filóna platí:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Filónova implikace je tedy pravdivá tehdy, jestliže nenastane druhý případ, jestliže tedy není pravda, že je první věta pravdivá a druhá věta nepravdivá. Předložená definice nebyla překonána ani současnou logikou. Je nutné poznamenat, že uvedená definice zcela nevystihuje, jak rozumíme pravdivostním podmínkám kondicionálních souvětí v přirozeném jazyce. Pokud totiž spojíme dva výroky spojkou *jestliže, pak* předpokládáme mezi těmito dvěma výroky nějakou hlubší souvislost (kauzální, obsahovou) [9]. Např. výrok „*Jestliže byl Aristotelés filosof, pak Karel IV. založil pražskou univerzitu*" lze stěží pokládat za pravdivý, ale podle Filóna se o pravdivý výrok jednat musí, protože jak první, tak druhá věta jsou zcela jistě pravdivé. S jiným pojetím implikace přichází Diodóros Kronos († 307 př. n. l.). Jeho úvahu lze vyjádřit takto: „*Implikace je pravdivá tehdy a jen tehdy, jestliže neexistuje okamžik, ve které by první věta byla pravdivá a druhá věta nepravdivá.*" Podle Diodóra Krona je výrok „*Jestliže byl Aristotelés filosof, pak Karel IV. založil pražskou univerzitu*" nepravdivý, protože existuje okamžik, např. rok 1300, ve kterém je pravda, že *Aristotelés byl filosof,* ale není pravda, že *Karel IV. založil pražskou univerzitu.* Zajímavá situace nastane, pokud v daném výroku zaměníme pořadí výroků. Dostaneme tak výrok „*Jestliže Karel IV. založil univerzitu, pak byl Sokrates filosof,*" který je pravdivý jak podle Filóna, tak podle Diodóra Krona.

Jednotlivé výroky v implikaci $p \Rightarrow q$ mají následující názvy:

p	q
antecedent	konsekvent
premisa	conclusio
předpoklad	důsledek
podmínka postačující	podmínka nutná

Význam implikace, jak byl stanoven v moderní logice, nezávisí na tom, zda její konsekvent má nějakou souvislost s antecedentem [12]. Implikaci je možné utvářet jak z pravdivých, tak také z nepravdivých výroků. Uvažujme výrok

$$\textit{Jestliže } 3 \cdot 3 = 9, \textit{ pak Praha je hlavní město ČR.}$$

Tento výrok je pokládán v logice za smysluplný a pravdivý výrok. Lze však předpokládat, že při výuce se bude jevit některým studentům jako velmi problematický. Situace se ještě více zkomplikuje, pokud budeme tuto implikaci interpretovat jako dvojici předpoklad-důsledek. Zřejmě platí

$$\textit{Předpoklad, že } 3 \cdot 3 = 9, \textit{ vede k důsledku, že Praha je hlavní město ČR.}$$

Pokud učitel tuto situaci podcení, nemůže se divit, když někteří studenti prohlásí, že to vše je nesmysl a logika je velmi podivná věda. Výše uvedený příklad je ukázkou neshody mezi běžným jazykem a matematickou logikou. Je otázkou, pokud se omezíme na logiku pouze v prvním ročníku gymnázia, do jaké míry studenti pochopí, že mezi předpokladem a důsledkem nemusí být žádný vztah.

V závěru článku bych se rád vyjádřil k pojmu „nepřímý důkaz". Není problém ukázat na řadě publikací, že nepřímý důkaz je pouze jiný název pro důkaz sporem. Např. v knize [10] se pojem „nepřímý důkaz" vůbec nevyskytuje. Zajímavý výklad má A. Tarski v knize [12]. Na str. 160 čteme: „Důkaz teorému 1 je příkladem důkazu nazývaného *nepřímým důkazem* nebo také *důkazem redukcí k absurdu.* Důkazy tohoto druhu lze zcela obecně charakterizovat takto: abychom dokázali teorém, předpokládáme, že je nepravdivý, a odvodíme z toho jisté důsledky, jež nás donutí zavrhnout původní předpoklad. *Nepřímé důkazy* jsou velmi běžné v matematice." Dále na str. 180 téže publikace čteme „Abychom dokázali výrok tvaru implikace, řekněme výrok: *jestliže p, pak q,* předpokládáme, že závěr výroku, tj. „*q*", je nepravdivý (nikoli celý výrok); z tohoto předpokladu, tj. z „*ne q*", usuzujeme, že předpoklad výroku je nepravdivý, tj. že platí „*ne p*". Jinými slovy, místo abychom dokazovali uvažovaný výrok, podáváme důkaz odpovídajícího kontrapozitivního výroku: *jestliže ne q, pak ne p,* odkud usuzujeme na platnost původního výroku. ... Úsudky této formy jsou velmi běžné ve všech matematických disciplínách: jsou nejobvyklejším typem *nepřímého důkazu.*" Tedy, vzhledem k textu na str. 160, typem důkazu redukcí k absurdu.

Nesouhlasím proto s pojetím, které je například uvedeno v učebnici [2]. Cituji: „Nepřímý důkaz věty $a \Rightarrow b$ spočívá v tom, že dokážeme obměněnou implikaci $\neg b \Rightarrow \neg a$, která je s implikací $a \Rightarrow b$ ekvivalentní. Nepřímý důkaz věty $a \Rightarrow b$ je vlastně přímý důkaz věty $\neg b \Rightarrow \neg a$, takže to pro nás není nic nového". Se závěrem výše uvedené citace, že nepřímý důkaz věty $a \Rightarrow b$ je vlastně přímý důkaz věty $\neg b \Rightarrow \neg a$, bych si dovolil polemizovat. Proč by nebylo možné dokázat větu $\neg b \Rightarrow \neg a$ sporem? Znamená to snad, že dokazovat větu $\neg b \Rightarrow \neg a$ sporem už není nepřímý důkaz? Co je tedy tzv. nepřímý důkaz věty $a \Rightarrow b$? Je to jakýkoliv důkaz věty $\neg b \Rightarrow \neg a$? Je to přímý důkaz věty $\neg b \Rightarrow \neg a$? Je to důkaz věty $\neg b \Rightarrow \neg a$ sporem? Používat pojem nepřímý důkaz k označení jiného důkazu než důkazu sporem pokládám za metodologické pochybení, které problém důkazu jenom zamlžuje. Na základě zákona transpozice

$$a \Rightarrow b \Leftrightarrow \neg b \Rightarrow \neg a$$

je přece úplně jedno, zda dokazuji větu $a \Rightarrow b$ nebo větu $\neg b \Rightarrow \neg a$. Vždy použiji buď důkaz přímý nebo důkaz sporem. Na tomto místě přiznávám, že jsem jeden z lektorů učebnice [2]. V době jejího vzniku jsem daný problém takto nevnímal. Opakuji ještě jednou, že by si učivo z logiky zasloužilo větší pozornost v RVP G a samostatnou učebnici, používanou v každém ročníku gymnázia.

LITERATURA

[1] J. Fiala, *Analytická filosofie*, O.P.S., Michal V. Hanzelín, 2005.

[2] I. Bušek, E. Calda, *Základní poznatky z matematiky*, Prometheus, 1992.

[3] M. Jauris, *Logika*, SPN, 1970.

[4] K. Berka, M. Jauris, *Logika*, SPN, 1978.

[5] J. Jeřábek a kol., *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*, VÚP, 2007.

[6] V. Kolman, *Idea, číslo, pravidlo*, Filosofia, 2011.

[7] I. Tretera, *Nástin dějin evropského myšlení*, Paseka, 1999.

[8] L. Novák, P. Dvořák, *Úvod do logiky aristotelské tradice*, Krystal OP, 2011.

[9] P. Sousedík, *Logika pro studenty humanitních oborů*, Vyšehrad, 2008.

[10] A. Sochor, *Logika pro všechny ochotné myslet*, Karolinum, 2011.

[11] M. Mráz, *K implikaci v Aristotelově logice*. Rozpravy ČSAV 98 (1988), 1–94.

[12] A. Tarski, *Úvod do logiky*, Academia, 1969.

RNDr. Dag Hrubý
K. H. Borovského 476
569 43 Jevíčko
hruby@gymjev.cz

UŽITÍ PROGRAMU GEOGEBRA PŘI ZKOUMÁNÍ MNOŽIN BODŮ DANÝCH VLASTNOSTÍ

Roman Hašek

Úvod

Zaměření letošního ročníku této konference je na její stránce [2] charakterizováno následujícími okruhy: „rozvíjení kritického myšlení žáků ve výuce matematiky“, „heuristické strategie, objevování a ověřování hypotéz“, „zdůvodňování matematických vztahů, dokazování, protipříklady“ a „role symbolického jazyka matematiky při argumentaci“. Cílem příspěvku je pomocí konkrétních příkladů ukázat, že využití počítače, konkrétně programu GeoGebra [10], při vyšetřování množin bodů daných vlastností poskytuje rozličné příležitosti pro realizaci vyučovacích metod a pro rozvoj žákovských dovedností a schopností, které se za uvedenými okruhy skrývají.

Množiny bodů daných vlastností

Pro detailní připomenutí výkladu pojmu množiny bodů daných vlastností, který je v souladu s jeho chápáním ve školní matematice, lze doporučit publikaci [14]. Zde se omezíme pouze na takové množiny bodů, které mají povahu rovinných křivek. Pro větší názornost jejich představení i pro ilustraci jejich souvislosti s reálným světem budeme přitom tyto křivky uvažovat jako křivky dynamicky vykreslované, tj. jako trajektorie bodů spojených s pohyblivými geometrickými obrázky. Takovýto dynamický přístup k množinám bodů daných vlastností nám dovoluje spojit zkoumání odpovídajících geometrických vztahů s tvorbou počítačových, případně i reálných modelů.

Je zřejmé, že vzhledem ke svému zaměření na výše uvedené křivky neposkytuje tento příspěvek kompletní obraz možností využití programu GeoGebra při vyšetřování množin bodů daných vlastností. Existuje však dostatek materiálů, které lze pro doplnění tohoto obrazu doporučit. Množinám bodů založeným na vzdálenostech se věnuje například článek [15]. Autorka v něm představuje originální v GeoGebře vytvořené materiály ve formě pracovních listů, které používá při výuce na základní škole. Program GeoGebra se svými nástroji poskytuje pro tyto materiály prostředí, v němž si žáci přirozeným způsobem formují poznatky o množinách bodů založených na vzdálenostech. Další výukové materiály, opět vytvořené učiteli z praxe, které tentokrát netradičním způsobem propojují téma množin bodů daných vlastností s reálným světem, lze najít v publikaci [12].

Program GeoGebra

Program GeoGebra je zdarma dostupný dynamický matematický program určený pro podporu výuky a studia matematiky, jehož popularita se poměrně rychle šíří po celém světě a jehož vývoj je podřízen potřebám výuky matematiky a neustále se snaží reagovat na požadavky uživatelů. Program je přeložen do téměř sedmdesáti jazyků a je funkční na osobních počítačích i dotykových zařízeních. Jeho instalační soubory jsou uvedeny na stránce [10].

V příspěvku se zaměříme na nástroje a funkce, které program GeoGebra nabízí pro zkoumání množin bodů daných vlastností. Mnohé z těchto prostředků byly popsány, především na příkladech týkajících se kuželoseček, již v článku [7]. Každému, kdo se chce naučit s GeoGebrou pracovat, lze jednoznačně doporučit publikaci [6], která přináší celkový úvod do tohoto programu, založený na řešení praktických příkladů.

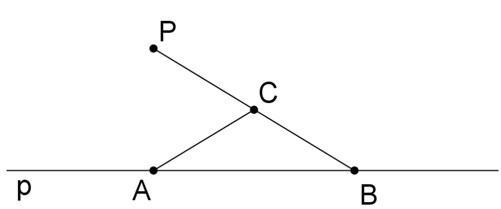
Stručně lze říci, že GeoGebra poskytuje komplexní soubor nástrojů pro vyšetřování množin bodů daných vlastností na rozličných úrovních, od jejich vizuálního zkoumání až po výpočet jejich rovnic pomocí nástrojů počítačové algebry a s uplatněním algoritmů automatického dokazování geometrických vět.

Pro funkce počítačové algebry je v programu GeoGebra využíváno jádro volně šiřitelného systému počítačové algebry *Giac* [16], které je součástí jeho instalace. Pro externí výpočty je pak prostřednictvím připojení k internetu využíván robustnější systém *Singular* [3]. Více informací o implementaci počítačové algebry v GeoGebře najde zájemce v [13].

Pro dynamicky vykreslované křivky, kterými se v příspěvku zabýváme, je typické, že vznikají jako trajektorie bodu, označme ho například Q, jehož poloha je prostřednictvím příslušné geometrické strutury závislá na poloze jiného bodu,říkejme mu P, který je volně pohyblivý po nějaké přímce či křivce. GeoGebra pak nabízí funkci `MnozinaBodu[Q,P]` pro numerický výpočet tvaru odpovídající křivky, resp. funkci `RovniceMnozinyBodu[Q,P]` pro symbolický výpočet rovnice křivky. Použití těchto funkcí je ilustrováno následujícím příkladem.

Příklad

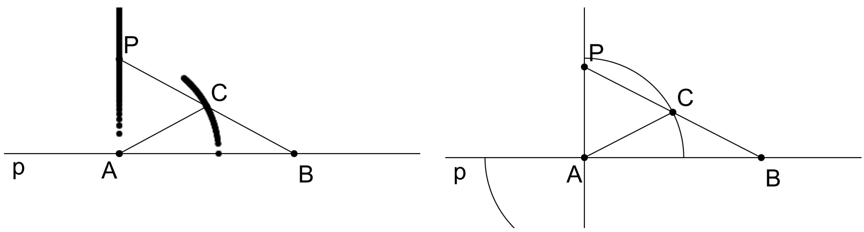
Na obr. 1 je znázorněný jednoduchý rovinný mechanismus, tvořený dvěma přímými členy, které jsou otočně spojeny v bodě C.



Obr. 1: Rovinný mechanismus

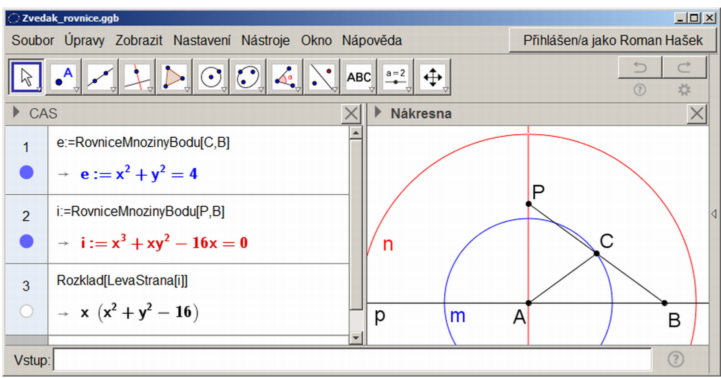
Další „klouby“ jsou v bodech A a B. Avšak, zatímco bod A je pevně umístěn na základně – přímce p, bod B je po ní volně pohyblivý. Pro vzdálenosti jednotlivých bodů platí $|AC| = |BC| = |CP|$. Máme určit trajektorie bodů C a P při pohybu bodu B podél přímky p. (Příklad je převzat z [1].)

Dle obr. 1 sestrojíme model uvažovaného mechanismu v prostředí *Nákresna* programu GeoGebra a pro prvotní vizuální prozkoumání příslušných množin použijeme pro každý z bodů C, P nástroje *Stopa objektu* a *Množina bodů* (případně zapíšeme do příkazového řádku funkci `MnozinaBodu` s výše uvedenou syntaxí). Výsledky jsou zachyceny na obr. 2. Naznačují více či méně očekávané tvary trajektorií daných bodů – bod C se pohybuje po kružnici a bod P po přímce. U reálných mechanismů body nevykreslují celé křivky, rozsah jejich pohybu je omezen. Tato skutečnost je dobře vidět při použití *Stopy objektu*. Podoba množiny zobrazené nástrojem *Množina bodů* je zase ovlivněna algoritmem výpočtu, který zjevně nerozlišil mezi dvěma průsečíky přímky s kružnicí. Z obou výsledků je zřejmé, že grafické výstupy těchto nástrojů, které doplňují dynamický obrázek dané úlohy, hrají při zkoumání množin bodů daných vlastností důležitou roli. Naznačené tvary příslušných křivek a diskuse nad jejich podobou mohou výrazně napomoci při formulování hypotéz o povaze zkoumaných křivek i při hledání argumentů pro jejich důkazy.



Obr. 2: Znázornění vyšetřované množiny bodů;
užitím *Stopy objektu* (vlevo) a *Množiny bodů* (vpravo)

Nyní využijeme prostředky počítačové algebry programu GeoGebra. Dotážeme se ho na rovnice křivek, jejichž částmi jsou uvažované trajektorie. Použijeme k tomu funkci `RovniceMnozinyBodu`, kterou pro každý z bodů C, P zadáme do prostředí *CAS*. Syntaxe těchto příkazů, i jejich symbolické a grafické výstupy vidíme na obr. 3.



Obr. 3: Výpočet rovnice vyšetřované množiny bodů

Zatímco pro bod C dostáváme dle očekávání rovnici kružnice, pro bod P je výsledek algebraického výpočtu složitější. Získaná množina bodů je sjednocením přímky, která odpovídá realitě, a kružnice, která naopak nemá reálné opodstatnění. Příčinou je skutečnost, že při použití nástrojů počítačové algebry se geometrický obrázek převede na soustavu algebraických rovnic, při jejímž řešení lze ne vždy rozlišit mezi dvěma body (např. průsečíky přímky s kružnicí). Řešením příslušné algebraické úlohy tak může být množina obsahující něco navíc oproti řešení geometrickému. Program GeoGebra nám tak při vyšetřování množin bodů daných vlastností „přihrává" situaci, v níž je evidentní, jak důležité je u nalezené množiny ověřit, zda všechny její body splňují danou vlastnost.

Otázkou zůstává, zda má vyšetřovaný mechanismus nějaké praktické využití. Po zjištění, že trajektorií bodu P je část přímky kolmé k základně, asi není těžké takové využití vymyslet. Je však zřejmé, že nejeden čtenář již při zadání poznal, že se jedná o zvedák, který se běžně používá v pneuservisech.

Po vyřešení základní úlohy nalezení trajektorie bodu P dle obr. 1 můžeme zadání modifikovat tak, že pro vzdálenost P od B uvažujeme relaci $|BP| > 2|BC|$, resp. $|BP| < 2|BC|$. Jaký tvar budou mít trajektorie bodu P v těchto případech?

Rozličné podoby, které lze materiálu vytvořenému v GeoGebře vtisknout, dovolují realizovat různé scénáře jeho použití ve výuce. Vyučující například předem připraví dynamický materiál s omezenou nabídkou nástrojů a umístí ho na portál „GeoGebra" [10] (nazývaný též „GeoGebraTube"), viz [9]. Tento materiál žákům poskytuje jak zadání problému, tak i pracovní prostředí pro jeho řešení. Je možné ho použít frontálně nebo ve skupinách, jako oporu pro diskusi o řešení (s využitím znalostí o trojúhelníku a úhlech v něm a s použitím pojmu množina všech bodů dané vlastnosti), nebo individuálně, jako úlohu k samostatnému řešení. Pro organizaci skupinové nebo individuální práce portál „GeoGebra" nabízí prostor i užitečné nástroje v režimu tzv. Skupin, viz [5]. V jejich rámci je například možné vytvářet z dynamických materiálů online testy, s uzavřenými i otevřenými otázkami, a sledovat jejich řešení jednotlivými žáky. Další možností využití prostředí GeoGebry při řešení daného příkladu je nechat žáky vytvořit dynamický model uvažovaného mechanismu samostatně. Úvodní seznámení s programem, které by mělo předcházet, nemusí být díky jeho intuitivnosti nikterak dlouhé. Přínosem tohoto přístupu je skutečnost, že staví žáky do situace, která vyžaduje praktické využití geometrického učiva, konkrétně k vytvoření modelu reálného zařízení.

Závěr

Na jednoduchém příkladu geometrického modelu reálného zařízení bylo naznačeno, jaké možnosti nám program GeoGebra nabízí pro zkoumání množin bodů daných vlastností. Spojení dynamického geometrického prostředí s nástroji založenými na numerických výpočtech i symbolické algebře představuje v tomto směru opravdu účinný prostředek, navíc přímo určený pro vzdělávání.

Jak už bylo uvedeno, GeoGebra se neustále vyvíjí. V oblasti množin bodů daných vlastností je „horkou“ novinkou práce na rozšíření funkčnosti příkazu `RovniceMnozinyBodu` o množiny zadané podmínkou. Uveďme si jednoduchý příklad. Na *Nákresnu* umístíme libovolně tři body A, B, C a sestrojíme přímky AC a BC, říkejme jim v uvedeném pořadí p a q. Potom stačí do CAS zadat příkaz `RovniceMnozinyBodu[JsouKolme[p,q],C]`. GeoGebra ho „chápe“ jako dotaz na rovnici množiny všech poloh volného bodu C, které odpovídají uvedené podmínce `JsouKolme[p,q]`. Výsledkem je proto rovnice Thaletovy kružnice s průměrem AB. Uvedený příklad poukazuje na trend postupné implementace algoritmů automatického dokazování geometrických vět do programu GeoGebra. Zkoumání možností smysluplného využití tohoto spojení prostředí dynamické geometrie a počítačové algebry ve výuce matematiky by bezesporu měla být věnována další pozornost.

V příspěvku byl použit počítačový geometrický model jednoduchého mechanismu. Přestože nám počítač pomohl při nalezení řešení úlohy, je nutno poznamenat, že by byla škoda, kdybychom se ve výuce omezovali jenom na počítačové modely. Žáci by si měli vytvářet i modely reálné. Uvedený příklad k tomu svou jednoduchostí přímo vybízí. O rovinných mechanismech a možnosti tvorby jejich počítačových i fyzických modelů se zmiňuje článek [8]. V něm jsou uvedeny odkazy na další materiály nabízející uplatnění rovinných mechanismů ve výuce, za pozornost stojí především [4] a [11].

Literatura

[1] B. Bolt, *Mathematics meets Technology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[2] *Cesty k matematice.* `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/konference2016/`

[3] *Singular.* `http://www.singular.uni-kl.de`

[4] J. Fiala, *Jak přijít úsečce na kloub. Půvab polozapomenutých mechanismů*, Vesmír 87 (2008), 258–263. `http://casopis.vesmir.cz/clanky/clanek/id/7691`

[5] *GeoGebra Groups – GeoGebraBook.* `https://www.geogebra.org/b/rQrbooeq#`

[6] Š. Gergelitsová, *Počítač ve výuce nejenom geometrie – průvodce GeoGebrou*, SEVT, Praha, 2012.

[7] R. Hašek, *Množiny bodů daných vlastností v GeoGebře*, Proceedings of Slovak-Czech conference on geometry and graphics, Nakľadatelstvo STU, Bratislava, 2015, 119–126.

[8] R. Hašek, *Křivky v GeoGebře*, Sborník příspěvků 7. konference Užití počítačů ve výuce matematiky, 5.–7. 11. 2015, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 79–92. `http://home.pf.jcu.cz/~upvvm/2015/sbornik/Sbornik_UPVM_2015.pdf`

[9] R. Hašek, *Rovinný mechanismus č. 1.*
https://www.geogebra.org/m/MH8WHxfy

[10] *GeoGebra.* http://www.geogebra.org

[11] A. B. Kempe, *How To Draw A Straight Line: A Lecture On Linkages*, Macmillan and Co., London, 1877.

[12] *MatemaTech – Matematika přes hranice, MatemaTech – Mathematik über Grenzen.* http://www.matematech.cz/category/publikace

[13] Z. Kovács, *Computer Based Conjectures and Proofs in Teaching Euclidean Geometry*, JKU Linz, 2015.
http://test.geogebra.org/~kovzol/data/diss/diss-20150708.pdf

[14] F. Kuřina, *Deset pohledů na geometrii*, MÚ AV ČR, Praha, 1996.

[15] J. Nováková, *Geometrická místa bodů v matematice na ZŠ*, Sborník příspěvků 7. konference Užití počítačů ve výuce matematiky, 5.–7. 11. 2015, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 196–207.
http://home.pf.jcu.cz/~upvvm/2015/sbornik/Sbornik_UPVM_2015.pdf

[16] *Giac/Xcas, a free computer algebra system.*
https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html

Mgr. Roman Hašek, Ph.D.
Katedra matematiky PF JU
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice
hasek@pf.jcu.cz

O NĚKTERÝCH MISKONCEPCÍCH SOUVISEJÍCÍCH SE SCHOPNOSTÍ ARGUMENTOVAT

Libuše Samková, Marie Tichá

1 O pravdivosti závěrů a jejím prokazování

Svět, který nás obklopuje, je světem konkrétních věcí a jevů, svět učebnic matematiky je světem abstraktních pojmů. Matematické abstrakce znamenají zjednodušení, můžeme se na nich učit vidět souvislosti. V matematice je nutno, na rozdíl od reality, předpoklady výslovně formulovat a v takovém „průzračném" prostředí se můžeme snáze učit dělat závěry a hledat odpovědi na otázky typu

ZDA platí nějaké tvrzení

PROČ platí toto tvrzení

JAK vypočítáme hledanou hodnotu, ...

F. Kuřina a kol. ([5], str. 15–16)

Odpovědi na otázky ZDA a PROČ mohou v různých stadiích matematického vzdělávání nabývat různé podoby, v raném stadiu obvykle mívají podobu odkazu na nějakou autoritu („Babička povídala.", „Bylo to v televizi.", „Říkali jsme si to včera."). V případě obecných tvrzení jsou postupem času odkazy na autoritu nahrazovány empirickými argumenty (odkazem na platnost tvrzení v jednom či více konkrétních případech). Ty však nejsou pro prokázání platnosti tvrzení postačující a velice snadno lze tímto způsobem mylně odvodit pravdivost nepravdivého tvrzení. Například při volbě obdélníku o rozměrech 4 cm a 3 cm vypadá pravdivě tvrzení, že obsah obdélníku se nezmění, pokud jeden z jeho rozměrů zmenšíme o 1 cm a ten druhý zvětšíme o 1 cm; tvrzení, že součet dvou prvočísel je vždy složené číslo, vypadá pravdivě po ověření součtů $3 + 5$, $3 + 7$ a $11 + 17$.

Někteří jedinci jsou si vědomi, že několik konkrétních příkladů nestačí pro průkazné odůvodnění obecného tvrzení, obohacují proto své zdůvodnění ještě o několik ne-příkladů, tj. příkladů, které nesplňují ani předpoklady ani závěr tvrzení. U tvrzení o součtu prvočísel by ne-příklady mohly být dvojice čísel 4 a 9, 8 a 15, či 12 a 25. Avšak takové ne-příklady jsou z hlediska pravdivosti tvrzení zcela nepodstatné, jejich existence obecné tvrzení nedokazuje ani nevyvrací.

Jiní místo ne-příkladů nabízejí několik náhodně zvolených příkladů nebo příklady s velkými čísly. Ti, co si dobře rozumí s počítači, mohou využít jejich pomoci, vygenerovat si v tabulkovém procesoru velké množství příkladů a odvozovat a zdůvodňovat pravdivost tvrzení na jejich základě. Takový přístup jistě zvyšuje pravděpodobnost, že pravdivost bude stanovena správně, ale opět není postačující. Zvláště pokud je tvrzení záměrně připraveno tak, aby jeho nepravdivý závěr platil i pro hodně velká čísla: například hodnota výrazu

$$\sqrt{1141n^2+1}$$

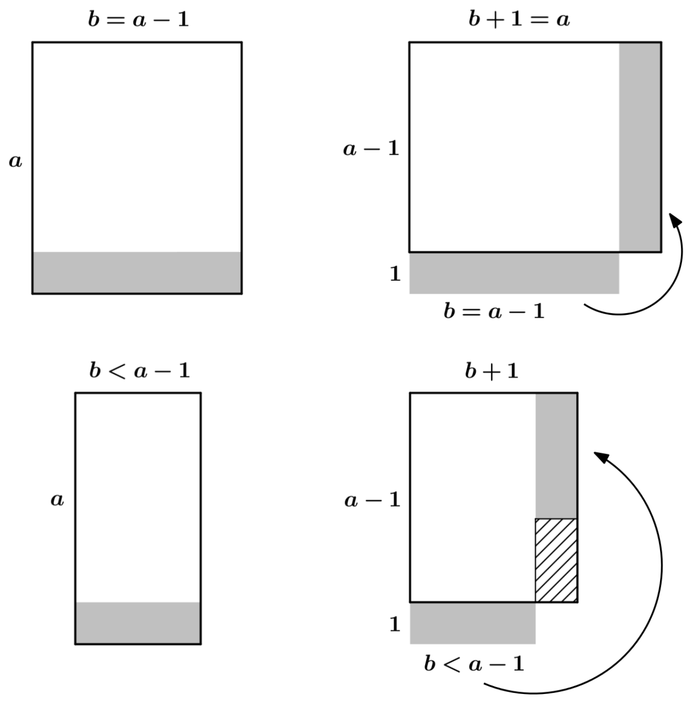
je neceločíselná pro všechna přirozená čísla

$$n \leqq 30\,693\,385\,322\,765\,657\,197\,397\,207,$$

ale pro to další v pořadí je celočíselná [2].

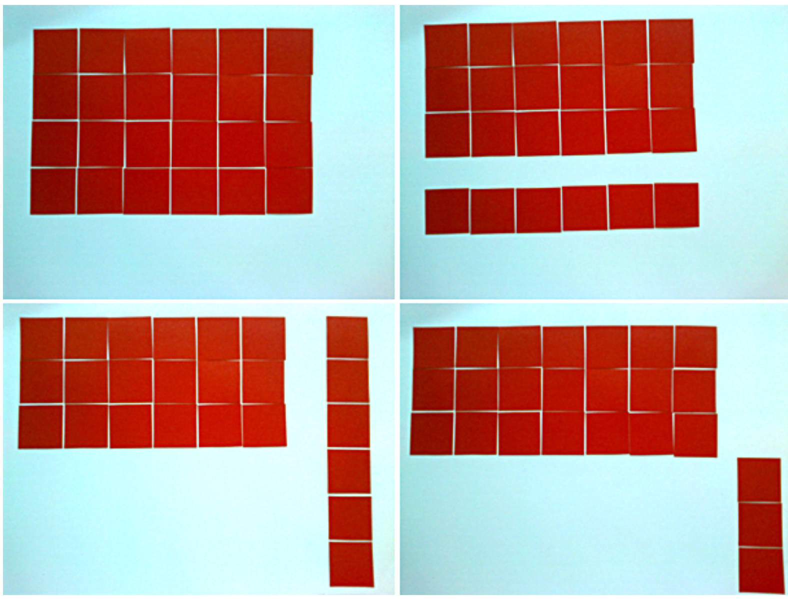
Další si zřejmě uvědomují, že zcela odlišný význam při odůvodňování obecných tvrzení mají protipříklady, tj. příklady, které splňují předpoklady tvrzení, ale nesplňují jeho závěr. Nalezení jednoho protipříkladu stačí na prokázání neplatnosti tvrzení. U tvrzení o součtu prvočísel tak neplatnost tvrzení dokazuje například součet $2+5$.

