

Dušan  
**JEDINÁK**

**Epizódy**  
**o**  
**matematikoch**



**Topoľčany**  
**2010**

## Úvodné upozornenie

Prvé dotyky bývajú opatrné, možno aj povrchné, nežné, ale dlho sa pamätajú. Časom asi vyblednú. No zostane opar toho, že boli prvé.

Ponúkam už tretiu sériu stručných životopisných medailónov významných osobností, ktoré sa zapísali do histórie šírenia matematickej kultúry.

Keď som dokončil prvý súbor, nazval som ho **Etudy o matematikoch**. Spracoval som v nich prvé nesmelé literárne náčrty významných matematikov (*Archimedes; Bolyai; Cantor; Čebyšev; Descartes; Euklides; Fourier; Galois; Hilbert; Chozemi; Jacobi; Kovalevská; Lobačevskij; Monge; Neumann; Ostrogradskij; Pytagoras; Regiomontanus; Sierpiński; Šmidt; Táles; Uryson; Viète; Wiener; Zermelo; Žukovskij*) pre spomienku nielen na dobu veľmi vzdialenú, ale aj na časy skoro prítomné. Šetril som aj údajmi, ktorých nikdy nie je príliš veľa. Boli to naozaj prvé cvičné skladby (etudy), dokonca stupnicou usporiadania bola iba naša slovenská abeceda. Pokus bol pomerne úspešný. **Etudy o matematikoch** vyšli aj tlačou (**Metodické centrum; Bratislava, 1992**). Možno sa dostali do rúk aj vám.

Druhý súbor bol odvážnejší. Chcel som v krátkych úvahách, ľahkým štýlom a zaujímavým obsahom vyjadriť vlastné názory na osudy vybraných význačných matematikov. Určite to neboli pohľady originálne, často až veľmi subjektívne, vyvolané predchádzajúcimi literárnymi spracovaniami iných pisateľov. **Eseje o matematikoch** (*ABEL; BOLZANO; CAUCHY; ČECH; DIOFANTOS; EULER; FERMAT; GAUSS; HRONEC; CHINČIN; JARNÍK; KOLMOGOROV; LEIBNIZ; MOIVRE; NEWTON; ORESME; PASCAL; RUSSELL; SCHWARZ; TARSKI; ULAM; VENN; WHITEHEAD; ZENÓN*) mi umožnili voľnosť výberu informácií, individuálne formulácie, svojský pohľad, slovný experiment. Usporiadal som ich zase podľa abecedy, graficky spracoval už na počítači, dokonca niektoré z nich som zavesil na web (<http://www.era.topindex.sk>).

Teraz ponúkam tretí súbor (zároveň aj posledný), aby som uzavrel svoje mnohoročné úsilie venované propagácii matematických disciplín ponúkaných viac alebo menej nezabudnuteľnými osobnosťami význačných matematikov, ľudí z mäsa a kostí, ktorí pochopili trvalý význam matematickej kultúry šírenej už viac než dvetisícročnou históriou.

Je pravdou, že som **Etudy**, **Eseje** i **Epizódy** pripravoval pre učiteľov matematiky a ich žiakov v základných i stredných školách. Pre poslucháčov učiteľstva matematiky som vytvoril skriptá **Významné osobnosti matematickej kultúry** (Trnava: Trnavská univerzita – Pedagogická fakulta, 2002). Vždy som ale myslel, že to spracúvam nielen pre nich. Tak sa pozrite, či sa tam nenájde niečo aj pre vás.

Dušan JEDINÁK

# O b s a h

**ALCUIN** – bystrý mladík stredoveku

**BOOLE** – samouk univerzitným profesorom

**CARDANO** – lekár s matematickým talentom

**DIRICHLET** – nezabudnuteľný nástupca Gaussa

**ERDÖS** – katalyzátor matematických ideí

**FREGE** – nedocenený tvorca rozbúraných základov

**GÖDEL** – hranica deduktívnych systémov ľudského poznania

**HAMILTON** – svojrázny talent

**CHOQUET** – matematik s intuíciou básnika

**IZIDOR** – encyklopedista raného stredoveku

**JORDAN** – profesiou inžinier, povoláním matematik

**KLEIN** – zjednotiteľ geometrií

**LAGRANGE** – dôsledný analytik

**MINKOWSKI** – iný pohľad na priestor a čas

**NOETHEROVÁ** – život pre matematiku

**OUGHTRIED** – významný učiteľ matematiky 17. storočia

**PÓLYA** – zaujatosť pre správne uvažovanie

**RAMANUJAN** – osobný priateľ každého prirodzeného čísla

**SYLVESTER** – matematik hrdý na svoju poéziu

**ŠALÁT** – v rozhovore s učiteľom počtov a merby

**TURING** – mysliaci stroj kacírskych teórií

**ULUG BEG** – stredoveký panovník, astronóm i matematik

**VYDRA** – profesor matematiky na pražskej univerzite

**WEIERSTRASS** – neobyčajne svedomitý matematik

**ZYGMUND** – matematický analytik 20. storočia

## ALCUIN z Yorku – bystrý mladík stredoveku

### Veľmi staré úlohy

Asi poznáte príhodu o vlkovi, koze a hlávke kapusty a ich prevoze cez rieku za daných podmienok. Táto úloha je veľmi stará. Nachádza sa aj v spise *Úlohy na bystrenie rozumu mladých*, už z 8. storočia. Autorom tejto práce, ktorá obsahuje napríklad aj úlohy o psovi a králikovi, o sto mericiach pšenice a ďalšie je **Alcuin z Yorku (asi 735–804)** učiteľ, filozof i básnik na dvore Karola Veľkého (747–814; bol roku 800 v Ríme korunovaný pápežom za cisára Rímskej ríše) v Aachene okolo roku 781. Jeho latinské meno **Alcuin** (Albinus) pochádza z keltského *Alh-win*, čo znamená priateľ chrámu.

### Doba a prostredie



York je arcibiskupské sídlo so starou kultúrnou tradíciou a známou kláštornou školou. Tam sa okolo roku 735 narodil anglosaský učenec **Alcuin**. Vyštudoval a potom prednášal v miestnom kláštore. Od roku 781 viedol kultúrne a školské záležitosti panovníka (od roku 768) Karola Veľkého, šíril v jeho ríši vzdelanie (elementárne, artistické i teologické). Základom boli modlitby, žalmy a spev, sedem slobodných umení (gramatika, rétorika, logika, aritmetika, geometria, hudba, astronómia), Biblia a komentáre cirkevných Otcov. Cieľom bolo spoznať spájať kresťanský obsah s klasickými znalosťami. Metódou boli otázky a odpovede s ohľadom na proces vnímania, pamäti a obrazotvornosti. Jednou zo zásad bola myšlienka: *Rozumne sa pýtať, znamená vyučovať*. **Alcuin** spísal traktáty o gramatike, rétorike, dialektike i muzike, filozofické a teologické spisy i pojednania z histórie. Zvlášť vnímal logiku ako umenie rozumu, ktoré usporadúva poznanie javov ľudských i božských. Radil cisárovi aj v politických otázkach. Od roku 796 bol opäť v kláštore sv. Martina v Tours, kde vybudoval úspešnú školu pre šírenie vzdelanosti vo Francúzsku. **Alcuin z Yorku** zomrel 19.5.805 a jeho telo je pochované v kláštornom kostole v Tours.

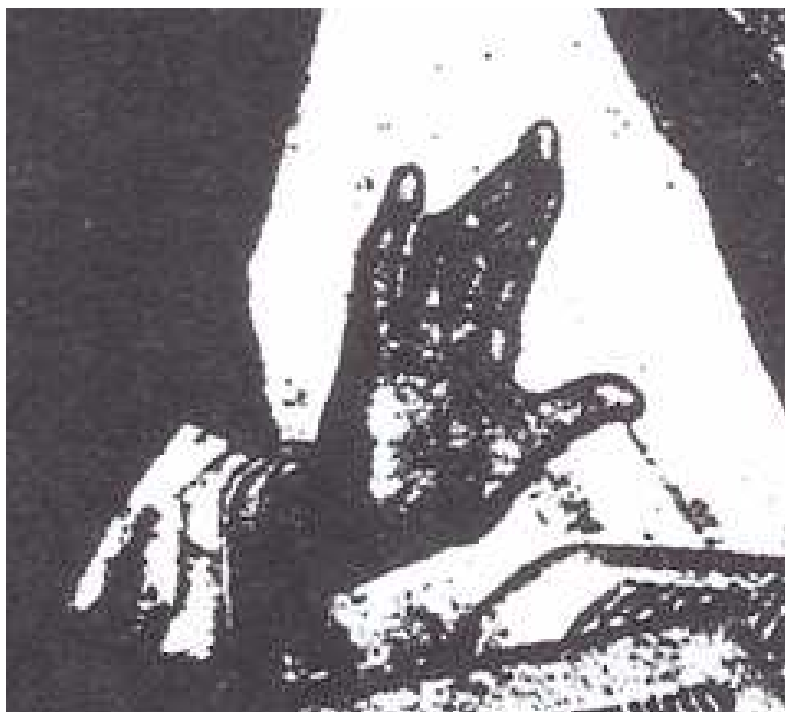
### Bystrý um

Už spomínaný spis *Úlohy na bystrenie umu mladých* (Propositiones ad acuendos iuvenes) je zbierkou 53 počtárskych úloh. V nej je ukázané napríklad riešenie úlohy ako rozdeliť 100 mincí medzi 100 osôb, aby muži dostali po troch, ženy po dvoch a každé dve deti spolu po jednej minci. **Alcuin** uvádza riešenie, podľa ktorého bolo zo 100 osôb 11 mužov, 15 žien a 74 detí. Iné z ďalších päť riešení neuvádzal (Vy poznáte tieto ďalšie riešenia, v podstate rovnice o dvoch neznámych, v množine prirodzených čísel?). Súčasťou tejto

zbierky úloh sú aj zadania na postupnosti (napr. o počte holubov na 100 priečkovom rebríku, ak na jednotlivých priečkach holuby sedia postupne v počte 1, 2, 3,.....,100), výpočet obsahov, ale aj zadania kombinatorických úloh i rôzne výpočtové zadania a úlohy s nematematickou základnou úvahou.

### Historické zázemie

Karolínska renesancia priniesla oživenie vzdelávania v starších kláštorných školách a začínajúcich školách pri katedrálach. Írsky mních **Alcuin z Yorku** usporiadal zásadné výroky autorít (*Beda Venerabilis, Isidor, Boethius, Augustín, Cicero*) pre školské potreby. Prispel k celkovej obnove a reforme vzdelania vo Franskej ríši (*Karol Veľký* sa stal cisárom v Ríme roku 800). Ukazuje sa, že aj podnety zo začiatku stredoveku, ktoré sú ešte stále súčasťou školskej matematiky, patria k európskemu kultúrnemu dedičstvu a vytvárajú historické korene rôznych matematických disciplín.

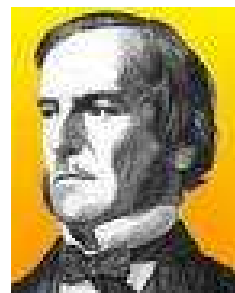


## George BOOLE – samouk univerzitným profesorom

### Algebra logiky

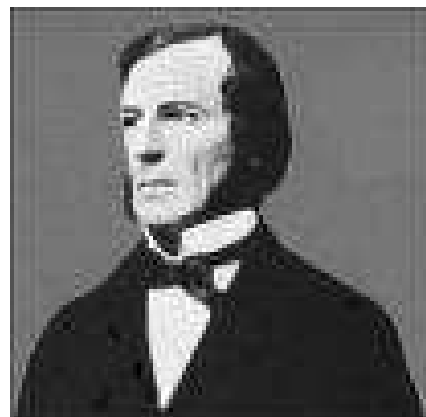
Naznačil postup, pomocou ktorého možno kontrolovať naše úsudky, formalizovať a upraviť do podoby matematických výrokov. Základným logickým pojmom priradil matematické operácie a ukázal, že tieto prvky procesu myslenia možno previesť do matematického jazyka a skúmať metódami algebry. Úvod do jeho teórie sa stal súčasťou modernej elementárnej matematiky.

**George Boole (2.11.1815–8.12.1864)**, anglický matematik a logik, vytvoril symbolický kalkul umožňujúci, po neskorších úpravách, rozvoj teórie booleovských algebier, ktoré našli uplatnenie v teórii miery a integrálu, v teórii pravdepodobnosti i matematickej štatistike, topológii a inde. S jej modelmi sa pracuje v logike (výroková algebra, teória tried) a teórii počítačov i kybernetike.

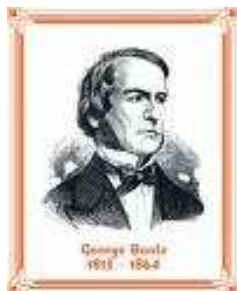


### Životný osud

**George Boole** sa narodil v Lincolne ako syn obuvníka. Jeho otec, schopný a ochotný diskutovať o všetkom možnom, mal však okrem remesla aj mimoriadny záujem o optickú techniku i matematiku. Vyučoval aj svojho syna, ktorý dvanásťročný prebásnil latinské Horatiove verše do angličtiny. George neskôr ovládal aj gréčtinu, francúzštinu a nemčinu. Od pätnástich rokov bol pomocníkom v knižnici, neskôr sa stal učiteľom v základnej škole. Pre nedostatok finančných prostriedkov nemohol študovať na vysokej škole. Bol úplným samoukom. Pretože knihy z matematiky boli lacnejšie než jazykovedné publikácie, preštudoval matematické spisy od Newtona, Lagrangea, Laplacea a ďalších. Založil vlastnú súkromnú školu, kde viedol žiakov k samostatným objavom matematických poznatkov. Prvú vedeckú prácu napísal roku 1835. Začal si dopisovať s matematikmi s Cambridgeskej univerzity. Najprv sa zaujíma o diferenciálne rovnice, pri ich riešení ponúkol predstavu operátorov. Získal zlatú medailu univerzity (1844). Svoje práce posielal do časopisu, ktorý založil D. F. Gregory. Originalita Booleových myšlienok presvedčila jeho prívržencov o tom, že patrí na univerzitu. Od roku 1849 sa stal profesorom na novozaloženej Queens College v meste Cork (Írsko), aj napriek tomu, že nemal univerzitné vzdelanie. Oženil sa, mal päť dcér, písal a publikoval aj básne. Za matematické práce bol zvolený za člena Kráľovskej spoločnosti (1857). Zomrel na následky zápalu pľúc.



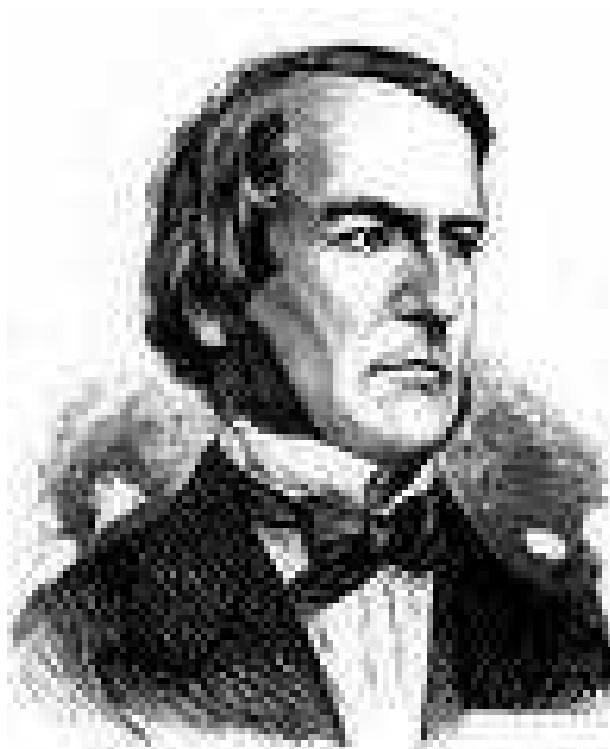
## Z diela



Hlavné odborné práce venoval logike: *Matematická analýza logiky* (1847), *Logický počet* (1848), *Skúmanie zákonov myslenia* (1854). **Boole** vyjadril logické zákonitosti a vzťahy rečou aritmetiky, v podobe výpočtov. Uvedomil si, že logické operácie treba skúmať z hľadiska ich formálnych vlastností, čo umožní premieňať výrazy zostavené zo znakov týchto operácií a symbolov premenných, nezávisle od obsahu týchto premenných. Tak získal algebru logiky. Jeho idey rozvinuli A. Morgan, W. Jevons, Ch. S. Peirce, A. N. Whitehead a E. Schröder, ktorý spracoval zásady systému symbolickej logiky do dnešného tvaru a nazval ich Booleovým menom. **George Boole** prispel zaujímavými prácami aj do teórie kvaterniónov a teórie pravdepodobnosti. Zovšeobecnením dvojhodnotovej logiky výrokov vznikla tzv. teória booleovských algebier, ktorá je dôležitá pri stavbe elektronických počítačov, regulačných systémov a kybernetických zariadení.