Jedním z cílů matematického vzdělávání by mělo být postupné vedení žáků a studentů ke zjištění, že důvěryhodnější a spolehlivější než empirické argumenty jsou argumenty deduktivní, tedy argumenty založené na logických souvislostech mezi jednotlivými součástmi tvrzení. U tvrzení o obsahu obdélníku může být takovým deduktivním argumentem například dvojice ilustrací na obr. 1, nebo algebraický vztah $(a-1)\cdot(b+1) = a\cdot b + a - b - 1 \neq a\cdot b$ pro $b \neq a-1$.



Obr. 1: Obdélníky pro $b = a - 1$ (nahoře); pro $b < a - 1$ (dole)

Při vhodné volbě dokazovaného tvrzení a vhodně zvoleném modelu (např. stavebnice, papírová mozaika, apod.) mohou být deduktivní argumenty založené na manipulacích s objekty součástí výuky matematiky již na 1. stupni ZŠ. Takovou manipulací pro tvrzení s obdélníkem může být posloupnost kroků, při které ze čtverečkové papírové mozaiky vytvoříme obdélník (obr. 2a), z něj odebereme jednu vodorovnou řadu čtverečků (tj. zmenšíme jeden z jeho rozměrů o 1; obr. 2b), tuto řadu umístíme svisle vedle obdélníku (obr. 2c) a využijeme jejích čtverečků ke zvětšení druhého rozměru obdélníku o 1 (obr. 2d). Možnosti, že obsah obdélníku se při úpravě rozměrů nezmění, odpovídá situace, kdy na zvětšení druhého rozměru využijeme právě všechny přemisťované čtverečky. Obrázek 2 znázorňuje situaci, kdy na zvětšení druhého rozměru nebyly využity všechny přemisťované čtverečky, tj. obsah obdélníku se při úpravě rozměrů zmenšil.



Obr. 2: Obdélníky znázorněné s využitím čtverečkové papírové mozaiky

Formální podobou deduktivního argumentu je důkaz, někdy také označovaný jako axiomatický deduktivní argument – odůvodnění vycházející z axiomů, definic a tvrzení pravdivých nebo za pravdivé považovaných, vedoucí pouze pomocí logických pravidel k tvrzení, které pak platí nutně a za všech okolností (srov. [11], str. 20; [4], str. 273).

Úlohou důkazů však není vyvolat v nás pocit přesvědčení, nýbrž dát nám nahlédnout do vzájemných souvislostí vět. Požadavek dokázat vše, co jen dokázat lze, není výplodem pochybovačné mysli, nýbrž je to vyjádření touhy vidět strukturu větné stavby ve vší jasnosti, vidět spojení, existující mezi jednotlivými pravdami.

F. Waismann (cit. podle [11], str. 127)

2 O argumentaci a budoucích učitelích 1. stupně ZŠ

Vztah učitelů 1. stupně ZŠ k důkazu je specifický. Neočekává se od nich, že by své žáky učili, co to důkaz je, ani formální vzdělávání v této oblasti nebývá součástí jejich univerzitní přípravy. Ale zároveň jsou prvním a hlavním zdrojem žákových zkušeností s neformálním důkazem ve formě ověřování a odůvodňování.

Výzkumy zabývající se argumentačními schopnostmi budoucích učitelů 1. stupně ZŠ obvykle zmiňují hluboce zakořeněné miskoncepce podobné miskoncepcím pozorovaným i u některých studentů středních škol (podrobněji v publikaci ICMI Study [3]). Tyto výzkumy naznačují, že vývoj argumentačních schopností často ustrne ve stadiu odkazování se na autority (učebnice, knihy nebo odborníky) a ve stadiu empirických argumentů (u názoru, že platnost obecného tvrzení je možné ověřit prostřednictvím několika příkladů a/nebo několika ne-příkladů). S nepochopením podstaty obecného tvrzení také souvisí často se vyskytující nepochopení role protipříkladů: často rozšířený je mylný názor, že jeden protipříklad nestačí na vyvrácení obecného tvrzení, že takových protipříkladů je třeba nalézt více.

My máme s budoucími učiteli podobné zkušenosti. V tomto příspěvku se budeme věnovat nedávným zkušenostem, kdy během ročního experimentálního vyučování v rámci projektu GA ČR jsme měli příležitost sledovat průběžný vývoj schopnosti argumentovat i postupné uvědomování si role a potřeby argumentování u skupiny budoucích učitelů 1. stupně ZŠ při badatelsky orientovaném vyučování kurzu matematiky.

V úvodu kurzu jsme budoucím učitelům předložili tři úkoly:

- Nejprve jsme je požádali, aby z čísel $(103)_4$, $(112)_3$, $(111)_2$, $(102)_5$, $(121)_3$ a $(120)_4$ vybrali ta, která jsou sudá.
- Pak jsme jim připomněli, že v desítkové soustavě se sudá čísla poznají podle toho, že jejich poslední číslice je sudá, a zeptali jsme se, zda podobné pravidlo platí i v nedesítkových soustavách, například v trojkové a čtyřkové.
- Na závěr jsme je vyzvali, aby se pokusili zformulovat obecné pravidlo, podle kterého by bylo možné poznat sudé číslo v libovolné nedesítkové soustavě.

Miskoncepce nalezené v odevzdaných řešeních byly zcela v souladu s výše uvedenými zjištěními z provedených šetření. V odpovědích na druhý úkol přibližně třetina budoucích učitelů odůvodnila nepřenositelnost pravidla do trojkové soustavy několika příklady (obvykle jedním nebo dvěma) a několika protipříklady (obvykle dvěma nebo třemi). Jako odůvodnění tak bylo předloženo např. sudé číslo $(112)_3$ spolu s lichými čísly $(120)_3$ a $(122)_3$. Pouze třetina studentů založila své odůvodnění na jednom protipříkladu.

Přibližně polovina studentů odůvodnila přenositelnost pravidla do čtyřkové soustavy několika příklady (obvykle dvěma nebo třemi) a několika ne-příklady (obvykle jedním nebo dvěma). Jako odůvodnění tak byla například předložena sudá čísla $(102)_4$ a $(110)_4$, $(112)_4$ spolu s lichými čísly $(103)_4$ a $(111)_4$. Jen 2 studenti z 27 nabídli argumenty deduktivního charakteru: jeden z nich své odůvodnění založil na tom, že poslední cifra je zbytek, který dostaneme při dělení číslem 4; druhý na tom, že při převodu do desítkové soustavy násobím všechny cifry kromě poslední sudým číslem (mocninou čísla 4), dostanu tedy vždy číslo sudé, a poslední cifra se násobí číslem 1, musí být tedy sudá sama o sobě.

V odpovědích na třetí úkol jsme mj. nalezli ukázky argumentace, kterou označujeme jako symbolickou (srov. [4], str. 246): několik studentů sestavilo obecné pravidlo pouze na základě pravidelností objevujících se v zadání prvního úkolu, aniž by vzali v úvahu význam jednotlivých znaků v zápisu čísla. Jedno z nabídnutých kritérií tak mělo znění: *„Číslo je sudé, pokud jednotky a desítky jsou dělitelné n-soustavy, například* $(112)_3$ *je sudé, protože 12 je dělitelné 3.“* Dlužno podotknout, že všechna čísla ze zadání prvního úkolu toto kritérium splňují.

Většina studentů ze sledované skupiny sice sestavila obecné kritérium správně, ale nikdo z nich neposkytl zdůvodnění jeho znění. Více podrobností k těmto výsledkům lze nalézt v příspěvku [8].

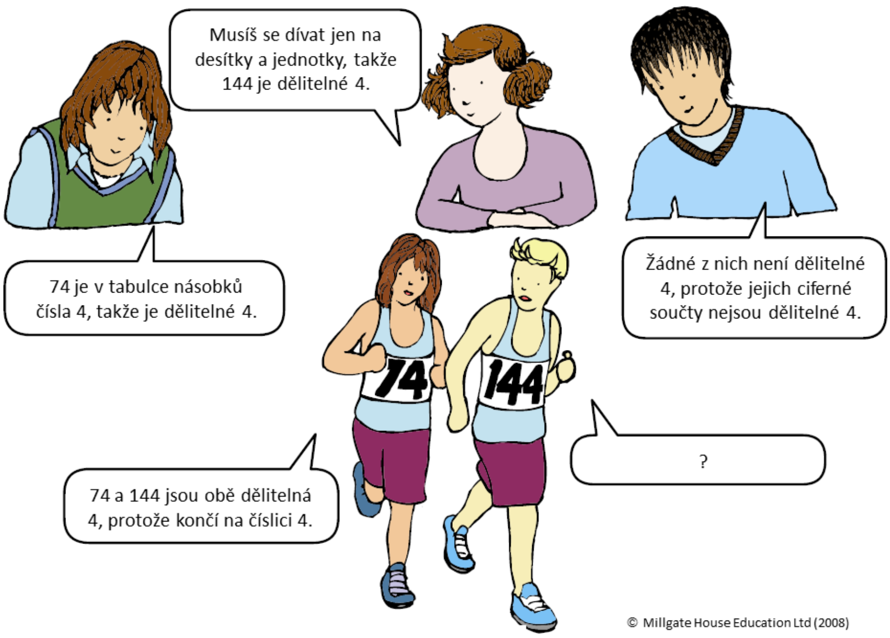
3 O badatelsky orientovaném vyučování jako možné cestě ke změně

Během sledovaného kurzu matematiky měli studenti – budoucí učitelé mnoho příležitostí k pozorování matematických jevů, jejich zkoumání a samostatnému nebo skupinovému objevování různých matematických zákonitostí, tedy také k odůvodňování a ověřování (více podrobností o badatelsky orientovaném vyučování matematice je uvedeno v přehledové studii [7], otázky související s plánováním a vedením kurzu jsou diskutovány v příspěvku [6]).

Při badatelsky orientovaném vyučování byly studentům často zadávány

- úkoly vyžadující hledání souvislostí a zobecňování (např. *„Z kartiček s číslicemi 1, 4, 5, 8 poskládejte dvě dvojciferná čísla. Najděte taková, aby jejich součet byl co největší. Jak byste obecně popsali postup, který vede k nalezení dvojic s největším součtem?“*);
- úkoly, u kterých se různě měnily vstupní nebo výstupní parametry úlohy (vstupní: *„Co se změní, když jedna z číslic bude 0?“*; výstupní: *„Najděte taková, aby jejich rozdíl/součin byl co největší/co nejmenší.“*);
- úlohy otevřené ve smyslu otevřeného přístupu k matematice, tj. úlohy s více možnostmi uchopení úlohy, s více správnými postupy řešení, s více správnými výsledky (např. *„Obsah neznámého obrazce je 64 cm^2. Jak by tento obrazec mohl vypadat?“*).

Studentům byly také předkládány různé alternativní názory na nějakou (matematickou) situaci a oni měli rozhodovat o správnosti těchto názorů (např. jako na obr. 3). Více o charakteristikách úloh podněcujících bádání, včetně konkrétních námětů, je uvedeno v přehledové studii [7].



Obr. 3: Alternativní názory na dělitelnost číslem 4, prezentované na obrázku zvaném Concept Cartoon (zdroj: [1], č. 1.9, vlastní překlad). Úkol pro studenty: *„Které děti mají pravdu? Proč?"*

Používali jsme také sady na sebe navazujících otázek, zaměřených postupně na různé pohledy na zkoumanou situaci (Tall mluví o *path-dependent logic* [10]). Jednu z těchto sad jsme mj. použili na závěr kurzu, abychom získali přehled, zda a jak se argumentační schopnosti studentů změnily. Studentům byl předložen pracovní list s těmito otázkami:

Vysvětli, co to je prvočíslo:

Napiš 5 čísel, která jsou prvočísla:

Kolik existuje sudých prvočísel?

Napiš 5 čísel, která nejsou prvočísla:

Je součet prvočísel vždy prvočíslo?

Svou odpověď zdůvodni:

Napiš dvě prvočísla, jejichž součet není prvočíslo:

a ještě další dvě:

a další:

Dají se takové dvojice prvočísel nějak charakterizovat? Mají něco společného?

Napiš dvě prvočísla, jejichž součet je prvočíslo:

a ještě další dvě:

a další:

Dají se takové dvojice prvočísel nějak charakterizovat? Mají něco společného?

Je součin prvočísel vždy prvočíslo?

Svou odpověď zdůvodni:

V odpovědích na otázky jsme zaznamenali zlepšení v přístupu k protipříkladům, i vyšší podíl více či méně úspěšných pokusů o argumenty deduktivního charakteru.

U otázky *„Je součet prvočísel vždy prvočíslo?"* všichni studenti nabídli protipříklad a/nebo deduktivní argument, z nich pouze 3 použili více než jeden protipříklad. Správně koncipované deduktivní argumenty se objevily přibližně u třetiny studentů, např. *„Když sečteme dvě lichá prvočísla, tak vždycky dostaneme sudé číslo. Sudá čísla kromě dvojky nejsou nikdy prvočísla."* U jednoho studenta jsme však objevili falešně deduktivní odpověď: *„Ne, protože součet dvou čísel vytvoří číslo, které je větší, a tedy s velkou pravděpodobností dělitelné i nějakými jinými čísly."*

Podrobněji je tato problematika zpracována v příspěvku [8].

4 Na závěr

Jak naznačují výzkumy (provedené v zahraničí i u nás) i naše zkušenosti z výuky a šetření, o kterém píšeme v předchozím textu, budoucí učitelé si často dostatečně neuvědomují roli a potřebu argumentace, odvolávají se na autority nebo na empirická odůvodnění a nejsou si vědomi významu deduktivních argumentů. Podle našeho názoru se pak tato skutečnost negativně odráží i ve způsobu, jakým tito učitelé vedou vlastní výuku: aby učitel byl schopen správně řídit diskusi ve třídě, tedy i správně posoudit odpovědi žáků na otázky ZDA a PROČ, měl by být schopen rozlišit jednotlivé druhy argumentace a žákovi být nápomocen (např. prostřednictvím návodných otázek) na cestě od odkazů na autoritu a empirických odůvodnění k odůvodněním deduktivního charakteru. Je tedy nutno u budoucích učitelů podpořit uvědomění si potřeby argumentovat, rozlišování jednotlivých druhů argumentace a rozvoj jejich vlastních argumentačních schopností. Naše nedávné zkušenosti naznačují, že jednou z cest ke zlepšení by mohlo být začlenění badatelsky orientovaného vyučování matematice do univerzitní přípravy učitelů.

Jak zdůrazňují Harel a Sowder [4], pro rozvoj matematických znalostí žáků jsou klíčové zvláště tzv. transformační deduktivní argumenty (tj. argumenty založené na operacích s objekty a na předvídání výsledků těchto operací) a ty by měly být součástí matematického vzdělávání od raného věku. Příklad takového argumentu je uveden na obr. 2; podrobněji tuto problematiku ve vztahu k 1. stupni ZŠ zpracovávají např. Semadeni (mluví o *action proof* [9]) a Wittmann (*operative proof* [12]).

Cenné jsou však i dovednosti související s empirickou argumentací, se správným chápáním role příkladů, protipříkladů a ne-příkladů, neboť

Matematik nejprve vyšetří neznámé skutečnosti pomocí příkladů a protipříkladů a teprve pak začne získané zkušenosti zobecňovat tak, aby nebyly logicky napadnutelné; tím vlastně dokazuje.

R. Thiele ([11], str. 109)

Poděkování

Článek vznikl za podpory GA ČR v rámci projektu 14-01417S (Zkvalitňování znalostí matematického obsahu u budoucích učitelů 1. stupně prostřednictvím badatelsky orientované výuky) a za podpory RVO 67985840.

Literatura

[1] J. Dabell, B. Keogh, S. Naylor, *Concept Cartoons in Mathematics Education*, Millgate House Education, Sandbach, 2008.

[2] P. J. Davis, *Are there coincidences in mathematics?*, Amer. Math. Monthly 88 (1981), 311–320.

[3] G. Hanna, M. de Villiers (eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education*, New ICMI Study Series 15, Springer, Dordrecht, 2012.

[4] G. Harel, L. Sowder, *Students' proof schemes: results from exploratory studies*, CBMS Issues in Mathematics Education 7 (1998), 234–283.

[5] F. Kuřina a kol., *Matematika a porozumění světu: setkání s matematikou po základní škole*, Academia, Praha, 2009.

[6] L. Samková, *Badatelsky orientované vyučování matematice v přípravě budoucích prvostupňových učitelů*, In EME 2016 Proceedings, Olomouc, 2016, 9–14.

[7] L. Samková, A. Hošpesová, F. Roubíček, M. Tichá, *Badatelsky orientované vyučování matematice*, Scientia in educatione 6 (2015), 91–122.

[8] L. Samková, M. Tichá, *Developing views of proof of future primary school teachers*, In Proceedings of 15th Conference on Applied Mathematics APLIMAT 2016, Bratislava, 2016, 987–998.

[9] Z. Semadeni, *Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training*, For the Learning of Mathematics 4 (1984), 32–34.

[10] D. Tall, *Cognitive conflict and the learning of mathematics*, Paper presented at PME conference, Utrecht, Netherlands, 1977.

[11] R. Thiele, *Matematické důkazy*, SNTL, Praha, 1986.

[12] E. Ch. Wittmann, *Operative proof in elementry mathematics.* In Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education, Vol. 2, Taipei, Taiwan, 2009, 251–256.

RNDr. Libuše Samková, Ph.D.
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice
`lsamkova@pf.jcu.cz`

Mgr. Marie Tichá, CSc.
Kabinet pro didaktiku matematiky
Matematický ústav AV ČR
Žitná 25
115 67 Praha 1
`ticha@math.cas.cz`

ELEMENTÁRNÍ A „VELKÁ“ TEORIE ČÍSEL

Jaroslav Hora

Na pedagogické fakultě ZČU se již delší dobu zúčastňuji výuky v tzv. *Dětské univerzitě*. Jde o soubor kurzů z mnoha různých oborů, které mají zaujmout talentované žáky zhruba ve věku 10–14 let. Výuka probíhá v odpoledních hodinách a v kursu *O prvočíslech a šifrování* obvykle vyřešíme nějakou náročnější slovní úlohu vyžadující nalezení rozkladu jistého přirozeného čísla v součin prvočísel, realizujeme hledání prvočísel metodou Eratosthenova síta a povíme si něco o historii šifrování, vyřešíme jednu šifru pocházející od E. A. Poea a řekneme si také, že moderní šifrování je založeno na využití velkých prvočísel.

Věnujme se teď detailněji druhé z uvedených aktivit.

1 Eratosthenovo síto

Začněme jednou klasickou úlohou, známou již ze základní školy.

Příklad. Nalezněte všechna prvočísla p, pro něž platí $1 < p < 120$.

Řešení: Využijeme výše zmíněné Eratosthenovo síto. Napišme (lineární zápis) posloupnost všech přirozených čísel od 1 do 120:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad \dots \quad 118 \quad 119 \quad 120.$$

Ideou je vyškrtat „nevhodná“, tj. složená čísla. Číslo 1 není prvočíslem, je tzv. jednotkou ve smyslu dělitelnosti. Následující číslo 2 prvočíslem je. Jeho všechny násobky větší než 2 v této posloupnosti jsou již nezbytně složenými čísly; vyškrtneme je. Následujícím nevyškrtnutým číslem po číslu 2 je číslo 3, které je prvočíslem. Opět vyškrtáme všechny (dosud nevyškrtnuté) násobky čísla 3. Postoupíme na další dosud nevyškrtnuté číslo, tj. na číslo 5. Nalezli jsme další prvočíslo a vyškrtávání opakujeme. Poté přejdeme na prvočíslo 7 a celý postup opakujeme. Smysl slova „síto“ je teď zřejmý: doslova „prosíváme“ přirozená čísla od 1 do 120 (horní mez byla zvolena víceméně náhodou) a získáváme prvočísla.

Kdy ukončit vyškrtávání při realizaci Eratosthenova síta? Snadno se nahlédne, že vyškrtávání v posloupnosti přirozených čísel od 1 do jistého k již není třeba provádět pro žádné $a \in \mathbb{N}$, které je větší než odmocnina z k. V našem případě to znamená, že v posloupnosti obsahující čísla od 1 do $k = 120$ již není třeba provádět vyškrtávání pro $a = 11$. (V daném případě je číslo $11^2 = 121$ již mimo oblast našeho zájmu a všechny předchozí násobky jedenácti již byly vyškrtnuty.) To znamená, že naše práce skončila vyškrtáváním pro hodnotu $a = 7$. Nechceme zde zabírat zápisem Eratosthenova síta příliš místa, nalezená prvočísla jsou tučně zvýrazněna v tabulce 1.

Zapsat posloupnost všech přirozených čísel od 1 do 120 je nezajímavá, nudná, rutinní práce. Tím bych inteligentní žákovské frekventanty *Dětské univerzity* příliš neuchvátil. Proto jsem pro ně předem vytvořil tabulku o šesti sloupcích. Uspořádání původně lineárního seznamu čísel do tabulky je zdánlivě drobná změna. Uvidíme, k čemu to povede.

1	**2**	**3**	4	**5**	6
7	8	9	10	**11**	12
13	14	15	16	**17**	18
19	20	21	22	**23**	24
25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	**41**	42
43	44	45	46	**47**	48
49	50	51	52	**53**	54
55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66
67	68	9	70	**71**	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	**83**	84
85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	**101**	102
103	104	105	106	**107**	108
109	110	111	112	**113**	114
115	116	117	118	119	120

Tabulka 1

Protože jsme houbařský národ, další postup motivuji následovně. Když v průběhu houbařské sezóny vyrazíme do lesa na houby, může se stát, že potkáme dobrého kamaráda, který se již vrací s úlovkem domů. Na otázku, kde rostou, dostaneme často odpověď typu: „V Kováříkovic lesíku nic není, je tam moc sucho. Ani v Soudným nejsou, ale dost rostou v mlází v Nejdlovic lesíku.“ S hledáním prvočísel v tabulce 1 je to podobné. Podívejme se na čísla vyskytující se ve druhém sloupci – mají tvar $6n+2$, $n \in \mathbb{N}_0$. Jde tedy vesměs o sudá čísla a tento sloupec je na prvočísla „neúrodný“, vyskytuje se tu jediné, a to číslo 2. Další sloupec obsahuje čísla tvaru $6n+3$, $n \in \mathbb{N}_0$. Máme tu násobky tří a je v něm jediné prvočíslo, totiž 3.

Ve sloupcích obsahujících prvky tvaru $6n+4$, $n \in \mathbb{N}_0$, a $6n$, $n \in \mathbb{N}$, zjevně nenalezneme ani jediné prvočíslo. Kdybychom tedy realizovali Eratosthenovo síto právě v této tabulce, mohli bychom si významně ušetřit práci: tyto sloupce bychom zcela vyškrtli a v dalších dvou je pouze jediné prvočíslo na první pozici v daném sloupci. Trocha tvořivého přístupu přinesla první plody, úsporu práce s vyškrtáváním. Povšimněme si, že šlo o sloupce, v nichž byla čísla tvaru $6n+m$, kde největší společný dělitel čísel 6 a m je větší než 1, neboli čísla 6 a m jsou soudělná.

Dokončením nám již známého postupu zjistíme, že se prvočísla soustředila do dvou sloupců tabulky 1, totiž do těch, v nichž jsou prvky tvaru $6n+1$, $n \in \mathbb{N}_0$, a $6n+5$, $n \in \mathbb{N}_0$. Naše hledání zasáhlo jen přirozená čísla od 1 do 120. Připomeňme, že prvočísel je nekonečně mnoho. Kdybychom nyní uvažovali množiny všech přirozených čísel $6n+1$, $n \in \mathbb{N}_0$, a $6n+5$, $n \in \mathbb{N}_0$, bez omezení onou horní hranicí, tj. číslem 120, pak by bylo jasné, že v jejich sjednocení leží nekonečně mnoho prvočísel. Platí však, že v jedné každé z těchto množin je nekonečně mnoho prvočísel?

Popřemýšlejme nyní nad další souvislostí. Co kdyby naše tabulka měla kupř. deset sloupců? Daly by se nějaké vyškrtnout? Nu ano, sloupce, v nichž jsou čísla tvaru $10n+2$, $10n+4$, $10n+5$, $10n+6$, $10n+8$, $n \in \mathbb{N}_0$, a $10n = 10n+0$, $n \in \mathbb{N}$, jsou těmi na prvočísla neúrodnými „lesíky“, v nichž lze nalézt nejvýše jedno prvočíslo. Kdybychom si připravili příslušnou tabulku, viděli bychom, že se „skoro všechna“ prvočísla nacházejí ve sloupcích, jejichž prvky mají tvar $10n+1$, $10n+3$, $10n+7$, $10n+9$, $n \in \{0, 1, \ldots, 11\}$. Odbouráme vcelku náhodné omezení na čísla menší než 120 a otázka je nasnadě: Je v každé ze tříd $10n+1$, $10n+3$, $10n+7$, $10n+9$, $n \in \mathbb{N}$, nekonečně mnoho prvočísel? Někteří šikovní frekventanti *Dětské univerzity* již vědí, že prvočísel je nekonečně mnoho. Na otázky o zaplnění oněch nekonečných „lesíků“ by možná odpověděli správně, vedeni spíše touhou po „spravedlivém“ rozložení prvočísel. Dostali jsme se však k obtížnému problému z teorie čísel. Co o něm říci ve výuce algebry budoucím učitelům?

2 Hluboký problém v teorii čísel

Poněkud netradiční uspořádání Eratosthenova schématu nás přivedlo k otázce, kterou je možno zobecnit. Nechť a a b jsou dvě nesoudělná přirozená čísla. Existuje v každé aritmetické posloupnosti tvořené prvky tvaru $an+b$, $n \in \mathbb{N}$, nekonečně mnoho prvočísel?

Je dobře známo, že v teorii čísel lze mnohdy zformulovat jednoduše motivované otázky, jejichž řešení je velmi obtížné. To je i právě uvedený případ. Ano, v každé výše popsané aritmetické posloupnosti vskutku existuje nekonečně mnoho prvočísel. Důkaz tohoto tvrzení je náročný a nalezl jej německý matematik Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) v roce 1837. Dirichlet je mj. i proto pokládán za zakladatele tzv. analytické teorie čísel. Jenže jeho důkaz (viz [2]) do běžné přípravy učitelů nebudeme moci zařadit, neboť využívá teorii funkcí komplexní proměnné, s níž dnes již nejsou studenti učitelství matematiky pro ZŠ seznamováni.

V roce 1949 podal norský matematik Atle Selberg (1917–2007) elementární důkaz Dirichletovy věty o prvočíslech v aritmetických posloupnostech, viz [4]. Slovu elementární je třeba rozumět tak, že se v důkazu nevyužívají funkce komplexní proměnné, ale nejde o důkaz jednoduchý a pro studenty učitelství s matematikou bych jej do běžné výuky nezařadil. Uvažoval bych však alespoň o předvedení důkazu pro některé speciální hodnoty a, b nesoudělných přirozených čísel.

Cvičení. Dokažte, že v aritmetické posloupnosti $4n + 3$, $n \in \mathbb{N}$, existuje nekonečně mnoho prvočísel.

Nástin důkazu (viz [5]): Předpokládejme, že prvočísel dávajících při dělení číslem 4 zbytek 3 je jen konečně mnoho. Nechť jsou to čísla 3, p_1, p_2, ... , p_r. Utvořme číslo

$$A = 4p_1p_2 \cdots p_r + 3$$

a zapišme je jako součin prvočísel ve tvaru

$$A = q_1q_2 \dots q_s.$$

Nahlédněme, že aspoň jedno z prvočísel q_1, q_2, ... , q_s dává při dělení číslem 4 zbytek 3. (Kdyby ne, pak jsou všechna tvaru $4x + 1$ a totéž by platilo o jejich součinu A).

Buď tedy q_k takové prvočíslo, které dává při dělení čtyřmi zbytek 3. Víme, že q_k dělí A, ale z původní definice A vidíme, že žádné z čísel 3, p_1, p_2, ... , p_r nedělí A. Tudíž q_k není rovno žádnému číslu tohoto seznamu, a to je spor s tím, že 3, p_1, ... , p_r jsou všechna prvočísla dávající při dělení číslem 4 zbytek 3.

Lze ovšem najít i další hodnoty a, b nesoudělných přirozených čísel, dovolující přístupný důkaz, více viz [1], [3].

Ještě poznamenejme, že přemýšlivý a tvořivý žák či student se může od školního Eratosthenova síta dostat až k základům programování, resp. k vytvoření drobného matematického programu. Stačilo by využít kupř. Excelu a namísto vyškrtávání složených čísel je přepisovat např. číslem 0. Nenulová čísla nacházející se v tabulce budou hledanými prvočísly.

Nakonec uveďme jednu trochu *provokativní* ukázku toho, jak relativně nedávno dokázaný a krajně obtížný výsledek teorie čísel může poskytnout důkaz elementárního problému.

Příklad. Dokažte, že $\sqrt[3]{2}$ je iracionální číslo.

Řešení: Předpokládejme, že naopak existují přirozená čísla p, q tak, že $\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}$. Pak ale $2q^3 = p^3$, tj. $q^3 + q^3 = p^3$, což je ovšem ve sporu s Velkou Fermatovou větou, kterou dokázal Andrew Wiles (nar. 1953) roku 1994.
(Triviální důkaz iracionality $\sqrt[3]{2}$ se ovšem provede stejně jako pro $\sqrt{2}$.)

Literatura

[1] P. Bateman, M. E. Low, *Prime numbers in arithmetic progression with difference 24*, Amer. Math. Monthly 72 (1965), 139–143.