## Logika aj výpočtom

*Matematika je pojednanie o operáciách, nezávislé na tom, na ktoré predmety ich možno aplikovať.* Húževnatý samouk, učiteľ, univerzitný profesor **George Boole**, bol zásadovým demokratom, prekonávajúcim sociálne bariéry anglickej spoločnosti. Zhrnul logické i matematické operácie z hľadiska ich formálnych vlastností a ukázal ich nezávislosť od interpretácie. Odhalil, že možno logické postupy formálne upraviť do schém tak, aby sme mohli robiť úpravy podobné matematickým výpočtom. Neúnavnou prácou sa zapísal medzi slávných.



## Geronimo CARDANO – lekár s matematickým talentom

### Trvalé označenia

S jeho menom sú spojené mnohé pojmy: napr. *Cardanov kĺb* (spojka), *Cardanov hriadel'*, *Cardanov záves*, ale aj *Cardanov vzorec*. Prvé dva pojmy sa viažu k technickým zariadeniam pre prevod točivého pohybu, *Cardanov záves* umožňuje zachovať stálu rovinu rotácie telesa a využíva sa pre zotrvačníky. Do matematiky

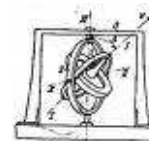


Fig. 42. Cardano's suspension. The center of mass of the sphere is at the center of the ring. The ring is fixed to the axis of rotation. The sphere is free to rotate about the axis of rotation. The center of mass of the sphere is at the center of the ring. The ring is fixed to the axis of rotation. The sphere is free to rotate about the axis of rotation.

patrí *Cardanov vzorec*  $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ , ktorým sa rieši

rovnica tretieho stupňa (kubická)  $x^3 + px = q$ . Aký životný osud mal syn talianskeho právnika **Geronimo Cardano (24. 9. 1501 – 21. 9. 1576)**, ktorý bol za svojho života uznávaným lekárom a po smrti oceňovaný ako matematik a mechanik?

### Zákruty života



Narodil sa v Pávii ako nemanželský syn. Vyštudoval medicínu na univerzite v Padove. Postupne sa stal jedným z najznámejších lekárov svojej doby. Popísal spôsoby liečby mnohých chorôb. Bol profesorom v Miláne a Bologni. Spojil lekárske povolanie, matematický talent a fyzikálne myslenie. Napísal viac ako 200 prác z medicíny, matematiky, fyziky i filozofie. Zostavoval však aj horoskopy, zaoberal sa alchýmiou. Mal nestálu povahu, encyklopedické vedomosti a bol poverčivý. Jeho životné osudy boli až tragické (r. 1546 mu zomrela manželka, r. 1560 bol s'atý jeho 26 ročný syn za otrávenie svojej ženy). Druhý syn sa stal tulákom a dokonca olúpil aj svojho otca. Samotný **Cardano** bol v roku 1570 uväznený a skonfiškovali mu majetok. Z penzie svojho otca dožil v Ríme, kde spísal vlastný životopis a zoznam svojich prác.

### Matematický zápas

V spise *Veľké umenie – Ars Magna* uviedol (1545) už spomínané riešenie rovnice tretieho stupňa. Tým sa **Cardano** dostal do sporu s Niccolom Fontanom (asi 1499–1557), vtedy prezývaným Tartaglia (čo znamená Koktavý). Ten totiž poznal všeobecný postup riešenia a nechcel ho uverejniť. Vyhrával pomocou svojich vedomostí v tom čase "matematické súboje", v ktorých riešil s protivníkom dohodnutý počet úloh. V roku 1539 Tartaglia prezradil Cardanovi metódu, no nepodal dôkaz a žiadal ho, aby postup nezverejňoval. Ale **Cardano** sa z rukopisu Scipiona del





Ferra (1465–1526) dozvedel, že ten asi v roku 1500 našiel metódu výpočtu koreňa rovnice  $x^3 + ax = b$  a tak sa necítil zaviazaný dodržať sľub, daný Tartagliovi. Uverejnil aj to, že riešenie objavil Scipio del Ferro a nezávisle aj Niccolo Tartaglia. Tak sa pre vec rozumu a srdca učenci pohádali. Správne matematické myšlienky nám predsa len zostali nepoškvrnené.

### Nové poznatky



Spis *Veľké umenie* alebo *O pravidlách algebry* bol v Európe prvým tlačeným dielom, ktoré prinieslo po dlhej dobe nové matematické výsledky. Obsahoval aj výpočty jedného z najschopnejších Cardanových žiakov. Lodovico Ferrari (1522–1565), vtedy ešte len dvadsaťtiročný, našiel riešenie pre všeobecnú bikvadratickú rovnicu i pre rovnice štvrtého stupňa. **Cardano** prvý poznal, že kvadratická rovnica má vždy dva korene. Systematicky študoval vzťahy medzi koreňmi a koeficientmi rovníc. Vytušil, že sú aj imaginárne korene. V práci *Praktiká všeobecnej aritmetiky* (1539) pripravil učebnicu pre riešenie úloh z praktického života. Neskoro po jeho smrti, až v roku 1663, uverejnili jeho prácu *Kniha o hre s kockami*. Bola napísaná už v roku 1526, v nej sú prvé formulácie niektorých úvah o pravdepodobnosti. *Pri riešení neurčitej úlohy v budúcnosti máme uvažovať iba to, čo sa môže stať a nie to, čo sa už stalo.*

Učený lekár **Geronimo Cardano**, napriek svojim nedostatkom a niektorým podivným spôsobom, sa zaradil medzi úspešných matematikov a šíriteľov matematického poznania. Životnými skúsenosťami doložil svoje slová: *Lepšie zamlčať sto vecí, ktoré bolo treba povedať, než povedať jednu takú, čo sa patrilo zamlčať.*



## Peter L. DIRICHLET – nezabudnuteľný nástupca Gaussa

### Známy princíp

Skúste zodpovedne odpovedať na otázku z nasledujúcej úlohy. V našom meste sa narodilo v minulom roku 370 detí. Nájdu sa medzi nimi aspoň dve deti, ktoré sa narodili v rovnaký deň toho roku?

Správna odpoveď je: áno. Ak by sa každý deň roku narodilo najviac jedno dieťa, tak by ich spolu bolo najviac 365 (v priestupnom roku 366). Ale detí sa narodilo 370, teda musí existovať taký deň v roku, kedy sa narodili aspoň dve deti. Je pravda, že nevieme, v ktorý deň sa to stalo, ale je zrejmé, že taký deň nastal.

Vlastne sme použili pomerne známy **Dirichletov** (zásuvkový) **princíp**: Ak je viac než  $n$  predmetov rozdelených do  $n$  skupín (zásuviek), tak existuje aspoň jedna skupina (zásuvka), v ktorej sa nachádzajú aspoň dva predmety. Dokážme túto skutočnosť: Nech po rozdelení je  $k_i$  počet predmetov v  $i$  – tej skupine (zásuvke) [ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ]. Keby v každej skupine bol najviac jeden predmet, teda  $k_i$  by bolo vždy menšie alebo rovné 1, tak potom by všetkých predmetov spolu bolo  $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n \leq n$ , ale to je spor, lebo predmetov na rozdelenie je viac než  $n$ , teda v niektorej skupine (zásuvke) musí byť viac než jeden predmet, teda aspoň dva.

### Postupnosť života



Má veľmi zaujímavé meno. Je odvodené zo spojenia „Le jeune de Richelet“ (mladík z Richeletu; Richelet je mestečko v Belgicku). Jeho rodina emigrovala z Belgicka do Nemecka. **Peter Gustav Lejeune – Dirichlet** (\* **13. február 1805** – † **5. máj 1859**) začal chodiť (1817) do gymnázia v Bonne, potom doštudoval v jezuitskom gymnáziu v Kolíne nad Rýnom. Bol pozorným študentom, zaujímal sa hlavne o históriu a matematiku (rád si za svoje vreckové kupoval odbornú literatúru). Univerzitu navštevoval v Paríži (od 1822), kde bol aj domácim učiteľom v rodine generála Foya.

Spoznal významných francúzskych matematikov (Fourier, Laplace, Lacroix, Legendre). Do Nemecka sa vrátil v roku 1826. Bol docentom v Breslau (1827), vyučoval (1828) na vojenskej škole a neskôr (1839) bol profesorom na univerzite v Berlíne. Od roku 1855 sa stal nástupcom Gaussa na univerzite v Göttingene a vytvoril tam svetové centrum matematického bádania. Oženil sa (1832) so sestrou hudobného skladateľa Felixa Mendelsshona. Mali spolu troch synov a jednu dcéru. Na letnej matematickej konferencii utrpel (1858) srdečný infarkt a po krátkej dobe (asi aj zo smútku za svojou zosnulou manželkou) zomrel.

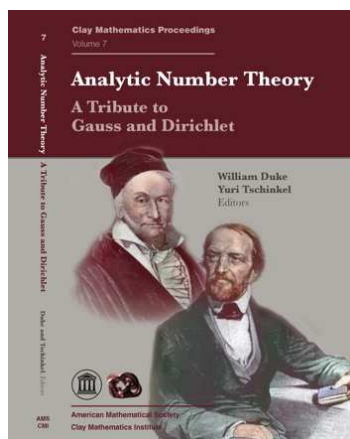
## Matematické záujmy

Hlavné odborné záujmy, na ktoré sa **Dirichlet** sústredil: teória čísel, matematická analýza (teória potenciálu, nekonečné rady, určitý integrál), matematická fyzika a hydrodynamika. Vybuodoval teóriu trigonometrických radov a využitím analytických funkcií rozvinul analytickú teóriu čísiel, prispel k správne mu pochopeniu podstaty teórie funkcií. Dokázal Veľkú Fermatovu vetu pre  $n = 5$  a pre  $n = 14$ . **Dirichlet** podal dôkaz (1837) vety o prvočíslach v aritmetických postupnostiach: V aritmetickej postupnosti  $\{a+n \cdot d\}_{n=1}^{\infty}$ , kde  $a, d$  sú nesúdeliteľné prirodzené čísla, sa vyskytuje nekonečne veľa prvočísiel. Vo variačnom počte zaviedol princíp, ktorý predpokladá existenciu určitej funkcie, ktorá za predpísaných počiatočných podmienok robí určitý integrál minimálnym. Podal (1840) aj kritérium pre rovnomernú konvergenciu radov. S Dirichletovým menom sú spojené aj ďalšie matematické pojmy. Vo funkcionálnej analýze je to: *Dirichletovo jadro*, *Dirichletov integrál*, *Dirichletov problém pre eliptické parciálne diferenciálne rovnice*, *Dirichletov rad*, *Dirichletov vzorec*. Známa je **Dirichletova funkcia** zadefinovaná takto: Ak je  $x$  racionálne číslo, tak  $f(x) = 1$ ; ak je  $x$  iracionálne číslo, tak  $f(x) = 0$ . Táto funkcia je v každom bode nespojitá. Richard Dedekind (1831–1916) vydal (1862) Dirichletove upravené a doplnené prednášky z teórie čísiel pod názvom *Vorlesungen über Zahlenhteorie*.



## Aktívna skromná spomienka

Dúfam, že ľahko uznáte aj trochu všeobecnejší Dirichletov princíp: Ak je viac než  $m \cdot n$  predmetov rozdelených do  $n$  skupín, tak aspoň v jednej skupine je viac než  $m$  predmetov. Skúste vyriešiť úlohu: Medzi ľubovoľne zvolenými piatimi prirodzenými číslami, sú vždy aspoň dve také, že ich rozdiel je deliteľný štyrmi. Ak ste si to niekoľkokrát vyskúšali, zistili ste, že to platí. Skúste ukázať všeobecný postup a urobiť dôkaz tohto tvrdenia.



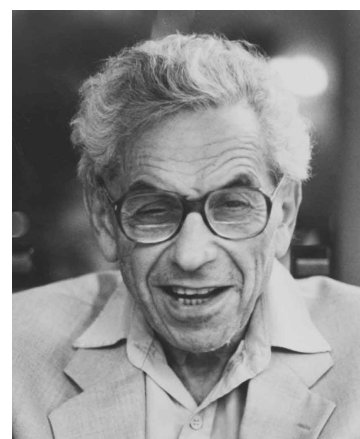
**Peter Lejeune Dirichlet** šíril a spájal vedomosti európskej matematiky, stal sa úspešným nástupcom významných francúzskych i nemeckých matematikov. Bol znamenitý učiteľ s jasnou analýzou problémov i postupov ich riešenia. Aj hudbu vnímal ako podnetnú ideu pre čaro matematiky.

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

## Paul ERDÖS – katalyzátor matematických ideí

### Nezmar spolupráce

Publikoval okolo 1500 matematických prác, väčšinou s spoluautorstve s ľuďmi, s ktorými sa stretol na svojich cestách. Pre okruh spoluautorstva sa zaužívalo označenie Erdösovým číslom. Ak je to číslo 1, tak autor napísal príspevok v spolupráci s P. Erdösom. Ak je číslo väčšie, potom vyjadruje ďalšie vrstvy spoluautorstva so spoluautormi P. Erdösa. Ak autor napísal príspevok s autorom s číslom  $n$ , má Erdösovo číslo  $n + 1$ . Hovorí sa, že 472 matematikov má Erdösovo číslo 1. Z toho 188 autorov publikovalo s Erdösom dva a viac článkov. Zo slovenských matematikov má Erdösovo číslo 1 napr. J. Bosák, P. Horák, J. Širáň, z českých V. Jarník, Z. Hedrlín, J. Nešetřil, V. Rödl. Erdösovo číslo 2 má asi 5000 autorov, z nich je 62 svetoznámych matematikov, dokonca deväť držiteľov Fieldsovej medaily. Asi žiadny matematik doteraz nenapísal toľko vedeckých príspevkov a nemal toľko spoluautorov ako **Paul Erdős** (1913–1996), pútnik neohraničeným svetom matematiky.



Sám priznal, že si matematiku obľúbil vďaka svojej matke, učiteľke základnej školy, ktorá ho zabávala počtárskymi úlohami. Otec ho naučil mnohému v gymnaziálnych rokoch. *Od detstva sa mi na matematike páči veľké množstvo veľmi zaujímavých problémov. Ich riešenie mi oddávna prináša neopísateľnú radosť.* Dvadsaťročný Erdős objavil elegantný dôkaz Čebyševovej vety z teórie čísel. Roku 1949 podal dôkaz vety o prvočíslách elementárnou formou Odvtedy nielen produkoval nečakané nápady a účinné návody ako zdolavať matematické problémy, ale aj videl nové a podnetné matematické otázky a mal schopnosť inšpirovať pre ich riešenie. *Urobme spolu nejaký dôkaz. Tým získate vlastnú skúsenosť.* Matematika bola pre neho svetom fascinujúcich problémov, ktorých riešenie spravuje Boh vo Veľkej knihe najelegantnejších dôkazov.

### Spolužitie s matematikou



**Paul Erdős (26.3.1913 – 20.9.1996)** sa stal nestorom diskkrétnej matematiky. Vyriešil viac matematických problémov než ktokoľvek pred ním. V čase mimoriadnej aktivity vyprodukoval dve vedecké práce mesačne. Existuje až 700 recenzií s jeho podpisom. Ročne sa zúčastňoval desiatok kolokvií a matematických konferencií. Publikoval nové poznatky z oblasti teórie čísel, kombinatoriky, teórie množín, teórie grafov, teórie grúp, teórie pravdepodobnosti, teórie aproximácií i

geometrie. Získal cenu Americkej matematickej spoločnosti (1951) aj Wolfovu cenu (1983). Vždy videl dostatok nevyriešených problémov, netúžil po vytvorení elegantných teórií: *Vyriešenie niektorých otvorených problémov, môže mať pre ďalší rozvoj rozhodne aspoň taký význam ako vypracovanie novej teórie.* Zasypal svet matematiky novými úlohami i pôsobivými riešeniami. Stal sa učiteľom matematickej spolupráce. *Je tak veľa problémov a tak málo času.* Aj po jeho smrti budú vychádzať články s jeho menom ako spoluautorom.