[2] P. G. L. Dirichlet: *Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält*, Abh. d. Königl. Akad. d. Wiss. (1837), 45–81.

[3] S. Gueron, R. Ressler, *Infinitely Many Primes in Arithmetic Progressions: The Cyclotomic Polynomial Method*, Math. Gaz. 86 (2002), 110–114.

[4] A. Selberg, *An Elementary Proof of Dirichlet's Theorem about Primes in an Arithmetic Progression*, Annals of Math. 50 (1949), 297–304.

[5] J. H. Silvermann, *A Friendly Introduction to Number Theory*, Pearson Prentice Hall, 2006.

doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.
Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy KMT ZČU
Klatovská 51
301 00 Plzeň
horajar@kmt.zcu.cz

UMOŘOVÁNÍ DLUHŮ VE ŠKOLSKÉ MATEMATICE

Martin Melcer

Obsahem tohoto příspěvku je ukázat vývoj a šíři výuky jednoho ze stěžejních témat finanční matematiky, kterým je splácení dluhů. Spolu s přehledem více než staleté historie se seznámíme s výhodami a nevýhodami jednotlivých postupů. Závěrem shrneme současnou situaci, její úspěchy a problémy.

1 Osudy finanční matematiky

V osnovách každého vyučovacího předmětu na střední škole můžeme sledovat za posledních sto let změny. Zaměříme-li se na matematiku, mohlo by se zdát, že sem ideologické a politické změny nezasahovaly vůbec nebo jen minimálně. Opak je pravdou. Spolu s tématy slovních úloh to nejvíce pocítila finanční matematika.

V obdobích, kdy vláda podporovala drobné podnikatele, toto odvětví vzkvétalo a naopak. Zlomovými roky jsou 1918, 1939, 1948 a 1989, kdy docházelo k přeskupování států v Evropě nebo k výrazným politickým změnám. Finanční matematika byla na vrcholu v období rakousko-uherské monarchie, v Československu v období první republiky a vrací se na důležitou pozici až po roce 1989 (více viz [4]).

2 Obsah finanční matematiky

V současné době by již každý z nás měl mít představu, co je předmětem a stěžejním obsahem finanční matematiky. Pojmeme-li obsah co možná nejstručněji, zůstanou nám operace a pojmy: úrokování – úrok, spoření – kapitál, splácení – úvěr, vyplácení – důchod.

Porozuměním jednotlivým částem s jejich aplikacemi do reálného života se uchráníme chyb při důležitých finančních rozhodnutích. Jsme obklopeni nabídkami finančních produktů a velmi často tyto nabídky obsahují skryté pasti pro klienta.

Svět financí je pestrý a velmi bohatý, a přesto se dají všechny podstatné myšlenky a základní pravidla nalézt na velmi malém prostoru příslušných učebnic v kapitolách:

1) Kapitál v jednoduchém úročení po jednom úrokovacím období, po části úrokovacího období, po více úrokovacích období.
2) Kapitál ve složeném úročení po více úrokovacích období.
3) Kapitál naspořený při pravidelném ukládání stejné částky na začátku úrokovacího období, na konci úrokovacího období.
4) Anuita pro pravidelné splácení dluhu, pro pravidelné vyplácení důchodu.

Tak získáme nástroj k řešení většiny úloh s finanční tématikou.

Označení jednotlivých veličin se liší od učebnice k učebnici, přestože jsou snahy o sjednocení značení. Dalším důležitým aspektem pohledu na užití znalostí je hloubka porozumění. Chceme po studentovi, aby jednotlivé součásti matematiky chápal jako nástroje založené na pravidlech a definicích. Nesmíme dopustit, aby student pracoval s naučenými vzorci jako s tzv. „černými skříňkami“ a nesnažil se do nich nahlédnout. Výklad finanční matematiky by měl těsně navazovat na kapitolu o posloupnostech, z jejichž pravidel lze vše potřebné odvodit.

3 Umořování dluhů

Při každé nabídce půjčení peněz (spotřebitelského úvěru, leasingu, hypotéky) musíme přemýšlet nad systémem jeho splacení. Tvorba umořovacího plánu neboli splátkového kalendáře je cílem řešení.

Nastiňme situaci. Půjčka (dluh) D má být splacena n stejnými splátkami (anuitami) a včetně úroků při roční úrokové míře i. Pro jednoduchost předpokládejme, že splátky jsou roční a úrokové období je jeden rok. První splátka bude splacena rok po získání úvěru. Vývoj výše dlužné částky můžeme přehledně zobrazit do tabulky:

čas	**úročení dluhu − splátka** **dluh do nového úrokovacího období**
0 let (půjčili jsme si)	$D = D_0$
1 rok	$D_0 \cdot (1+i) - a = D_1$
2 roky	$D_1 \cdot (1+i) - a = D_2$
3 roky	$D_2 \cdot (1+i) - a = D_3$
4 roky	$D_3 \cdot (1+i) - a = D_4$
5 let	$D_4 \cdot (1+i) - a = D_5$
6 let	$D_5 \cdot (1+i) - a = D_6$
...	...
n let (splaceno)	$D_{n-1} \cdot (1+i) - a = D_n = 0$

Celou tabulku obsáhneme jedním vzorcem:

$$(((((D \cdot (1+i)) - a) \cdot (1+i) - a) \cdot (1+i) - a) \cdot (1+i) - a) \cdots = 0$$

Ve vzorci vidíme zákonitosti geometrické posloupnosti, a proto ho přeformulujeme v několika krocích do vhodnější podoby:

$$D \cdot (1+i)^n - a \cdot (1+i)^{n-1} - a \cdot (1+i)^{n-2} - \cdots - a = 0$$

$$D \cdot (1+i)^n - a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 0$$

$$a = D \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Ve výsledném tvaru je D výše původní půjčky, a roční splátka splatná na konci roku, i roční úroková míra a n počet úrokovacích období (let).

4 Ukázkové úlohy

4.1 Období 1908–1918 (udržování vysokého standardu)

Poslední úpravou středního školství v době existence monarchie byla Marchetova reforma[1] (1908), která m.j. zrovnoprávnila maturitní zkoušky na všech typech středních škol.

Hlavní úlohu při tvorbě učebnic matematiky měla *Jednota českých matematiků a fyziků.* Základní problémy finanční matematiky, tj. spoření, půjčka a důchod, patřily neodmyslitelně k běžnému životu. Proto tato témata byla standardně zařazena do osnov matematiky. Studenti společně s logaritmickými pravítky[2] používali tabulky finanční matematiky (tabulky úročitelů, odúročitelů, střadatelů, zásobitelů, umořovatelů, ...).

Příklad ([6], str. 69–70[3]). Obec vypůjčí si K 200 000, které mají býti umořeny ročními splátkami ve 40 letech. Úroková míra $4\,\frac{1}{2}\%$ p.a. Jak velká jest annuita a jak sestaví se umořovací plán?

Řešení. Dle vzorce XXVI a)

$$a = H_{40} : f_{(40)(4\frac{1}{2})}$$
$$a = 200\,000 : 18{,}401\,584 = 10\,868{,}63.$$

Dluh se umoří ve 40 letech roční annuitou K 10 868,63.

Umořovací plán sestaví se takto: Z dluhu K 200 000 zaplatí se prvým rokem na $4\frac{1}{2}\%$-ních úrocích K 9 000. Na umoření dluhu zbude z annuity

$$\text{K } 10\,868{,}63 - \text{K } 9\,000 = \text{K } 1\,868{,}63$$

tak že se dluh koncem 1. roku zmenší na

$$\text{K } 200\,000 - \text{K } 1\,868{,}63 = \text{K } 198\,131{,}37,$$

z něhož se zaplatí koncem 2. roku na $4\frac{1}{2}\%$-ních úrocích K 8 915,91.

Na umoření dluhu zbude z annuity K 10 868,63 − K 8 915,91 = K 1 952,72. Tím zmenší se dluh koncem 2. roku na

$$\text{K } 198\,131{,}37 - \text{K } 1\,952{,}72 = \text{K } 196\,178{,}65,$$

---

[1]Gustav Marchet (1846–1916) byl v letech 1906–1908 rakouským ministrem kultu a vyučování.

[2]Logaritmické pravítko získalo svou finální podobu kolem roku 1850 přidáním posuvné části. Autorem byl francouzský vynálezce Victor Mayer Amédée Mannheim (1831–1906).

[3]Zadání a řešení příkladu je oproti originálu typograficky upraveno.

z čehož se zaplatí koncem 3. roku na $4\frac{1}{2}$%-ních úrocích K 8 828,04.

Na umoření dluhu zbude z annuity K 10 868 · 63 – K 8 828,04 = K 2 040,59. Tak pokračuje se dále, ...

Komentář. Vzorec XXVI je v učebnici [6] podrobně odvozen na stranách 46–47 na základě pravidel pro geometrické posloupnosti v podkapitole *Bezprostřední a odložený důchod dočasný*. Jeho tvar $a = H_n : \frac{q^n-1}{q^n(q-1)}$ byl pro práci bez kalkulátorů nevhodný a v další podkapitole *Řešení problémů o dočasných důchodech pomocí tabulek* na straně 56 je zaveden nový výraz. Hodnoty $\frac{q^n-1}{q^n(q-1)}$ jsou nahrazeny $f_{(n)(p)}$, kde n je počet úrokovacích období a p úroková míra. Student pak pracuje pouze s tabulkami a základními početními operacemi.

4.2 Období 1918–1939 (rozvoj kvalitního dědictví)

Po vzniku samostatného Československa se ve školství navázalo na kvalitu z období monarchie. Většina učebnic psaných v českém jazyce před rokem 1918 byla jen minimálně upravena do nových vydání, která vycházela ve dvacátých a třicátých letech dvacátého století.

Nově vzniklý stát měl zájem na výchově a vzdělání svých občanů. Finanční matematika byla součástí. Další pozitivní krok přinesla školská reforma[4] z roku 1933, která spolu s hromaděním informací vyzdvihla důležitost samostatného myšlení studenta.

Příklad ([1], str. 149–150). Obec si vypůjčila 100 000 Kč na $4\frac{1}{2}$% p.a.; ročně může spláceti (vždy koncem roku) 6 000 Kč. Za kolik let se dluh umoří a jaká bude poslední splátka?

Řešení. Užijeme-li vzorce $R_n = \frac{D}{r} = 16{,}66\ldots$, nalezneme v tabulkách $R_{31} = 16{,}54\ldots$, $R_{32} = 16{,}78\ldots$; je tedy $n = 31, \ldots$ let.

Desetinných míst ovšem počítati nebudeme. Dluh se 31 splátkami neumoří úplně; bude třeba ještě 32. splátky, ta však bude menší než 6 000 Kč. Tuto poslední splátku vypočítáme takto: Jedenatřiceti vklady po 6 000 Kč, placenými koncem 1., 2., ... až 31. roku, nastřádá se do konce 32. roku $6\,000Q_{31} = 405\,997{,}50$; dluh vzroste do konce 32. roku na $100\,000q^{32} = 408\,998{,}10$. Výsledek umořování je týž, jako by se nastřádané jistiny užilo k zaplacení vzrostlého dluhu; i zbývá koncem 32. roku ještě Kč

$$Z = 100\,000q^{32} - 6\,000Q_{31} = 408\,998{,}10 - 405\,997{,}50 = 3\,000{,}60$$

nesplaceného dluhu; to je tedy hodnota poslední, 32. splátky.

Vypočtěte n též přímo ze vzorce

$$100000 = 6000\frac{1}{q^n}\frac{q^n-1}{q-1},$$

kde $q = 1{,}045$! (Počítejte nejprve q^n!)

[4]Reformu vypracovala komise, které předsedal akademik Bohumil Bydžovský (1880–1969).

Komentář. Všechny použité vzorce jsou v učebnici [1] nejprve uvedeny a následně dokázány. Jejich části důležité pro finanční matematiku jsou pojmenovány. Například základní vzorec pro střádání $K = aq\frac{q^n-1}{q-1}$ je popsán na straně 141 v souvislosti s geometrickou posloupností a jeho činitel $q\frac{q^n-1}{q-1}$ je pojmenován *střadatel*. Další vzorce včetně výše použitého jsou ze základního přehledně odvozeny (výraz $\frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$ nese název *zásobitel*). Po důkazech platnosti vzorců pracuje student jen s tabulkami a jeho znalosti podstaty odvození jsou ověřovány jen nejnáročnějšími úlohami s komplikovanějšími vstupními podmínkami.

4.3 Období 1939–1945 (likvidace české inteligence); období 1945–1948 (snaha o renesanci školství); období 1948–1989 (devastace finanční matematiky)

Po zřízení *Protektorátu Čechy a Morava* až do konce druhé světové války drželi rozhodující moc představitelé nacistického Německa. Z jejich strany nebyl zájem o rozvoj české inteligence. Došlo k uzavření vysokých škol, k rušení řady gymnázií a středních škol. Nové učebnice byly psány pod taktovkou německých recenzentů. Němci chtěli české občany převychovat nebo zničit.

Nadějí pro návrat ke kvalitnímu školství znamenal až konec okupace. Postupně byly obnoveny předválečné české vysoké školy a začaly také vznikat nové vysoké školy. Vývoj politické situace v Evropě vedl k tomu, že se naše republika dostala do vlivu Východu, což vyvrcholilo komunistickým pučem 25. února 1948.

Politické změny v zemi ovlivnily všechny součásti života občanů. Ve školství došlo ke změnám osnov. Tyto změny byly k matematice shovívavé. Matematika zůstala kvalitní, avšak finanční matematika mizí. Aplikace posloupností se odklání od kapitálu, který je nahrazen řepou, lesem, traktory apod. Jen v malém množství učebnic nebo sbírek úloh lze objevit několik úloh o penězích.

Příklad ([3], str. 213, výsledek: 265 249 Kčs). Výrobní družstvo si vypůjčilo 500 000 Kčs na 2 % a zavázalo se splatit je ve dvou stejných splátkách. Prvou splátku zaplatí po dvou letech, druhou po čtyřech. Jak budou splátky velké?

Řešení. Úlohu můžeme přepsat do podoby lineární rovnice o jedné neznámé. Musíme si uvědomit, že dluh byl nejprve dvakrát úročen, pak došlo první splátce. Zbytek dluhu byl opět dvakrát úročen a splátkou o stejné výši umořen.

$$(\text{dluh} \cdot \text{úročení}^2 - \text{splátka}) \cdot \text{úročení}^2 - \text{splátka} = 0$$

$$\text{splátka} = \frac{\text{dluh} \cdot \text{úročení}^4}{\text{úročení}^2 - 1} = \frac{500\,000 \cdot 1{,}02^4}{1{,}02^2 - 1} = 265\,249{,}99$$

Komentář. Až na způsob zaokrouhlení můžeme s výše uvedeným výsledkem souhlasit. Finanční matematika je to však velmi chudá. Žádné odvozování dříve známých speciálních vozrců pro finanční matematiku zde nenalezneme.

4.4 Období 1989–současnost (renesance finanční matematiky)

Po roce 1989 jsme se rozloučili s vidinou společnosti bez nutnosti správy finančních prostředků. Totalitní režim se zhroutil a lidé začali ve velkém počtu hledat uplatnění v soukromém podnikání. Pro toto podnikání museli pracovat s financemi a znovu se objevila nutnost znalostí základních pravidel finanční matematiky.

Od zmíněného roku prochází finanční matematika obrozením. Nejen že se hledá vhodný prostor v osnovách matematiky pro základní a střední školy, ale jsou pořádány kurzy a sepisovány průvodce finanční matematikou pro pomoc lidem již ne školou povinných.

Následky neznalosti z minulých let měly a mají za následek spoustu krachů firem i osobních bankrotů. Lidé si stále teprve zvykají na nutnost svědomitého rozhodování v oblasti financí. Před náročný úkol zvládnutí této tématiky byli postaveni zejména učitelé matematiky na základních a středních školách. Většina z nich o finanční matematice jen letmo slyšela a v žádném případě se nejednalo o ucelenou přípravu. Nyní je po nich žádáno, aby doplnili aplikace užití procent a posloupností o finanční otázky.

Příklad ([5], str. 138–139). Klient hypoteční banky získal hypoteční úvěr na stavbu domku ve výši 1,5 milionu korun na dobu 15 let. Úvěr bude splácen měsíčními anuitami. Předpokládejme, že po celou dobu splácení úvěru bude úroková míra 7,5 %.

a) Vypočítáme, kolik korun bude v takovém případě činit výše anuity.
b) Kolik korun celkem klient za 15 let hypoteční bance měsíčními anuitami splatí?

Řešení.

a) Využijeme vzorec pro anuitní splátku:

$$s = \frac{V \cdot i \cdot \frac{t}{360}}{1 - \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^{-n}}$$

V našem případě je $V = 1{,}5 \cdot 10^6$ Kč, $i = 0{,}075$, $t = 30$, $n = 180$.
Je tedy:

$$s = \frac{1{,}5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}075 \cdot \frac{1}{12}}{1 - \left(1 + 0{,}075 \cdot \frac{1}{12}\right)^{-180}} \text{ Kč}$$

$$s \approx 13\,905 \text{ Kč}$$

Výše anuity je 13 905 Kč.

b) Klient bance v měsíčních anuitách splatí celkem 2 502 900 Kč.

$$(13\,905 \text{ Kč} \cdot 180)$$

Komentář. Veškeré důležité vzorce jsou v učebnici [5] podrobně odvozené z pravidel práce s procenty, aritmetickou a geometrickou posloupností. Vzorec pro výpočet anuitní splátky je získán na stranách 119–122 nejprve s konkrétními čísly a poté obecně. Přestože se v některých učebnicích stále používají finanční tabulky, zde se předpokládá použití kalkulátoru, čemuž odpovídá tvar vzorců.

5 Závěr

V běhu staletí jsme uvedli několik postupů při výpočtech spojených se splácením dluhů. Chceme, aby studenti přistupovali k řešení problémů s otevřenou myslí. Nechceme, aby slepě dosazovali do vzorců a bezmyšlenkovitě věřili získaným výsledkům. Nestačí, když student dovede správně vyhledat hodnotu v tabulkách a dosadí ji do vzorce. Také předdefinované vzorce v tabulkových procesorech nemůžeme považovat za dostatečné, když je budeme používat bez snahy hlubšího pochopení. Naším cílem je vést studenta k samostatnému přístupu, kdy je schopen na základě daných podmínek a svých znalostí z matematiky vytvořit, ověřit a použít své vlastní závěry ve formě vzorce, pravidla apod. Tento úkol leží nejvíce na učitelích matematiky na základních a středních školách. Bohužel stále velké procento z nich finanční matematiku podceňuje, přestože k jejich podpoře vyšla řada kvalitních učebnic, např. [2, 5, 7], a vysoké školy pořádají množství vzdělávacích akcí.

Obecně se svým přístupem k finanční matematice učitelé velmi liší. Je nezáviděníhodným úkolem ředitelů a dalších nadřízených orgánů dozírat na podporu a rozvoj finanční gramotnosti. Tento proces trvá již více než 25 let a přináší ovoce, což dokládá např. celostátní soutěž *Finanční gramotnost* [8]. Tuto soutěž pořádá Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy pro žáky základních a středních škol a ve školním roce 2015–2016 proběhl již 7. ročník. Těchto sedmi ročníků se zúčastnilo více než 300 tisíc soutěžících.

Literatura a další zdroje

[1] B. Bydžovský, S. Teplý, F. Vyčichlo, *Aritmetika pro V.–VII. třídu středních škol*, Prometheus, Praha, 1935.

[2] T. Cipra, *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*, 2. vydání, Ekopress, Praha, 2005.

[3] E. Kriegelstein a kol., *Sbírka úloh z matematiky pro SPŠ a SZTŠ*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1966.

[4] M. Melcer, *Finanční matematika v českých učebnicích od Marchetovy reformy*, Matfyzpress, Praha, 2013.

[5] O. Odvárko, *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy*, Prometheus, Praha, 2005.

[6] A. Pižl, *Algebra a politická arithmetika pro vyšší školy obchodní. Díl III. Arithmetika finanční*, Fr. Řivnáč, Praha, 1906.

[7] J. Radová, P. Dvořák, J. Málek, *Finanční matematika pro každého*, 6. aktualizované vydání, Grada Publishing a.s., Praha, 2007.

[8] Soutěž Finanční gramotnost.
http://www.fgsoutez.cz/

[9] Wikipedia: *Logaritmické pravítko.*
http://en.wikipedia.org/wiki/Slide_rule

RNDr. Martin Melcer, Ph.D.
Ústav jazykové a odborné přípravy UK
Studijní středisko Poděbrady
Jiřího náměstí 1
290 01 Poděbrady
martin.melcer@ujop.cuni.cz

VYJADŘOVACÍ DOVEDNOSTI ŽÁKŮ

Vlasta Moravcová

V příspěvku upozorním na některé problematické situace ve vyjadřování žáků středních škol v hodinách matematiky. Zároveň se zamyslím nad důvody, které k těmto problémům vedou, a možnostmi nápravy.

Vycházím z vlastních zkušeností získaných více než desetiletou výukou matematiky a deskriptivní geometrie na gymnáziu i vysoké škole a z rozhovorů se studenty učitelství i se svými žáky na střední škole. Dále popsané problematické momenty jsem si začala více uvědomovat v posledních přibližně pěti letech, kdy jsem měla větší možnost navštěvovat hodiny kolegů a posluchačů na praxích a to nejen na škole, kde působím, ale i na dalších školách. Ráda bych podotkla, že tento pohled na výuku z lavice mi pomohl uvědomit si mnohé chyby, kterých se někteří učitelé (včetně mě) dopouštějí, a přispěl tak k vlastnímu rozvoji. Zároveň prosím, aby nikdo nevnímal následující text jako kritiku současného stavu či konkrétních osob, ale jen jako upozornění na některé jevy, nad nimiž by bylo vhodné se minimálně zamyslet.

1 Problémy s formulací myšlenky

Typická situace, k níž dochází téměř denně: Žák je u tabule (nebo vyvolán v lavici) a má zformulovat odpověď na dotaz, popsat řešení úlohy, zopakovat učivo minulé hodiny aj. Bohužel poměrně často se pak setkávám s reakcí: „*No to je … to … , no … , já vím … , tamto …*“ Pedagog pak občas nevydrží a buď vyvolá někoho jiného, nebo se snaží pomoct, napovědět, popostrčit, načež žák reaguje: „*Přesně tak jsem to myslel./Jo, to jsem chtěl říct./No, to je ono …*“ apod. Oba aktéři to myslí dobře. Žák neprovokuje, snaží se, chce odpovědět. Učitel by rád poradil, pomohl. Výsledkem však je, že učitel si odpoví sám a z žáka dostaneme jen posloupnost ukazovacích zájmen,[1] popřípadě nelogicky navazujících slov. Pokud má věta přeci jen informační charakter, stává se, že je matematicky nesprávně nebo alespoň nepodává úplnou informaci.

Samostatnou kapitolou je písemný projev žáků. Zde nepozoruji tak razantní použití ukazovacích zájmen typické pro ústní vyjádření, zato častěji zaznamenávám novotvary, z nouze vymyšlená nová a evidentně neplatná matematická pravidla, slova poskládaná do vět, které nedávají smysl. O správném pravopisu nemluvě.[2] Z textů je většinou zřejmé, co chtěl žák napsat. Jeho myšlenka je

[1]S takovým způsobem vyjadřování se v širší míře setkáváme u starších lidí nebo u osob, které jsou delší dobu vyčleněny z kolektivu/pracovního procesu, ale také u dětí v pubertálním věku. Narušenou komunikační schopností se zabývá *logopedie*, více viz [1], [2], [3] nebo [4]. V příspěvku se však zabývám zejména specifickými situacemi vznikajícími při výuce a týkajícími se žáků, kteří při běžném rozhovoru komunikační problémy nevykazují.

[2]Typicky chybí interpunkce nebo nějaké písmeno, vzácností nejsou chyby v použití y/i ve shodě podmětu s přísudkem, ale i ve vyjmenovaných slovech.

často správná, jen její podání je zcestné. Uvedu zde několik konkrétních příkladů (cituji z prací žáků včetně použitých zkratek a chyb):

Zavěr k úloze, v níž se měla řešit soustava dvou nerovnic o jedné neznámé. Soustava neměla řešení v $\mathbb{R}$:

> *Tato soustava nerovnic nemá společný průnik.* (1)

Vysvětlení, proč jistá strana trojúhelníku může mít délku pouze v určitém rozsahu:

> *V troj. musí platit trojúhelníková nerovnost, aby se dal sestrojit. Jinak se neprotnou strany.* (2)

Uvedení, podle jaké věty[3] jsou dané trojúhelníky podobné:

> $\triangle$ *jsou si podobné ve všech úhlech.* (3)

Poznámka v zápisu postupu konstrukce:

> *Osa úsečky AB je kolmá na střed úsečky AB.* (4)

Formulace věty o shodnosti trojúhelníků *usu*:

> *Pokud mají dva trojúhelníky stejnou stranu a dva přilehlé úhly svírají stejný úhel, trojúhelník je shodný.* (5)
>
> *Dva úhly svírající jednu stran jsou si v obou trojúhelnících rovni.* (6)
>
> *Dva trojúhelníky mají shodnou stranu a dva úhly, mohou být v určitém poměru.* (7)
>
> *Známe v trojúhelníku 2 úhly a jednu stranu.* (8)

U většiny ukázek lze vytušit, co jimi chtěl autor sdělit. Například ve větě (1) by stačilo nahradit pojem *společný průnik* výrazem *řešení*. V posledním kroku řešení příkladu však žák skutečně (a správně) určoval průnik dvou intervalů, odtud tedy jeho zmatený závěr. V ukázce (2) chtěl žák formulací *jinak se neprotnou strany* popsat, že při obvyklé konstrukci podle věty *sss* by se neprotly kružnice a nevznikl by tak třetí vrchol trojúhelníku. Větou (3) žák patrně myslel větu *uu*. Vazba *kolmice k bodu*, která se objevuje ve větě (4), je v různých obměnách poměrně častá a žáci ji mezi sebou bohužel používají jako samozřejmost, aniž by si uvědomovali její nesprávnost (obecně slovní popisy geometrických konstrukcí působí značné potíže). Ukázky (5) až (8) možná budí úsměv na rtech, jsou však smutným dokladem, že někteří žáci předmaturitního ročníku gymnázia sice tuší, čeho se věta o shodnosti trojúhelníků *usu* týká, ale nevytvoří její smysluplnou formulaci.

2 Důvody problémů a možnosti jejich redukce

Čím častěji se setkávám s výše popsanými problémy, tím více si kladu otázku, co je jejich příčinou a jak jejich frekvenci snížit. Do jisté míry jsou nesprávné for-

[3] V textu užívám obvyklé značení vět o shodnosti/podobnosti trojúhelníků, viz např. [5].

mulace normální – odpovídají psychické zralosti žáků, jejich znalostem, stresu při písemce atd. Zarážející však je setkání se s potížemi u žáků s jinak dobrou výřečností, výbornými studijními výsledky a v situacích, kdy je stres eliminován. Zformulovat odpověď na slovní úlohu, krok v zápisu matematického postupu nebo dokonce matematickou definici či větu je oříškem i pro žáky jinak slohově velmi zdatné.

Jako jednu z cest vidím trpělivost ze strany učitele a zejména nerezignovat na nedostatky ve vyjadřovacích schopnostech. Tedy opakovaně a trpělivě vysvětlovat, proč je vyjádření špatně, zdůvodňovat vlastní verzi, vyžadovat opravení špatné formulace. Zdánlivě takový přístup zdržuje hodiny, osobně mám však vyzkoušeno, že u nezanedbatelné části žáků vede v krátké době k zlepšení – žák ví, že nestačí „něco plácnout a mít klid“, a více se hned od začátku soustředí na obsah svých slov.

Zajímavé je vyslechnout si rozhovory mezi žáky, v nichž si sami navzájem snaží vysvětlit nějaké učivo. Často pozoruji zkratkovité vyjadřování zažité z internetové komunikace. Při předávání informací takovým způsobem pak nezřídka dochází k vynechání podstatných detailů. Také originalita mnemotechnických pomůcek nezná hranic, mnohdy jsou však fixovány na konkrétní čas, učebnu či předmět.[4] Má-li pak žák prokázat znalost jindy nebo jinde, pomůcka selže.

Jako určité nebezpečí vnímám v poslední době rostoucí počet neoficiálních učebních textů. Mám na mysli většinou na internetu publikované články ve stylu „ve škole ti to nevysvětlí, ale tady to pochopíš“. Narážím na texty a výuková videa podávající prostou zjednodušenou „kuchařku“ k řešení konkrétní úlohy, kterou se žák s radostí a pocitem, že na učivo vyzrál, naučí, a při pozměněném zadání najednou postup nefunguje. S obezřetností přistupuji i k projektům typu „student píše učebnici studentům“ či k různým učebnicím napsaným jedním středoškolským pedagogem. Ve snaze zjednodušit a zpřístupnit učivo současným žákům pak hrozí opomenutí matematické správnosti. Obávám se, že neschopnost zformulovat srozumitelnou větu plyne také z nadužívání pracovních listů na základní škole, do nichž stačí doplňovat pouze čísla a občas samostatná slova. Všechny tyto ústupky mohou vést k tomu, že žák nabude dojmu, že správného použití jazyka jako dorozumívacího prostředku není třeba, podstatné je pouze „nějak se domluvit“.

O možných příčinách nesprávných formulací a pravopisných i gramatických chyb se snažím mluvit také přímo s žáky a opakovaně se dovídám: „*když máme matiku, nepřemýšlím přeci o češtině*“. Na prvním stupni základní školy jsme byli (podotýkám, že na počátku 90. let minulého století) v rámci jedné práce hodnoceni zvlášť za úpravu, zvlášť za obsahovou správnost a zvlášť za pravopis. Nejsem si jistá, zda by byl takový přístup dnes přípustný, natož na střední škole v nejazykovém předmětu. V testu nebo při zkoušení z matematiky hodnotím

[4] Byla jsem svědkem přípravy na písemnou práci na téma parabola v analytické geometrii. Žákyně si fixovala souvislost vzájemné polohy vrcholu a ohniska paraboly s tvarem rovnice pomocí umístění oken a dveří ve třídě.

tedy matematické znalosti. Stále však důsledně vyznačuji a opravuji jazykové chyby v testech stejně jako se snažím maximálně dbát na správné vyjadřování a přiměřené zdůvodňování zvolených postupů při ústním projevu žáků.