Jeho životný štýl bol neštandardný. Žil ako matematický mních, nomád. Prakticky bez domova, bez majetku, ktorý by užíval, bez rodiny. Vlastníctvo chápal ako príťaž. Schádzaval sa s matematikmi po celom svete, dopisoval si s nimi, diskutoval. Snažil sa nerobiť kompromisy vo vzťahu k sebe, ani vo vzťahu k iným. Získal nezávislosť svetoobčana. *Som natoľko nezávislý, že sa nemusím nikomu zodpovedať za to, čo kedy urobím.*

*Tak prosím, moja hlava je vám k dispozícii.* S kusom papiera a perom ponúkal spoznanie princípov i podstaty matematického sveta. *Viem, že čísla sú krásne. A ak krásne nie sú, tak nie je krásne nič.* Skúmal tajomné vlastnosti prvočísiel, vypisoval ceny za vyriešenie predložených problémov. Ukazoval svoj spôsob vnímania matematických súvislostí, povzbudzoval pre ich odhalenie. Najviac pekných problémov objavil v kombinatorike a teórii grafov. Hovorieval: *Každý nevyriešený matematický problém starší než sto rokov je pravdepodobne problémom teórie čísel.*

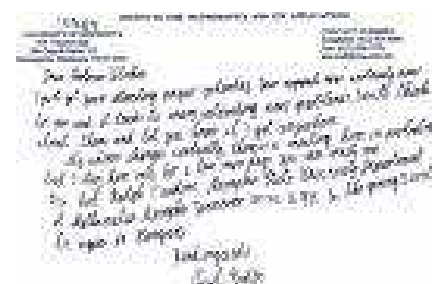


## Rozhodne vzťah k večnosti



Ani používanie elektronických počítačov v súčasnej dobe neuberá na užitočnosti efektívnej matematickej myšlienky. Systematická analýza využitím výpočtovej techniky bude vždy veľmi užitočným metodickým postupom. *Očakávam veľmi výrazný vplyv počítačov a ich výskumu na matematiku... Počítačom vďaka matematika za mnohé svoje naozaj užitočné aplikácie... Počítače výrazne pomáhajú matematike začleniť sa do širšie chápaného kultúrneho povedomia ľudí.* Erdős vycítil, že spoločenská prestíž matematiky vedie cez uplatnenie praktických výsledkov matematických výskumov v iných oblastiach prostredníctvom počítačov.

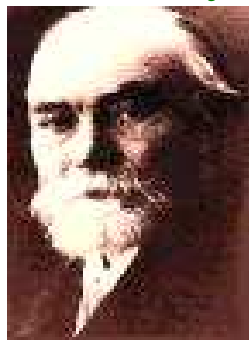
*Všetko je trocha zložitejšie.. niektoré veci nemôže namiesto času rozhodnúť nik... nič nám neostáva, iba byť trpezlivými.* Paul Erdős, posadnutý vznešenou túžbou po matematickej pravde, zanechal aj pre budúce generácie úsudky svojho rozumu, ktoré vedú k hlbšej podstate idealizovaných javov a bezčasových skutočností.



## Gottlob FREGE – nedocenený tvorca rozbúraných základov

### Pojem čísla

Čo vlastne znamenajú čísla? Matematici dokážu iba opísať, ako získame predstavu čísla. Počet nie je niečo, čo môžeme pripísať jednotlivým predmetom. Číselné údaje nie sú výpovede o vlastnostiach, ale o pojmoch. Tým istým predmetom môžeme priradiť rozličné čísla podľa toho, pod aký pojem tieto predmety zahrnieme. Pojmy majú aj tú vlastnosť, že im prislúcha číslo, pričom toto číslo nie je vlastnosťou pojmov. Zdá sa, že tu ide o logiku. Počet možno



vnímať a zdefinovať ako rozsah pojmu. Tu sa však už spája aritmetika s logikou, aritmetické vety by boli odvodeným logickým zákonom. *Aplikácia aritmetiky na vysvetľovanie prírody by bola logickým spracovaním pozorovateľných faktov; počítanie by bolo odvodzovaním.* Formalizáciou aritmetiky na základe rozšíreného predikátového kalkulu, vykročil za základmi matematiky nemecký matematik, logik a filozof **Gottlob Frege (8.11.1848 – 26.7.1925)**.

### O živote a diele

Vyštudoval v Jene, Göttingene, celú svoju akademickú kariéru pôsobil v Jene (r.1873 obhájil matematickú dizertáciu a získal titul doktora filozofie, r.1879 mimoriadny profesor na matematickom ústave univerzity). Nedosiahol významné vedecké uznanie počas svojho života, jeho priekopnícku prácu ocenil až B. Russell aj tým, že poukázal na možné protirečenia v jeho návrhoch. **Frege** sa zaoberal otázkou vzťahu jazyka a skutočnosti, súvislosťami medzi matematikou, logikou, teóriou poznania i psychológiou. Prvé publikované dielo bolo *Pojmové písmo*, formalizovaný jazyk čistého myslenia, zostavený podľa jazyka aritmetiky (1879), s cieľom nájsť prostriedky na prehľadný symbolický postup matematických dôkazov. *Myšlienka pojmového písma má poslúžiť na to, aby sa zaistilo, čo najbezpečnejšie preverenie platnosti reťazca úsudkov.* Zjednotil (zredukoval) jazykové vyjadrenia do prehľadnej štruktúry. Vydal aj práce *Základy aritmetiky*,

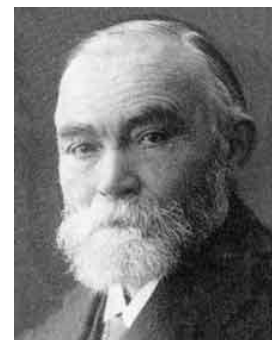


logicko–matematické skúmanie pojmu čísla (1884), *Funkcia a pojem* (1891) i *O pojme a predmete* (1892). Fundamentálnym logickým dielom sa stali dvojzväzkové *Základné zákony aritmetiky, odvodené pojmovým písmom* (1893, 1903). **Frege** sa symbolickou formou pokúsil odvodiť podstatné zákony aritmetiky aj s odpoveďami na základné filozofické i metodologické otázky s tým spojené. Jeho logický znakový systém redukoval aritmetiku na logiku, pojem počtu odvodil z

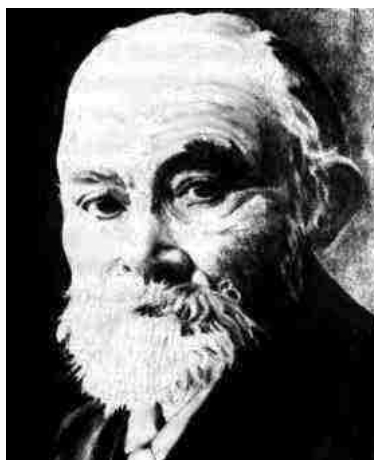
logických pojmov. *Nesmieme zamieňať pravdivosť nejakej vety s tým, že ju myslíme.* V rokoch 1918 a 1923 publikoval trojdielne **Logické skúmania**, ale tu už súčasní odborníci nenachádzajú myšlienkový posun. To, čo sa uznáva je, že **Gottlob Frege** prispel od krízy matematiky k modernej symbolickej logike.

### Formalizácia logiky

Dnes známu klasickú logiku začal predkladať **G. Frege**. Ukázal jasný rozdiel medzi premennými a logickými konštantami, formulami a pravidlami odvodzovania. Zaviedol názov kvantifikátory (pre slová *všetci, každý, niektorý, existuje aspoň jeden*). Zdôraznil, že musíme rozlišovať medzi vlastnosťami vecí a vlastnosťami pojmov s tým, aby boli zaradované na rozličné stupne. Zmiešavanie úrovní vedie k protirečeniam jazyka. Rozlíšením funkcie a jej priebehu upresnil chápanie pojmu funkcia. Vytvoril aj prvý axiomatický systém klasickej logiky. Vybudoval výrokový kalkul ako formalizovanú deduktívnu teóriu. Svojimi úvahami o zmysle a význame sa zaslúžil o neskorší rozvoj logickej sémantiky. Jazyk umožňuje hovoriť o abstraktných predmetoch, teda abstrahovanie možno chápať ako čisté jazykové operácie. **Frege** pripravil základy modernej teórie abstrakcie.



**Gottlob Frege** vyslobodil logické usudzovanie z osídien nejednoznačností jazykových výrazových prostriedkov. Upravil odborné argumentovanie tak, aby vynikla štruktúra dôkazov. *Úlohou každej vedy je odhaľovať pravdu: logike pripadá poznanie zákonov pravdivosti.* **Frege** ovplyvnil aj rozvoj analytickej filozofie, získal si spriaznených nasledovateľov (Russell, Wittgenstein). Alfred Tarski (1902–1983), uznávaný svetoznámy logik, zakladateľ formálnej sémantiky, zhrnul: *Nemecký logik G. Frege je bezpochyby najväčší logik 19. storočia.*



**Gottlob Frege**

November 8, 1848 - July 26, 1925

## Kurt GÖDEL – hranica deduktívnych systémov ľudského poznania

### Už dávno a doteraz



Od prelomu 5. a 4. storočia pred naším letopočtom, kedy žili napr. Eukleides z Megary a Eubulides z Milétu, vieme, že naše jazykové vyjadrenia poskytujú množstvo logických paradoxov. Jednoduché oznámenie „Táto tu napísaná veta je nepravdivá.“, nie je ani pravdivá ani nepravdivá. Odvtedy máme veľa otázok: Môžeš svoju vlastnú reč dokonale opísať svojou vlastnou rečou? Môžeš, ale nie úplne. Môžeš svoj vlastný mozog preskúmať svojim vlastným mozgom? Áno, ale nie úplne. V každom dostatočne obsiahlom systéme možno formulovať vety, ktoré vo vnútri tohto systému nemožno dokázať ani vyvrátiť. K tomu sa dopracovala matematika. Vlastnými prostriedkami spoznala medze svojich možností. Rakúsky matematik a logik **Kurt Gödel** (1906–1978) dokázal, že každý logický systém obsahujúci formalizovanú rekurzívnu aritmetiku je buď sporný alebo obsahuje nejakú nerozhodnuteľnú formulu. Ukázalo sa, že bohatstvo matematických teórií nemožno úplne odhaliť axiomaticky. Systém logických formúl exaktnej matematickej teórie môže vystihnúť iba časť skutočného sveta, ktorý spoznávame ľudskou inteligenciou. Nerozhodnuteľnosť niektorých tvrdení nie je absolútna, ale je viazaná na príslušný systém axióm s danou logikou. Aj keď budeme naďalej skúmať základy matematiky, konštruovať nové systémy axióm i nové dôkazové metódy, ani formalizácia ani axiomatizácia nám však „kameň mudrcov“ neprinesú. Musíme ďalej premýšľať a konať. Stále sa vytvárajúca neistota zostane neodstrániteľnou súčasťou aj v matematike.

### Životné osudy

Rakúsko–Uhorsko bolo mnohonárodnostným štátom. V nemeckej rodine riaditeľa textilky Rudolfa Gödela v Brne sa 28. apríla 1906 narodil druhý syn **Kurt**. Bol usilovným žiakom už na nemeckej základnej škole a s vyznamenaním absolvoval reálne gymnázium v Brne. O matematiku sa začal vážnejšie zaujímať, keď spoznal základné poznatky matematickej analýzy. Na viedenskú univerzitu odišiel s úmyslom prehĺbiť si fyzikálne vedomosti. Ovplyvnili ho však matematické prednášky a začal systematicky študovať základy matematiky i logiky. Doktorát z matematiky dostal roku 1930. Krátko po smrti otca (1929) požiadal o vystaňovanie do Rakúska. Za prácu





***O formálne nerozhodnuteľných vetách v Principia Mathematica a príbuzných systémoch*** (vyšla r. 1931) získal právo vyučovať na vysokých školách (1933). Pôsobil na viedenskej univerzite, ale prednášal striedavo aj v Princetone, New Yorku a Washingtone. Vo Viedni sa oženil (1938) a na pozvanie od O. Veblena natrvalo presídlil do USA (1940), ich občanom sa stal roku 1948. Bol pracovníkom Ústavu pre perspektívne výskumy v Princetone. Profesorom bol menovaný (1953) až potom, keď získal Einsteinovu cenu (1951). Princeton bol pre neho miestom, kde mohol nerušene pracovať na svojich intelektuálnych záujmoch. Okrem dokončených článkov zanechal tisíce stránok poznámok. Zomrel 14. januára 1978 v Princetone na podvýživu a vysilenie z poruchy osobnosti.

### Trvalý význam pozoruhodných objavov



Vo vedeckej oblasti dosiahol **Kurt Gödel** najslávnejšie matematické výsledky 20. storočia. Jeho vety, o neúplnosti formálnej teórie a nemožnosti dokázať bezospornosť formálnej teórie v rámci jej formalizmu, spôsobili zásadné zmeny nielen v logike a vo filozofii matematiky. **Gödel** dokázal, že axióma výberu je nezávislá od ostatných axióm teórie množín (1935–1940). Tiež ukázal, že hypotéza kontinua je bezosporná. Vyriešil Einsteinove rovnice gravitačného poľa (1949), publikoval tri odborné práce o problémoch relativistickej kozmológie.

Predvídal a sledoval problematiku teórie výpočtovej zložitosti. Skúmal a študoval filozofické dôsledky novovybudovaných základov matematiky, logiky aj filozofie vedy (zvlášť sa cítil oslovený intuicionizmom ako zmysluplnou matematickou filozofiou).

### Nefalšovaný platonista

**Kurt Gödel** vedel, že existuje tesný vzťah medzi matematikou a ľudským jazykom. ***Matematika nevyrastá z jazyka, ale jazyk je možný len vďaka matematike.*** Uznával to, že matematika nie je len formálna záležitosť, ale má reálny obsah, je vedou o existujúcich faktoch. ***Som presvedčený, že matematické pojmy tvoria svoju vlastnú objektívnu realitu, ktorú nemôžeme ani stvoriť ani zmeniť, len vnímať a popisovať.*** Matematické výroky nehovoria o časopriestorových materiálnych veciach, ale ich objektívnym obsahom sú vzťahy medzi vlastnosťami idealizovaných pojmov. Neuznával, že matematika je len našim vlastným výtvorom, vyvracal nominalistický názor o tom, že matematika sa skladá iba zo syntaktických konvencií a ich dôsledkov. ***Matematika popisuje mimo zmyslovú skutočnosť,***



*ktorá existuje nezávisle na aktoch aj na dispozíciách ľudskej mysle a je iba vnímaná ľudskou mysl'ou a to vnímaná pravdepodobne veľmi neúplne. Zmyslové podnety i matematické intuície sú dva aspekty objektívnej reality.*

### Možnosti i medze matematiky a logiky

Hlavnou funkciou matematiky (ako každého pojmového myslenia) je dostať pod kontrolu obrovskú rozmanitosť jednotlivostí sveta. Gödel zistil, že aj pojem dokázateľnosti môže byť definovaný aritmeticky, ale v aritmetike nemožno definovať pravdu. Ukázal, že neexistuje všeobecná efektívna metóda s konečným počtom operácií, aby sme mohli všetky formule považovať za dokázané. Matematicky presne môže byť dokázané, že v každom konzistentnom formálnom systéme, ktorý obsahuje určitú časť konečnej teórie čísiel, existujú nerozhodnuteľné aritmetické vety a konzistencia žiadneho takéhoto systému nemôže byť dokázaná v tomto systéme. Samotársky génus ukázal, že ani matematický štandard presnosti a exaktnosti nezabezpečí pre vedu jej konzistentnosť. Ak aj nenachádzame spor, to neznamená, že spor neexistuje. Gödel ukázal, že nie je možná úplná formalizácia nášho poznávania založená na dedukcii zo systému prijatých axióm. Ľudský duch bude asi vždy v reálnej skutočnosti nachádzať svojimi myšlienkovými predstavami také zložité štruktúry, že na ich usporiadanie nebudú úplne stačiť žiadne ním konštruované konečné matematicko-logické formuly alebo filozoficko-metodologické sústavy.



### Len zdanlivý bezbariérový prístup

Mnohé naše myšlienkové problémy vyžadujú často prenikavú filozoficko-metodologickú sústredenosť do hĺbky podstaty a bezchybnú logiku úsudkov i argumentácií. Kurt Gödel ukázal, že úplná formalizácia nášho poznania je ilúziou. *Nikdy nemožno dokázať bezospornosť formálneho systému dôkazovými prostriedkami, ktoré sú v skúmanom systéme formalizované.* Náš poznateľný svet aj s celou jeho matematicko-logickou štruktúrou je myšlienkovovo nevyčerpatelný. Nemáme poistku pred omylmi a spormi. Cez ideály krásy, dobra a pravdy tvoríme a objavujeme stále nové neznáme neuzavreté svety. Večné, nemenné a neotrasiteľné istoty nám stále unikajú v nedohľadne. Matematická kultúra nám ponúka niečo abstraktné, čo je zároveň krásne i užitočné. Parafrazujem s neistým Sokratom: *Usudzujem, že aj to, čo som nepochopil, je krásne.*



## William Rowan HAMILTON – svojrázny talent

### Kvaternióny

Výraz tvaru  $q = a + bi + cj + dk$  nazveme kvaternión, ak  $a, b, c, d$  sú ľubovoľné reálne čísla a nech  $i, j, k$  sú symboly troch imaginárnych veličín. Platí:  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ,  $i \cdot j = k = -j \cdot i$ ,  $j \cdot k = i = -k \cdot j$ ,  $k \cdot i = j = -i \cdot k$ . Po zadefinovaní základných operácií sa dá "vznešene" povedať, že množina všetkých kvaterniónov je reálna štvorrozmerná asociatívna a nekomutatívna algebra s jednotkou, v ktorej ku každému nenulovému prvku existuje inverzný prvok, teda množina kvaterniónov tvorí nekomutatívne teleso. Algebru kvaterniónov stanovil írsky matematik **W. R. Hamilton (4. 8. 1805 – 2. 9. 1865)** v polovici 19. storočia. V jeho zápisníku je zo dňa 16. októbra 1843 poznámka: *Dnes ráno som úvahami došiel k niečomu, čo sa mi javí ako teória kvaterniónov, ktorá asi môže mať zaujímavé rozvinutie.* Pomocou kvaterniónov boli nájdené krásne a matematicky dokonalé vzorce, popisujúce celý rad fyzikálnych javov. Ale nádeje Hamiltona a jeho nasledovníkov na rozvinutie matematiky založenej na kvaterniónoch sa nespĺnili.



### Životné osudy

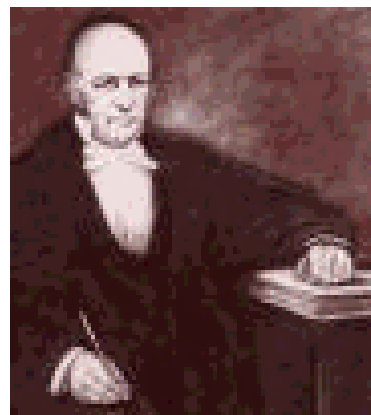


Najmladším zo štyroch súrodencov rodiny právnického úradníka v Dubline bol **William Rowan Hamilton**. Jeho pokrok v učení bol nevídaný. Trojročný vedel dobre anglicky a bol zručný v aritmetike, päťročný čítal a prekladal latinsky, grécky, hebrejsky. Osemročný vedel po taliansky a francúzsky. Neskôr sa naučil aj arabsky, perzsky, bengálsky, čínsky a sanskrit. A to nie je úplný výpočet jazykov, ktoré ovládal. Vo veľmi mladom veku prečítal Euklidove *Základy*, vedel Homérove verše spamäti, sám skladal básne. Šestnásťročný študoval *Nebeskú mechaniku* od Laplacea a našiel v nej chybu. Pred tým, než sa zapísal na univerzitu nenavštevoval žiadnu inú školu. Celé vzdelanie získal od nadaného strýca a samoštúdiom.

Po skončení štúdia na univerzite sa stal roku 1827 kráľovským astronómom Írska. V tejto funkcii vydržal po celý život, napriek nešťastnému manželstvu a náchylnosti k pitiu alkoholu. Tridsaťdvaročný sa stal prezidentom Írskej kráľovskej akadémie. Skromný a zbožný **Hamilton** sa nestaral veľmi o svoju vedeckú povesť ani o domácnosť. Posledné dni svojho života prežil ako samotár. Na hrobe chcel mať motto svojho astronomického učiteľa Hipparcha: *Muž, ktorý miloval prácu a pravdu.*

### Vo vzťahu k vede

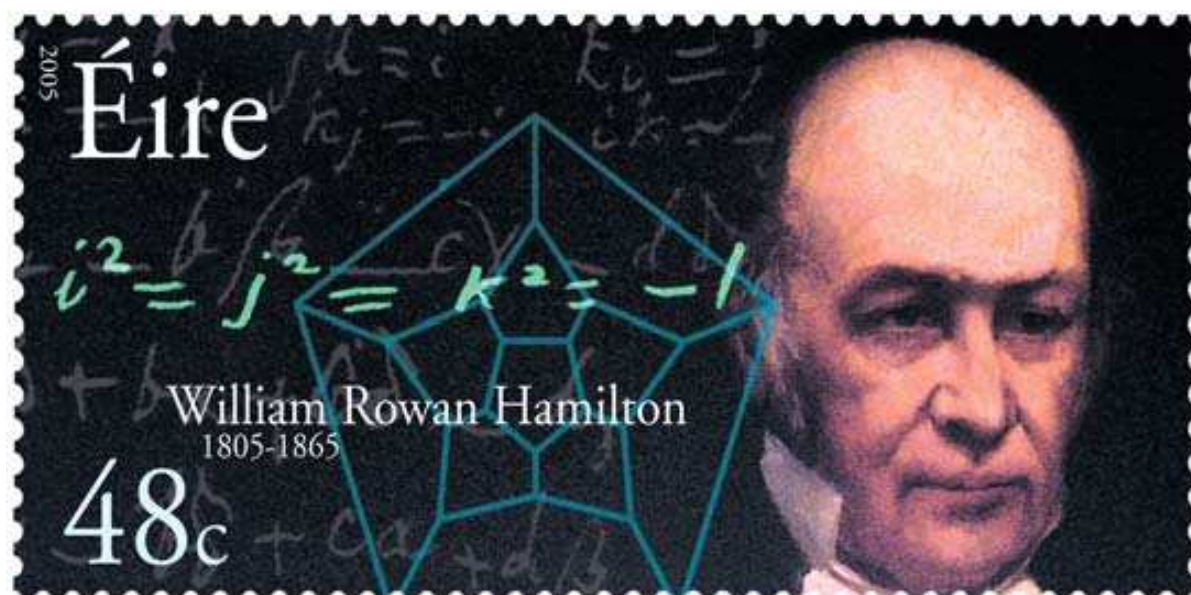
**Hamilton** napísal viac ako 140 vedeckých prác. Zaoberal sa optikou, mechanikou a aplikáciami variačného počtu. Pracoval aj v oblasti matematickej analýzy, algebry a matematickej fyziky. Známy je aj Hamiltonov princíp najmenšieho účinku. Jeho meno nesú určité typy diferenciálnych rovníc a funkcií. V rokoch 1843–1865 študoval kvaternióny a rozvinul systematickú prácu dublinskej školy matematikov o tejto problematike. Napísal *Čítanie o kvaterniónoch* (1853), *Prvky kvaterniónov* (1866). Zaviedol pojem *vektor* (1847) a podal formálne presný výklad komplexných čísel (1835–1837). Aritmeticky ich vysvetlil a tak odstránil všetko, čo sa zdalo záhadné a tajuplné na tých "podivných" matematických výrazoch.



### Prístupný nadšeniu



Opojenie básňami, filozofiou, ale niekedy aj alkoholom, nezničili rozvinuté logické myslenie tohto svojhlavého génia. **William Rowan Hamilton** je zapísaný medzi významných predstaviteľov modernej matematiky.



## Gustave CHOQUET – matematik s intuíciou básnika

### Osudy života

Dedičstvo zo strany otca i matky mu prinášalo ideál intelektuálneho i morálneho života. Jeho otec žil fyzickou prácou i hudbou v miestnej kapele. Matka mala rada kvety v záhrade a záľubu v poézii. **Gustave (\*1.3.1915)** získal sklon k sneniu a spájaniu rôznorodých myšlienok. Už v základnej škole prebral vášeň svojho výnimočného učiteľa pre experimentovanie a pozorovanie prírodných javov. Na gymnáziu si obľúbil geometriu, mal dobrú vizuálnu pamäť i schopnosť predstavivosti aj abstrakcie. Kurz analýzy a mechaniky so základnou matematikou ho očaril až tak, že ho neskôr označil za rozhodnutie robiť matematiku po celý život. Vyštudoval (1934–38) parížsku École Normale Supérieure a potom odišiel ako štipendista na rok do Princetonu, kde navštevoval aj prednášky prof. Churcha. **Choquet** sa v januári 1941 oženil (a neskôr, roku 1961, aj druhý raz; s prvou manželkou mali tri a s druhou dve deti). V rokoch 1941–1946 vedecky pracoval (hlavne v teórii miery, v teórii potenciálu, v diferenciálnej geometrii a teórii kriviek), obhájil dizertačnú prácu a získal doktorát. V rokoch 1946–1947 pôsobil v Krakove a potom (1947–1949) v Grenobli. Stal sa úspešným vysokoškolským učiteľom (profesor na Université de Paris 1952–1984, aj na École Polytechnique 1965–1969). Pôsobil v USA, v Anglicku i v Austrálii. Navštívil Čínu, Afriku, Kóreu i Japonsko. Zomrel 14. novembra 2006.

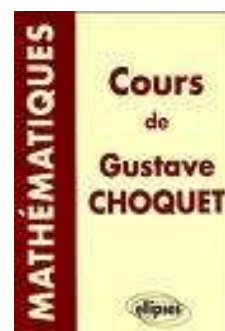


### Vedecké úspechy



Matematik **Choquet** napísal viac než 150 vedeckých pojednaní, 7 monografií a celý rad učebníc. Stal sa uznávaným odborníkom hlavne v teórii zovšeobecnených kapacít i v oblasti integrálnej reprezentácie konvexných množín. Otvoril nové cesty pre matematické myslenie v oblasti teórie potenciálu a pravdepodobnosti. Jeho meno nesú aj niektoré pojmy: *Choquetova teória*, *Choquetova kapacita*, *Choquetov integrál*, *Choquetova hranica*, *Choquetov simplex*.

Profesor **Gustave Choquet** bol úspešný aj svojimi odbornými prácami z reálnych a komplexných funkcií, variačného počtu, geometrie a jej didaktiky, teórie grafov, teórie čísiel, teórie chaosu. Pozorne a primerane hlboko vedel vystihnúť aj teóriu i prax duševných procesov pri tvorivej matematickej práci. Bol známy ako vynikajúci prednášajúci, ktorý vychoval desiatky významných matematikov a svojimi odbornými i didaktickými prácami ovplyvnil aj ďalších matematikov i učiteľov



matematiky možno aj na celom svete. *Matematici by mali sprístupňovať svoje rozvinuté inšpirácie a vedieť písať matematiku pre ľudské bytosti.*

### Ocenenia aj pocty



Profesor **Gustave Choquet** patril medzi najvýznamnejšie postavy povojnovej svetovej matematiky. Jeho objavy ovplyvnili mimoriadnym spôsobom rozvoj matematickej kultúry. Za svoje odborné matematické práce získal ceny parížskej Akadémie vied (1945, 1951, 1956, 1968) a stal sa jej riadnym členom (1976). V rokoch 1950–1962 bol prezidentom *Medzinárodnej komisie pre výskum a zlepšenie výučby matematiky*. V roku 1966 získal vo Francúzsku zvlášť uznávaný titul *Rytier čestnej légie*. V roku 1946 navštívil aj Prahu, neskôr umožnil matematikom Karlovej univerzity [ale napr. na študijnom pobyte u neho bol (1979–80) aj I. Trenčanský z Bratislavy] pracovať v Paríži, prednášal a debatoval na letných školách v Čechách (1993, 1994, 1997). Karlova univerzita v Prahe mu udelila (2002) za mimoriadne celoživotné dielo v matematike čestný doktorát fyzikálno–matematických vied.

### Cesta k objavom

*Matematika a poézia majú podľa mňa mnoho spoločného v ich inšpirácii a výstavbe.* Aj profesor **Choquet** vo svojom vedeckom úsilí zistil, že neexistuje žiadna spoľahlivá metóda, ktorou by sa človek naučil objavovať. *Objavovanie v matematike, napriek udivujúcej podobnosti s cestou k objavom v experimentálnych vedách, v umení, v poézii alebo filozofii, má svoje špecifiká.* O týchto vlastnostiach spojených s matematickými disciplínami písal H. Poincaré (1854–1912), J. Hadamard (1865–1963) aj **G. Choquet** (1915–2006), významní francúzski matematici. *Pre študenta začínajúceho s vedeckou prácou znamená prvý vlastný výsledok nádherné odhalenie toho, čo znamená objavovať a ako s tým zachádzať... Každý sa musí k tomuto tajomstvu prepracovať sám. Gustave Choquet prežil so svojou matematickou vedou hlboké duchovné zážitky: Podstata mojej existencie bola sústredená na matematické bádanie... Z vlastnej skúsenosti viem, akú hlbokú radosť prináša vedecký život.*



### Z názorov a myšlienok

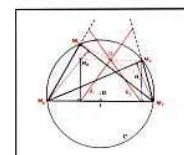
Uvedieme aspoň útržkovité poznámky, ktoré môžu naznačiť niektoré didaktické a motivačné predstavy profesora Choqueta:

- *Demokracia znamená dať každému, čo potrebuje a priviesť ho tak vysoko, ako sa len dá.*
- *Škola musí byť schopná poskytnúť rozdielnym typom detí rozdielny prístup.*

- *Vyučujúci musí najprv vec ukázať a potom o nej hovoriť... človek sa formuje na základe vzorov... Vyučovanie sa nesmie vzdávať od toho, čím nás oslovujú zmysly.*
- *Človek sa formuje na základe vzorov – od dobrého učiteľa, dobrý žiak.*
- *Ľudský duch je určite veľkolepý, ale slabý a potrebuje oporu: pozorovanie a experimentovanie... Duch ovláda a vysvetľuje skúsenosť, ale duch sám je výsledkom skúsenosti.*
- *Neprehliadajme tvorivú úlohu geometrických úvah a dôležitosť geometrickej indukcie... Rozvíjame ju a upevňujeme bezprostredným kontaktom s jednoduchými geometrickými objektmi.*
- *Študenti nevidia matematiku ako celok, netušia, prečo sa čo zavádza, prečo sa veci robia práve takto a aké sú aplikácie.*
- *Moja práca je založená na intuícii. Som básnik... Vidím veci, ich geometrickú podstatu... Som intuitívny typ a som geometer.*
- *Príliš formalizovaný výklad určitej teórie neposkytuje žiadnu predstavu o zdrojoch duchovnej činnosti matematika, ako je pozorovanie, matematizácia, riešenie problémov v rámci vytvoreného modelu, návrat k pôvodnému nápadu, zovšeobecnenie a aplikácia.*
- *Najdôležitejšia je vlastná aktivita žiaka. Človek sa nenaučí robiť matematiku počúvaním brilantných výkladov na vyučovacích hodinách, ale samostatnou prácou s matematickými pojmi.*
- *Čítať je veľmi dôležité. Nielen počúvať prednášky, ale aj sám čítať – články aj knihy.*
- *Vedieť vysvetliť vec tak, aby bola pochopiteľná, je veľmi ťažké.*
- *Úspech pri bádání vyžaduje vedľa veľkej dávky sústredenia aj úplnú slobodu ducha.*
- *Zdá sa mi, že Miluj bližneho svojho je najkrajšie prikázanie, ktoré bolo človeku dané.*

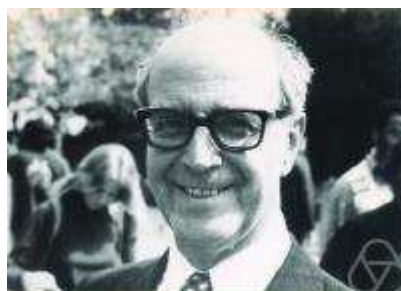
GUSTAVE CHOQUET

### L'enseignement de la géométrie



ENSEIGNEMENT DES SCIENCES

Profesor **Gustave Choquet** patril k tým matematikom, o ktorých platia slová známeho matematika – bourbakistu André Lichnerowicza (21.1.1915–11.12.1998): *Svedectvo vynikajúcich matematikov o cestách k objavom sú vzácne a cenné, a to nielen pre samotných matematikov, ale tiež pre všetkých, ktorí sa zamýšľajú nad kľukatými cestami, ktoré vedú ku konečnému odhaleniu pravdy.*



## IZIDOR zo Sevilly – encyklopedista raného stredoveku

### Význam nielen pre Španielsko

Na Pyrenejskom polostrove poznajú skoro všetci ľudia osud človeka s menom **Isidoro de Sevilla** (asi 560/70–636). Tento španielsky učenec, teológ, filozof, polyhistor a encyklopedista sprostredkoval začiatkom stredoveku pre túto zem antické vzdelanie. Zhromažďoval, spracúval a spisoval naučné, náboženské i historické pojednania. Vychádzal z pôvodného významu slov, zozbieral základné poznatky oživej i neživej prírode, o udalostiach Starého i Nového zákona. Zaslúžil sa o záchranu podstatných starovekých kultúrnych hodnôt, prispel k udržaniu ľudskej múdrosti v toku dejín, vytváral intelektuálny most od patristiky k stredovekej civilizácii „na česť a slávu Božiu“. Zosúladiť svoj život v rovnováhe medzi aktívnym občianskym (milovať blížneho v skutkoch) a kontemplatívnym (dialóg s Bohom v modlitbe) životom.