3 Závěr

Výše popsané problémy ve vyjadřování žáků vnímají i kolegové vyučující jiné předměty než matematiku. Sama jsem měla možnost pozorovat potíže s formulací myšlenky v chemii, fyzice a biologii. Projevy jsou analogické, důvody zřejmě také. Závěrem bych ráda optimisticky podotkla, že mezi žáky, s kterými jsem se doposud setkala, převažovali ti, jichž se tento příspěvek netýká. Na druhou stranu však musím připustit, že učím na gymnáziu, tedy (i přes neustále se zvyšující procento středoškolsky vzdělaných osob v populačním ročníku) na výběrové střední škole.

Literatura

[1] K. Neubauer, *Logopedická péče o dospělé osoby s poruchami řečové komunikace*, in Škodová E., Jedlička I. *Klinická logopedie*, Portál, 2003, 79–86.

[2] J. Klenková, *Logopedie*, Portál, 2005.

[3] V. Lechta, *Terapie narušené komunikační schopnosti*, Portál, 2005.

[4] Z. Vybíral, *Psychologie komunikace*, Portál, 2009.

[5] E. Pomykalová, *Matematika pro gymnázia, Planimetrie*, Prometheus, 2001.

RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D.
Gymnázium Na Pražačce
Nad Ohradou 2825/23
130 00 Praha 3-Žižkov
morava@karlin.mff.cuni.cz

JAK POROZUMÍM ...[1]

Jindřich Bečvář

Na některých vysokých školách dosud přetrvává suchá výuka obecné algebry ve stylu

definice, věta, důkaz, žádný příklad.

V článku se pokusíme ukázat, že je vhodnější se s novými pojmy a jejich vlastnostmi nejprve seznamovat v příkladech a cvičeních. Tato cesta umožňuje aktivní postupné dobývání poznatků, jejich promýšlení a následné budování logické struktury. Vede k hlubšímu a trvalejšímu porozumění pojmům a příslušným tvrzením.

Dávná příhoda. Na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy dostal před řadou let jeden student u zkoušky z obecné algebry otázku:

Co je grupa?

Student mlčel, na pomocné podněty nereagoval. Po delším tichu zkoušející suše, ale důrazně pravil:

Grupa je množina G s binární operací násobení, která je asociativní, má jednotkový prvek a ke každému prvku z G existuje v G prvek inverzní.

Student rozhořčeně vyhrknul:

Ale to je přece definice grupy G!

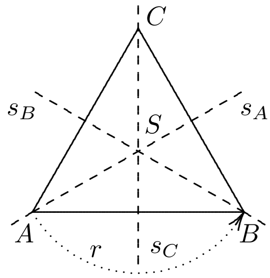
⋆ ⋆ ⋆

Definice pojmů z obecné algebry se studenti často učí (a někdy i naučí) nazpaměť jako básničku bez hlubšího porozumění. Na přednášce většinou nepomůže k pochopení pojmu grupa ani uvedení několika příkladů vycházejících z oblasti číselných oborů (aditivní grupa celých čísel, multiplikativní grupa nenulových reálných čísel, ...). V přednáškách o teorii grup následují po definici grupy definice dalších pojmů, věty, důkazy, důsledky, málokdy se vyskytne příklad – pokud vůbec. Studenty v obecné algebře odrazuje zejména značná míra abstrakce. Někteří se přednesenou látku naučí, a to dokonce tak, že mají pocit, že ji dobře pochopili. Bohužel si často porozumění pletou s naučením definic, vět a formálním prověřením správnosti důkazů, které se navíc naučili správně a přesně reprodukovat.

Skutečného porozumění lze dosáhnout především promýšlením konkrétních příkladů. Touto cestou by se měli snažit jít jak vyučující, tak studenti.

[1] Název článku je inspirován klasickou ediční řadou *Orlovy příručky pro studující a samouky*, která vycházela ve třicátých a čtyřicátých letech 20. století. Názvy jednotlivých titulů začínaly vždy slovy *Jak porozumím.*

Příklad 1. Grupa symetrií rovnostranného trojúhelníku (grupa D_6).



Uvažujme rovnostranný trojúhelník ABC a množinu D_6 všech jeho symetrií, tj. shodných zobrazení, kterými se trojúhelník ABC zobrazí sám na sebe. Je tedy

$$D_6 = \{\, r,\ r^2,\ r^3 = 1,\ s_A,\ s_B,\ s_C\,\},$$

kde r je rotace kolem středu S trojúhelníku ABC o $120°$, r^2 je rotace kolem středu S o $240°$, $r^3 = 1$ je rotace kolem středu S o $360°$ (resp. o $0°$), tj. identita, s_A je osová souměrnost podle osy procházející vrcholem A, obdobně s_B, s_C.

Složení dvou symetrií je opět symetrie, skládání symetrií je asociativní, identita 1 je jednotkovým prvkem, každá symetrie má inverzní symetrii (r a r^2 jsou navzájem inverzní, symetrie s_A, s_B, s_C jsou inverzní samy k sobě). Množina D_6 s operací skládání symetrií je tedy grupa. Její strukturu lze popsat tzv. *Cayleyho tabulkou*, která zachycuje grupovou operaci $\circ$, v tomto případě skládání symetrií (např. $r^2 \circ s_A = s_B$, nejprve se provede s_A, potom r^2).

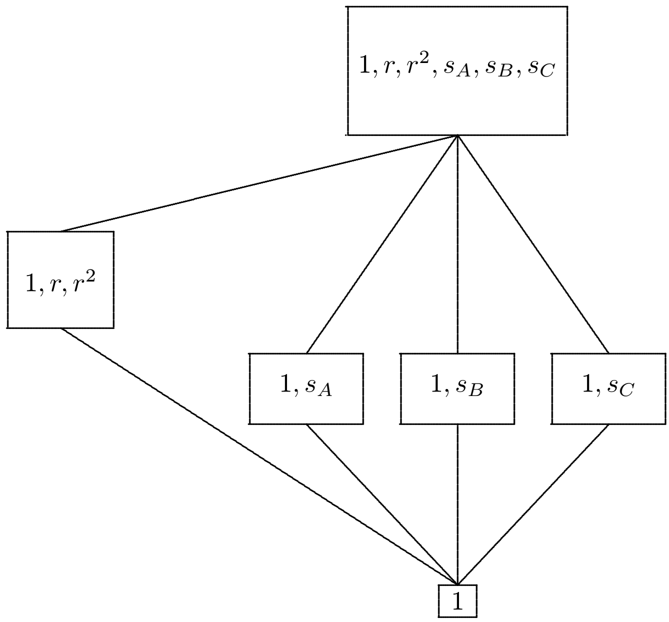
$\circ$	1	r	r^2	s_A	s_B	s_C
1	1	r	r^2	s_A	s_B	s_C
r	r	r^2	1	s_C	s_A	s_B
r^2	r^2	1	r	s_B	s_C	s_A
s_A	s_A	s_B	s_C	1	r	r^2
s_B	s_B	s_C	s_A	r^2	1	r
s_C	s_C	s_A	s_B	r	r^2	1

Má-li grupa větší počet prvků, je vytvoření její Cayleyho tabulky značně pracné a samotná tabulka není příliš přehledná.

Strukturu grupy poznáme podrobněji, nalezneme-li všechny její podgrupy a zachytíme-li jejich inkluze, tj. jak jsou tyto podgrupy do sebe zaklíněny. Z Cayleyho tabulky, ale i z geometrického smyslu prvků grupy D_6, tj. symetrií trojúhelníku, ihned vidíme, že grupa D_6 má šest podgrup:

$$\{1,\ r,\ r^2,\ s_A,\ s_B,\ s_C\},\quad \{1,\ r,\ r^2\},\quad \{1,\ s_A\},\quad \{1,\ s_B\},\quad \{1,\ s_C\},\quad \{1\}.$$

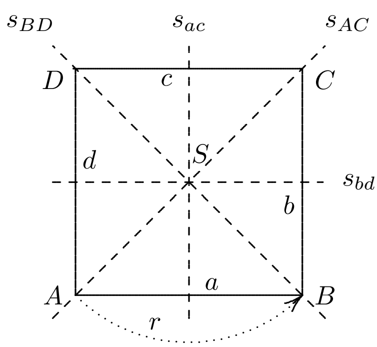
Diagram podgrup grupy D_6 tedy vypadá takto:[2]



Grupa D_6 má pět vlastních podgrup: jednotkovou (triviální) podgrupu, tři dvouprvkové podgrupy (jsou cyklické, značíme je $C(2)$) a jednu tříprvkovou podgrupu, která obsahuje právě všechny rotace (je cyklická, značíme ji $C(3)$).

Obdobný příklad dostaneme, uvažujeme-li symetrie čtverce.

Příklad 2. Grupa symetrií čtverce (grupa D_8).

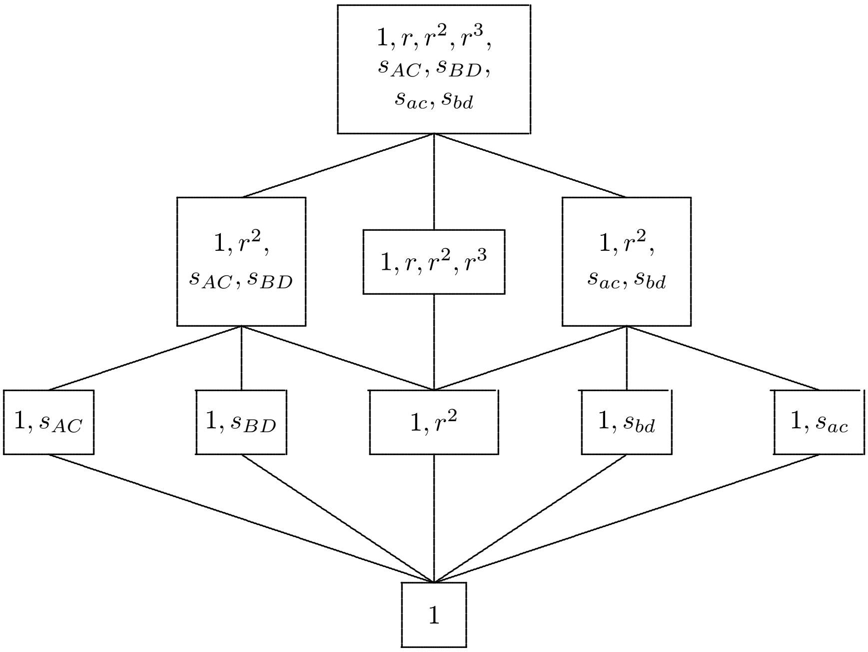


Grupa symetrií čtverce má osm prvků (čtyři rotace a čtyři osové souměrnosti):

$$D_8 = \{\, r,\ r^2,\ r^3,\ r^4 = 1,\ s_{AC},\ s_{BD},\ s_{ac},\ s_{bd} \,\}.$$

[2] Přesněji řečeno: jedná se o tzv. *svaz* podgrup grupy D_6.

Diagram podgrup grupy D_8 vypadá takto:



Grupa D_8, která má pouze osm prvků, má devět vlastních podgrup: jednotkovou podgrupu, pět dvouprvkových cyklických grup $C(2)$, jednu čtyřprvkovou cyklickou grupu $C(4)$ (obsahuje právě všechny rotace) a dvě čtyřprvkové grupy, které mají jinou strukturu – jsou to tzv. *Kleinovy čtyřgrupy*, které značíme symbolem V_4 (V podle německého termínu *Vierergruppe*). Každá z nich obsahuje (kromě jednotkové podgrupy) tři dvouprvkové grupy $C(2)$, přitom je jim jedna z těchto podgrup společná (obsahuje rotaci o $180°$ a identitu).

Cvičení 1. Vytvořte Cayleyho tabulku grupy D_8 a s její pomocí prověřte vztahy zachycené na diagramu z předchozího obrázku.

Příklad 3. Grupa symetrií pravidelného n-úhelníku (grupa D_{2n}).

Obdobným způsobem jako v předchozích dvou příkladech lze vyšetřovat grupu symetrií pravidelného n-úhelníku. Sestává z n rotací a n osových souměrností. Pro lichá n procházejí osy uvažovaných souměrností vždy vrcholem a středem protilehlé strany, pro sudá n buď protilehlými vrcholy nebo středy protilehlých stran.

Získáváme tedy nekonečnou posloupnost konečných grup

$$\{\, D_{2n} \mid n = 3, 4, 5, \ \ldots \},$$

které se nazývají *dihedrální*. Uvědomme si, že jsou nekomutativní.

Cvičení 2. Načrtněte diagram podgrup grupy symetrií pravidelného pětiúhelníku (grupa D_{10}) a diagram podgrup grupy symetrií pravidelného šestiúhelníku (grupa D_{12}).

Cvičení 3. Rozmyslete si následující popis grup D_6, D_8 a obecněji D_{2n}:

$$\begin{aligned} D_6 &= \left\langle\, r, s \;\middle|\; r^3 = s^2 = (rs)^2 = 1 \,\right\rangle = \{\, 1, r, r^2, s, rs, r^2 s \,\}, \\ D_8 &= \left\langle\, r, s \;\middle|\; r^4 = s^2 = (rs)^2 = 1 \,\right\rangle = \{\, 1, r, r^2, r^3, s, rs, r^2 s, r^3 s \,\}, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_{2n} &= \left\langle\, r, s \;\middle|\; r^n = s^2 = (rs)^2 = 1 \,\right\rangle = \{\, 1, r, \ldots, r^{n-1}, s, rs, \ldots, r^{n-1} s \,\}. \end{aligned}$$

Říkáme, že grupa D_{2n} je generována prvky r, s, kde r je rotace o $\frac{360}{n}^{\circ}$ a s je libovolně zvolená osová souměrnost. Uvedené rovnosti jsou tzv. *definující relace.*

Na předchozích konkrétních příkladech je možno srozumitelně a názorně demonstrovat pojmy grupa, podgrupa, naznačit strukturu cyklických grup (dvouprvková, tříprvková, resp. n-prvková grupa rotací, dvouprvková grupa tvořená jednou osovou souměrností a identitou), lze naznačit pojem izomorfismu, ukázat princip generování (generátory cyklických grup, generátory Kleinovy čtyřgrupy), naznačit pojem definující relace apod.

Obraťme nyní pozornost k jiné posloupnosti konečných grup.

Příklad 4. Grupa permutací n-prvkové množiny (grupa $\mathbb{S}_n$).

Nechť $\mathbb{S}_n$ je množina všech permutací n-prvkové množiny $M_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ (tj. vzájemně jednoznačných zobrazení množiny M_n na množinu M_n) s operací skládání permutací (skládání zobrazení). Je to tzv. *symetrická grupa stupně* n, která má $n!$ prvků.

Máme tedy druhou nekonečnou posloupnost konečných grup:

$$\{\, \mathbb{S}_n \;\big|\; n = 1, 2, 3, 4, \ \ldots \}.$$

Grupy $\mathbb{S}_1$ a $\mathbb{S}_2$ jsou velmi jednoduché, mají jeden, resp. dva prvky:

$$\mathbb{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathbb{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pokud v Příkladu 1 označíme vrcholy uvažovaného trojúhelníku (nikoliv písmeny A, B, C) čísly 1, 2, 3, můžeme symetrie tohoto trojúhelníku popsat permutacemi množiny $M_3 = \{1, 2, 3\}$. Je tedy

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad r^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad r^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1,$$

$$s_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad s_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad s_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Grupy $\mathbb{S}_3$ a D_6 jsou z algebraického hlediska nerozlišitelné, říkáme, že jsou *izomorfní.* Cayleyova tabulka a diagram podgrup grupy $\mathbb{S}_3$ jsou proto zachyceny v Příkladu 1; na konkrétním označením prvků nezáleží – místo $1, r, r^2, \ \ldots$ bychom do tabulky i do diagramu mohli psát výše uvedené permutace, případně užít nějaké jiné symboly.

V Příkladu 2 můžeme rovněž označit vrcholy čtverce čísly 1, 2, 3, 4 (proti směru hodinových ručiček). Symetrie čtverce lze tedy popsat permutacemi množiny $M_4 = \{1, 2, 3, 4\}$. Symetrie čtverce však odpovídají jen některým prvkům grupy $\mathbb{S}_4$; grupa D_8 má osm prvků, zatímco grupa $\mathbb{S}_4$ má $4! = 24$ prvků. Např. permutace

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

neodpovídá žádné symetrii čtverce, jehož vrcholy jsme označili čísly 1, 2, 3, 4 (proti směru hodinových ručiček).

Příklad 5. Grupa sudých permutací n-prvkové množiny (grupa $\mathbb{A}_n$).

Uvažujeme-li pouze sudé permutace množiny M_n, získáme grupu $\mathbb{A}_n$, která se nazývá *alternující grupa stupně n.* Vzhledem k tomu, že sudých a lichých permutací je pro $n \geq 2$ stejně mnoho, má tato grupa $\frac{1}{2} \cdot n!$ prvků.

Máme tedy třetí nekonečnou posloupnost konečných grup:

$$\{\, \mathbb{A}_n \mid n = 1, 2, 3, 4, \ \ldots \,\}.$$

Zřejmě je

$$\mathbb{A}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathbb{A}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathbb{A}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

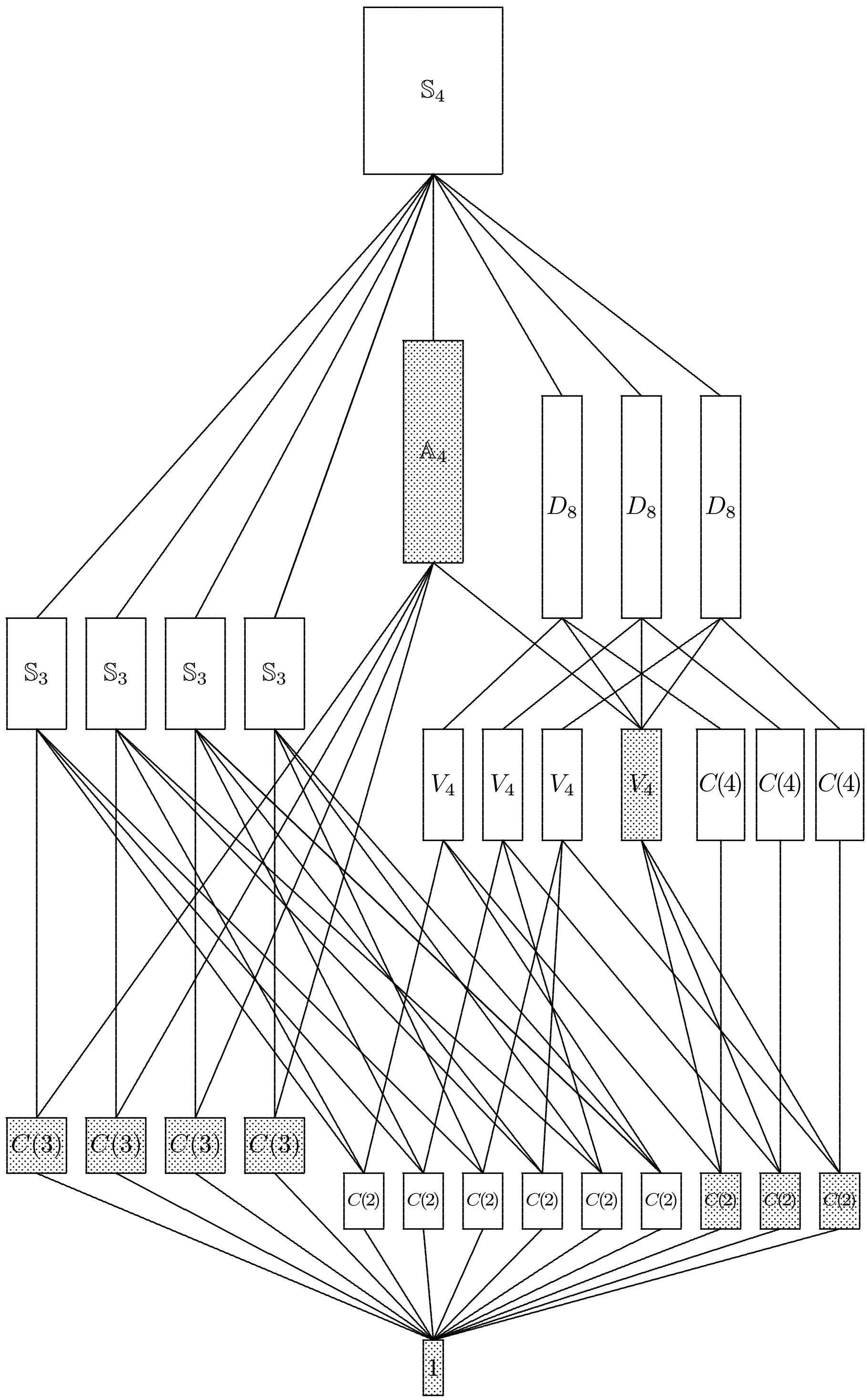
V interpretaci Příkladu 1 je $\mathbb{A}_3 = \{\, 1, r, r^2 \,\}$.

Podívejme se nyní podrobněji na symetrickou (a též na alternující) grupu stupně 4.

Příklad 6. Symetrická grupa $\mathbb{S}_4$ a alternující grupa $\mathbb{A}_4$.

Na následujícím obrázku je diagram podgrup grupy $\mathbb{S}_4$.

Nejprve si uvědomme bohatost struktury grupy $\mathbb{S}_4$, která má 24 prvků a 29 vlastních podgrup. Ačkoliv se diagram podgrup této grupy může zdát na první pohled velmi komplikovaný, není příliš obtížné jej pochopit či dokonce vytvořit. Musíme se však zamyslet nad charakterem prvků grupy $\mathbb{S}_4$ a nad principem grupové operace. Musíme využít to, co již známe (Příklady 1 a 2), nesmíme se bát vzít tužku a papír, trochu počítat a třeba i trochu kreslit.


$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{A}_4$
D_8
D_8
D_8
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_3$
V_4
V_4
V_4
V_4
$C(4)$
$C(4)$
$C(4)$
$C(3)$
$C(3)$
$C(3)$
$C(3)$
$C(2)$
$C(2)$
$C(2)$
$C(2)$
$C(2)$
$C(2)$
$C(2)$
$C(2)$
$C(2)$
1

Komentujme nyní v několika odstavcích diagram podgrup grupy $\mathbb{S}_4$ a naznačme tak úvahy, které vedou k hlubšímu porozumění úvodním partiím teorie grup. Naše úvahy budou zcela elementární, nebudeme potřebovat téměř žádné znalosti.

(i) Budeme-li uvažovat všechny permutace množiny $M_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, které nechávají číslo 4 na místě, získáme podgrupu grupy $\mathbb{S}_4$, která je neodlišitelná od grupy $\mathbb{S}_3$ (je s ní *izomorfní*). Další tři podgrupy stejného typu získáme, vezmeme-li všechny permutace množiny M_4, které ponechávají na místě číslo 1, resp. číslo 2, resp. číslo 3. Grupa $\mathbb{S}_4$ tedy obsahuje čtyři různé podgrupy typu $\mathbb{S}_3$. A s těmito podgrupami typu $\mathbb{S}_3$ obsahuje grupa $\mathbb{S}_4$ i všechny jejich podgrupy. Diagram podgrup grupy $\mathbb{S}_3$ (viz Příklad 1) je proto čtyřikrát vložen do diagramu grupy $\mathbb{S}_4$.

Připomeňme, že každá grupa $\mathbb{S}_3$ obsahuje jednu grupu $C(3)$, tři grupy $C(2)$ a jednotkovou podgrupu. Dvouprvkové grupy $C(2)$ obsahují kromě identické permutace vždy jednu transpozici (odpovídá osové souměrnosti trojúhelníku), a jsou tedy podgrupami vždy dvou různých podgrup typu $\mathbb{S}_3$. Čtyři cyklické podgrupy $C(3)$ obsažené v uvažovaných čtyřech grupách $\mathbb{S}_3$ mají zřejmě společnou pouze identickou permutaci.

Tím jsme objasnili část diagramu podgrup grupy $\mathbb{S}_4$, která sestává ze čtyř podgrup $\mathbb{S}_3$, čtyř podgrup $C(3)$, šesti podgrup $C(2)$ a jednotkové podgrupy.

(ii) Budeme-li uvažovat osm permutací množiny M_4, které odpovídají symetriím čtverce, jehož vrcholy jsou proti směru hodinových ručiček označeny čísly 1, 2, 3, 4, získáme podgrupu grupy $\mathbb{S}_4$, která je neodlišitelná od grupy D_8 (je s ní *izomorfní*). Další dvě podgrupy stejného typu získáme, uvažujeme-li očíslování vrcholů čtverce (proti směru hodinových ručiček) čísly 1, 3, 2, 4, resp. 1, 2, 4, 3 (při označeních 1, 4, 3, 2, resp. 1, 4, 2, 3, resp. 1, 3, 4, 2 získáváme stejné podgrupy). Grupa $\mathbb{S}_4$ tedy obsahuje tři podgrupy typu D_8. A s těmito třemi podgrupami typu D_8 obsahuje grupa $\mathbb{S}_4$ i všechny jejich podgrupy. Diagram podgrup grupy D_8 (viz Příklad 2) je proto třikrát vložen do diagramu grupy $\mathbb{S}_4$.

Připomeňme, že každá grupa D_8 obsahuje jednu grupu $C(4)$ (rotace), dvě grupy V_4, pět grup $C(2)$ a jednotkovou podgrupu.

Tři grupy typu D_8 mají (vzhledem k výše uvedenému trojímu označení vrcholů čtverce) navzájem různé podgrupy rotací (tři grupy $C(4)$) a v nich jsou obsaženy tři navzájem různé podgrupy typu $C(2)$.

Všem třem grupám typu D_8 je společná jedna podgrupa V_4 sestávající (pro každou ze tří grup D_8) ze dvou osových souměrností, jejichž osy jdou středy protilehlých stran čtverce, a z jedné rotace o $180°$.

Každá ze tří podgrup D_8 má ještě další podgrupu typu V_4, která má tři podgrupy $C(2)$ (jedna z nich odpovídá rotaci čtverce o $180°$). Tyto tři podgrupy typu V_4 jsou navzájem různé, každá obsahuje ještě dvě podgrupy $C(2)$ odpovídající osovým souměrnostem s osami jdoucími protilehlými vrcholy čtverce.

Tím jsme objasnili další část diagramu podgrup grupy $\mathbb{S}_4$, která sestává ze tří podgrup D_8, tří podgrup $C(4)$, čtyř podgrup V_4, tří podgrup $C(2)$, které jsme v odstavci (i) ještě neuvažovali, šesti podgrup $C(2)$, které jsme v odstavci (i) již uvažovali, a z jednotkové podgrupy.

(iii) Zbývá vzít do úvahy množinu všech sudých permutací množiny M_4, tj. podgrupu $\mathbb{A}_4$ grupy $\mathbb{S}_4$. Vzhledem k tomu, že sestává ze sudých permutací, musí obsahovat čtyři výše uvedené cyklické grupy $C(3)$, tři cyklické grupy $C(2)$, které odpovídají symetriím čtverce určeným osami souměrností vedoucími středy protilehlých stran, Kleinovu čtyřgrupu, která je jimi určena, a jednotkovou podgrupu. V diagramu podgrup grupy $\mathbb{S}_4$ je diagram podgrup grupy $\mathbb{A}_4$ vyznačen podbarvením.

(iv) Předchozí úvahy můžeme dokreslit následujícími úvahami.

Grupa $\mathbb{S}_4$ musí mít právě devět cyklických podgrup $C(2)$, neboť existuje právě šest transpozic čtyř prvků a právě tři permutace složené ze dvou nezávislých transpozic.

Grupa $\mathbb{S}_4$ musí mít právě čtyři cyklické podgrupy $C(3)$, neboť má právě osm trojcyklů, které jsou po dvou navzájem inverzní (a vytvářejí tedy spolu s identickou permutací tříprvkové podgrupy).

Grupa $\mathbb{S}_4$ musí mít právě tři cyklické podgrupy $C(4)$, neboť má šest cyklických permutací čtyř prvků, které jsou po dvou spjaty (třetí mocnina jedné dává druhou). Spolu se svými druhými mocninami a identickou permutací tvoří tři cyklické podgrupy $C(4)$. Jejich podgrupami jsou tři cyklické grupy $C(2)$ určené permutacemi složenými ze dvou nezávislých transpozic.

Jiné cyklické podgrupy již grupa $\mathbb{S}_4$ mít nemůže, neboť její prvky jsou permutace čtyřprvkové množiny.

Cvičení 4. Ukažte, že grupa $\mathbb{S}_4$ již nemá jiné podgrupy než ty, které jsou ve výše uvedeném diagramu.

K diagramu podgrup grupy $\mathbb{S}_4$ je užitečné se vracet při dalším výkladu teorie grup (Lagrangeova věta, pojem normální podgrupy, pojem Sylowovy podgrupy, průnik podgrup, podgrupa generovaná dvěma podgrupami, svaz podgrup, direktní součet podgrup, věty o izomorfismu atd.).

Cvičení 5. Rozvažte, kolik grup typu $\mathbb{S}_4$ a kolik grup typu D_{10} je obsaženo v grupě $\mathbb{S}_5$. Vypočtěte, kolik je v grupě $\mathbb{S}_5$ cyklických podgrup $C(2)$, $C(3)$, $C(4)$, $C(5)$ a $C(6)$, a zjistěte, které z nich jsou podgrupami grupy $\mathbb{A}_5$.

Cvičení 6. Nakreslete Cayleyho tabulku a diagram podgrup osmiprvkové grupy kvaternionů $\mathbb{Q} = \{\pm 1, \pm\mathrm{i}, \pm\mathrm{j}, \pm\mathrm{k}\}$, kde se prvky násobí takto:

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1,$$

$$\mathrm{i}\,\mathrm{j} = \mathrm{k}, \qquad \mathrm{j}\,\mathrm{k} = \mathrm{i}, \qquad \mathrm{k}\,\mathrm{i} = \mathrm{j}, \qquad \mathrm{j}\,\mathrm{i} = -\mathrm{k}, \qquad \mathrm{k}\,\mathrm{j} = -\mathrm{i}, \qquad \mathrm{i}\,\mathrm{k} = -\mathrm{j}.$$

Cvičení 7. Vytvořte Cayleyho tabulku Kleinovy čtyřgrupy

$$V_4 = \{1, r^2, s_{bd}, s_{ac}\}$$

z Příkladu 2. Uvědomte si, že řádky této tabulky reprezentují čtyři permutace množiny $\{1, r^2, s_{bd}, s_{ac}\}$, tj. čtyři prvky grupy $\mathbb{S}_4$, a že tato tabulka znázorňuje izomorfní vnoření Kleinovy čtyřgrupy V_4 do symetrické grupy $\mathbb{S}_4$.[3] Odtud je již jen krůček k obecné formulaci Cayleyovy věty:

Každá konečná grupa je izomorfní s nějakou permutační grupou (tj. s podgrupou nějaké symetrické grupy $\mathbb{S}_n$).