### Život siroty

Už v detstve mu zomreli obaja rodičia (významná španielsko–rímska rodina) a tak sa o neho staral o veľa rokov starší brat Leander. **Izidor** často študoval staré spisy v kláštornej knižnici. Zvolil si duchovné povolanie. Roku 599 bol zvolený za biskupa. Svojím kresťanským životom ponúkal sebazapieranie i poníženosť. S pokorou vykladal základné pravdy katolíckej viery. Podporoval budovanie škôl, pestoval dobročinnosť. Vystupoval aj na synódach miestnej cirkvi v Seville a v Toledu, vysvetľoval liturgické praktiky, mníšsku tradíciu i základné odpovede na morálne problémy. Po mnohých rokoch služby sa pokorne rozlúčil s tými, ktorým ukazoval cestu za zmysluplným kresťanským životom. Po smrti (4. apríla 636) získal úctu španielskeho ľudu i označenie cirkevného učiteľa (1722).

### Vysvetľovať od základu



V histórii ľudstva boli, sú a možno aj budú veľmi obľúbené stručne formulované „základné vety“, sentencie z diel význačných osobností. Jednou z prvých uznávaných zbierok duchovného dedičstva otcov a najväčším literárnym dielom Izidora Sevilského je 20–zväzková encyklopédia *Etymologiae* (Origenes; počiatky). *Znalosť etymológie je často nevyhnutná pre výklad slov. Ak poznáš, aký je pôvod slova, pochopíš skôr jeho význam.* Táto práca obsahuje prehľad vtedajších náboženských i svetských vedomostí, je možno prvou



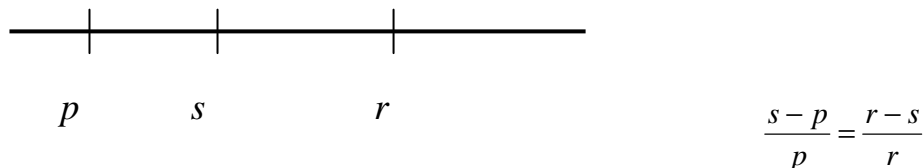
svetovou encyklopédiou. Bola pomôckou pre pamäť a útechou pre dušu. Poukazovala na spojenie slov a ich zmyslu, dôležitosť pomenovania aj s jeho významom, vytvorenie správnej predstavy o skutočnej veci alebo jave.

### Aj matematická kultúra

Tretia časť spomínaného diela je venovaná matematike: *Matematika je teoretická veda, ktorá má za svoj predmet abstraktné množstvo. Abstraktné množstvo je to, o ktorom pojednávame iba uvažovaním, oddeľujúc ho rozumom od látky... Skrz číslo sa učíme nedat' sa zmiatnuť'. Ak odstrániš zo všetkého číslo, všetko zanikne. Odober ľudstvu počítanie a všetko zachvátí slepá nevedomosť a nebude možné odlišit' človeka od ostatných živočíchov.*

Možno vás zaujme ako **Izidor** uviedol definície priemerov dvoch čísiel, to znamená ich *aritmetický*, *geometrický* a *harmonický* stred: *Rozdiel medzi aritmetikou, geometriou a hudbou je v spôsobe ako sa v nich hľadajú stredy. V aritmetike ich hľadáš takto: sčítaš krajnosti a rozdelíš to na polovice... Podľa hudby hľadáš stred takto: Akým pomerom stred prevyšuje prvé, tým istým pomerom je stred prevýšený posledným... Podľa geometrie hľadáš stred takto: vynásobíš krajnosti a výsledok je ako keď sa vynásobia stredy...*

Dnešný zápis a príslušná definícia by sa dala zapísať takto: Nech prvé je  $p$ , posledné  $r$  a prostredné so zmienou vlastnosťou je  $s$ . Potom platí (sleduj obrázok):



$$\frac{s-p}{p} = \frac{r-s}{r}$$

Pomer prevýšenia prvého ( $p$ ) stredom ( $s$ ) {teda  $s - p$ } k prvému ( $p$ ) {teda  $\frac{s-p}{p}$ }

je taký istý ako pomer prevýšenia stredom ( $s$ ) posledným ( $r$ ) {teda  $r - s$ }

k poslednému ( $r$ ) {teda  $\frac{r-s}{r}$ }. Po úprave vzťahu  $\frac{s-p}{p} = \frac{r-s}{r}$  dostaneme:

$$r - p \cdot r = r \cdot p - p \cdot s \Rightarrow s \cdot (r + p) = 2 \cdot r \cdot p \Rightarrow s = \frac{2pr}{p+r}$$

a to je náš *harmonický priemer* čísel  $p, r$ , teda prevrátená hodnota aritmetického priemeru prevrátených hodnôt, to znamená  $\frac{2}{\frac{1}{p} + \frac{1}{r}} = \frac{2pr}{p+r}$ .

Z hudby cez *harmonický stred* vnímame náš *harmonický priemer*.

## Hodnoty poznania i morálky



Svojím životom i dielom (napr. *Kronika* – snažil sa historicky zachytiť všetko od stvorenia sveta do roku 615, *O prirodzenosti vecí* alebo *O slávnych mužoch*, spracoval aj dejiny Vizigótov) ovplyvnil **Izidor zo Sevilly** celý nasledujúce obdobie stredoveku. Ukázal, že zmysluplné štúdium a pravdivé svetské vedomosti prispievajú aj k trvalým kresťanským hodnotám. *Každý pokrok pochádza z čítania a rozjímania. Čo nepoznáme, naučíme sa čítaním, čo sme sa však už naučili, rozjímaním si zachováme...* Ponúkal dialektiku ako náuku o výklade príčin vecí a javov. Logiku chápal ako podstatnú rozumovú schopnosť definovať, skúmať a vykladať, formou rozpravy rozoznávať pravdivé od nepravdivého. Jeho ústredné literárne dielo, v ktorom zhrnul súdobé filozofické i teologické poznatky, patrilo k pokladom kláštorných knižníc a zachovalo sa z neho asi tisíc exemplárov. *Ak chce byť niekto stále s Bohom, musí sa často modliť, ale tiež často čítať.* Zapísal sa medzi tých, ktorí prispeli k rozvoju západnej civilizácie.

## Porovnanie a pripomienky

V dejinách ľudskej civilizácie bol neobyčajne osobne vzdelaný **Izidor zo Sevilly** porovnávaný v myšlienkovom vzlete s Platónom, v poznaní s Aristotelom, v rečníctvom s Cicerom, vo vyučovaní s Augustínom. Nezatracoval nič z toho podnetného, čo priniesli dejiny pohanstva, židovstva i kresťanstva. V histórii bol často považovaný za najvýznamnejšie učenca svojej doby, za rozširovateľa antického poznania, za jedného z veľkých učiteľov stredoveku, za úspešného mysliteľa ranej patristiky. V súčasnej dobe je považovaný za patróna užívateľov internetu a počítačových programov.



## Camille JORDAN – profesiou inžinier, povolaním matematik

### Záhady kriviek

Čo je rovinná krivka, čo je to čiara? Možno najprirodzenejšia je predstava, že krivka je trajektória spojito sa pohybujúceho bodu. Matematici sa dohodli: Nech pre súradnice pohybujúceho sa bodu  $[x, y]$  v závislosti od časového okamžiku  $t$  ( $t \in \langle 0,1 \rangle$ ) platí  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  tak, že  $f, g$  sú spojité funkcie v  $\langle 0,1 \rangle$ . Takéto čiary nazvali Jordanovými krivkami. Francúzsky matematik **Camille Jordan** (1838–1922) dokázal, že takáto uzavretá krivka, ktorá sama seba nikde nepretína, rozdelí celú rovinu na dve časti. I keď sa toto tvrdenie zdá veľmi jednoduché, na správny matematický dôkaz sú potrebné zložité a jemné úvahy. Neskôr sa ukázalo, že Jordanova definícia krivky zahrňuje nielen čiary, ale aj iné obrazce a útvary, ktoré by asi nikto nenazval krivkami. Taliansky matematik G. Peano (1858–1932) ukázal, že existuje krivka (v zmysle Jordanovej definície), ktorá prechádza všetkými bodmi štvorca. Teda štvorec (nielen obvod, celý štvorec aj s vnútornými bodmi) splňa definíciu Jordanovej krivky. Naša intuitívna predstava o krivkách nám odpoveď na otázku „Čím sa odlišuje krivka od plochy?“ ešte nedala. Nemecký matematik G. Cantor (1845–1918) ponúkol svoju definíciu rovinnej krivky. Ruský matematik P. S. Uryson (1898–1924) zodpovedal na otázku „Čo je rozmer geometrického útvaru?“ v teórii dimenzie z roku 1922.

### Jednoduchá niť života

**Camille Jordan** sa narodil 5. januára 1838 v La Croix – Rousse pri Lyone. Vyštudoval École Polytechnique v Paríži, ale aj Vysokú banskú školu a stal sa inžinierom (1861). Doktorát prírodných vied dostal (1860) za matematické práce. Ako inžinier pracoval v rokoch 1861–1873. Potom začal učiť na parížskej polytechnike a vydržal tam 40 rokov. Oženil sa roku 1862, mal dve dcéry a šiestich synov (traja z nich zomreli v následkoch 1. svetovej vojny). Jeho súkromný život bol až asketický, i keď bol vlastníkom hotela na predmestí Paríža, mal v ňom iba jednu izbu. Zomrel 21. januára 1922.



### Profesor matematiky



V roku 1876 sa **Jordan** stal vysokoškolským profesorom matematickej analýzy, od roku 1883 bol aj profesorom na Collège de France. Viac než 35 rokov (1885–1921) bol nielen úspešným redaktorom časopisu pre čistú i aplikovanú matematiku, ale veľa aj sám v časopisoch publikoval. Roku 1881 bol zvolený za člena Akadémie vied, jej prezidentom bol od roku 1916. Ocenenie Čestnej légie získal roku



1890. Na medzinárodnom matematickom kongrese v Štrasburgu (1920) bol honorárnym prezidentom.

### Úspechy v matematike

Vo svojej práci *Pojednanie o substitúciách a algebraických rovniciach* (1870) vyslovil základy teórie konečných grúp. Poznatky uplatnil pri štúdiu mnohostenov a v kryštalografii. Táto rozprava bola prvou knihou o teórii grúp. **Jordan** za ňu získal Ponceletovu cenu od Akadémie vied. Nové predstavy o klasifikácii grúp euklidovských transformácií v trojrozmernom priestore ovplyvnili aj tvorbu S. Lie a F. Kleina.



V troch zväzkoch vydaný *Kurz analýzy* (1882–1887) prispel k spresneniu základov matematickej analýzy i k odhaleniu nových ideí (Jordanova miera množiny, Jordanova veta o krivke). Úspechom bolo aj úspešné Jordanovo zovšeobecnenie kritérií pre konvergenciu Fourierových radov.

### Čas spomienok



Meno **Camille Jordan** zostane natrvalo spojené s matematickými výsledkami teórie funkcií, topológie, geometrickej pravdepodobnosti i riešením diferenciálnych rovníc. **Jordan** rozvinul a systematizoval metódy riešenia grúp i teórie čísel. Často vznikajú nedorozumenia s použitím mena **Jordan**, lebo toto meno je spojené aj s úspechmi menovcov Wilhelma Jordana (1842–1899) a Pascuala Jordana (1902–1980). **Marie Ennemond Camille Jordan** ukázal teoretickú i praktickú užitočnosť svojich abstraktných matematických predstáv v rôznych oblastiach modernej matematiky. Inžinierska prax nezabránila jeho vedeckej matematickej činnosti.



## Felix KLEIN – zjednotiteľ geometrií

### Aj matematika sa rozvíja

Ideálom určitej časti antickej matematiky bolo deduktívne odvodenie matematiky z určitých základných predpokladov. Z uvažovania o dejinách matematiky vyplýva, že jej ideálne požiadavky sa vyvíjajú s pokrokom vedy. Je zaujímavé pozorovať ako súčasníci vždy veria, že v tomto smere urobili čo najviac a ako ich potom budúce generácie vo svojich požiadavkách a výkonoch prekonajú. To sa stalo Euklidovi i Gaussovi. Zdá sa, že v tomto smere nie je vývoj ohraničený, lebo tak to už pri tvorivej vynachádzavosti býva. Nemecký matematik **Felix Klein (1849–1925)** týmito slovami naznačil, že matematická veda sa zo zásady nemôže uspokojiť s dosiahnutým stavom.

### Jednoduchý životný príbeh

**Felix Klein** prišiel na svet v nepokojnej dobe revolučných bojov 25. apríla 1849 v Düsseldorfe, v rodine štátneho úradníka. Prvé vedomosti získal od svojej neobyčajne vzdelanej matky. Základnú školu navštevoval iba dva a pol roka. V osemročnom humanistickom gymnáziu neboli predmety matematika a prírodné vedy v strede záujmu. Aj tak sa samoštúdiom práve tu naučil vedecky pracovať – pretože chcel a vedel študovať. Šestnásťročný odišiel na univerzitu do Bonnu. Keď sa stal asistentom J. Plückerera jeho záujem o matematiku a fyziku podstatne vzrástol. Promoval u R. Lipschitza v decembri roku 1868. Študijný pobyt v Paríži (1870) prispel k spolupráci s nórskym matematikom Sophusom Lie. **Klein** úplne pochopil neeuklidovskú geometriu i zásadný význam pojmu grupa v geometrii. V roku 1872 bol povolaný za riadneho profesora matematiky na univerzitu v Erlangene. Pôsobil aj na Vyššej technickej škole v Mníchove, na univerzite v Lipsku. Od roku 1888 bol profesorom na univerzite v Göttingene. Do výslužby odišiel v roku 1913. Zomrel 22. júna 1925 v Göttingene.



### Erlangenský program



Úvodná prednáška 23-ročného matematika na univerzite v Erlangene (1872) sa stala významným zhrnutím i náčrtom perspektív pre rozvoj geometrie. **Klein** odhalil vnútorné súvislosti medzi jednotlivými odvetviami matematiky, ktoré umožnili nové netradičné prístupy pre riešenie viacerých problémov. V tom čase bola matematika vo víre nových geometrických teórií (Lobačevskij, Cayley, Grassmann, Möbius, Monge, Poncelet, Steiner a ďalší). Chýbal spoločný

jazyk, univerzálny uhol pohľadu. **Klein** charakterizoval geometriu ako súhrn vlastností priestoru, ktoré sú invariantné vzhľadom na grupu lineárnych transformácií uvažovaného priestoru. Tým usporiadal existujúce geometrické teórie a určil program ďalšieho rozvoja celej geometrie. Neskôr definíciu geometrie ešte zovšeobecnil francúzsky matematik Elie Cartan.

### Vedec i redaktor



**Felix Klein** zavŕšil „zlatý vek“ geometrie. Vytvoril model Lobačevského geometrie, dokázal tam bezospornosť neeuklidovskej geometrie. Pracoval aj v oblasti teórie funkcií, teórie transformácií a teórie algebraických rovníc. Jeho tvorivá činnosť v oblasti teoretickej matematiky skončila v roku 1882. Neustala však práca aplikačná, pedagogická a organizačná. Na mníchovskej technike pochopil dôležitosť uplatnenia matematiky a fyziky v priemysle. Prehľbil niektoré myšlienky v matematickej fyzike, hlavne v teórii potenciálu. Tu získal podnety k štúdiu tzv. automorfných funkcií komplexnej premennej. **Klein** bol od roku 1876 skoro 40 rokov redaktorom *Mathematische Annalen*, jedného z najznámejších matematických časopisov. Redigoval aj objemnú *Encyklopédiu matematických náuk*. V roku 1893 sa zúčastnil matematického kongresu v Chicagu. Pred prvou svetovou vojnou organizoval Medzinárodnú komisiu pre výučbu matematiky. Záujem o vyučovanie matematiky bol u neho obdivuhodný. Tomuto problému sa dovtedy nevenoval žiadny matematik takéhoto formátu. Jeho prednášky určované vývojom matematiky 19. storočia sú dodnes využívané. **Klein**, matematik širokých záujmov vo svojej vede, dokázal z historického vývoja získať poučenie pre pochopenie celistvosti matematiky. Spoznal, že vedecky učiť znamená priviesť človeka k tomu, aby vedecky myslel.