Poznamenejme, že strukturu většího počtu „malých" grup může čtenář poznat v učebnici *Od aritmetiky k abstraktní algebře* [1], v níž rovněž nalezne řadu motivačních, inspirativních a netradičních příkladů a cvičení (nejen k teorii grup).

Závěr

Obvyklá touha matematiků prezentovat od prvopočátku svůj předmět přísně logicky často vede k zamlžení myšlenkového procesu, ubíjí radost z objevování, neinspiruje a nepřispívá k hlubokému porozumění.

Někteří matematici vůbec nechápou, že právě na konkrétních příkladech mohou studenti – pokud jsou ovšem vedeni k přemýšlení, k experimentování a k bádání – důkladně pochopit řadu abstraktních pojmů a souvislostí mezi nimi. Prací s konkrétními příklady se mohou naučit podstatně víc než biflováním abstraktních definic, vět a důkazů.[4] Mohou proniknout k jádru věci, porozumět látce a získat tak opravdu pevné znalosti.

Naprosté nepochopení některých matematiků pro tento postup dokládá např. tvrdý odsudek oponenta týkající se zařazení výše uvedeného diagramu podgrup grupy $\mathbb{S}_4$ do učebnice [1]:

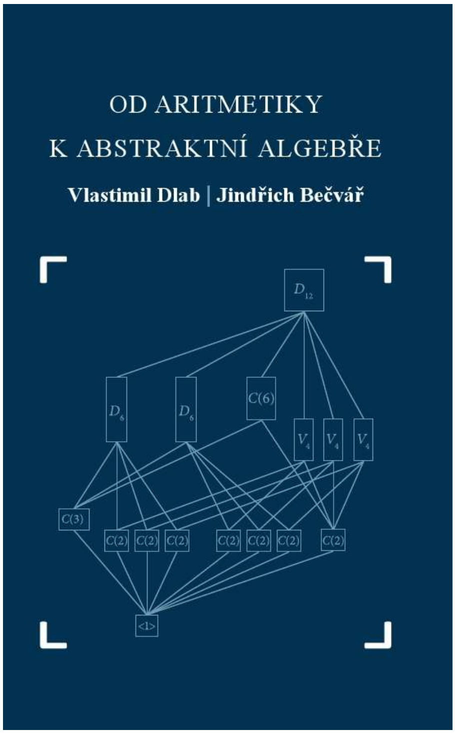
Zcela mi uniká důvod, proč byl diagram uveden. Bylo smyslem jen „postrašit čtenáře"?

Absurdnost názorů tohoto oponenta dokresluje jeho lpění na extrémních abstraktních podružnostech, které ovšem považuje za mimořádně důležité:

Výklad čtenáři neodpoví … *například na otázku, zda je prázdná množina považována za podpologrupu libovolné pologrupy.*

[3] Doplňme dva obdobné příklady: Cayleyho tabulka ze Cvičení 1, resp. ze Cvičení 6 znázorňuje izomorfní vnoření grupy D_8, resp. grupy $\mathbb{Q}_8$ do grupy $\mathbb{S}_8$.

[4] Nabiflované definice, věty a důkazy se ovšem velmi snadno, rychle a pohodlně zkouší. Povědomí o tom, že právě takto vypadají zkoušky, některé studenty bohužel motivuje právě k biflování a nikoli k hlubšímu studiu s porozuměním.



Reklama

V učebnici [1] jsou nové pojmy nejprve prezentovány na příkladech a cvičeních, které prostupují celým textem. Práce s příklady a cvičeními je pro pochopení látky mimořádně důležitá. Exaktní definice, věty a důkazy přicházejí totiž až po zkušenostech, které čtenář postupně získává vlastní aktivitou. Takový přístup je náročný, vyžaduje od čtenáře trvalé soustředění, soustavnou práci při dobývání jednotlivých poznatků a jejich intenzivní promýšlení. Na základě zkušeností s řadou konkrétních příkladů si tak čtenář sám vytváří logickou strukturu, která získané poznatky propojuje a zastřešuje. Tato cesta přináší nejen skutečné porozumění a trvalé znalosti, ale i následné uspokojení z hlubokého pochopení studované teorie.

Literatura

[1] V. Dlab, J. Bečvář: *Od aritmetiky k abstraktní algebře*, SERIFA, Praha, 2016, 480 stran.

doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
becvar@karlin.mff.cuni.cz

VĚTA O MAJÁCÍCH

Martina Štěpánová

Příspěvek je věnován půvabnému tvrzení, které vzbuzuje zájem již svým „dobrodružným“ názvem *Věta o majácích.* Neméně přitažlivá je jeho grafická interpretace, kterou lze snadno provést, neboť se jedná o poznatek z planimetrie.

Konkrétněji se budeme věnovat dvěma speciálním svazkům přímek. Tvrzení věty, tj. konstatování, že jisté průsečíky těchto přímek jsou vrcholy pravidelných n-úhelníků, lze dokázat pouze na základě středoškolských planimetrických znalostí.

1 Formulace tvrzení

Věta 1 (Věta o majácích): *Nechť A, B jsou dva různé body a nechť každým z nich prochází n, $n \geq 3$, přímek takových, že každé dvě po sobě jdoucí svírají úhel o velikosti $180°/n$. Přitom žádná z přímek jednoho svazku není rovnoběžná se žádnou přímkou svazku druhého a žádná z přímek jednoho svazku neprochází středem svazku druhého. Potom se $2n$ přímek těchto svazků protíná v n^2 bodech, které jsou vrcholy n pravidelných n-úhelníků. Kružnice opsané těmto n-úhelníkům procházejí body A a B.*

Svazek přímek procházejících bodem A, resp. B, který má uvedené vlastnosti, budeme značit (A_n), resp. (B_n).

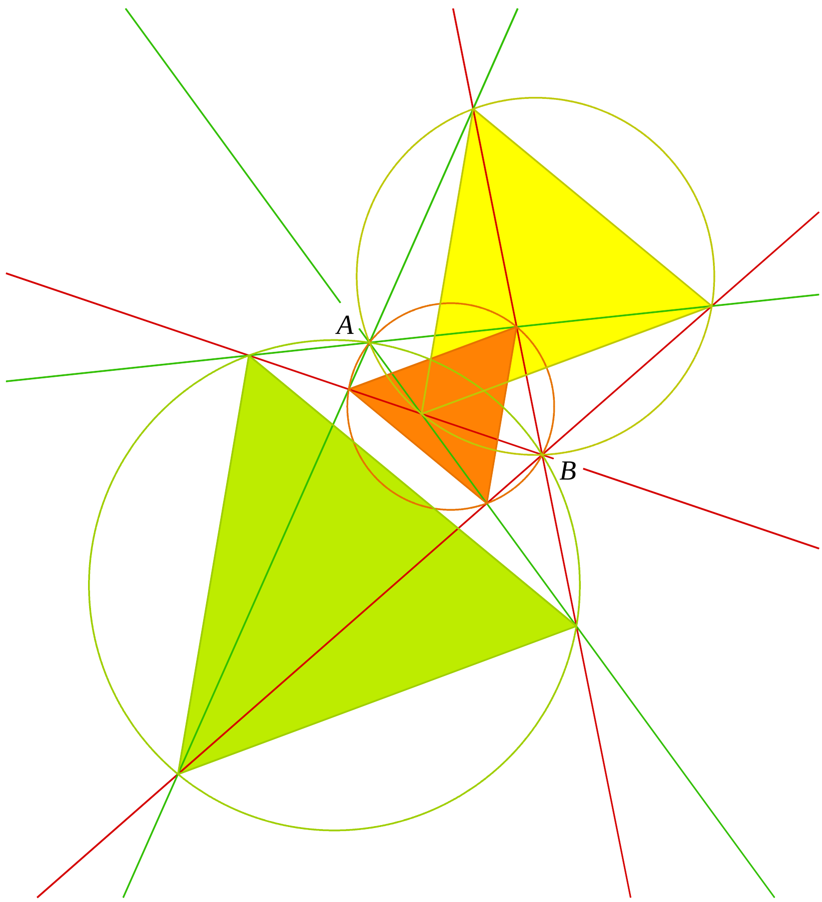
Nyní vysvětleme neobvyklé pojmenování věty. Volba názvu se objasní poté, co do bodů A a B umístíme pomyslné majáky a podíváme se na ně shora. Na přímky svazků lze pohlížet jako na „oboustranné“ paprsky vysílané těmito majáky.

Uvedená představa se promítne i do používané terminologie: pravidelné n-úhelníky vyskytující se ve větě 1 budeme nazývat *paprskové.*

Věta 1 je formulována pro libovolné přirozené $n \geq 3$. To poskytuje čtenáři bohatý zdroj příkladů, které může studovat. Na pohled efektní obrázky obdrží zejména v případě „relativně velkého“ n. Upozorněme však, že v případě *Věty o majácích* považujeme za „relativně velké“ již $n = 10$, kdy pracujeme s dvaceti přímkami svazků a dostáváme sto průsečíků, které jsou vrcholy deseti paprskových desetiúhelníků. Troufne-li si některý ze čtenářů např. ručně narýsovat situaci pro $n = 15$, jistě bude důkladně prověřena jeho pozornost, pečlivost (a zřejmě i trpělivost) při hledání více než dvě stě průsečíků přímek svazků. Tomuto odvážlivci držíme pěsti. My si však v článku skromně vystačíme s $n \leq 8$ a speciální pozornost věnujeme případu $n = 3$.

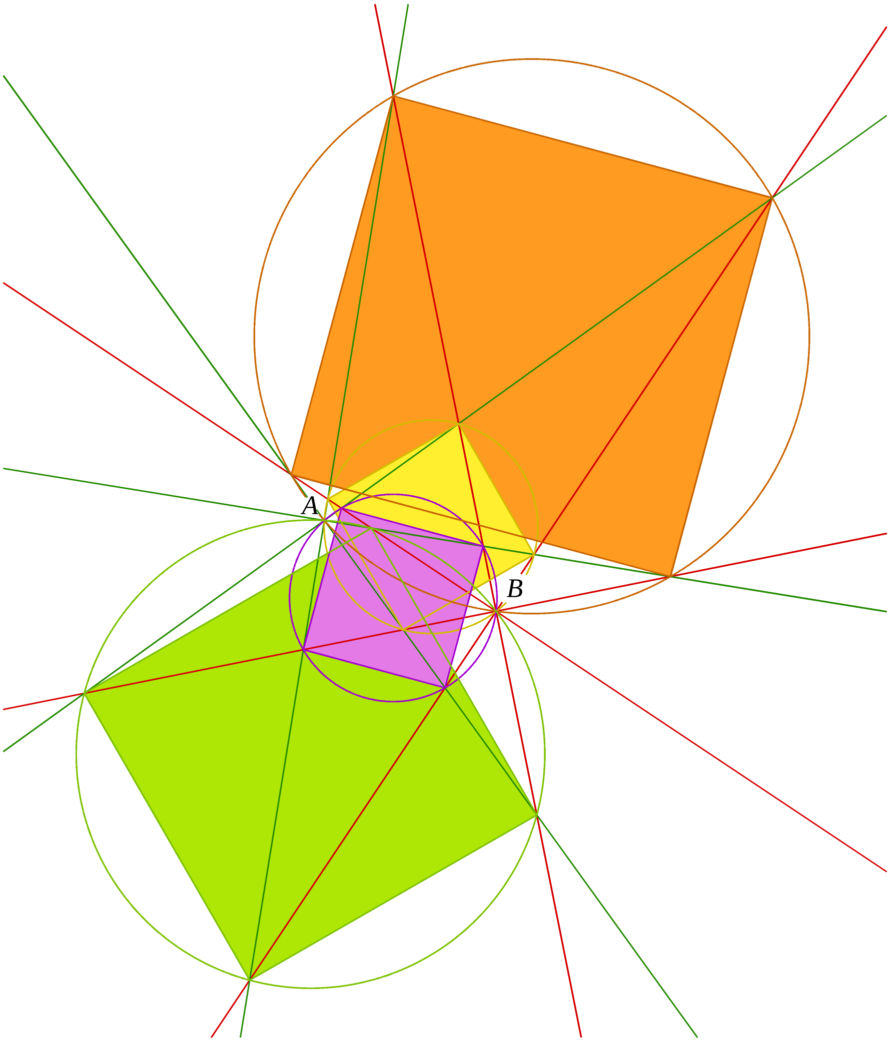
Zformulujme nyní větu právě pro nejmenší možné n, tj. pro $n = 3$.

Věta 2 (Věta o majácích se třemi paprsky): *Nechť A, B jsou dva různé body a nechť každým z nich procházejí tři přímky, z nichž každé dvě po sobě jdoucí svírají úhel o velikosti $60°$. Přitom žádná z přímek jednoho svazku není rovnoběžná se žádnou přímkou svazku druhého a žádná z přímek jednoho svazku neprochází středem svazku druhého. Potom se šest přímek svazků protíná v devíti bodech, které jsou vrcholy tří rovnostranných trojúhelníků. Kružnice opsané těmto trojúhelníkům procházejí body A a B.*



Obr. 1: Tři paprskové trojúhelníky

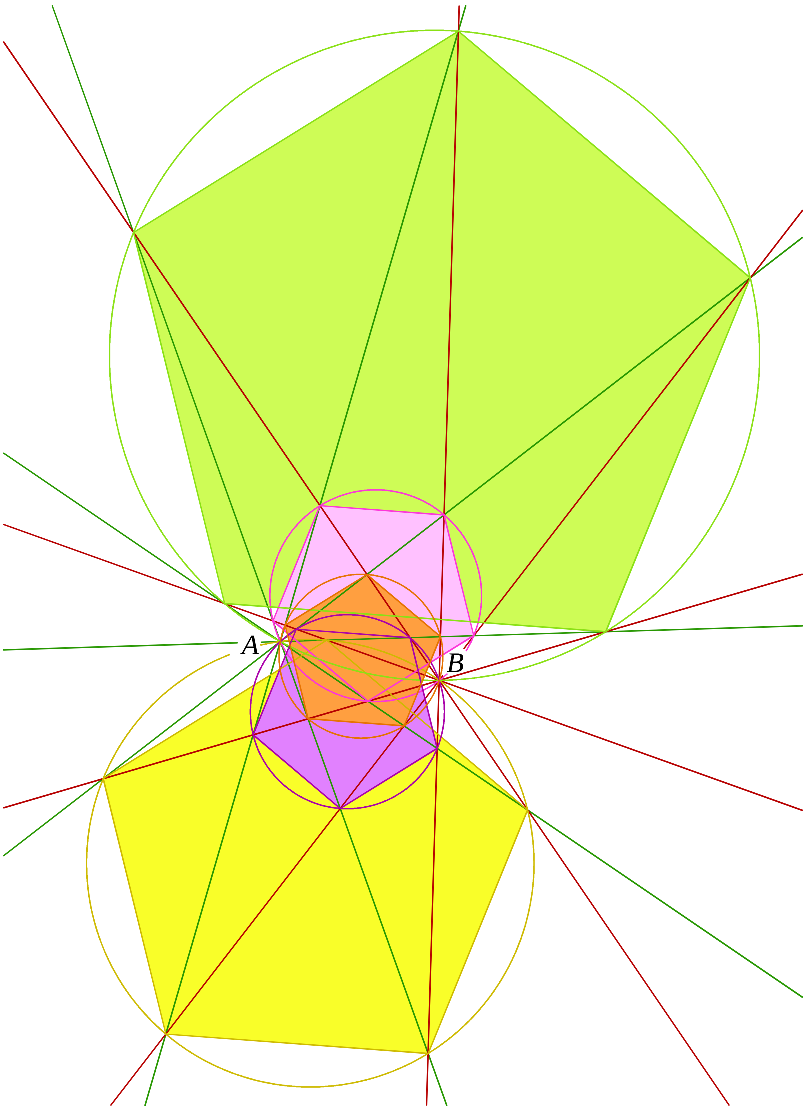
Grafické ztvárnění věty pro $n = 3$ je na obrázku 1, další působivé ilustrace pro $n = 4$ a $n = 5$ jsou na obrázcích 2 a 3.



Obr. 2: Čtyři paprskové čtverce

2 Několik přípravných příkladů

Řešme nyní sérii příkladů, které s tématem na první pohled přímo nesouvisí. Jak však uvidíme dále, jejich zvládnutí nás připraví na velmi rychlé provedení důkazu věty 2. Našim úkolem bude určení velikostí několika úhlů. Vždy budeme hledat velikosti úhlů konvexních, tuto skutečnost však nebudeme dále výslovně zdůrazňovat.



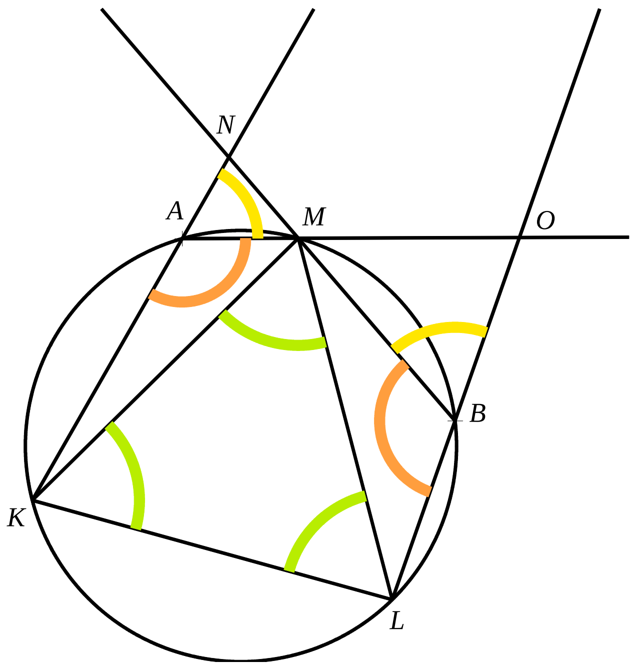
Obr. 3: Pět paprskových pětiúhelníků

Úhly, jejichž velikosti počítáme, jsou v grafických zadáních barevně zvýrazněny, a tak by mělo být očividné, s kterým ze dvou možných neorientovaných úhlů pracujeme. Při řešení lze použít drobnou nápovědu: úhly, jejichž velikost lze vypočítat na obdobném principu, jsou znázorněny stejnou barvou (tím však samozřejmě neříkáme, že úhly stejných barev jsou shodné).

Všechny následující příklady vycházejí z jediného zadání, které je slovně zapsané o několik řádků níže a znázorněné na obrázku 4.[1] Při řešení jednotlivých úkolů tak můžeme (a budeme) využívat výsledky úloh předcházejících. Doporučujeme, aby si čtenář postupně získané výsledky zapisoval přímo do obrázků.

Základní zadání. Ve všech příkladech nechť je dán rovnostranný trojúhelník KLM, jemu opsaná kružnice a její dva různé body A a B, které nesplývají se žádným z bodů K, L, M. Průsečík přímek AK a BM označme N a průsečík přímek AM a BL označme O (viz obrázek 4).

Příklad 1. Určete velikosti úhlů KLM, LMK, MKL, KAM, MAN, LBM a MBO.



Obr. 4: Příklad 1

[1] Toto základní zadání není dále v jednotlivých úlohách znovu slovně opakováno. Kvůli přehlednosti jsou některé přímky zakresleny tak, že opticky působí jako polopřímky či úsečky.

Řešení: Protože je trojúhelník KLM rovnostranný, je

$$|\angle KLM| = |\angle LMK| = |\angle MKL| = 60^\circ.$$

Čtyřúhelníky $KLMA$ a $KLBM$ jsou tětivové, proto

$$|\angle KAM| = 180^\circ - |\angle KLM| = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

a

$$|\angle LBM| = 180^\circ - |\angle MKL| = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

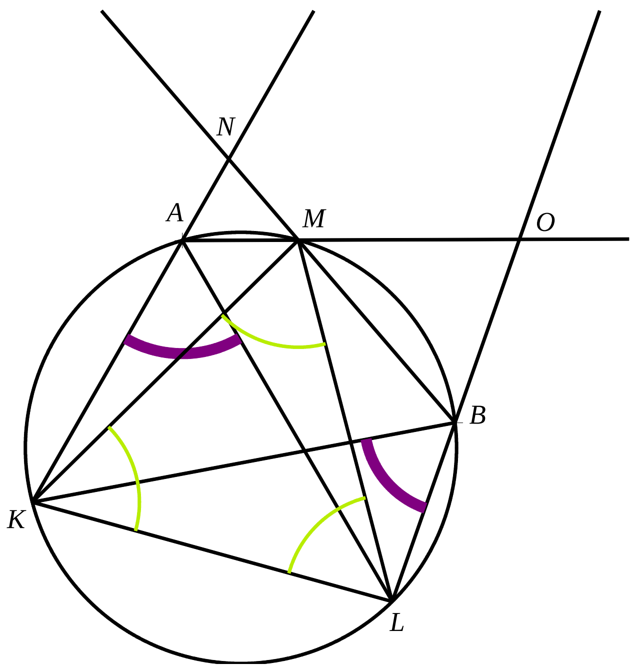
Úhly KAN a MBO jsou přímé, a tedy

$$|\angle MAN| = 180^\circ - |\angle KAM| = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

a

$$|\angle MBO| = 180^\circ - |\angle LBM| = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Příklad 2. Určete velikosti úhlů KAL a KBL.

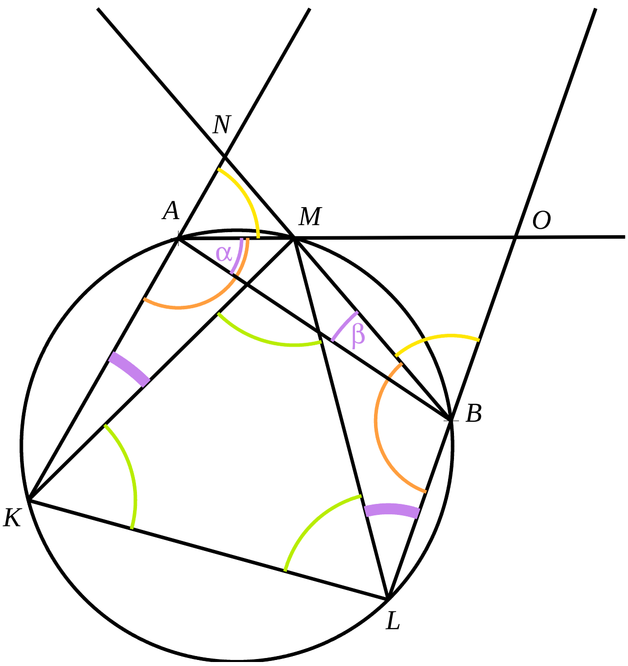


Obr. 5: Příklad 2

Řešení: Úloha je triviální. Jelikož jsou úhly KAL, KBL a KML obvodové úhly příslušné k témuž oblouku dané kružnice, je

$$|\angle KAL| = |\angle KBL| = |\angle KML| = 60^\circ.$$

Příklad 3. Nechť α značí velikost úhlu BAM a β velikost úhlu ABM. Určete velikosti úhlů AKM a BLM.



Obr. 6: Příklad 3

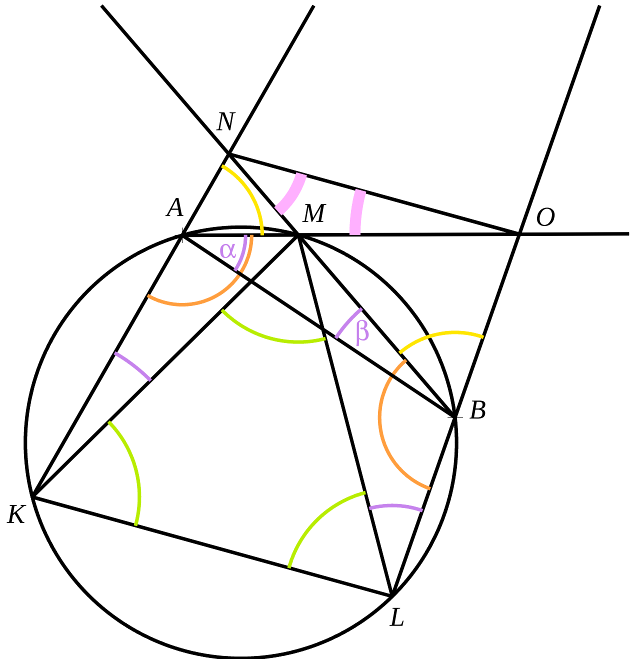
Řešení: Úhly AKM a ABM jsou obvodové úhly příslušné k témuž oblouku dané kružnice, z čehož plyne, že

$$|\angle AKM| = |\angle ABM| = \beta.$$

Zcela analogicky lze odvodit, že

$$|\angle BLM| = |\angle BAM| = \alpha.$$

Příklad 4. Určete velikosti úhlů BNO a AON.



Obr. 7: Příklad 4

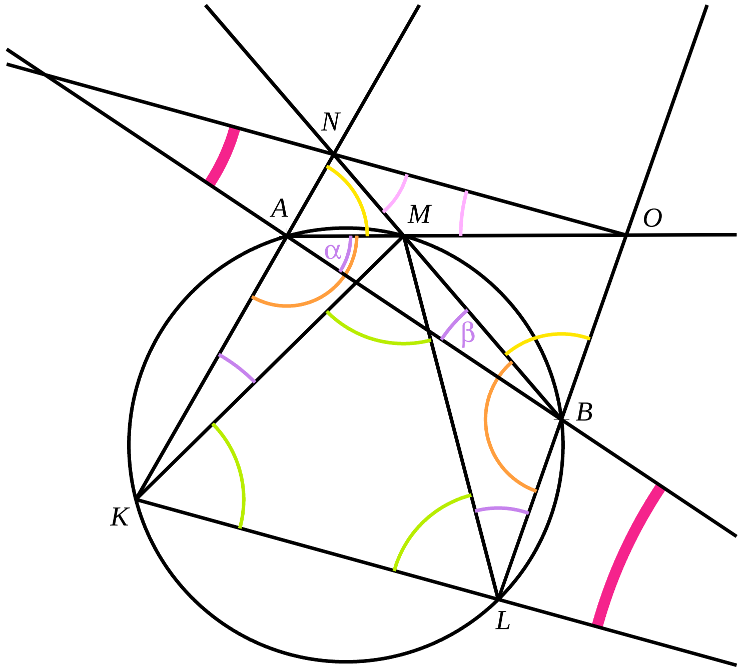
Řešení: Již jsme určili (viz příklad 1), že úhly NAO a OBN jsou shodné, z čehož plyne, že čtyřúhelník $ABON$ je tětivový. Úhly BNO a BAO jsou tedy obvodovými úhly, které přísluší k témuž oblouku kružnice opsané čtyřúhelníku $ABON$. Proto

$$|\angle BNO| = |\angle BAO| = \alpha.$$

Ze stejného důvodu jsou shodné i úhly AON a ABN, tj.

$$|\angle AON| = |\angle ABN| = \beta.$$

Příklad 5. Určete odchylku přímek AB a NO a dále odchylku přímek AB a KL.



Obr. 8: Příklad 5

Řešení: Protože $|\angle AOB| = 180° - \alpha - \beta - 60° = 120° - \alpha - \beta$, je odchylka přímek AB a NO

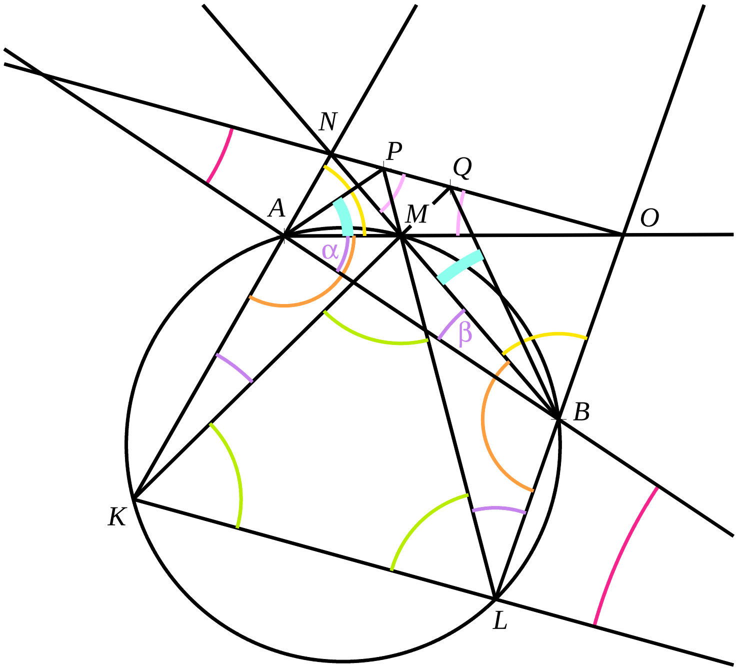
$$180° - \beta - (120° - \alpha - \beta) - 60° - \beta = \alpha - \beta.$$

Protože $|\angle KAB| = 120° - \alpha$, je odchylka přímek AB a KL

$$180° - (120° - \alpha) - 60° - \beta = \alpha - \beta.$$

Obě odchylky jsou tedy shodné a přímky KL a NO jsou rovnoběžné.

Příklad 6. Nechť P, resp. Q značí průsečík přímky NO s přímkou LM, resp. KM. Určete velikosti úhlů MAP a MBQ.



Obr. 9: Příklad 6

Řešení: V předcházejícím příkladu jsme dospěli k závěru, že přímky KL a NO jsou rovnoběžné. Trojúhelník MQP je tedy rovnostranný a $|\angle MPQ| = |\angle PQM| = 60°$. Odtud plyne, že $|\angle NPM| = |\angle MQO| = 120°$ a následně že $|\angle MPN| + |\angle NAM| = 180°$ a $|\angle QMB| + |\angle BOQ| = 180°$. Čtyřúhelníky $AMPN$ a $MBOQ$ jsou proto tětivové a

$$|\angle MAP| = |\angle MNP| = \alpha,$$

$$|\angle MBQ| = |\angle MOQ| = \beta.$$

3 Důkaz věty 2 a další vlastnosti paprskových trojúhelníků

Formou výpočtů založených pouze na středoškolské planimetrii jsme v 2. části v podstatě dokázali větu 2, tj. *Větu o majácích se třemi paprsky.* Vyjádřeme explicitně tento důkaz.