## Joseph Louis LAGRANGE – dôsledný analytik

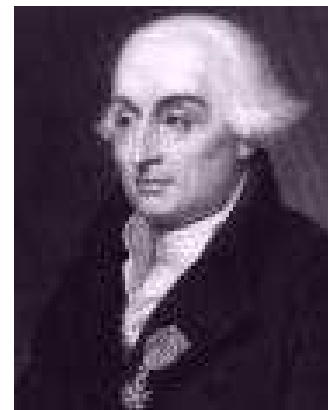
### Nestínať vzácne hlavy

Do víru spoločenských revolúcií sa niekedy dostanú i vedci, ktorí často zostávajú bokom od politického života. Za francúzskej revolúcie odsúdil v Paríži revolučný tribunál na smrť významného chemika a fyzika A. L. Lavoisiera. Jeho popravu (8.5.1794) smutne komentoval uznávaný matematik **J. L. Lagrange (1736–1813)** slovami: *Stačil moment, aby odsekli hlavu, ale možno nepostačí ani sto rokov, pokiaľ sa objaví podobná.*

### Zo služobných pomerov

V životopisoch sa často uvádza, že **Joseph Louis Lagrange** mal francúzsko-taliansky pôvod. Narodil sa v Turíne 25. januára 1736 ako najstarší z jedenástich detí. Jeho pradedko prišiel z Francúzska a bol v službách savojského kráľa Karola Emanuela II. Lagrangeov starý otec slúžil ako vojak v Taliansku, otec bol vojenským pokladníkom, ale jeho rodina bola chudobná. Neskôr, keď bol **Lagrange** už známym matematikom, povedal: *Keby som bol bohatý, nedosiahol by som pravdepodobne svoje postavenie v matematike.*

**Lagrange**, v mladosti používajúci v Taliansku meno **Lodovici Lagrangia**, tak horlivo študoval na delostreleckom učilišti v Turíne, že sa už ako 19 ročný stal učiteľom matematiky na tejto škole, i keď bol mladší ako väčšina jeho prvých študentov – budúcich ofíciov. Hneď na začiatku svojej vedeckej činnosti **Lagrange** vytvoril skupinu mladých matematikov a fyzikov, ktorí uverejňovali svoje práce vo vlastných zborníkoch. Dušou turínskeho krúžku bol sám **Lagrange**. Najprv študoval vlastnosti zvuku (spis *O podstate a šírení zvuku*, 1759). Zistil nové metódy integrácie a hľadania extrémov funkcií. Tieto výsledky oznámil Eulerovi, ktorý ich ocenil návrhom, ešte len 20 ročného, Lagrangea za člena Berlínskej akadémie. V roku 1764 **Lagrange** vyhral cenu Parížskej akadémie za teoretické práce o pohybe Mesiaca. Celkove získal 5 prémií tejto akadémie vied.



### Krátko v Paríži, dlho v Berlíne

Veľmi podnetným a šťastným obdobím jeho života bol polrok strávený roku 1766 v Paríži. Vtedy sa osobne zoznámil s d'Alembertom, Clairautom, Condorcetom. Samotársky a skromný **Lagrange** spoznal účinnosť priamych kontaktov medzi vedcami. V novembri roku 1766 prišiel na pozvanie pruského kráľa Fridricha II. do Berlína, aby nastúpil na miesto Eulera za riaditeľa matematickej sekcie Akadémie vied. V pozvaní sa hovorilo že ... *je potrebné, aby najväčší matematik Európy žil v blízkosti najväčšieho kráľa.* Tridsaťročný **Lagrange** bol už vyzretým matematikom. V Berlíne prežil skoro 21 rokov. Boli

najproduktívnejším obdobím jeho života. Nehýril dvorným životom, ale svoj čas obetoval vede: *Zaoberám sa štúdiom matematiky v klude a tichosti. Pretože ma nič a nikto nenaháňa, pracujem viac pre svoje potešenie ako z povinnosti, staviam, búram, prestavujem až dovtedy kým dostanem niečo, s čím som aspoň trochu spokojný.*

### Rozvážne užitočné premýšľanie

Matematika bola jeho vášňou. Zaplnila mu celý život, priniesla mnoho radostných chvíľ. **Lagrange** založil (1797) pojem derivácie na mocninových radoch, po ňom je pomenovaná známa veta základov matematickej analýzy o existencii bodu, v ktorom má spojitá funkcia deriváciu určitej vlastnosti. S Lagrangeovým menom je spojený aj istý interpolačný polynóm. Vyriešil zaujímavé problémy analytického variačného počtu, vytvoril metódy pre separáciu reálnych koreňov algebraickej rovnice a ich aproximáciu reťazovými zlomkami. Študoval racionálne funkcie koreňov rovníc a ich správanie sa pri permutáciách koreňov. Zaoberal sa dôvodmi, prečo úspešné metódy riešenia algebraických rovníc nižšieho stupňa ( $n \leq 4$ ) sú pre vyššie stupne neúspešné. Na tieto výskumy neskôr nadviazal Ruffini, Abel i Galois. Nastúpená cesta vyústila do zrodu teórie grúp. **Lagrange** dosiahol upevnenie základov diferenciálneho a integrálneho počtu, prispel k rozvoju teórie determinantov a matic, teórie pravdepodobnosti, aritmetiky i algebry. V teórii čísel dokázal, že každé prirodzené číslo možno napísať v tvare súčtu najviac štyroch štvorcov, t. j. druhých mocnín iných čísel. Naznačil veľa nových matematických pojmov, napr. pojem grupy, invariantu, trojný integrál, primitívna funkcia a podobne. Skúmal zákon skladania síl pôsobiacich v rovnakom bode. Formuloval zásady klasickej mechaniky, výsledky svojich prác aplikoval na problémy dynamiky.



### Zmierení aj s ocenením

V roku 1787 odišiel **Lagrange** do Paríža, kde bol (1772) prijatý za akademika a vysoko uznávaný vo vedeckých kruhoch. Od panovníka Ľudovíta XVI. dostal penziu a byt v Louvri. Uverejňoval výsledky predchádzajúcich matematických a fyzikálnych štúdií, napr. *Analytická mechanika* (1788), písal učebnice. Zaoberal sa filozofiou, chémiou, históriou i medicínou. Ani revolučné roky vo Francúzsku (1789–1794) neotriasli jeho pozíciou. Bol „Cheopsovou pyramídou vedy“. Stal sa profesorom na École Normale (1795) aj École Polytechnique (1797). Lagrangeove zobraté spisy z matematiky, astronómie a mechaniky obsahujú 14 zväzkov. Prispel aj k reforme mier a váh. Za Napoleonovej vlády dostal veľa vyznamenaní i rád Čestnej légie, bol senátorom, dostal grófsky titul. Časté žľzníkové záchvaty však zhoršovali jeho zdravotný stav. Po nešťastnom



úraze ochorel. Svoju poslednú hodinku očakával s obdivuhodným zmierením: *Na nikoho som sa nehneval, nikomu som nič zlého neurobil, chcem svoju cestu skončiť...* Zomrel 10. apríla 1813 v Paríži. Pochovaný je v Pantheone – francúzskom národnom pamätníku.

### Skromný vedec, láskavý filozof

**Lagrange** sa vždy snažil pochopiť podstatu veci a javov, objaviť všeobecné princípy, ktoré vytvárajú vlastnú základňu vedy. Objavoval nové východiská, spresňoval potrebné pojmy a technické prostriedky, vypracoval elegantné a dokonale jasné formy postupov pre riešenie úloh, vytvoril smelé abstraktné teórie. Vytušil, že skrytá harmónia je mocnejšia ako zjavná. *Lagrange bol rovnako filozofom ako matematikom. Dokázal to celým svojim životom, striedanosťou nárokov na pozemské dary, hlbokou oddanosťou všeobecným záujmom ľudstva, šľachetnou prostotou svojich zvykov, vznešenosťou svojej duše a hlbokou spravodlivosťou pri oceňovaní svojich súčasníkov (Fourier).* Všetko podriaďoval vedeckej práci. Veľké ciele poznania pravdy nespájal s osobnými zásluhami, nesúťažil, vždy vedel oceniť úspechy iných. Nemal rád spory, bol neobyčajne duševne vyrovnaný. Celá jeho bytosť ako keby bola naplnená tichou iróniou. Prekážky prekonával usilovnou prácou.



## Hermann MINKOWSKI – iný pohľad na priestor a čas

### Nečakaná predstava



Známym sa stal aj preto, že vytvoril nový pohľad na priestor a čas a tým položil matematické základy teórie relativity. Usúdil (1907) že fyzikálne predstavy Lorentza i Einsteina možno lepšie pochopiť v neeuklidovskom viacrozmernom priestore. Ponúkol predstavu, že priestor a čas nie sú zvláštne od seba nezávislé entity, ale sú spojitým štvorrozmerným časopriestorom. Tieto predstavy využil aj Albert Einstein vo svojej teórii relativity. Nemecký matematik **Hermann Minkowski** (\* 22. jún 1864 – † 12. január

1909) tak umožnil názornú interpretáciu Lorentzových transformácií a kinematických javov špeciálnej teórie relativity. *Priestor a čas jednotlivo budú v budúcnosti odsúdené na zmiznutie do tieňov, a len spojenie oboch si zachová skutočne nezávislú existenciu.*

### Životný osud

Bol druhým synom nemeckej židovskej rodiny žijúcej v Rusku. Do východopruského Königsbergu sa vrátili v roku 1872. Tu mladý **Hermann** absolvoval všetky stupne škôl aj univerzitu. Tri semestre absolvoval (1882–83) v Berlíne, kde sa spoznal s Dávidom Hilbertom (1862–1943) aj s A. Hurwitzom (1859–1919). **Minkowski** získal doktorát (1885), profesúru (1892) a do roku 1894 pôsobil v Bonne. V rokoch 1896–1902 prednášal v Zürichu (tu jeho prednášky navštívil aj A. Einstein) a od roku 1902 bol vedúcim katedry v Göttingene. V roku 1897 sa oženil a mal dve dcéry. Zomrel náhle na roztrhnutie slepého čreva.

### Z vedeckého diela



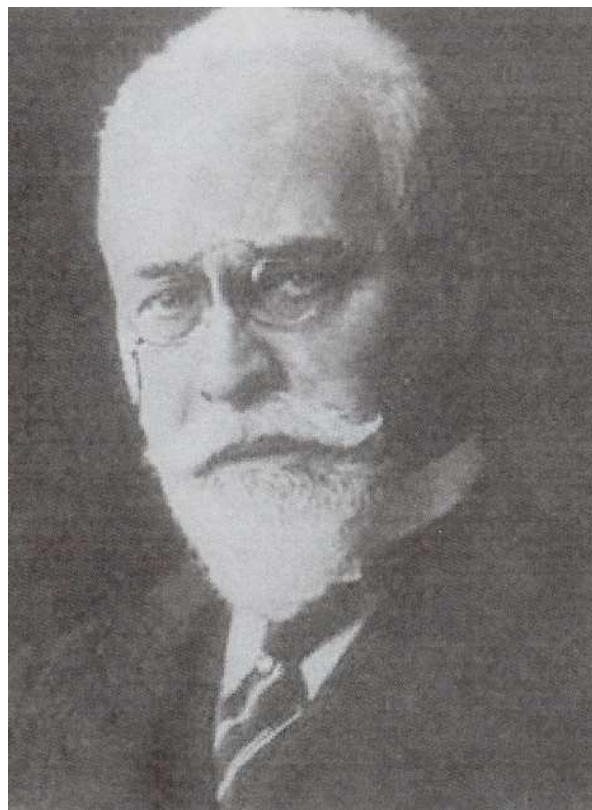
Devätnásťročný získal Veľkú cenu Akadémie vied v Paríži za prácu o rozložení prirodzených čísiel na súčet štvorcov. Neskôr sa stal zakladateľom geometrickej teórie čísiel a vytvoril teóriu kvadratických foriem  $n$  premenných s celočíselnými koeficientmi a odvodil celý rad významných nerovností (vydal *Geometria čísiel*; 1896). Zapojoval sa aj do riešenia problémov relativistickej fyziky. Vo štvorrozmernom Minkowského priestore našli kinematické efekty špeciálnej teórie relativity názornú geometrickú interpretáciu. Napísal a vydal práce *Princíp relativity* (1907), *Základné rovnice elektromagnetických javov v pohybujúcich sa telesách* (1908) a *Priestor a čas* (1908).

### Zaujímavé skutočnosti

Albert Einstein (1879–1955) konštatoval: *Vyjadriť prírodné zákony logicky uspokojivou formou možno len tak, ak ich vyjadríme ako zákony štvorrozmerného priestoročasového kontinua. To je podstata významného metodologického úspechu, za ktorý teória relativity vďaka Minkowskému. Ukázalo sa, že Lorentzove transformácie nadobúdajú geometrickú formu rotácie v štvorrozmernom priestoročase. Minkowski napísal: *Celý svet je rozdelený na svetočiary... fyzikálne zákony by sa dali vyjadriť ako vzájomné vzťahy medzi týmito svetočiarami.**



**Minkowski** poznal Einsteina ako študenta. Asi je pravdou, že raz sa v debata o teórii relativity **Minkowski** vyjadril aj takto: *Pravdu povediac, od Einsteina som to nečakal.*



## Emmy NOETHEROVÁ – život pre matematiku

### Ženy a matematika

Pripomeňme si mená žien, ktoré zanechali trvalú stopu v histórii matematiky. *Hypatia* (asi 375–415), dcéra alexandrijského matematika Theona, vyučovala matematiku i astronómiu. *Maria Gaetana Agnesi* (1718–1799), profesorka na



univerzite v Bologni, napísala ako prvá žena učebnicu matematiky. Francúzka *Sophia Germainová* (1776–1831) prispela k teórii čísel a získala Veľkú cenu matematických vied od Institutu de France. Ruská profesorka *Sofia Vasiljevna Kovalevská* (1850–1891) otvorila ženám dvere do Petrohradskej akadémie. Matematickou 20. storočia sa stala **Emmy Noetherová** (1882–1935), žena, ktorá žila len pre matematiku. Najväčšie potešenie nachádzala vo svojej odbornej práci.

### Osudy žitia

Nadanie pre matematiku sa v rodine univerzitného profesora Maxa Noethera (1844–1921) pravdepodobne dedilo. Otec, syn i dcéra sa zapísali medzi významných matematikov. **Amalie Emmy Noetherová** sa narodila 23. marca 1882 v Erlangene, malom bavorskom mestečku severne od Norimberku. Vychodila vyššiu dievčenskú školu, urobila skúšky pre vyučovanie francúzštiny a angličtiny. po vykonaní maturitnej skúšky (1903) sa však nemohla stať riadnou poslucháčkou vysokej školy. V Nemecku mohli ženy študovať na univerzite až od roku 1904. **Emmy** napriek tomu navštevovala prednášky z histórie, jazykovedy, matematiky i fyziky. Na univerzitách v Erlangene i Göttingene. Od školského roku 1904/1905 bola riadnou poslucháčkou a venovala sa štúdiu matematiky. Na základe odbornej práce z algebry získala doktorát (1907). Pracovala v matematickom ústave erlangenskej univerzity, neskôr na univerzite v Göttingene. Začala samostatne prednášať a viesť semináre, v roku 1922 bola vymenovaná za univerzitnú profesorku matematiky. Nacizmus, nenávidiaci židovský pôvod, ukončil jej pôsobenie na univerzitách v Nemecku (1933). Odišla do USA, kde vyučovala na dievčenskej škole v Pensylvánii. Po operácii zomrela 14. apríla 1935 v Bryn Mawr.



### Duch vedy i ľudskosti

Vedeckým záujmom Noetherovej bola abstraktná algebra, teória ideálov, algebraická geometria. Sformulovala pojem grupy s operátormi, študovala problémy kombinatorickej topológie. Vynikala v abstraktnom pojmovou

axiomatickom myslení, mala neobyčajnú predstavivosť pre najzložitejšie súvislosti, vedela presne odhaliť nové problémy. Prednášala v Moskve (1928/1929), Prahe i v Ústave pre pokročilé štúdiá v Princetone (New Jersey, USA). Vytvorila vlastnú vedeckú školu. Veľmi známa publikácia, dvojdielna učebnica vyššej algebry, napísaná jej spolupracovníkom holandským matematikom B. L. van Waerdenom, má podtitul "S použitím prednášok Emila Artina a Emmy Noetherovej".