Důkaz věty 2: Nechť A, B, M jsou tři různé body a KLM je rovnostranný trojúhelník vepsaný kružnici procházející uvedenými body A, B, M (žádný z bodů A, B přitom nesplyne ani s jedním z bodů K, L, tj. body A, B, K, L, M

jsou navzájem různé). V příkladech 1 a 2 jsme určili, že odchylky přímek AK a AL, AM a AK, BK a BL, BM a BL jsou $60°$. Šest uvedených přímek je tedy právě šest přímek svazků (A_3) a (B_3) z věty 2 a trojúhelník KLM je paprskový. Druhý, resp. třetí paprskový trojúhelník získáme, budeme-li uvažovat opět body A, B, avšak místo bodu M budeme pracovat s průsečíkem přímek AK a BL, resp. s průsečíkem přímek AL a BK. Protože bod M můžeme volit libovolně (pouze ohlídáme, aby $M \neq A$ a $M \neq B$), dokázali jsme, že pro libovolnou volbu svazků (A_3), (B_3) odpovídají průsečíky jejich přímek právě vrcholům rovnostranných trojúhelníků.

V důkazu věty 1 (pro libovolné přirozené $n \geq 3$) se postupuje zcela analogicky. Tento důkaz viz článek *The Lighthouse Theorem, Morley & Malfatti: A Budget of Paradoxes* [1], který roku 2007 publikoval Richard K. Guy.

V příkladech 5 a 6, které navazují na výsledky příkladů jim předcházejících, jsme odvodili a dokázali také následující dvě zajímavé vlastnosti paprskových trojúhelníků:

Věta 3 (Věta o rovnoběžnosti stran paprskových trojúhelníků): *Strany tří paprskových trojúhelníků, které příslušejí ke svazkům přímek (A_3) a (B_3), jsou rovnoběžné.*

Důkaz věty 3: Důkazem je výpočet v příkladu 5, resp. v příkladech jemu předcházejících. Stačí si pouze dodatečně uvědomit, že úsečka NO je stranou paprskového trojúhelníku.

Věta 4 (Věta o duplikaci úhlů): *Nechť (A_3) a (B_3) jsou svazky přímek a KLM je příslušný paprskový trojúhelník. Dále nechť N je průsečík přímek AK a BM, O je průsečík přímek BL a AM, P je průsečík přímek NO a LM a Q je průsečík přímek NO a KM. Potom*

$$|\angle PAM| = |\angle MAB| \quad \text{a} \quad |\angle QBM| = |\angle MBA|\,.$$

Důkaz věty 4: Důkazem je výpočet v příkladu 6, resp. v příkladech jemu předcházejících.

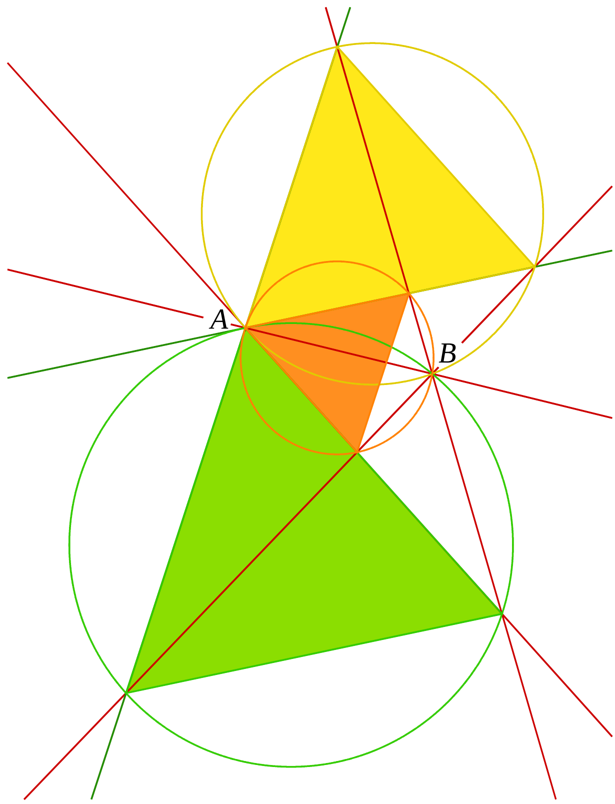
Existují opět obecnější verze obou tvrzení. V případě věty 3 se však jedná o rovnoběžnost stran a úhlopříček n-úhelníků. Např. pro $n = 4$ je z obrázku 2 zjevné, že strany všech čtyř paprskových čtverců rovnoběžné nejsou. Pokud však dorýsujeme úhlopříčky jednotlivých čtverců, zjistíme, že jsou rovnoběžné strany dvou paprskových čtverců a úhlopříčky zbývajících dvou paprskových čtverců. Více viz opět článek [1].

4 Další polohy majáků

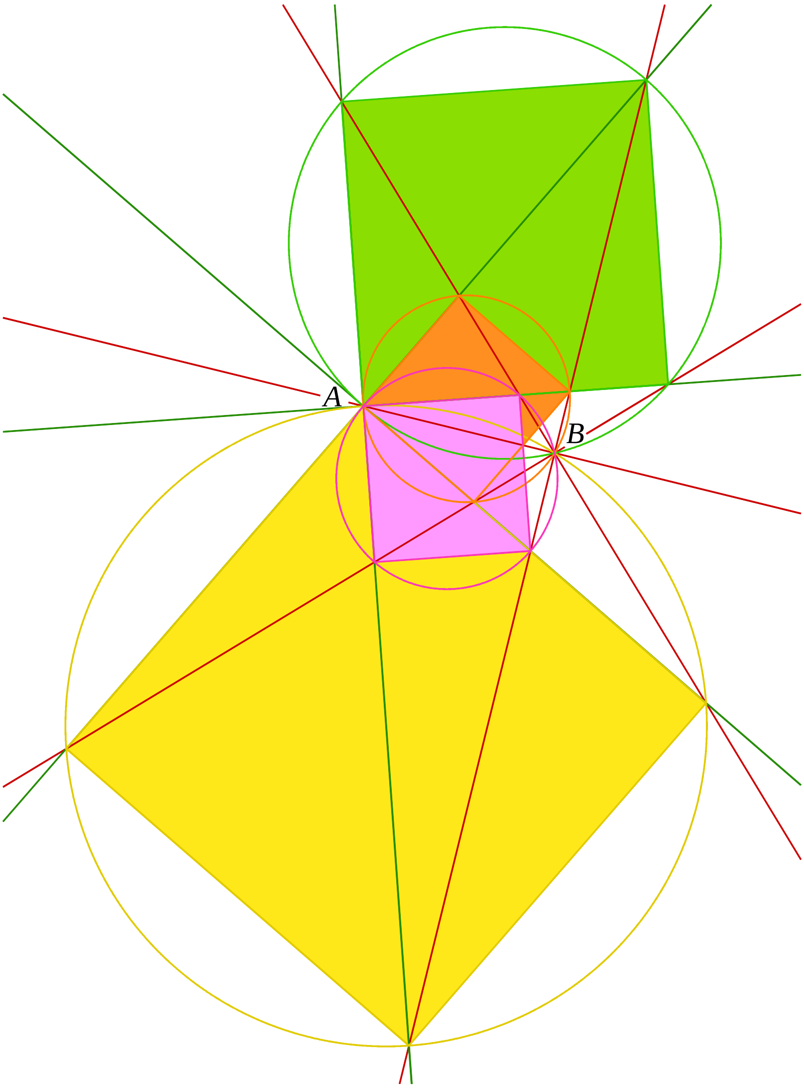
Ve všech částech textu, které se týkaly *Věty o majácích* pro $n = 3$, jsme bod (maják) A, resp. B umísťovali tak, že byl bodem oblouku KM, resp. ML, který přísluší ke konvexnímu středovému úhlu kružnice opsané paprskovému trojúhelníku. Rovněž pokud zvolíme jinou polohu bodů A a B tak, aby nesplývaly s body K, L, M (např. oba budou ležet na stejném oblouku KM, který přísluší ke konvexnímu středovému úhlu příslušné kružnice), platnost vět 2, 3 a 4 zůstane zachována. Ověření ponecháváme na čtenáři.

Někoho možná napadne, co by se stalo, kdybychom ve větě 1 (či 2) připustili možnost, že přímka jednoho svazku prochází středem svazku druhého. Také v tomto případě lze nalézt v průsečících přímek svazků vrcholy n pravidelných n-úhelníků. Všechny tyto n-úhelníky by měly jeden z vrcholů ve středu jednoho svazku. Průsečíků přímek svazků by však již nebylo n^2, ale $n^2 - n - 1$ (n by jich splynulo do jediného). Tomuto speciálnímu případu jsme se však záměrně vyvarovali, neboť by značně ztížil důkazy.

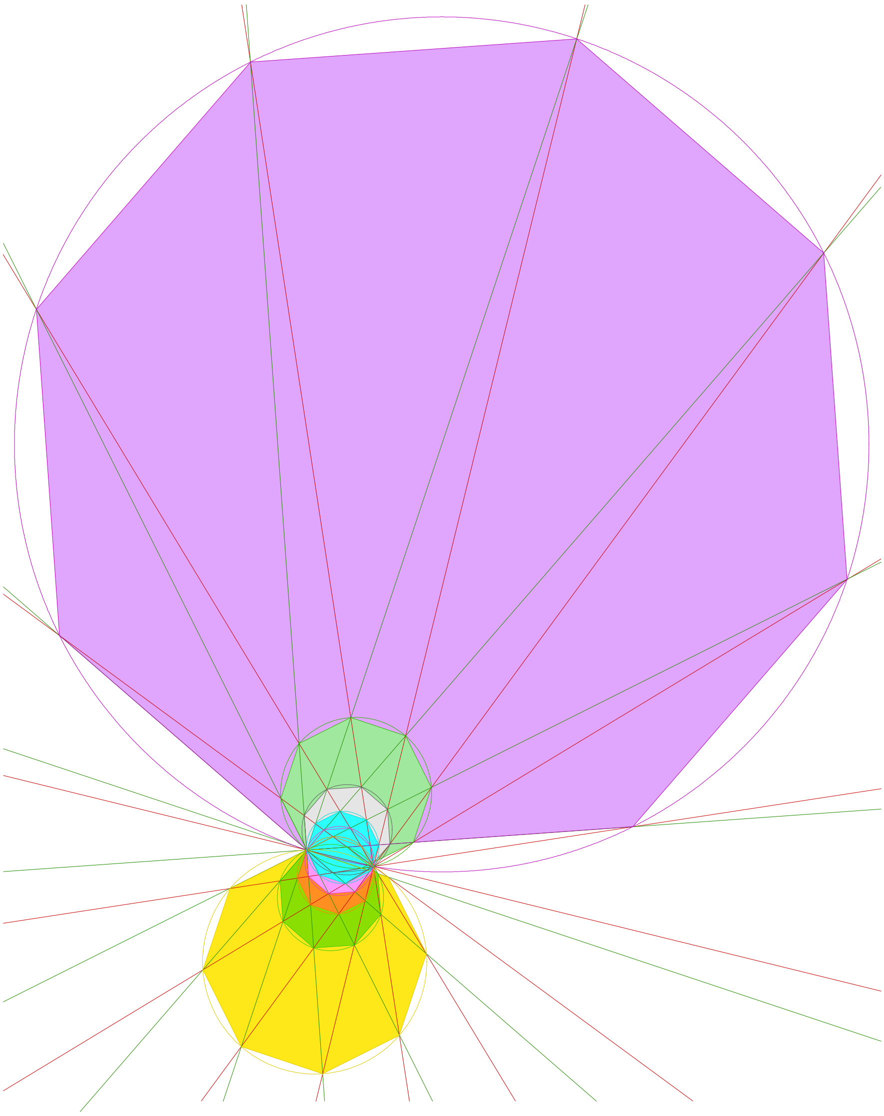
Tři varianty (pro $n = 3$, $n = 4$ a rovněž pro „větší“ $n = 8$) tohoto nestandardního případu jsou znázorněny na obrázcích 10, 11 a 12. Na obrázku 13 je uveden – kvůli přehlednosti – zvětšený výřez z obrázku 12.



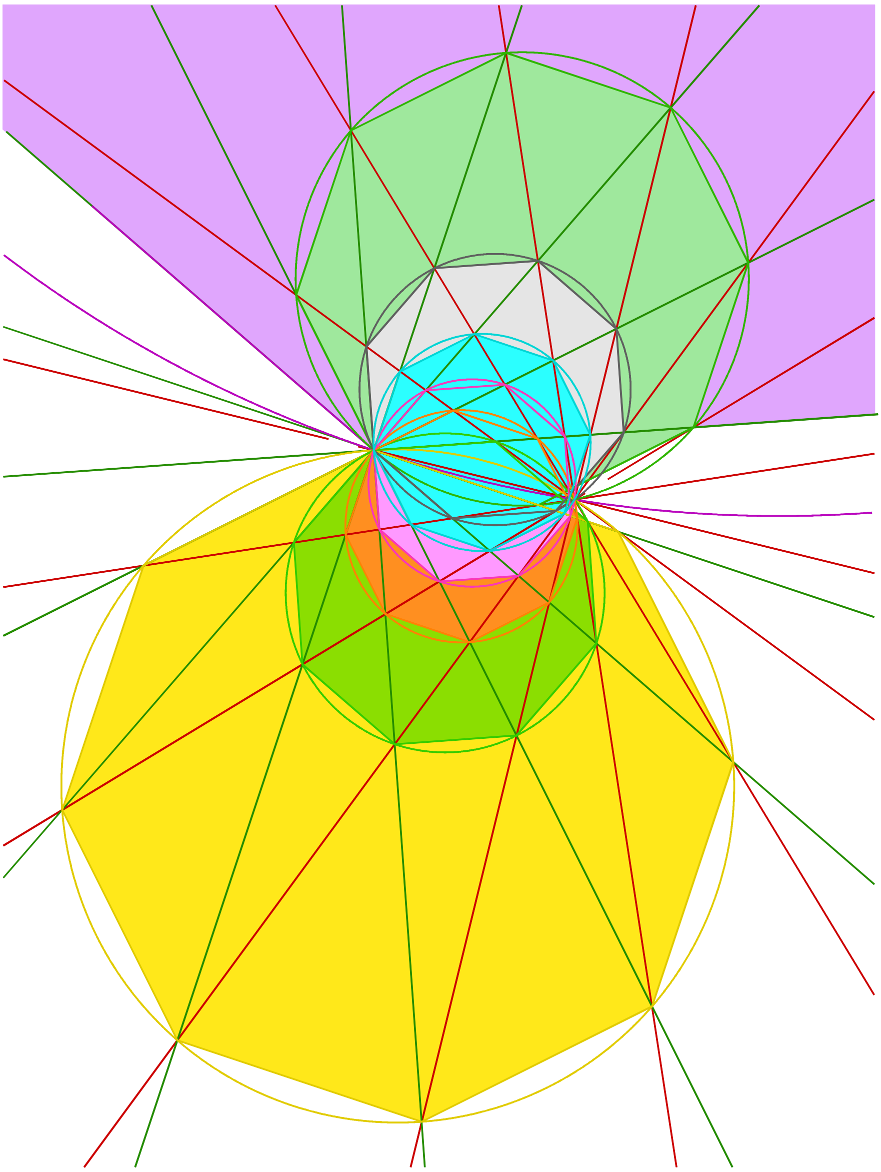
Obr. 10: Tři paprskové trojúhelníky
(přímka jednoho svazku prochází středem druhého svazku)



Obr. 11: Čtyři paprskové čtverce
(přímka jednoho svazku prochází středem druhého svazku)



Obr. 12: Osm paprskových osmiúhelníků
(přímka jednoho svazku prochází středem druhého svazku)



Obr. 13: Osm paprskových osmiúhelníků – výřez z předchozího obrázku

Pokud bychom uvažovali dokonce případ, v němž by přímka každého ze dvou svazků procházela středem svazku druhého, dostali bychom se ještě do větších nesnází. Kromě problému se splynutím dvou přímek do jedné, bychom obdrželi $n - 1$ dvojic rovnoběžných přímek, jejichž průsečíky leží v nekonečnu.

5 Závěr

Pomineme-li dva speciální případy zmíněné v závěru textu, je důkaz *Věty o majácích se třemi paprsky* důkazem toho, že ne každý důkaz musí být pro studenty obávaným „strašákem“. Dalším kladem věty je její působivé grafické znázornění, které může přilákat k této nepříliš známé problematice nejednoho čtenáře.

Literatura

[1] R. K. Guy, *The Lighthouse Theorem, Morley & Malfatti: A Budget of Paradoxes*, The American Mathematical Monthly 114 (2007), 97–141.

RNDr. Martina Štěpánová, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
stepanov@karlin.mff.cuni.cz

ÚLOHY DISKRÉTNÍ PRAVDĚPODOBNOSTI

Jakub Staněk

1 Úvod

Pravděpodobnost je mnohdy žáky i učiteli hodnocena jako jedna z nejobtížnějších látek středoškolské matematiky. Jednou z možných příčin by mohl být fakt, že ověřit správnost výsledku úloh diskrétní pravděpodobnosti je velice často komplikovanější než v příkladech jiné středoškolské matematiky a vysvětlení, v čem je chyba v případě špatného řešení daného příkladu, bývá často krkolomné. Dalším problémem je, že úlohy diskrétní pravděpodobnosti, alespoň ty složitější, lze hůře řešit pouhým mechanicky naučeným postupem, a proto vyžadují od svého řešitele větší míru pochopení dané problematiky.

V článku se budeme zabývat třemi příklady na diskrétní pravděpodobnost. První dva jsou velmi dobře známé a u nich ukážeme kromě správných řešení také řešení nesprávná, k nimž tyto úlohy často svádí, a provedeme diskusi. V posledním příkladě se budeme zabývat úlohou o výpočtu pravděpodobnosti výhry ve hře poker, verzi Texas Hold'em, která je v současné době velice populární.

2 Příklady

Fakt, že mohou být i jednoduché úlohy diskrétní pravděpodobnosti zrádné, lze vidět na následujícím příkladu.

Příklad 1 (převzato z [1], str. 2)**.** S jakou pravděpodobností padne ve dvou hodech mincí alespoň jednou rub?

Tento příklad je ve složitější verzi (pro čtyři hody) uveden jako první příklad v kapitole *Pravděpodobnost* v učebnici pro gymnázia [2], str. 81. I když je tento příklad poměrně jednoduchý, i proto byl zřejmě uveden v učebnici jako první, tak jeho špatné řešení provedl jak Jean D'Alembert (1717–1783), tak i Gottfried Leibniz (1646–1716) (viz [1]). Správná odpověď je, že hledaná pravděpodobnost je $\frac{3}{4}$, jelikož máme čtyři stejně pravděpodobné možnosti výsledku sledovaného pokusu, a to (líc, líc), (líc, rub), (rub, líc) a (rub, rub), a z nich jsou tři příznivé. D'Alembert však uvádí výsledek $\frac{2}{3}$, jelikož pracuje pouze s jevy „padne dvakrát rub“, „padne jednou rub a jednou líc“ a „padne dvakrát líc“. Tyto jevy však nemají stejnou pravděpodobnost, a právě proto je řešení chybné.

Druhý příklad bývá uváděn v několika různých verzích. Tato úloha, která se proslavila jako tzv. problém Montyho Halla, byla představena v publikaci [4]. Uvedeme zde dvě často prezentované verze této úlohy.

Příklad 2 – verze 1. V jednom ze tří trezorů je skryta odměna, ostatní dva jsou prázdné. Soutěžící je vyzván, aby si vybral trezor, ve kterém myslí, že je skryta odměna. V případě, že se trefí, tak odměnu získá. Po vybrání je otevřen jeden z dvou dalších trezorů, ale vždy pouze ten, který je prázdný, o čemž je soutěžící informován. Poté je soutěžící vyzván, zda chce změnit volbu trezoru a vybrat si druhý zbývající. Je pro soutěžícího změna trezoru výhodná?

Příklad 2 – verze 2 (převzato z [2], str. 122, př. 2)**.** Skříňka má tři zásuvky. V první jsou dvě zlaté mince, v druhé jedna zlatá a jedna stříbrná, v třetí dvě stříbrné mince. Zvolíme náhodně jednu zásuvku, z ní vytáhneme naslepo jednu minci. Jaká je pravděpodobnost, že v zásuvce zbyde zlatá mince, jestliže vytažená mince byla stříbrná?

Řešení – verze 1: Zde často bojují dvě intuitivní představy. Dle první je odměna buď v trezoru, který byl vybrán napoprvé, a nebo v tom druhém neotevřeném, a jelikož na začátku měly oba tyto trezory stejnou pravděpodobnost, že v nich bude odměna, tak by tomu mělo být i po otevření zbývajícího trezoru, a proto by pravděpodobnost výhry měla být $\frac{1}{2}$ pro oba trezory. Dle druhé úvahy jsme při první volbě volili ze tří trezorů, takže byla pravděpodobnost výhry $\frac{1}{3}$, ta se změnit otevřením prázdného trezoru nemohla, jelikož vždy bude jeden trezor otevřen, ať jsme při první volbě zvolili trezor s odměnou, či prázdný. Proto je pravděpodobnost výhry i po otevření prázdného trezoru $\frac{1}{3}$, a tedy se změna trezoru vyplatí, jelikož pravděpodobnost, že je cena v druhém neotevřeném trezoru, je $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Nejdříve uvedeme řešení tohoto příkladu. Označme A_i, $i = 1, 2, 3$, jevy, že v i-tém trezoru je odměna, pak $P(A_i) = \frac{1}{3}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že jsme na začátku zvolili trezor číslo 1, a označme B_i, $i = 2, 3$, jevy, že je poté otevřen i-tý trezor (který je prázdný). Rozeberme si teď jednotlivé možnosti. Je-li odměna v námi zvoleném trezoru, pak může být otevřen libovolný ze zbývajících dvou trezorů, ani jedna z těchto variant není preferovaná, a tak $P(B_i|A_1) = \frac{1}{2}$. Jelikož $P(B_i|A_1) = \frac{P(B_i \cap A_1)}{P(A_1)}$ a $P(A_1) = \frac{1}{3}$, tak $P(A_1 \cap B_i) = \frac{1}{6}$. Je-li odměna v i-tém trezoru, $i = 2, 3$, pak nemůže být po první volbě otevřen a musí být otevřen trezor zbývající, proto $P(A_i \cap B_i) = 0$ a $P(B_j|A_i) = 1$ pro $i \neq j \Rightarrow P(A_i \cap B_j) = \frac{1}{3}$ pro $i = 2, 3$ a $i \neq j$.

Jelikož jsou jevy A_1, A_2 a A_3 disjunktní a dohromady pokrývají celý pravděpodobnostní prostor (jsou v nich obsaženy všechny možné výsledky pokusu), tak $P(B_i) = \sum_{j=1}^{3} P(A_j \cap B_i) = \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. Pak

$$P(A_1|B_i) = \frac{P(A_1 \cap B_i)}{P(B_i)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$
$$P(A_j|B_i) = \frac{P(A_j \cap B_i)}{P(B_i)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \quad i \neq j,$$

tedy i po otevření prázdného trezoru zůstane pravděpodobnost výhry pro prvně zvolený trezor stejná, ale pro zbývající trezor je dvojnásobná.

Kde tedy nastala v první úvaze chyba? Chyba je právě v tom, že by i po otevření jednoho z trezorů měla být pravděpodobost uložení výhry do zbylých trezorů stejné. Trezor, který jsme si vybrali, otevřený být nemohl, zatímco například druhý trezor ano. A tak informace, že nebyl otevřen ani druhý trezor, zvyšuje šanci, že v tomto trezoru bude výhra. V jistém smyslu je po otevření třetího trezoru druhý trezor reprezentantem obou těchto trezorů, a proto je pravděpodobnost, že v něm bude výhra rovna $\frac{2}{3}$.

Řešení – verze 2: Řešení je převzato z [2]. Tak jako v předchozí verzi lze i tady snadno dojít k špatnému výsledku úvahou, že jelikož stříbrnou minci lze vytáhnout jen z druhé nebo třetí zásuvky a ve druhé zásuvce zbude zlatá mince zatímco ve třetí stříbrná, je hledaná pravděpodobnost rovna $\frac{1}{2}$. Můžeme ale uvažovat i takto. Pouze z druhé či třetí zásuvky mohu vytáhnout stříbrnou minci, v nich je ale jen jedna zlatá mince a po vytažení jedné stříbrné v nich zbudou ještě dvě stříbrné mince, tedy hledaná pravděpodobnost by měla být $\frac{1}{3}$.

Pro řešení příkladu si zavedeme následující značení: $(1, z_1)$ je jev, že z první zásuvky vytáhneme první zlatou minci, podobně označíme další elementární jevy $(1, z_2)$, $(2, z)$, $(2, s)$, $(3, s_1)$ a $(3, s_2)$. První číslo vždy značí, z jaké zásuvky bylo taženo a s, resp. z, značí tažení stříbrné, resp. zlaté, mince. Označíme-li jev „byla tažena stříbrná mince“ písmenem B a jev „v zásuvce zbyla zlatá mince“ jako jev A, pak

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{(2,s)\})}{P(\{(2,s),(3,s_1),(3,s_2)\})} = \frac{1}{3}.$$

Chyba v úvaze, která vedla ke špatnému řešení, byla opomenutí skutečnosti, že pravděpodobnost, že vytáhnu stříbrnou minci z druhé zásuvky, je dvakrát menší než pravděpodobnost, že ji vytáhnu z poslední zásuvky. A tedy víme-li, že jsme vytáhli stříbrnou minci, je dvakrát větší pravděpodobnost, že jsme ji tahali ze třetí zásuvky než ze zásuvky druhé.

Ačkoliv se mohou zdát tyto dvě úlohy velmi odlišné, koneckonců i uvedená řešení jsou jiná, jde v zásadě jen o modifikaci téže úlohy. Jev B_i „byl otevřen i-tý trezor“ odpovídá pak jevu B „byla tažena stříbrná mince“ a jev A_1 „odměna je v prvním trezoru“ odpovídá jevu A „v zásuvce zbyla stříbrná mince“. Jsou-li to ale v podstatě stejné úlohy, tak by měly jít vyřešit i stejným postupem. Zkusme tedy první verzi vyřešit pomocí postupu aplikovaného na druhou verzi úlohy. Zde bychom mohli použít elementární jevy $(1, o_2)$, $(1, o_3)$, $(2, o_3)$ a $(3, o_2)$, kde první číslo značí, ve kterém trezoru je výhra, a o_i značí, že byl otevřen i-tý trezor. Jelikož tyto jevy nemají stejnou pravděpodobnost, první dva mají pravděpodobnost $\frac{1}{6}$, zatímco druhé dva $\frac{1}{3}$, tak si ještě každý z jevů $(2, o_3)$ a $(3, o_2)$ rozdělíme na dva disjunktní podjevy, které už budou mít také pravděpodobnost $\frac{1}{6}$. Tedy budeme pracovat s elementárními jevy $(1, o_2)$, $(1, o_3)$, $(2, o_3^1)$, $(2, o_3^2)$, $(3, o_2^1)$ a $(3, o_2^2)$. Pak

$$P(A_1|B_2) = \frac{P(A_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{P(\{(1,o_2)\})}{P(\{(1,o_2),(3,o_2^1),(3,o_2^2)\})} = \frac{1}{3}.$$

Poslední příklad se bude týkat výpočtu výhry jednotlivých hráčů při hře Texas Hold'em za stavu, že je již vyložený flop, jinak řečeno, hráči mají každý v ruce dvě karty a již jsou na stole vyložené tři společné karty.

Nejdříve si ve stručnosti popišme pravidla této verze pokru, která je v současnosti pravděpodobně nejhranější verzí u nás. Na začátku hry každý hráč dostane dvě karty, pak probíhá první kolo sázek. Poté se vyloží takzvaný flop, tedy tři společné karty, a následuje další kolo sázek. Pak se vyloží další společná karta (turn), opět následuje další kolo sázek a nakonec se vyloží poslední společná karta (river) a proběhne poslední kolo sázek. V každém kole sázek může hráč buď složit (ukončit hru) nebo dorovnat, popřípadě navyšovat sázku. Po ukončení posledního kola sázení vyloží hráči, kteří jsou ještě ve hře, své karty a určí se vítěz podle toho, který hráč drží nejsilnější kombinaci. Kombinace, kterou daný hráč drží, je nejsilnější kombinace pěti karet, kterou může hráč vytvořit ze dvou karet, které má v ruce a pěti společných karet na stole.

Výherní kombinace jsou po řadě od nejsilnější po nejslabší tyto:

- postupka v barvě,
- poker – čtyři karty stejné hodnoty,
- full house – trojice a dvojice,
- barva – všech pět karet ve stejné barvě,
- postupka,
- trojice karet stejné hodnoty,
- dva páry karet stejné hodnoty,
- jeden pár,
- vysoké karty – kombinace pěti karet, které netvoří žádno z dříve uvedených kombinací.

Více informací o pravidlech a kombinacích lze najít např. v práci [3].

Také následující příklad je – s laskavým svolením autora – převzat z této práce, tedy z [3], str. 29. Příklady tohoto typu umožnují velkou variabilitu složitosti v závislosti na tom, kolik karet má na stůl ještě přijít, kolik hráčů hraje a jaké karty na stole již leží. Proto lze u těchto úloh vymyslet jak poměrně jednoduché zadání, tak i zadání, které bez pomoci počítačů v podstatě nelze spočítat. Výhodou je i to, že je tato tématika pro studenty přitažlivá.

Příklad 3. Určete pravděpodobnost výhry prvního hráče, je-li na stole situace znázorněná na obrázku 1.

Úlohu zde nebudeme řešit kompletně, jen nastíníme postup řešení. Celé řešení lze najít v práci [3].

Jelikož je na stole již sedm karet a balíček na poker obsahuje 52 karet, tak máme 45 možností karet, které mohou přijít na turn (další karta, která přijde na stůl). Určíme tedy postupně počet výherních možností pro prvního hráče v závislosti na tom, jaká karta přišla na turn, pak počet všech těchto možností sečteme a vydělíme počet všech možností, jaké karty mohou na stůl přijít, tj. $45 \cdot 44 = 1980$ (zde rozlišujeme i v jakém pořadí na stůl karty přijdou).

Obr. 1: Grafická ukázka průběhu hry Poker, verze Texas Hold'em (obrázek je převzat z [5]).

Rozebereme zde dvě varianty karet, které mohou příjít na turn.

- Na turn přijde dvojka (barva zde nehraje roli): Je-li na turnu dvojka, tak má první hráč dva páry a druhý jen jeden. Druhý hráč může vyhrát jen v případě, že poslední kartou získá vyšší kombinaci karet, v tomto případě dva vyšší páry nebo postupku. Aby měl dva vyšší páry, potřebuje desítku nebo kluka (6 možností). Aby měl postupku, potřebuje sedmičku nebo dámu (8 možností). Ostatní karty hrají pro prvního hráče. První hráč má tedy $44 - (6 + 8) = 30$ výherních kombinací pro každou ze tří dvojek, které mohou na turn přijít. Celkem tedy 90 výherních kombinací.
- Na turn přijde piková trojka: V tomto případě má první hráč trojici, ale druhý hráč může získat ještě barvu či postupku. Přijde-li na river sedmička či dáma, tak vyhraje druhý hráč s postupkou (8 možností). Přijde-li na river piková karta, bude mít druhý hráč barvu. Ale sedmička a dáma jsou již započítány v předchozích možnostech a osmička či devítka zase tvoří prvnímu hráči silnější kombinaci (full house). Karet, při kterých vyhraje druhý hráč s kombinací barva, je tedy jen 5. Proto celkově je $44 - (8 + 5) = 31$ výherních kombinací pro prvního hráče.

Tímto způsobem zjistíme, že výherních kombinací pro prvního hráče je 886, a tedy první hráč má pravděpodobnost výhry $\frac{886}{1980} = 0{,}4475$.

Jiný způsob řešení je zaměřit se na výherní kombinaci, se kterou první hráč vyhraje. To může být buď pár, dva páry, trojice, full house anebo poker. Postupku ani barvu už první hráč vytvořit nemůže a pár už má. Pak se zaměříme na to, kolik možností dané výherní kombinace hráč má. Ukážeme si to na příkladě páru. Aby první hráč vyhrál s kombinací pár, druhý hráč musí mít nejnižší možnou kombinaci, to jest kombinaci vysoké karty. Pokud bude mít druhý hráč také pár, tak jelikož drží vyšší karty, bude vítězem on, jelikož bude mít vyšší pár. To znamená, že na turn a river musí přijít karty s hodnotami, které ještě na stole neleží, nesmí společně tvořit pár (to by měl první hráč kombinaci dva páry), nesmí být obě pikové (to by druhý hráč měl barvu) a nesmí v nich být ani sedmička ani dáma (to by druhý hráč měl postupku). Tedy vybíráme z karet s hodnou 4, 5, 6, K a A tak, aby obě karty měly různou hodnotu a nebyly obě pikové. Možností tedy je $\binom{5}{2}(4^2-1)=150$. Obdobně se zaměříme na další možné výherní kombinace prvního hráče, počet všech výherních variant sečteme a vydělíme počtem všech možností. Poznamenejme, že v tomto způsobu již nerozlišujeme pořadí, ve kterém přicházejí karty na stůl, a proto je počet celkových možností roven $\binom{45}{2}=990$.

U takto složitých úloh se často stává, že řešíme-li úlohu dvěma různými způsoby (jak lze třeba řešit tento příklad) a vyjdou nám dva různé výsledky, tak je obtížné určit, ve kterém z postupů je chyba. Jedna z variant, která se pro ověření výsledku nabízí, je vzít si na pomoc počítač. Koneckonců, pokerové kalkulačky, které jsou na internetu volně dostupné (např. [5]), určují pravděpodobnosti výher právě pomocí počítačů propočítáním všech možností. I když se to může zdát na první pohled složité, tak naprogramovat takovou pokerovou počítačku, alespoň pro konkrétní příklad, není zas tak obtížné a pro schopnějšího studenta střední školy s jistou zkušeností s programováním to může být docela pěkné cvičení. Navíc spojení programování a matematiky může některým studentům připadat jistě zajímavé.

Literatura

[1] J. Anděl, *Matematika náhody*, Matfyzpress, Praha, 2007.

[2] E. Calda, V. Dupač, *Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*, Prometheus, Praha, 2013.

[3] R. Jelínek, *Poker a pravděpodobnost*, bakalářská práce, MFF UK, Praha, 2016.

[4] S. Selvin, *A problem in probability (letter to the editor)*, The American Statistician 29 (1975), 67.

[5] Poker kalkulačka. `http://www.poker-centrum.cz/odds-kalkulator.html`.

RNDr. Jakub Staněk, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`stanekj@karlin.mff.cuni.cz`

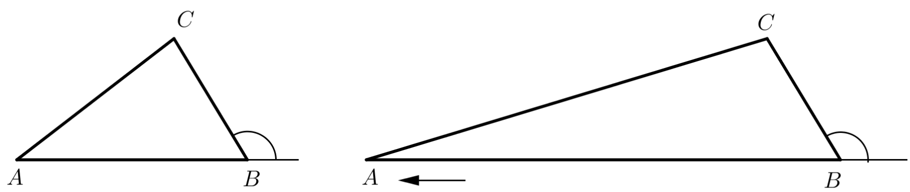
DVĚ OPOMÍJENÉ PLANIMETRICKÉ VĚTY

Jana Hromadová

Ve svém článku bych ráda na několika příkladech nastínila důležitost ale i zrádnost obrázků v geometrických důkazech a poukázala na dvě opomíjené planimetrické věty, pomocí nichž lze odvodit řadu elementárních vět, jež jsou náplní středoškolského učiva.

V geometrii často studenti nechápou, proč je třeba dokazovat něco, co je přeci naprosto zřejmé. Odhlédněme nyní od toho, že ona „zřejmost" je velice individuální. Žáci si často si neuvědomují, že hodně záleží na tom, jak vhodně si nakreslíme obrázek modelující zkoumanou situaci. Námi zvolený obrázek často nereprezentuje všechny možné situace, které mohou nastat. V některých konkrétních situacích již ono „zřejmé" přestává být vidět na první pohled.

Proč například dokazovat, že vnější úhel trojúhelníku je větší, než vnitřní úhel při jiném vrcholu, vždyť z přiloženého obrázku (obr. 1 vlevo) je přeci naprosto zřejmé, že zatímco vnitřní úhly jsou všechny ostré, pak vnější úhly jsou tupé a každý tupý úhel je přeci větší než libovolný ostrý úhel. Nakreslíme-li si trojúhelník tupoúhlý, již bychom mohli začít o platnosti pochybovat.

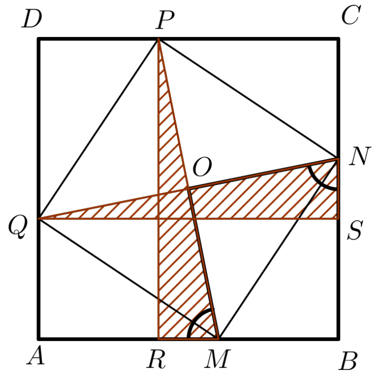


Obr. 1: Vnější úhel trojúhelníku

Představme si nyní, že bod A posouváme po přímce AB směrem od bodu B (obr. 1 vpravo). Bude-li bod A od bodu B vzdálen např. 20 m, nebude již školní úhloměr schopen potvrdit rozdíl mezi vnitřním úhlem při vrcholu C a vnějším úhlem při vrcholu B. Není tedy zcela vhodné hovořit o „zřejmosti" této věty. Korektní důkaz této věty nezávisí na tom, jak si nakreslíme ilustrační obrázek, pomocí několika logických kroků odvozuje, že věta platí pro všechny trojúhelníky a i když nejsme schopni okem, či úhloměrem poznat rozdíl, přesto můžeme s jistotou tvrdit, že existuje.

Nakreslení nevhodného obrázku (či obrázku reprezentujícího pouze jednu z možných variant) bývá jednou z častých chyb v geometrických důkazech. Podívejme se např. na následující tvrzení a jeho „důkaz" (viz [2] str. 27, 43).

Je-li obdélník $MNPQ$ vepsán do čtverce tak, že na každé straně čtverce leží právě jeden z vrcholů obdélníku, pak vepsaný obdélník je také čtverec (obr. 2).

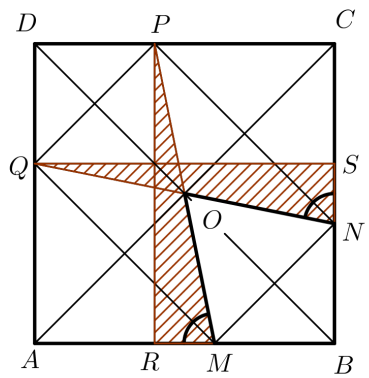


Obr. 2: Obdélník vepsaný do čtverce 1 (zdroj: [2])

K důkazu tohoto tvrzení veďme vrcholy Q a P kolmice QS, PR po řadě na strany BC a AB. Platí $|AB| = |QS| = |PR|$. Úsečky QS i PR jsou odvěsnami v pravoúhlých trojúhelnících QSN a PRM, jejichž přepony jsou si též rovny, neboť jsou obě úhlopříčkami obdélníku $MNPQ$. Dle věty *Ssu* jsou vyšrafované trojúhelníky shodné, shodují se tedy i úhly QNS a PMR.

Všimněme si v obrázku čtyřúhelníku $MBNO$, kde O je průsečík úhlopříček obdélníku $MNPQ$. Vnitřní úhel čtyřúhelníku při vrcholu M je roven vnějšímu úhlu při vrcholu N, tedy součet vnitřních úhlů při vrcholech M a N je úhel přímý. Pak ovšem musí být i součet vnitřních úhlů při vrcholech B a O úhel přímý, a protože u vrcholu B je úhel pravý, musí být pravý úhel i při vrcholu O. Tedy úhlopříčky obdélníku $MNPQ$ jsou navzájem kolmé, ovšem tuto vlastnost má ze všech obdélníků pouze čtverec, čímž je důkaz hotov.

Snadno si však dovedeme představit, že do čtverce lze vepsat i obdélník, který není čtvercem (obdélník jehož osy stran leží v úhlopříčkách čtverce, viz obr. 3), kde jsme tedy v důkazu udělali chybu?



Obr. 3: Obdélník vepsaný do čtverce 2 (zdroj: [2])

Spoléhali jsme se na obrázek 2, v němž je znázorněn pouze jeden konkrétní případ. Na základě tohoto obrázku jsme pak předpokládali, že ze dvou navzájem shodných úhlů QNS a PMR je jeden vnitřním a jeden vnějším úhlem čtyřúhelníku $MBNO$, což ovšem v jiných případech platit nemusí.

Aby bylo dokazované tvrzení platné, museli bychom jej doplnit následovně:

Je-li obdélník vepsán čtverci tak, že jedna jeho strana není rovnoběžná s žádnou úhlopříčkou čtverce, pak tento obdélník je čtverec.

Na těchto dvou příkladech jsem se snažila ukázat, jak důležitá i zrádná je role obrázků v geometrických důkazech. Více o potřebnosti důkazů v geometrii o častých chybách v důkazech či o struktuře geometrických důkazů lze nalézt např. v [1] a [2].

Podívejme se nyní na dvě trochu opomíjené věty Meneláovu a Cèvovu, s jejichž pomocí lze dokázat řadu elementárních vět středoškolské planimetrie a nejen je.

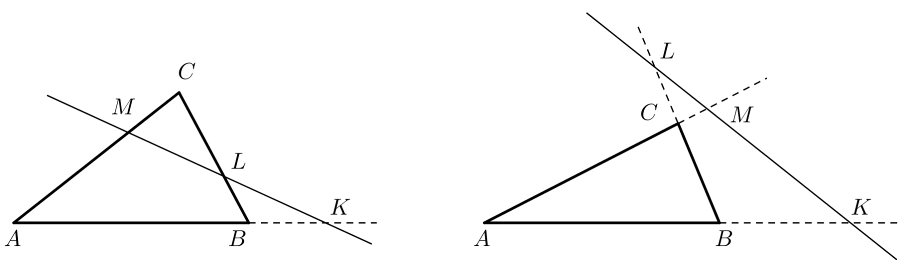
V hodinách deskriptivní geometrie se zmíněné věty formulují s využitím pojmu dělicí poměr (viz např. [4]), který se ovšem na středních školách běžně nezavádí, lze to ovšem i bez něj (viz např. [3]). Při důkazech těchto vět se většinou využívá podobných zobrazení, nelze jimi tedy nahradit klasickou výuku, aniž bychom předbíhali v tématech.

Meneláova a Cèvova věta

Meneláova věta.[1] *V rovině je dán trojúhelník ABC. Nechť jsou K, L, M po řadě body na přímkách AB, BC, CA, které nesplývají s žádným z vrcholů trojúhelníku. Potom body K, L, M leží na přímce právě tehdy, když platí:*

(M1) *Z bodů K, L, M patří trojúhelníku buď právě dva, nebo žádný,*

(M2) $\dfrac{|AK|}{|BK|} \cdot \dfrac{|BL|}{|CL|} \cdot \dfrac{|CM|}{|AM|} = 1.$



Obr. 4: Meneláova věta

Důkaz: Předpokládejme, že body K, L, M leží na jedné přímce. Pak zřejmě platí tvrzení (M1). Nechť například body M, L náleží trojúhelníku (viz obr. 4

[1] Meneláos Alexandrijský byl řecký matematik a astronom. Žil na přelomu 1. a 2. století našeho letopočtu.

vlevo), či žádný z bodů K, L, M nenáleží trojúhelníku (viz obr. 4 vpravo). Veďme bodem A rovnoběžku s přímkou KL (viz obr. 5) a označme X její průsečík s přímkou BC. Trojúhelník CAX je obrazem trojúhelníku CML ve stejnolehlosti se středem C, platí tedy

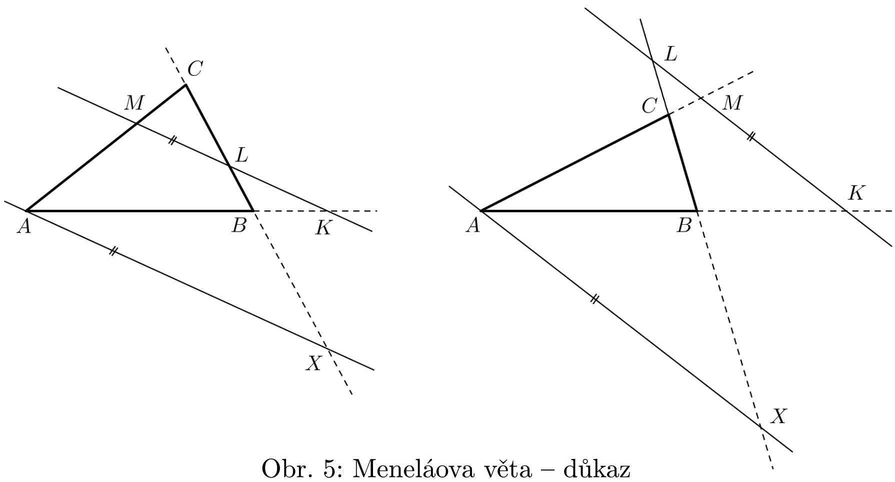
$$\frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|CL|}{|XL|}.$$

Ve stejnolehlosti se středem B se úsečka AX zobrazí na úsečku KL, platí tedy

$$\frac{|AK|}{|BK|} = \frac{|XL|}{|BL|}.$$

Z obou rovností plyne

$$\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|XL|}{|BL|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CL|}{|XL|} = 1.$$



Obr. 5: Meneláova věta – důkaz

Předpokládejme nyní, že platí tvrzení (M1) a (M2). Předpokládejme ještě, že trojúhelníku náleží buď body M, L, nebo žádný z bodů K, L, M. Snadno nahlédneme, že přímka ML není rovnoběžná s AB. Muselo by totiž platit

$$\frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|CL|}{|BL|}$$

a ze současné platnosti tvrzení (M2) vyplývá $|AK| = |BK|$. Což by nastalo v případě, že by bod K byl středem úsečky AB, avšak bod K vůbec bodem úsečky AB není. Přímka ML je tedy různoběžná s AB, označme K' její průsečík s AB. Protože jsou body M, L, K' kolineární, plyne z již dokázané první části věty

$$\frac{|AK'|}{|BK'|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1.$$

Ze současné platnosti druhého tvrzení plyne

$$\frac{|AK|}{|BK|} = \frac{|AK'|}{|BK'|}.$$

Hodnota tohoto poměru může být větší či menší než jedna, navíc můžeme předpokládat, že $|AK|$ je větší nebo rovno, či menší nebo rovno než $|AK'|$. Předpokládáme-li nejprve

$$\frac{|AK|}{|BK|} > 1 \ \wedge \ |AK| \geq |AK'|,$$

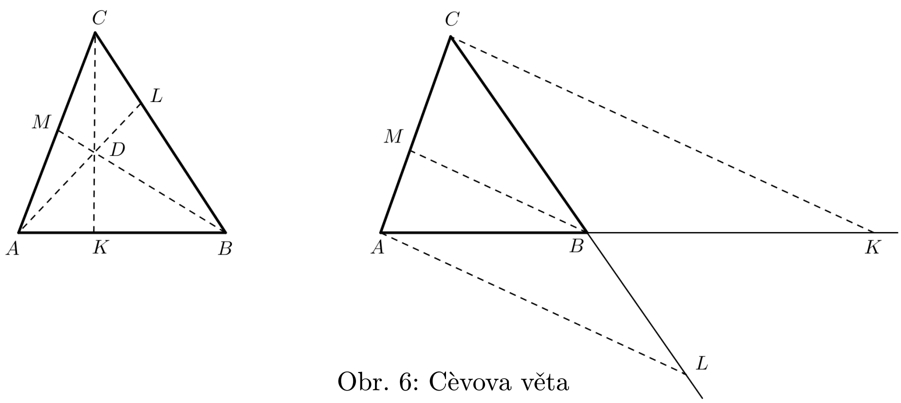
pak body K i K' leží na polopřímce AB mimo úsečku AB a můžeme zapsat $|AK'| = |AK| + |KK'|$, $|BK'| = |BK| + |KK'|$. Dosazením do výše uvedené rovnosti dvou zlomů dostáváme $|KK'| = 0$, platí tedy $K \equiv K'$. Totéž bychom dostali i pro ostatní varianty.

Protože bod K splývá s bodem K', dokázali jsme, že i body K, L, M leží na jedné přímce.

Cèvova věta.[2] *V rovině je dán trojúhelník ABC. Nechť jsou K, L, M po řadě body na přímkách AB, BC, CA, které nesplývají s žádným z vrcholů trojúhelníku. Přímky CK, AL, BM procházejí jedním bodem, nebo jsou navzájem rovnoběžné právě tehdy, když platí:*

(C1) *Právě jeden z bodů K, L, M je bodem trojúhelníku ABC, nebo všechny tři náleží trojúhelníku,*

(C2) $\dfrac{|AK|}{|BK|} \cdot \dfrac{|BL|}{|CL|} \cdot \dfrac{|CM|}{|AM|} = 1.$



Obr. 6: Cèvova věta

Důkaz: Procházejí-li přímky CK, AL, BM jedním bodem, nebo jsou navzájem rovnoběžné pak zřejmě platí (C1). Jsou-li přímky AL, BM, CK navzájem rovnoběžné, pak důkaz plyne ze stejnolehlosti trojúhelníků ABM a AKC,

[2]Giovanni Cèva (1647–1734) byl italský matematik, větu publikoval roku 1678.

popř. CMB a CAL (viz obr. 6). Procházejí-li dané přímky jedním bodem, pak z Meneláovy věty pro trojúhelník AKC a přímku BD dostáváme

$$\frac{|AB|}{|BK|} \cdot \frac{|KD|}{|CD|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1.$$

Pro trojúhelník KBC a přímku AL dostáváme obdobně

$$\frac{|AK|}{|AB|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|DC|}{|DK|} = 1.$$

Vynásobnením těchto rovností dostaneme vztah (C2). Tím je jedna implikace dokázána. Na obrázku 6 je znázorněna situace, kdy K, L i M náleží trojúhelníku a průsečík D přímek CK, AL, BM je tedy vnitřním bodem trojúhelníku, ponechám na čtenáři, aby si sám načrtl situaci, kdy bod D bude vnějším bodem a ověřil, že pro vnější bod je důkaz analogický.

Důkaz opačné implikace bychom prováděli obdobně jako u Meneláovy věty. Kompletní důkaz je možné nalézt např. v [4], str. 29.

Cèvovu větu jsme dokázali za pomoci věty Meneláovy. Obě věty jsou ale ve skutečnosti ekvivalentní, Meneláovu větu by šlo dokázat pomocí věty Cèvovy. Na webové stránce [6] lze nalézt náznak důkazu části Cèvovy věty bez Meneláovy věty, pouze s využitím vzorce pro obsah trojúhelníku.

Důsledky Cèvovy věty

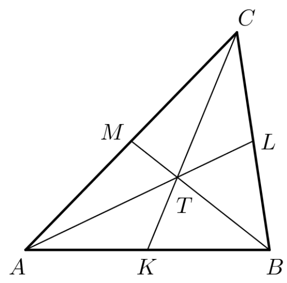
Využijme nyní tyto věty k důkazům elementárních vět o trojúhelnících. Některé důkazy budou jednodušší, než známé středoškolské, jindy je tomu naopak.

S využitím Cèvovy věty snadno dokážeme, že *těžnice v trojúhelníku se protínají v jednom bodě.*

Označíme-li K, L, M středy stran trojúhelníku (viz obr. 7), pak všechny tři body náleží trojúhelníku (C1) a protože $|AK| = |BK|$, $|BL| = |CL|$ a $|CM| = |AM|$, je splněn i vztah (C2). Spojnice AL, BM, CK se tedy protínají v jediném bodě T, tzv. těžišti trojúhelníku ABC. Použijeme-li navíc Meneláovu větu na trojúhelník AKC a přímku BM, dostáváme ze vztahu (M2)

$$\frac{|AB|}{|BK|} \cdot \frac{|KT|}{|CT|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{2}{1} \cdot \frac{|KT|}{|CT|} \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

Tedy $|CT| : |KT| = 2 : 1$ a obdobně pro ostatní těžnice. *Bod T tedy dělí každou z těžnic na dva díly v poměru 2:1, přičemž větší díl obsahuje vrchol trojúhelníku.*



Obr. 7: Těžiště trojúhelníku

Na obrázku 8 jsou body K, L, M paty výšek spuštěných po řadě z vrcholů C, A, B na strany trojúhelníku. Vezměme nejprve ostroúhlý trojúhelník, pak každý z bodů K, L, M náleží trojúhelníku. Z podobnosti trojúhelníků CLA a CMB (dle věty *uu*) dostáváme

$$\frac{|CM|}{|CL|} = \frac{|CB|}{|CA|},$$

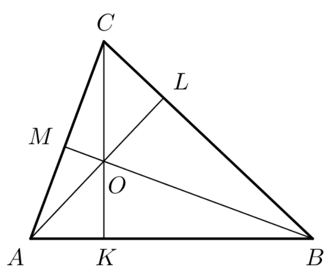
z podobnosti trojúhelníků BLA a BKC získáme vztah

$$\frac{|BL|}{|BK|} = \frac{|BA|}{|BC|}$$

a konečně z podobnosti trojúhelníků AMB a AKC dostáváme

$$\frac{|AK|}{|AM|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Získali jsme tři rovnosti, jejichž vynásobením dostaneme vztah (C2). Jsou tedy splněny předpoklady Cèvovy věty a *výšky AL BM a CK v trojúhelníku ABC se tedy protínají v jediném bodě*, tzv. ortocentru trojúhelníku ABC.



Obr. 8: Průsečík výšek v trojúhelníku

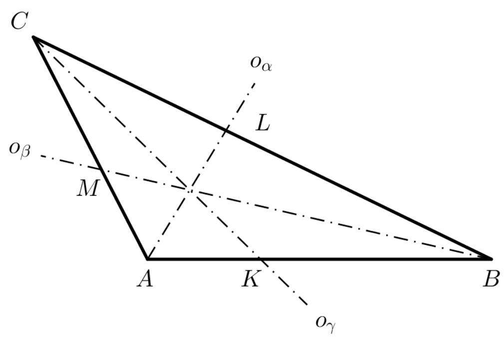
V pravoúhlém trojúhelníku je platnost věty zřejmá, snadno nahlédneme, že výše uvedený postup neselže ani pro tupoúhlý trojúhelník, lišit se bude pouze v tom, že v tupoúhlém trojúhelníku pouze jedna z pat výšek náleží trojúhelníku, zbývající dvě leží vně trojúhelníku, avšak stále jsou splněny předpoklady Cèvovy věty.

Povšimněme si ještě, že u ostroúhlého trojúhelníku je ortocentrum vnitřním bodem, zatímco u tupoúhlého je vnějším bodem. V pravoúhlém trojúhelníku splývá s vrcholem pravého úhlu.

Pokusme se dále dokázat, že i *osy vnitřních úhlů v trojúhelníku se protínají v jednom bodě.* Označme opět po řadě K, L, M průsečíky os vnitřních úhlů se stranami AB, BC, CA (viz obr. 9). Každý z bodů K, L, M náleží trojúhelníku ABC. V důkazu využijeme tvrzení, že osa vnitřního úhlu trojúhelníku dělí protější stranu v poměru délek přilehlých stran (důkaz tohoto tvrzení je snadný, viz např. [3] str. 55). Platí tedy

$$\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|BC|}{|AB|} = 1.$$

Osy vnitřních úhlů v trojúhelníku nemohou být rovnoběžné, procházejí tedy jedním bodem. Dalo by se ještě dokázat, že tento bod je středem kružnice vepsané trojúhelníku, tedy má od každé ze stran trojúhelníku stejnou vzdálenost.

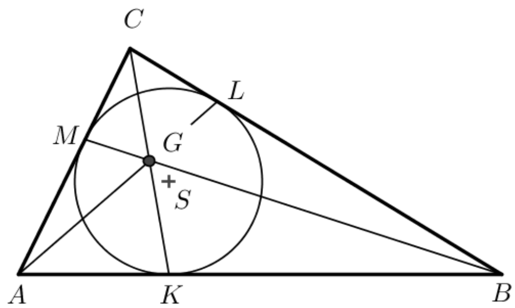


Obr. 9: Průsečík os úhlů v trojúhelníku

Až posud jsme dokazovali známé elementární věty. Cèvovu větu lze využít k odvození dalších tvrzení.

Např. lze též dokázat, že *spojnice bodů dotyku kružnice vepsané s protilehlými vrcholy trojúhelníku procházejí jedním bodem.* Tento bod nazýváme Gergonnův[3] bod.

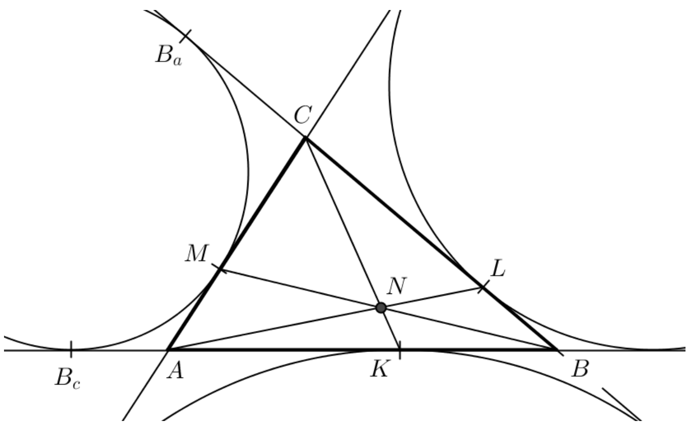
[3] Joseph Diez Gergonne (1771–1859), francouzský matematik a geometr.



Obr. 10: Gergonnův bod

Označme K, L, M body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ležící po řadě na stranách AB, BC, CA (viz obr. 10). Body K, L, M jsou vždy body trojúhelníku ABC. Nyní si stačí uvědomit, že délky úseků na tečnách vedených z bodu ke kružnici od tohoto bodu k bodu dotyku se rovnají. Platí tedy $|AK| = |AM|$, $|BK| = |BL|$, $|CL| = |CM|$. Dosadíme-li získané rovnosti do (C2), jsou splněny předpoklady obrácené Cèvovy věty a tedy spojnice AL, BM, CK procházejí jedním bodem.

Namísto kružnice vepsané se nyní podívejme na kružnice připsané trojúhelníku, tedy kružnice, které leží vně trojúhelníku a dotýkají se vždy jedné ze stran trojúhelníku a přímek, na nichž leží zbývající strany trojúhelníku. Ukážeme, že *spojnice bodů dotyku připsaných kružnic s trojúhelníkem s protilehlým vrcholem trojúhelníku prochází jedním bodem.* Tento bod nazýváme Nagelův[4] bod.



Obr. 11: Nagelův bod

Označme K, L, M body dotyku připsaných kružnic ležící po řadě na stranách AB, BC, CA . Body K, L, M jsou vždy body trojúhelníku ABC (C1). Při tradičním značení stran trojúhelníku označme s poloviční obvod trojúhelníku

[4]Christian Heinrich von Nagel (1803–1882), německý geometr.

$s=(a+b+c)/2$. B_a, B_c nechť jsou body dotyku přímek BA, BC s kružnicí připsanou trojúhelníku ke straně b. Snadno nahlédneme, že $|AB_c|=|AM|$, $|CB_a|=|CM|$ a tedy i $|BB_c|+|BB_a|=|BA|+|AM|+|BC|+|CM|=2s$. Protože současně platí $|BB_a|=|BB_c|$, je $|BB_c|$ rovno polovičnímu obvodu (při obdobném značení by rovněž platilo $s=|AA_b|=|AA_c|=|CC_a|=|CC_b|$).

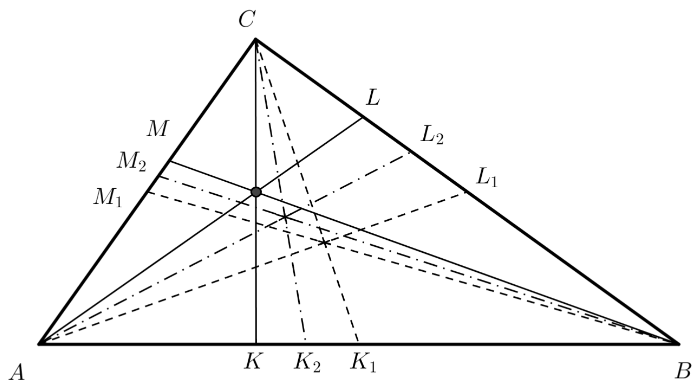
Odtud odvodíme $|MA|=|AB_c|=|BB_c|-c=s-c$ a obdobným způsobem $|LB|=s-c$, $|MC|=|BK|=s-a$, $|LC|=|AK|=s-b$.