Profesorka **Noetherová** vôbec nevynikala pri vyučovaní elementárnych matematických disciplín určených pre širší okruh študentov. Zaoberala sa výkladom spojeným s jej vlastnou vedeckou prácou. Pozorne, jednoducho a jasne vysvetľovala svoje predstavy a úsudky. O študijné i osobné problémy svojich žiakov prejavovala úprimný záujem. Mala dar humoru i zmysel pre družnosť. V pedagogickej i odbornej práci bola uznávaná od študentov i kolegov. V matematike a jej vyučovaní mala radosť z práce i života.

**Emmy Noetherová** zásadne pomohla odstraňovať predsudky o ženskom



matematickom myslení. Svojou prácou sa zaradila k najvýznamnejším ženám – matematickým všetkých dôb. I keď prevaha matematického nadania zatlačila do úzadia niektoré typické ženské zložky jej života, aj tak húževnatá a skromná Emmy bola často šťastná, obklopená prejavmi úcty i priateľstva. Nestarala sa veľmi o hmotné podmienky svojho života, nevynikal ženským pôvabom, ale v jej srdci nemali miesto ani zlomyseľnosť, ani žiadne ľudské zlo. Jej hlbokú ľudskú osobnosť spoznal každý, kto s ňou spolupracoval. Odborný prínos Emmy Noetherovej

ocenil Albert Einstein (1879–1955) slovami: *Podľa úsudku uznávaných žijúcich matematikov bola Emmy Noetherová najgeniálnejším tvorivým duchom medzi ženami od doby, kedy im bolo umožnené vyššie vzdelávanie. V ríši algebry, kde sa najnadanejší matematici po stáročia snažili preniknúť dopredu, odkryla metódy, ktoré majú netušený význam pre rozvoj matematiky súčasnej doby.*



## William OUGHTRED – významný učiteľ matematiky 17. storočia

### Novoveké počítadlo



*Michael Stifel* (1487–1567) vybadal (1544) zaujímavý matematický vzťah medzi aritmetickou a geometrickou postupnosťou, ktorý umožňoval „premeniť“ násobenie čísiel na sčítanie vhodných iných čísiel. Škótsky matematik a vynálezca *John Napier* (1550–1617) uverejnil (1614) prvé logaritmické tabuľky. Prvé tabuľky dekadických logaritmov vydal (1617) *Henry Briggs* (1561–1631). Anglický geodet a astronóm *Edmund Gunter* (1581–1626) zostrojil (1620) logaritmickú stupnicu, na ktorej odpichovadlom sčítaval a odčítaval úsečky. Počítadlo na násobenie a delenie čísiel použitím dvoch logaritmických stupníc zostrojil (1623) anglický matematik **William Oughtred** (1574–1660). Systematická veľkovýroba logaritmických pravítok sa datuje od roku 1885.

### Úradne teológ, vo vnútri matematik

*Benjamin Oughtred* učil písanie, gramatiku i literatúru na škole v Eton. Tam sa narodil 5. marca 1574 jeho syn **William**, ktorý neskôr odišiel na Kings College University do Cambridge a tam sa stal po úspešnom štúdiu bakalárom (1596) i magistrom (1600). Napriek tomu, že študoval predovšetkým filozofiu a teológiu, bol uznávaný za svoje nadanie i vedomosti z matematiky (z nej napísal aj prvé odborné pojednanie). **William Oughtred** bol vysvätený na kňaza (1603) a od roku 1610 až do smrti bol finančne zabezpečeným rektorom v Albury. Napriek tomu, že nebol oficiálne vzdelaný v matematike, získal, po osobnom štúdiu a výučbe druhých, pozíciu ako šikovný učiteľ matematiky. Medzi jeho žiakov patrili aj matematik *J. Wallis* (1616–1703) a známy architekt *Ch. Wren* (1632–1723). **William Oughtred** zomrel 30. júna 1660.



### Úspešné matematické pojednania



Pre svojich žiakov napísal učebnicu *Kľúč k matematike*, ktorá vyšla latinsky (1631), ale potom aj v ďalších vydaniach (1648, 1652). V tejto učebnici usporiadal súdobé matematické poznatky z aritmetiky aj algebry, opísal indo-arabský číselný systém a použil na označenie násobenia znak  $\times$  (krát) a znak delenia  $::$  (dvojitá dvojbodka).

Zvláštnu pozornosť si zasluhuje využitie dvoch posuvných logaritmických stupníc. **Oughtred** ponúkol lineárne aj kruhové logaritmické stupnice a ich

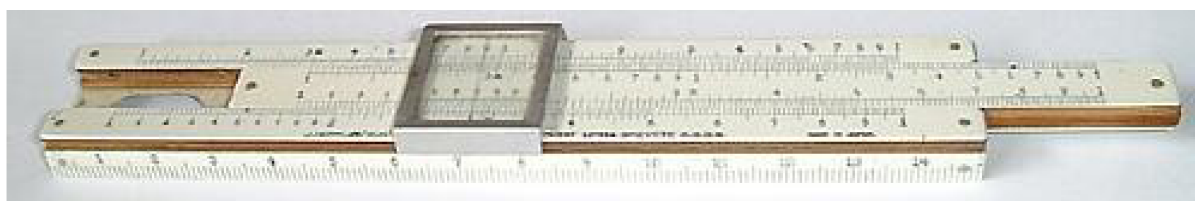
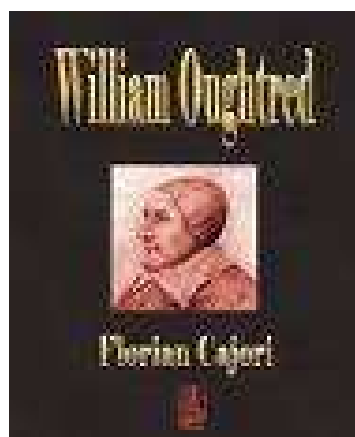
využitie na matematické operácie. Tieto návrhy (poznane už roku 1620) boli spracované až v pojednaní z roku 1632. Poznatok sa začal v konštrukcii logaritmického pravítka využívať až od roku 1650, ale do aktuálnej podoby (aj posuvná rýska) sa zaviedol až od roku 1850.



V roku 1657 uverejnil **William Oughtred** spis *Trigonometria*, v ktorom zaviedol na označenie trigonometrických funkcií znaky *sin*, *cos*. Riešil aj sférické trojuholníky a vypracoval logaritmické i trigonometrické tabuľky, až na sedem miest.

### Zapísaný v histórii

**William Oughtred**, malý čiernovlasý muž s prenikavým pohľadom, sústredene bádateľsky pracoval vo dne v noci. Farár z Albury sa stal známym matematikom svojej doby v Európe. O ňom sa traduje, že za vyučovanie matematiky nebral finančnú odmenu, lebo považoval svoj plat duchovného za dostatočný pre celé jeho pôsobenie. V didaktickej oblasti presadzoval prioritu teórie pred praxou. Odrazom vtedajšej doby bol aj jeho záujem o alchýmiu a astrológiu. Dopisoval si aj z význačnými učencami svojej doby. V roku 1653 vyšli jeho návody na vodorovné slnečné hodiny ako príloha publikácie z rekreačnej matematiky iných autorov (Etten, Leurechan). Uplatnenie dvoch logaritmických stupníc na operácie násobenia a delenia čísiel na logaritmickom pravítku zostane trvalou spomienkou na jeho matematické myšlienkové dielo.



## György PÓLYA – zaujatost' pre správne uvažovanie

### Cesty riešenia



Koľko populárnych a kvalitných kníh o riešení matematických úloh poznáte? Svetoznáma, vydanou v 17 jazykoch, v náklade viac než milión výtlačkov, je publikácia **Pólya, G.: *How to solve it? (Ako to riešiť?)***. Autor sa snaží ukázať logiku objavovania, postupnosť riešenia (vymedzenie, porozumenie problému, strategická analýza ciest riešenia, syntetická realizácia plánu, nájdenie riešenia a jeho overenie, kritické zhodnotenie s dôsledkami a možnosťami využitia). Pri hľadaní riešenia netreba zabudnúť na podobné, zvláštne a analogické problémy, na rozloženie do dielčích úloh. *Výsledkom tvorivej práce matematika je dôkaz a ten sa objavuje na základe dôveryhodných úvah, s pomocou pravdepodobných domnienok... pre dômyselnosť a dôvtip musí byť v matematike miesto.*

### Pôsobivo vyučovať

Matematickým poznatkom netreba iba rozumieť a vedieť ich využívať, matematiku je potrebné aj dobre vyučovať. Oba tieto ciele vedel naplniť americký matematik (maďarského pôvodu) a vysokoškolský profesor **György Pólya (1887–1985)**. Uvedomil si princípy aktívneho štúdia: *Radosť z objavu je najlepším podnetom pre ďalšiu prácu. Najlepšia cesta ako sa niečo naučiť, je, objaviť to.* Dokázal, že pri štúdiu matematiky možno tieto zásady vhodne uplatniť. Spoznal, že matematika je vtedy zaujímavá, keď živí našu vynachádzavosť a zdatnosť usudzovania. Vyžadoval nezávislosť myslenia, tvorivý rozum, originalnosť, vynaliezavosť. Hovorieval: *Učenie začína činnosťou a jednaním, postupuje k slovám a predstavám a malo by končiť žiadanými algoritmami rozumového uvažovania.* Učiteľom matematiky odkázal: *Učte žiakov rozmýšľať.* Študentom naznačil a mnohých aj presvedčil: *Krása matematiky je v tom, nachádzať pravdu bez ťažkostí.*

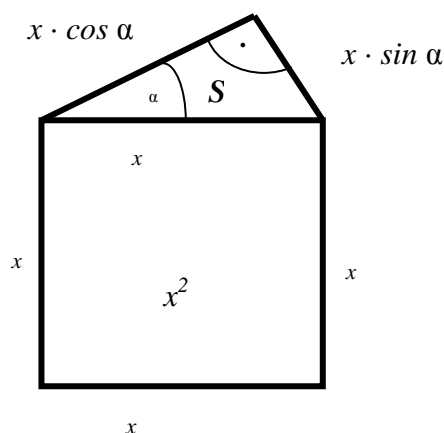


### Nečakaný dôkaz

**Pólya** bol známy aj tým, že ponúkal zaujímavé dôkazy známych matematických viet. Vo svojich didaktických prácach uviedol aj takýto dôkaz Pytagorovej vety:



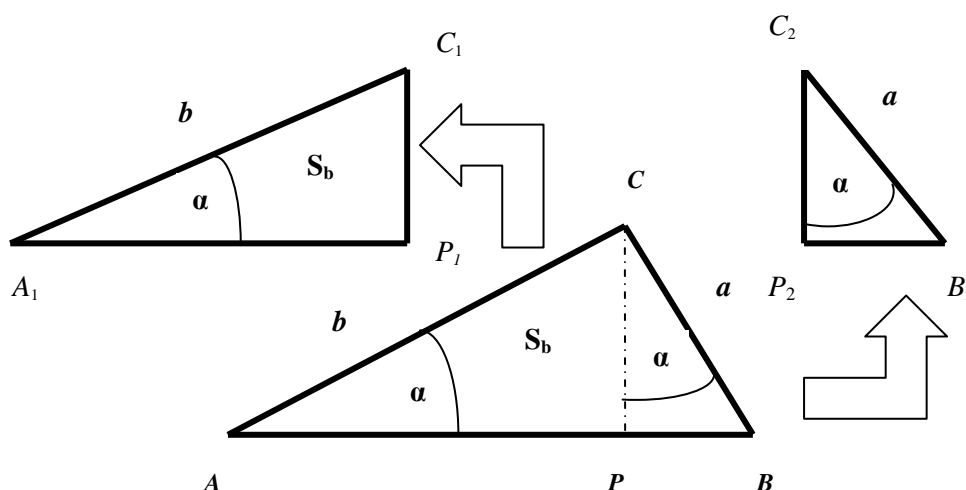
Označme si dĺžku prepony pravouhlého trojuholníka písmenom  $x$ , potom obsah tohto trojuholníka môžeme vyjadriť (v súlade so vzťahmi vyznačenými na dolu uvedenom obrázku) ako



$$S = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = k \cdot x^2,$$

$$\text{kde } k = \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Potom pre každý pravouhlý trojuholník  $ABC$  (pozri obr.) môžeme jeho obsah vyjadriť ako súčet jeho čiastočných obsahov



$$S_c = S_a + S_b \text{ a teda aj ako } k \cdot c^2 = k \cdot a^2 + k \cdot b^2, \text{ kde } k = \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

a to je vyjadrenie Pytagorovej vety  $c^2 = a^2 + b^2$ .

### Zo života G. Polyu

Narodil sa v Budapešti 13. decembra 1887. Už po skončení strednej školy, v ktorej často obsadzoval popredné umiestnenia v matematických súťažiach nadaných študentov, sa rozhodol pre profesiu matematika. *Nepokladal som sa za dosť dobrého pre fyziku a bol som príliš dobrý pre filozofiu: Matematika bola uprostred.* Univerzitné štúdiá dokončil v Budapešti (1912). Počas štúdiá i po ňom (1912–1914) bol určitý čas na študijných pobytoch na univerzitách v Paríži, Viedni i v Göttingene. Zoznámil sa s významnými matematikmi a poznal

moderné smery v matematike. Viac ako 25 rokov **Pólya** pôsobil v Polytechnickej škole v Zürichu (1914–1940), kde sa stal vysokoškolským profesorom (1928). Poriadal prednášky a kurzy na rôznych univerzitách v Európe i v Amerike. V roku 1940 odišiel natrvalo do USA. Tam pôsobil na Stanfordskej univerzite v Kalifornii až do odchodu na penziu (1953). Ešte ako 90-ročný aktívne pracoval so študentmi. Až do posledných dní mal všestranné záujmy, vrodenu čulosť povahy, sympatickú láskavosť k ľuďom. Zomrel 7. septembra 1985 v Stanforde.



### Veda i vyučovanie



Vedeckým záujmom G. Pólyu boli rôzne oblasti teoretickej i aplikovanej matematiky. Rozvinul kombinatorickú analýzu, dosiahol úspešné výsledky vo funkcionálnej analýze, matematickej štatistike i v teórii čísel. Zásadne ovplyvnil postavenie matematickej fyziky. **Pólya** prispel teoreticko–pravdepodobnostnými výsledkami a prácami z oblasti nerovností k novým aplikáciám mnohých matematických disciplín. Za výsledky svojich matematických prác, napísal viac než 230 pojednaní, sa stal členom americkej akadémie vied v Bostone i Národnej akadémie vo Washingtone. Bol zahraničným členom akadémií v Maďarsku a vo Francúzsku. Z viacerých vedeckých ocenení spomeňme, že od Americkej matematickej spoločnosti získal cenu *Za mimoriadne zásluhy v matematike* (1963).