Dosaďme tyto rovnosti do vztahu (C2). Dostáváme

$$\frac{|AK|}{|BK|}\cdot\frac{|BL|}{|CL|}\cdot\frac{|CM|}{|AM|}=\frac{s-b}{s-a}\cdot\frac{s-c}{s-b}\cdot\frac{s-a}{s-c}=1$$

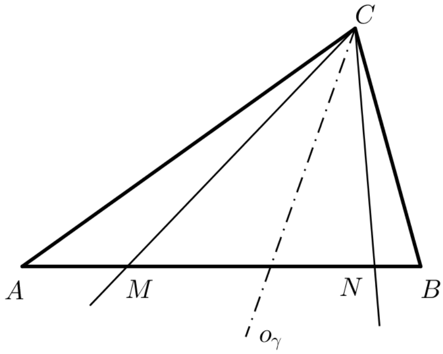
Opět jsou splněny předpoklady Cèvovy věty, přímky AL, BM, CK se tedy protínají v jediném bodě (podobně jako v důkazu předchozí věty nemohou být rovnoběžné).

Na závěr se podívejme ještě na jeden významný bod v trojúhelníku. Na obrázku 12 jsou písmeny K_1, L_1, M_1 označeny středy stran trojúhelníku ABC. K_2, L_2, M_2 označují průsečíky os úhlů s protějšími stranami. Sestrojíme-li obrazy těžnic v osové souměrnosti podle příslušných os úhlů trojúhelníku ABC (obraz CK_1 v osové souměrnosti podle osy CK_2 apod.), protnou tyto obrazy strany trojúhelníku (nepočítáme-li vrchol trojúhelníku, kterým procházejí) v bodech K, L, M. Ukážeme, že *spojnice AL, BM a CK rovněž procházejí jedním bodem.*



Obr. 12: Lemoinův bod

Označme si v obecném trojúhelníku (viz obr. 13) ABC na straně c body M, N takové, že přímky CM a CN si odpovídají v osové souměrnosti podle osy úhlu při vrcholu C.



Obr. 13: Steinerova věta

Dle Steinerovy věty (uvádím bez důkazu, lze jej nalézt např. v [5]) platí

$$\frac{|AM|}{|BM|} \cdot \frac{|AN|}{|BN|} = \frac{|AC|^2}{|BC|^2}.$$

Použijeme-li Steinerovu větu na body K_1, K, dostáváme vztah

$$\frac{|AK_1|}{|BK_1|} \cdot \frac{|AK|}{|BK|} = \frac{|AK|}{|BK|} = \frac{|AC|^2}{|BC|^2}.$$

Obdobně bychom odvodili vztahy pro body L a M:

$$\frac{|BL|}{|CL|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}, \quad \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|BC|^2}{|AB|^2}.$$

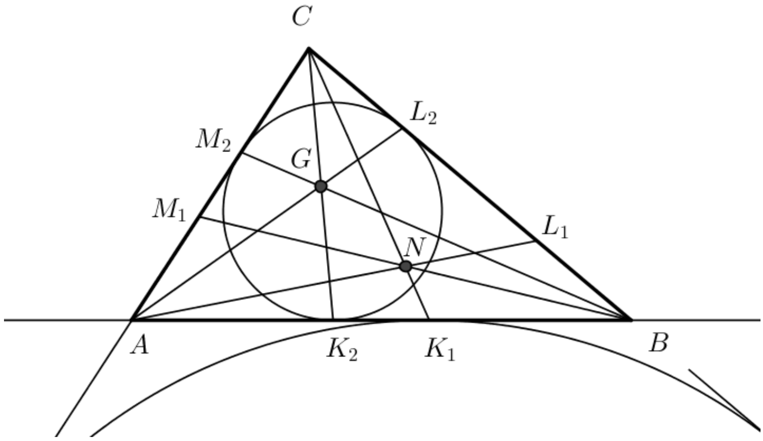
Dosazením do vztahu (C2) dostáváme

$$\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|AC|^2}{|BC|^2} \cdot \frac{|AB|^2}{|AC|^2} \cdot \frac{|BC|^2}{|AB|^2} = 1.$$

Protože K, L i M jsou body trojúhelníku, plyne z Cèvovy věty, že spojnice AL, BM a CK se protínají v jediném bodě. Tento bod nazýváme Lemoinův[5].

Jako si jistým způsobem odpovídají těžiště a Lemoinův bod (odpovídající si příčky jsou vždy sdruženy podle osy úhlu), můžeme nalézt jistý vztah i mezi Nagelovým a Gergonnovým bodem, resp. mezi bodem dotyku kružnice připsané např. ke straně AB a bodem dotyku kružnice vepsané na straně AB. Označme tyto body K_1, K_2, jako na obrázku 14.

[5]Francouzský matematik Emile Lemoine (1840–1912) dokázal existenci tohoto bodu roku 1873.



Obr. 14: Vztah mezi body dotyku kružnice vepsané a připsané

Již víme, že $|AK_1| = s - b$, $|BK_1| = s - a$. Snadno nahlédneme[6], že též platí $|AK_2| = s - a$ a tedy i $|BK_2| = s - b$. Z čehož vyplývá, že body K_1 a K_2 jsou souměrně sdružené podle středu úsečky AB (obdobně pro body dotyku vepsané a připsané kružnice na stranách AC, BC).

Závěr

Meneláova a Cèvova věta poskytuje učiteli jistý nadhled nad středoškolskou látkou, ukazuje souvislosti mezi známými středoškolskými větami o společném bodě těžnic, výšek, nebo os vnitřních úhlů v trojúhelníku. Současní studenti učitelství se s těmito větami mohou setkat v rámci předmětu *Základy rovinné geometrie*. Rozhodně netvrdím, že ve středoškolské planimetrii by bylo vhodné nahradit elementární důkazy těmito důkazy. Na to zřejmě není v hodinách planimetrie čas ani dostatek prostoru. Ale je možné toto téma využít v hodinách matematických seminářů či jako zajímavé téma pro SOČ.

Literatura

[1] A. I. Fetisov, *O důkazu v geometrii*, SNTL, 1956.

[2] J. S. Dubnov, *Chyby v geometrických důkazech*, SNTL, 1954.

[3] L. Boček, J. Zhouf, *Planimetrie*, Pedagogická fakulta UK v Praze, 2009.

[4] J. Švrček, J. Vanžura, *Geometrie trojúhelníka*, Polytechnická knižnice, 1988.

[5] S. Luo, C. Pohoata, *Let's Talk About Symmedians!*, Math. Reflections 4 (2013), 1–11. Dostupné z `https://www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2013-04/lets_talk_about_symmedians.pdf`

[6] Platí $2s = |AB| + |BC| + |AC| = |AK_2| + |K_2B| + |BL_2| + |L_2C| + |CM_2| + |M_2A|$. Současně víme, že $|AK_2| = |AM_2|, |BK_2| = |BL_2|, |CL_2| = |CM_2|$. Odtud plyne např. $|AK_2| + |BL_2| + |CL_2| = s$ a tedy $|AK_2| = s - |BL_2| + |CL_2| = s - a$.

[6] Deskriptivní geometrie na MFF UK: *Meneláova a Cèvova věta.*
http://www.karlin.mff.cuni.cz/~jole/deskriptiva/
DG1-Planimetrie.html#MenelaovaCevovaVeta

RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
Jana.Hromadova@mff.cuni.cz

MÍSTO DŮKAZU VE ŠKOLSKÉ MATEMATICE

Zdeněk Halas

Na důkazy „není čas“, jsou pro žáky „příliš náročné“, proto „patří až na VŠ“. Na několika příkladech ukážeme, zda mají důkazy a odvozování ve vyučování matematice na základní a střední škole své místo, případně se jej pokusíme přesněji vymezit.

1 RVP a další dokumenty

Na úvod nahlédněme do základních dokumentů, do RVP pro základní vzdělávání [4] a pro gymnázia [5], případně do „Doporučených učebních osnov“ [3], co říkají o odvozování a dokazování při vyučování matematice.

Dle „Doporučených učebních osnov“ [3], str. 54, se argumentace v matematice omezuje na protipříklady:
... na základě pokusů nebo zkušeností žáků rozvíjí jejich logické myšlení, úsudek a tvoření hypotéz, které žáci ověřují nebo vyvracejí pomocí protipříkladů.

Až v 8. ročníku je zde jako „další námět do výuky“ navržena *propedeutika důkazů matematických vět.*

Samotné RVP pro základní vzdělávání [4], str. 30, zdůrazňuje v matematice „aktivní činnosti“:
Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je v základním vzdělávání založena především na aktivních činnostech, které jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných situacích.

Žák je veden k *rozvíjení abstraktního a exaktního myšlení osvojováním si a využíváním základních matematických pojmů a vztahů, k poznávání jejich charakteristických vlastností a na základě těchto vlastností k určování a zařazování pojmů* ([4], str. 31). Zde je kladen důraz na pojmy a jejich klasifikaci.

Dále se píše o důrazu na důkladné porozumění ([4], str. 30):
Vzdělávání klade důraz na důkladné porozumění základním myšlenkovým postupům a pojmům matematiky a jejich vzájemným vztahům. Žáci si postupně osvojují některé pojmy, algoritmy, terminologii, symboliku a způsoby jejich užití.

V dalším textu však není přesněji určeno, co se tím rozumí, specifikace chybí i v dalších dokumentech [2] a [3].

RVP pro gymnázia [5] je konkrétnější, v charakteristice vzdělávací oblasti se na str. 22 píše:
Matematika přispívá k tomu, aby žáci byli schopni hodnotit správnost postupu při odvozování tvrzení a odhalovat klamné závěry. Zde může překvapit omezení na „hodnocení“ správnosti postupu.

Konkrétnější je však vyjádření: … *vytváření hypotéz a deduktivní úvahy jsou prostředkem pro nové hlubší poznání a předpokladem dalšího studia.* (str. 21)

Nicméně v „Cílovém zaměření vzdělávací oblasti“ jsou formulace opět slabší; žák má být veden k *rozvoji logického myšlení a úsudku, vytváření hypotéz na základě zkušenosti nebo pokusu, k jejich ověřování nebo vyvracení pomocí protipříkladů* ([5], str. 22); argumentace se tedy opět omezuje na protipříklady, způsob ověřování není blíže specifikován.

Vedení žáka ke *zdůvodňování matematických postupů, k obhajobě vlastního postupu* ([5], str. 22) je blíže k odvozování matematických výsledků, lze jej však vztahovat pouze na obhajobu vlastního způsobu řešení zadané úlohy.

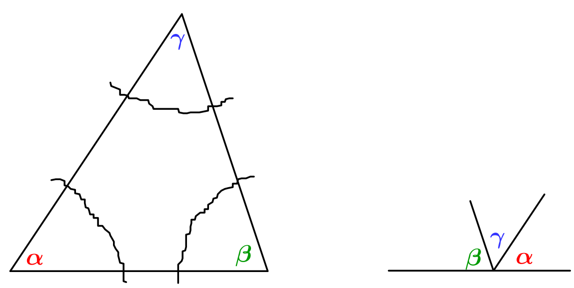
Jak je vidět z předchozích ukázek, RVP a další zmíněné dokumenty odvozování a dokazování výrazně nepodporují. Vyjádření jsou jen mlhavá a příliš obecná. Konkretizace se týkají argumentace pomocí protipříkladů a obhajoby vlastního postupu řešení úlohy.

Jsem přesvědčen, že je (s ohledem na věk a schopnosti žáků) velmi důležité při vyučování matematice pracovat i těmi metodami, které jsou pro matematiku charakteristické – to se děje při řešení úloh a při odvozování výsledků. Deduktivní úvahy navíc neslouží jen k pouhému ověření platnosti odvozených tvrzení, ale zejména k hlubšímu vysvětlení zkoumaných pravidel a vztahů. Takto pojatá odvozování považuji za integrální součást výuky matematice na 2. stupni ZŠ a na SŠ. Uvedený požadavek není nijak přehnaný – jednotlivá odvození jsou totiž často velmi jednoduchá. Předložená tvrzení budu ilustrovat na dvou příkladech, z nichž se pak pokusím vytěžit další obecné závěry.

2 Úvodní příklady

Příklad 1 – součet vnitřních úhlů trojúhelníku

Všimnout si, že součet vnitřních úhlů trojúhelníku by mohl být roven přímému úhlu, je možno například tak, že vystřihneme trojúhelník z papíru, utrhneme jeho „rohy“, které položíme vedle sebe tak, aby dvě dvojice vzniklých „úhlů“ měly společné jedno rameno, a tedy i společný vrchol, přitom se však žádné dva nepřekrývaly (viz obr. 1).

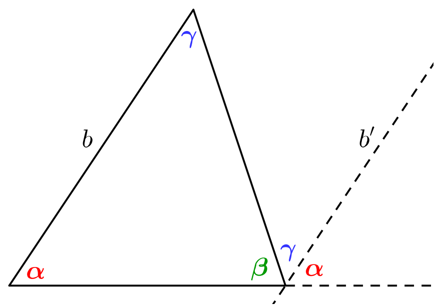


Obr. 1: Součet vnitřních úhlů trojúhelníku – pokus

Jedná se zajímavou aktivitu, vše je hmatatelné a velmi názorné. Tento přístup je zvolen např. v učebnici [1]. Až potud je vše v pořádku, pokud odůvodnění vztahu $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ výše popsaným pokusem neskončí (k tomu však v učebnici [1] bohužel dochází). Omezení se na tento pokus totiž přináší problémy, např.:

- z ověření na jediném trojúhelníku (příp. na několika) se udělá závěr o všech trojúhelnících,
- nepřesnost stříhání, resp. omezená přesnost měření a vnímání lidského oka (těžko lze vyvrátit, že není $\alpha + \beta + \gamma = 179° \, 55'$),
- nepracuje se matematicky, nerozvíjí se dostatečně logické myšlení,
- narušena návaznost na předchozí látku (probírány úhly souhlasné, střídavé a vrcholové, nikde však toto učivo není potřeba).

Pokud přijmeme výsledek pokusu jako základ hypotézy, budeme postaveni před úkol ověření její platnosti. Zde je nutno zapojit matematický přístup.



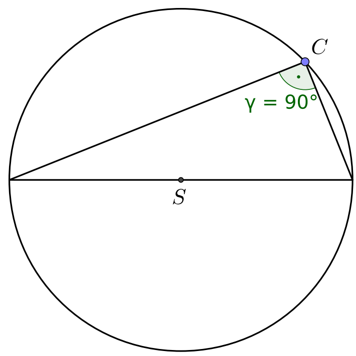
Obr. 2: Součet vnitřních úhlů trojúhelníku – odvození

Narýsujeme-li rovnoběžku b' se stranou b vrcholem trojúhelníku při úhlu β a prodloužíme-li základnu trojúhelníku, budou mít vzniklé úhly velikost α (souhlasné úhly) a γ (střídavé úhly). Úhel, jenž je součtem úhlů α, β a γ, je přitom přímý, viz obr. 2.

Důkaz, který jsme stručně naznačili, je velmi jednoduchý. Při jeho provádění se zajímavým způsobem využívá předchozí látka (úhly souhlasné a střídavé), rozvíjí se logické myšlení žáků. Ti mohou být aktivní nejen při manuálním provádění pokusu (vystřihování a trhání trojúhelníku), ale i při logických úvahách – při dobrém vedení žáci sami přicházejí na důkaz, pomoc učitele může být minimální.

Příklad 2 – Thalétova věta

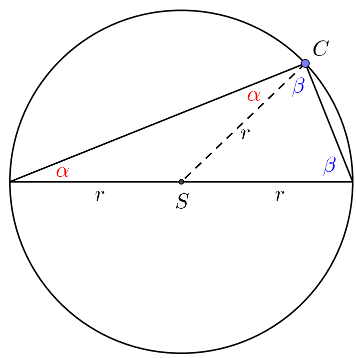
Thalétovu větu (viz obr. 3) lze uvést pokusem s modelem kružnice, po níž se pohybuje bod C spojený s jinými dvěma body kružnice ležícími na jejím průměru tak, že tvoří trojúhelník. Může se jednat o fyzický model nebo model vytvořený například v programu Geogebra. Bodem C, který neleží na průměru, pohybujeme po kružnici a měřením ověřujeme, že je úhel při vrcholu C stále pravý.



Obr. 3: Thalétova věta – pokus

Opět se jedná o názorný pokus s obdobnými výhodami i nevýhodami, jako u předchozího příkladu. Ustrne-li argumentace na tomto pokusu, není to dle mého názoru v pořádku.

Matematický přístup je přitom velmi jednoduchý, stačí využít rozklad trojúhelníku na dva trojúhelníky rovnoramenné (pomocná úsečka SC).



Obr. 4: Thalétova věta – odvození

Ve vzniklých rovnoramenných trojúhelnících mají úhly při základně stejnou velikost, můžeme tedy doplnit velikost úhlů při vrcholu C. Z předchozího příkladu víme, že součet vnitřních úhlů trojúhelníku je roven úhlu přímému, tj.

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ\,.$$

Dělením předchozí rovnosti dvěma dostáváme velikost úhlu při vrcholu C:

$$\gamma = \alpha + \beta = 90^\circ\,.$$

Opět můžeme pozorovat, že hlavní myšlenka důkazu je velmi jednoduchá. Názorným a zajímavým způsobem se pracuje s předchozími výsledky. Přirozeně tak dochází k opakování a využívání předchozí látky.

Je možno nedokazovat Thalétovu větu zvlášť, ale počkat na větu o obvodových a středových úhlech, jejímž je pak Thalétova věta jednoduchým důsledkem. Při uvedeném přístupu však žák snadno nabude dojmu, že je Thalétova věta velmi náročná, jelikož se s odvozením čeká až na střední školu. Jednoduchá a elegantní argumentace se v takovém případě zcela vytratí.

3 Proč odvozovat a dokazovat

Shrňme nyní obecné závěry, které lze pozorovat na předchozích příkladech.

Rozvoj logického uvažování

Při redukci matematiky na pokusy nerozvíjíme dostatečně logické myšlení. Žák nepoznává unikátní matematický způsob uvažování a práce s matematickými objekty.

Odstranit odvozování = odstranit matematiku

Matematika „se děje" tam, kde se matematické výsledky odvozují. Měření, stříhání, skládání či pohybování bodem po tabuli nestačí – to není matematika.

„Nepřetěžování" vede k matematice nudné a zatěžující

Přehnaný důraz na nenáročnost matematiku v důsledku ztěžuje. Žáci nepoznávají matematické postupy, matematice hlouběji nerozumějí a nabývání dalších poznatků se jeví čím dál tím více nesmyslným a zatěžujícím. Jelikož v matematice nenabývají dostatečné jistoty, omezuje se schopnost studovat obory, v nichž se matematika podstatně využívá.

Uspořádání látky

Tam, kde se výsledky soustavně odvozují, je látka přirozeně uspořádána do soustavy, kdy z jednodušších výsledků plynou závěry složitější. Mnohé poznatky pak nelze jen tak snadno vynechat, u každého z nich je také zřejmý jeho účel, má v probíraném tématu své místo.

Při samotném odvozování se také opakuje, procvičuje a aplikuje předchozí látka.

Neutváří se pouhý formální systém

Odvozování jsou vedena snahou o názornou matematickou argumentaci, ne o pouhé ověření faktů či vytvoření dokonalého formálního systému. Slouží tedy k hlubšímu vysvětlení jednotlivých tvrzení.

Vhodná aktivita žáků

Odvozování není přijímáno pasivně, žáci jej tvoří s pomocí učitele, který žákům předkládá dílčí, jimi zvládnutelné úkoly.

Důkazy, jež jsou předmětem pouhého memorování, ztrácejí svůj význam.

Přehled o celku, vědomí vyššího cíle

Žák má přehled o tom, kam zapadá odvozovaný výsledek, má před očima celkový obraz, který se při vyučování postupně vytváří.

Hypotéza ≠ věta

Pokus může vyústit do formulace hypotézy, avšak výsledkem odvozování je věta. Na základě jednoho či několika případů nelze činit obecné závěry (z pokusu s jedním trojúhelníkem nelze činit závěr o všech trojúhelnících). Navíc při práci s fyzickým modelem vstupují do hry nepřesnosti samotného modelu (přesnost stříhání, úsečky či kružnice vyrobeny z materiálu, který má nenulovou tloušťku, ...) a nepřesnost měření.

4 Některé složky výkladu nové látky

Z předchozích úvah vyplývá, že odvozování matematických výsledků je integrální součástí vyučování matematice. Jeho různé aspekty se pokusím shrnout do následujícího schématu. Jeho cílem je upozornit na některé podstatné složky výkladu nové látky; rozhodně se tedy nejedná o návrh jakési povinné osnovy pro výklad každého matematického tématu. Je zřejmé, že toto schéma nelze aplikovat vždy v plném rozsahu (např. u některých témat jsou aplikace příliš banální), ani není vhodné vždy dodržet uvedené pořadí (např. vhodná aplikační úloha může sloužit jako motivační příklad). Konkrétní provedení také výrazně ovlivňuje zvolený didaktický přístup a přizpůsobení věku žáků.

Základní schéma

1. *Motivace*
   - nadnesení problému
   - historie matematiky, „příběh“
   - pokus (modelování, měření)
   - formulace hypotézy

2. *Odvození, důkaz* („nejmatematičtější“ část)
   - prozkoumání hypotézy, odvození výsledku, řešení problému
   - formulace výsledku (srozumitelnost, odborná terminologie)

3. *Procvičování, práce s chybou*
   - od jednoduššího ke složitějšímu
   - včasná detekce chyb a práce s nimi
   - hodnocení

4. *Aplikace*
   - ne nutně u každého tématu (riziko triviality)
   - matematika napomáhající výkladu některých jevů v reálném světě
   - integrace poznatků z matematiky i z ostatních předmětů

5 Závěr

V rámci předchozích úvah jsem se pokusil ukázat, že RVP i další dokumenty [2], [3] jsou natolik obecné, že nemohou dostatečně podporovat kvalitní výuku. Míra obecnosti je dokonce natolik vysoká, že je možno na základě těchto dokumentů z vyučování matematice odstranit (s trochou nadsázky) samotnou matematiku. To se děje například v některých pasážích učebnice [1], kde bez předchozího upozornění pokus nahrazuje odvození a hypotéza větu.

Myslím, že obecnost RVP by měla vyplývat z nezávislosti na zvoleném didaktickém přístupu, ne z nedostatečného zakotvení v matematice samotné.

Dále jsem předložil názor, že odvozování matematických výsledků je integrální součástí výuky. Nesmí se však stát pouhým prostředkem pro vytvoření formálního systému, nástrojem pro pouhé ověření platnosti tvrzení, či dokonce látkou k memorování. Odvozování by měla sloužit zejména k *hlubšímu vysvětlení* jednotlivých tvrzení. Pokud důkazy přesvědčivě a srozumitelně osvětlují látku, stávají se skutečnou a nedílnou součástí výuky.

Literatura

[1] H. Binterová, E. Fuchs, P. Tlustý, *Matematika 6 – Geometrie, učebnice*, Fraus, 2007.

[2] E. Fuchs, E. Zelendová (eds.), *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání – Matematika*, NÚV, 2015.

[3] MŠMT a VÚP: *Doporučené učební osnovy předmětů Český jazyk a literatura, Anglický jazyk a Matematika pro základní školu*, únor 2011. `http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2011/03/Doporucene-ucebni-osnovy-predmetu-CJL-AJ-a-M-pro-zakladni-skolu.pdf`

[4] VÚP: *RVP pro základní vzdělávání.* `http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/ucebni-dokumenty`

[5] VÚP: *RVP pro gymnázia.* `http://www.msmt.cz/vzdelavani/stredni-vzdelavani/ramcove-vzdelavaci-programy`

Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`halas@karlin.mff.cuni.cz`

MODELOVÝ PŘÍKLAD VADNÉ VÝUKY

Vlastimil Dlab

V jedné z mnoha diskusí v Matematickém ústavu Akademie věd ČR jsme se snažili formulovat správný přístup k výuce matematiky a zdůraznit význam výchovné role Jednoty českých matematiků a fyziků, zejména výchovnou a vzdělávací roli časopisů, za jejichž vydávání Jednota odpovídá. Během diskuse jsem poukázal na jeden z příkladů, který se v časopise vydávaném Jednotou objevil a který tím, že ukazuje neznalost a nepochopení problému, výuce matematiky a vzdělávání učitelů a studentů rozhodně nepřispívá. Byl jsem tehdy vyzván, abych tento „modelový příklad vadné výuky" publikoval. Využívám tedy možnosti uvést jej ve sborníku konference Katedry didaktiky MFF UK, která je výuce matematiky věnována.

Články v časopisech, jako je *Učitel matematiky* či *Rozhledy matematicko-fyzikální*, které jsou určeny učitelům a studentům středních škol, musí být sepsány srozumitelně a co nejpřesněji. Pro vědeckého pracovníka je naprosto jasné, že k tomu, aby dospěl k novým výsledkům, musí zkoumanou disciplinu a s ní spojené problémy důkladně znát. Pro učitele to již tak jasné není, a bohužel to často ani neplatí! Na setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol v Srní roku 2008 jsem vystoupil s příspěvkem o výchově budoucích učitelů matematiky s podtitulkem *Učitelé se tváří, že vyučují, a studenti, že studují* [1]. To je přesně to, co se na mnoha školách a univerzitách děje. Spoluviníky jsou ti, kteří se nepostarali ani o řádnou výchovů budoucích učitelů, ani o poskytování účinné pomoci učitelům, kteří již na školách působí, a nevěnovali se sepsání kvalitních elementárních článků, které by učitelé mohli ve své výuce využít. Takové články je třeba sepisovat zodpovědně. Jinak mohou mít naprosto opačné, tj. škodlivé důsledky.

Příklad, který jsem slíbil komentovat, se týká poznámky v jednom časopisu Jednoty, která uvádí:

Vedlejším produktem úlohy je zajímavá goniometrická nerovnost:

$$\forall \varphi \in \langle 0, \tfrac{\pi}{4} \rangle : \quad \frac{2 - \sin\varphi}{\cos\varphi} \geq \sqrt{3}$$

Předpokládám, že tato poznámka byla adresovaná učitelům matematiky. Je opravdu *zajímavá*? Myslím, že se naopak shodneme, že poznámka je *zavádějící*, a že tudíž k porozumění rozhodně nepřispívá. Je záhodno si položit otázku, do jaké míry mohou takováto tvrzení škodit a do jaké míry je vedení časopisu, který taková tvrzení publikuje, kompetentní.

Je zcela jasné, že pro všechna φ je

$$1 \geq \sin(\varphi + 60^\circ) = \frac{1}{2}\sin\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi.$$

Odtud triviálně vyplývá, že *pro všechna* φ je

$$\boxed{2 - \sin\varphi \geq \sqrt{3}\ \cos\varphi.}$$

A nyní opět triviálně dostáváme

$$\cos\varphi > 0 \text{ pro všechna } \varphi, \text{ pro něž je } (4k-1)\tfrac{\pi}{2} < \varphi < (4k+1)\tfrac{\pi}{2},$$

kde k je libovolné celé číslo,

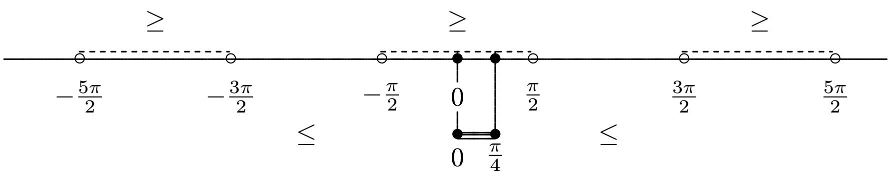
$$\cos\varphi < 0 \text{ pro všechna } \varphi, \text{ pro něž je } (4k+1)\tfrac{\pi}{2} < \varphi < (4k+3)\tfrac{\pi}{2},$$

kde k je libovolné celé číslo, a

$$\cos\varphi = 0 \text{ pro všechna } \varphi, \text{ pro něž je } \varphi = (2k+1)\tfrac{\pi}{2},$$

kde k je libovolné celé číslo.

Předchozí zjištění je názorně zachyceno na následujícím obrázku.



Obrázek tedy ukazuje i to, pro která φ platí nerovnost $\frac{2-\sin\varphi}{\cos\varphi} \geq \sqrt{3}$, pro která φ je $\frac{2-\sin\varphi}{\cos\varphi} \leq \sqrt{3}$ a kdy nemá výraz $\frac{2-\sin\varphi}{\cos\varphi}$ smysl.

Závěr

1. Pro φ splňující nerovnost $(4k-1)\frac{\pi}{2} < \varphi < (4k+1)\frac{\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$, je

$$\frac{2-\sin\varphi}{\cos\varphi} \geq \sqrt{3}.$$

2. Pro φ splňující nerovnost $(4k+1)\frac{\pi}{2} < \varphi < (4k+3)\frac{\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$, je

$$\frac{2-\sin\varphi}{\cos\varphi} \leq \sqrt{3}.$$

3. Pro φ splňující rovnost $\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$, výraz

$$\frac{2-\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

nemá smysl.

Literatura

[1] V. Dlab: *Výchova budoucích učitelů matematiky. Předstírání k nápravě nepomůže: „Učitelé se tváří, že vyučují, a studenti, že studují“.* In M. Lávička, B. Bastl (ed.): *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*, 6.–8. listopadu 2008, Vydavatelský servis, Plzeň, 2008, str. 101–104.

Vlastimil Dlab
Bzí, 468 22 Železný Brod
`vlastimil73@hotmail.com`

CESTY K MATEMATICE II
Sborník konference

Praha, 22. a 23. září 2016

Jana Hromadová, Antonín Slavík (ed.)

Vydal MatfyzPress
nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 520. publikaci.

Vydání první
Praha 2016

Publikace neprošla recenzním ani lektorským řízením nakladatelství MatfyzPress.
Nakladatelství MatfyzPress neodpovídá za kvalitu a obsah textu.
Publikace byla vydána pro potřeby konference Cesty k matematice.

ISBN 978-80-7378-326-6