**Pólya** ovplyvnil mnohých svojich študentov a trvalo ich pripútal k štúdiu matematiky alebo jej vyučovaniu. Učiteľom vždy zdôrazňoval: *Nechajte svojich študentov klásť otázky alebo sa pýtajte tak, ako sa oni môžu pýtať. Nechajte svojich študentov odpovedať alebo dávajte odpovede, ktoré oni môžu dávať. Vyhýbajte sa odpovediam na otázky, na ktoré sa nik nepýtal, ani vy sami... Vyučovanie má žiaka pripraviť pre objavy alebo vo väčšej miere dať niektoré predstavy o objavoch.* Mnohé pedagogicko–didaktické práce G. Pólyu sú ukázkami objavných postupov pri matematickom štúdiu. Človekovi, ktorý chce pre matematické poznanie venovať čas a prácu, sa dá pomôcť. Možno stačí, ak uverí, že ovládať matematiku znamená tvorivo riešiť úlohy, robiť vlastné matematické objavy. *Veľký objav rieši veľký problém, ale zrnko objavu je v každom probléme.* Pólyove heuristické metódy sú dodnes ukázkou možností, ktoré treba pri vyučovaní matematiky nasledovať a rozvíjať. *Štúdium umenia riešiť úlohy je výchovou vôle.*

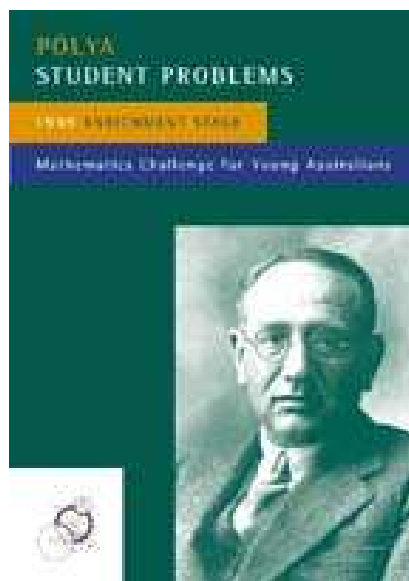


## Spôsob myslenia

**György Pólya** vždy zväčšoval rozvíjanie hodnotiaceho myslenia, zovšeobecňovanie a systematickú činnosť s vierohodnými úvahami. Podnecoval organizované myslenie v postupnosti zmysluplných krokov na základe vlastnej myšlienkovvej aktivity pri odhaleniach postupov a s primeraným vnútorným záujmom na vyriešení problémov. Vedel vyhľadávať inšpiráciu vo vonkajšom svete, bol prístupný reálnym aplikáciám. Ako matematik je známy hlavne pre svoje dielo pedagogické a názory didakticko-matematické. Vedel jasne a hutne formulovať svoje myšlienky o heuristike a dôveryhodnom uvažovaní. Odhalil podstatné vzťahy medzi pozorovaním, hypotézami a ich overením. Dôveryhodnosť chápal ako druh kvalitatívnej pravdepodobnosti. Vynikal intelektuálnym zápalom pre matematickú kultúru, v ktorej vysoko oceňoval každé samostatné a tvorivé myslenie. Matematika bola pre neho jazykom, intelektuálnym cvičením i vedou. Didaktika matematiky musí hľadať odpovede na otázku čo a ako vyučovať, aké problémové úlohy riešiť.



Nie každý uznávaný matematik bol aj obľúbeným učiteľom alebo uznávaným didaktikom. **György Pólya** patril k tým učencom, ktorí účinnou metodológiou a jednoduchými prostriedkami získavali nielen úžasné odborné výsledky v matematických disciplínach, ale aj pri šírení kultúry matematického spôsobu myslenia v školách. *Matematika je veda, ktorá dáva najlepšiu príležitosť pozorovať proces myslenia a má tú prednosť, že pri jej pestovaní nadobúdame cvik v metóde rozumového uvažovania, ktorú môže byť potom používaná na štúdium ktoréhokoľvek predmetu.*



## RAMANUJAN – osobný priateľ každého prirodzeného čísla

### Zvláštnosť na prvý pohľad

Asi hneď mu bolo zrejmé, že  $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\dots}}}} = 3$ . Skúsíte to dokázať?

Rámačandra Ráo, známy indický matematik, prezrel ošúchané zošity ubiedeného mladého muža. Nedokázal hneď posúdiť ich mimoriadnosť. Vytušil však závažnosť ich obsahu i osobnosti predkladateľa. Neskôr podobný úžas zažil G.H. Hardy (1877–1947), hviezda anglickej matematiky, keď dostal list obsahujúci asi 120 matematických vzorcov bez dôkazov: *Nikdy predtým som nevidel nič ani v najmenšom podobné... Musia byť pravdivé, pretože keby neboli, nikto by nemal takú predstavivosť, aby ich vymyslel.* Niektoré z týchto matematických vzťahov boli známe, niektoré Hardy dokázal až po dosť dlhom čase, niektoré aproximácie neboli dosť presné. Hardy spoznal nečakanú výnimočnosť takého spôsobu vyjadrenia. Príbeh najromantickejšej spolupráce matematikov sa mohol rozvíjať.

### Stelesnená jednoduchosť

**Srínivasa Ramanujan (22.12.1887 – 26.4.1920)** pochádzal z mestečka Eroda



v južnej Indii, z rodiny chudobného brahmínskeho úradníka. Vychodil základnú i strednú školu. Svet matematiky sa mu otvoril po zoznámení sa s knižkou G. Carr: Zhrnutie základných výsledkov teoretickej a aplikovanej matematiky. Obsahovala 6155 viet bez dôkazov. Mladý **Ramanujan** sám odhalil Eulerovu formulu spájajúcu exponenciálne a trigonometrické funkcie. Potom, keď mu ukázali riešenie kubickej rovnice, on sám našiel svoju metódu na riešenie rovníc

štvrtého stupňa. Urobil skúšky na univerzitu v Madráse, ale pre slabé vedomosti z angličtiny neuspel na vysokoškolských nematematických skúškach. Oženil sa (1909), získal miesto účtovníka v prístave.

Napĺňal svoj život matematikou. Svoje výsledky si značil do zápisníkov (tri poznámkové zošity boli preplnené viac než 4000 pozoruhodnými matematickými vzťahmi), postupne sa stával indickým matematickým géniom, ktorý publikoval v časopise Indickej matematickej spoločnosti. Zdalo sa, že poznal to, čomu sa učil. Aj známi indickí matematici už spoznali, že bez štipendia môže ochabnúť prirodzená Ramanujanova schopnosť matematického myslenia. Presvedčili ho, aby napísal Hardymu (v liste boli aj slová: *...nemám univerzitné vzdelanie ... venoval som celý svoj voľný čas práci v matematike... našiel som si svoju vlastnú cestu... vymýšľam si smer výskumu, sám... som chudobný a ak by ste v tom našiel niečo cenné, rád by som to publikoval...*).

**Ramanujan** dostal pozvanie do Anglicka, prekonal aj kastovné ťažkosti s vycestovaním z Indie. Od roku 1914 do 1919 bol v Cambridge.

### Úspešný matematik

Jednoduchý, skromný, neskúsený Ind s úžasnou schopnosťou vnímať vzájomné vzťahy medzi číslami, algebraickými vzťahmi a transformáciami nekonečných radov sa stal uznávaným profesionálnym matematikom spolupracujúcim s Hardym a Littlewoodom. Stal sa členom Trinity College (1914) a neskôr aj Londýnskej kráľovskej spoločnosti (1918). Od roku 1917 bol nevyliciteľne chorý, vo februári 1919 odcestoval z Anglicka, zomrel na predmestí Madrásu. Slávny Hardy o ňom povedal: ... *naučil som sa od neho viac ja ako on od mňa... bol najpozoruhodnejším matematikom akého som kedy poznal ... bol normálnu ľudskou bytosťou a veľkým matematikom... nezabudnuteľní objavitelia si skoro vždy zaslúžia úctu.* V roku 1927 vyšli Ramanujanove zbrané spisy, v roku 1957 aj jeho zápisníky. Hardy napísal o ňom knihu (1940). Od roku 1961 udeľuje indická Akadémia vied Ramanujanovu medailu za vedecké úspechy vo fyzike, chémii a v matematike.



Ilustrujme nezvyčajné Ramanujanove schopnosti príhodou, ktorú s ním zažil G. Hardy. Pri návšteve svojho chorého priateľa mu oznámil, že pricestoval taxíkom, ktorý mal číslo 1729 ( $= 7 \cdot 13 \cdot 19$ ). Podľa Hardyho číslo bezvýznamné. **Ramanujan** však bez prípravy spoznal zaujímavú vlastnosť tohto čísla: je to najmenšie číslo, ktoré je dvakrát súčtom dvoch tretín mocnín ( $1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$ ). Hardy sa musel zamýšľať asi polrok, aby sa o tom presvedčil a vedel to dokázať.

### Vnímal podstatné

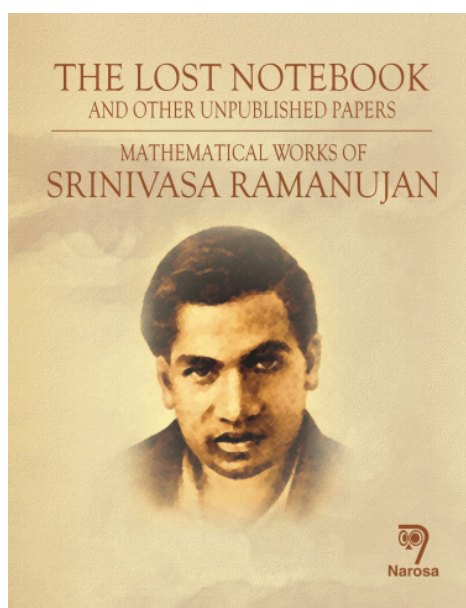


**Ramanujan** zostane na dlhú dobu najlepším znalcom reťazových zlomkov. Bol prirodzeným matematickým géniom ako Gauss alebo Euler. Mal úžasnú pamäť pre čísla a vnímal ich ako duchovných priateľov. Možno je neprekonateľný v priamom vhlade do algebraických matematických formúl. Napriek niektorým formálnym nedostatkom v dôkazových postupoch a presných matematických technikách ovplyvnil rozvoj analytickej teórie čísel, teóriu eliptických funkcií, postupy na sčítovanie divergentných radov, vyčísl'ovanie určitých integrálov a funkcionálne vyjadrenie dzeta funkcie. Ukázal celý rad pozoruhodných kongruencií i asymptotických odhadov. Mal úžasný vhlad do vlastností čísel. Vymyslel si a vynašiel nezvyčajným spôsobom problémy, ktoré sú ešte stále pre nás nečakaným prevkapaním.

## Zasiahnutý svetlom



Zdroj a povaha Ramanujanových schopností sú tajomné. Jeho predstavy boli zmesou číselných úvah, intuícii a indukcií, ktoré často nedokázal súvislo popísať. Nikto nevie ako prichádzal na svoje matematické výsledky. Jeho mozog fungoval pre nás úplne nepochopiteľným spôsobom. Asi ešte nikdy sa ľudský duch nepovzniesol tak vysoko s takou malou predbežnou vzdelanostnou podporou. Presvedčil nás o nezvyčajnej ľudskej schopnosti zovšeobecňovať, modifikovať hypotézy, uplatňovať kapacitu pamäti, vytušiť vlastnosti matematických formúl. *Zdá sa, že to bol formalista, ktorý sa zaoberal bez logiky, experimentátor, ktorý neprihliadal k fyzikálnej realite, prieskumník kráľovstva čísel* (J. D. Barrow). **Ramanujan** zostane asi navždy nenapodobiteľným príkladom budovateľa krásnych matematických formúl.



## James SYLVESTER – matematik hrdý na svoju poéziu

### Plán krásy

*Na svete neexistuje taká veda, ktorá dáva do pohybu toľko harmónie ako matematika.* Vtipným mužom, ktorý očakával veľkú symbolickú jednotu všetkých matematických disciplín, bol **J.J. Sylvester (1814–1897)**, anglický matematik, stelesnená predstava toho, kto žije medzi ideálnymi číslami, vysoko nad problémami všedného dňa. *Svet nápadov, ktorý matematika obsahuje, je oslavou božskej krásy. Spôsob, akým matematika spája všetky svoje časti, je nekonečný poriadok a absolútny dôkaz pravdy, ktorou sa zaoberá.*



*Matematika je najistejšia pôda pre ľudstvo. Zostane nedotknuteľná až kým sa plán univerza, ktorý sa rozprestiera pod našimi nohami ako mapa, nestane súčasťou ľudskej mysle.*

### Osudy žitia

V londýnskej židovskej rodine sa 3. septembra 1814 narodil **James Joseph Sylvester**. Po vychodení základnej školy navštevoval strednú školu v Liverpoole. V rokoch 1831–1837 študoval na St. John's College v Cambridgi. Potom učil fyziku na univerzite v Londýne. *Objekt čistej fyziky je sledovanie zákonov sveta, objekt čistej matematiky je sledovanie ľudskej inteligencie.* V roku 1841 pôsobil polrok na univerzite vo Virginii (USA). Po návrate do Anglicka študoval právo a pracoval ako matematický štatistik v poisťovacej spoločnosti. Na súdnom dvore v Londýne sa zoznámil s A. Cayleym (1821–1895) a spolupracovali na rozvoji teórie matíc. Do profesionálnej matematiky sa **Sylvester** vrátil ako profesor na Kráľovskej vojenskej akadémii vo Woolwichi (1854–1870). V rokoch 1877–1883 pôsobil na univerzite J. Hopkinsa v Baltimore (USA). Keď sa vrátil z Ameriky učil v Oxforde na katedre geometrie. V roku 1892 sa vrátil (s poruchami zraku i pamäti) do Londýna, kde 15. marca 1897 zomrel.

### Odborné úspechy



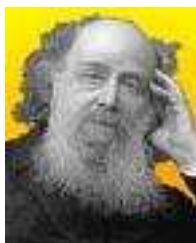
Za svoj dlhý život napísal **Sylvester** viac než 300 pojednaní z algebry, teórie matíc a determinantov, teórie invariantov, pravdepodobnosti, mechaniky a matematickej fyziky. S A. Cayleym a G. Salmonom (1819–1904) vytvoril **Sylvester** spolok matematikov, prezývaný „invariantná trojica“. Spolupracovali hlavne na základoch algebraickej teórie invariantov. Uznávali Sylvestrovo presvedčenie: *Matematika je hudbou rozumu... Muzikant*

*cíti matematicky, matematik myslí hudobne. Hudba je sen, matematika je skutočný život.*

**Sylvester** položil základy teórie elementárnych deliteľov (1851), sformuloval zákon zotrvačnosti kvadratických foriem (1852). Bol úspešným tvorcom matematických termínov (napr. invariant, kovariant a pod.), zaviedol pojem matice, využíval teóriu matíc na štúdium viacrozmernej geometrie, študoval kanonické tvary kvadratických foriem. Prispel k rozvoju modernej matematiky v Amerike (r. 1878 založil prvý americký matematický časopis). Dokázal (1881), že pre každé dostatočne veľké prirodzené číslo  $n$  existuje prvočíslo  $p$  tak, že platí  $n < p < 1,092 \cdot n$ . **Sylvester** tak prispel k objasneniu problematiky Bertrandovej hypotézy.



### Poet i hádankár

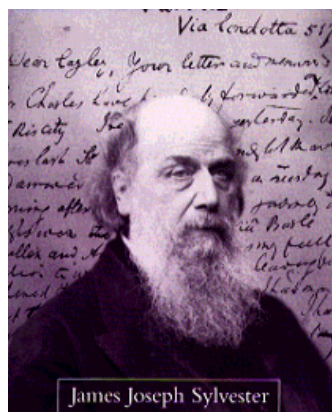


Mal rád riešenie vtipných problémov. Posielal do novín hádanky. S jeho menom je spojená aj táto úloha: Z veľkého počtu poštových známok s hodnotami 5 a 17 sa dajú skladať rôzne hodnoty. Aká je najväčšia hodnota, ktorá sa nedá vytvoriť kombináciou týchto dvoch hodnôt?

Roztržitý profesor **Sylvester** mal rád aj poéziu, citlivo vnímal zákutia básnického umenia. Sám vydal *Zákony verša* a bol na toto literárne dielo aj príslušne hrdý. Pritom však zostal verný svojmu presvedčeniu, že *matematika zvyšuje ľudské schopnosti postupnými krokmi od začiatku k stále vyšším stupňom intelektuálnej existencie*.

### Matematika je príležitosť

*Matematika je skúmanie rozdielnosti v podobnom a podobnosti v rozdielnom.* **James J. Sylvester**, vtipný muž matematickej kultúry, tušil, že svet, v ktorom žijeme, je odrazom vyššej zmyslupnosti, ku ktorej sa vierou a rozumom približujeme. *Nepoznám lepšiu možnosť na podporu schopnosti modliť sa, než štúdium matematiky.*





## Tibor ŠALÁT – v rozhovore s učiteľom počtov a merby

Rozhovor s ním som mal spísaný už pred mnohými rokmi (možno aj pred dvadsiatimi piatimi). Odložil som si ho do zásuvky. Pán profesor **Tibor Šalát** už má vyčíslené oba okrajové údaje svojho pozemského života (\***13.5.1926** – †**15.5.2005**). Vtedajšie komunikovanie ožilo u mňa (D.J.) jednostrannými spomienkami.



O vysokoškolskom profesorovi matematiky Tiborovi Šalátovi kolovala na bratislavskej MFF UK študentská povedačka: Pri skúške, v akejsi úlohe bolo treba vystihnúť o aké zobrazenie medzi množinami sa jedná. Študent odpovedal „do“ a bolo mu odporučené "dovidenia“, ďalší študent dozvediac sa osud predchádzajúceho, odpovedal na tú istú profesorovu otázku slovom „na“. Musel odísť s rozlúčením „nashledanou“.

Nechcel som od prof. Šaláta vedieť, ako to vlastne pri tej skúške bolo. Nie, že by ma to nezaujímalo, ale uštipačnej poznámke by som sa určite nevyhol. Bodrá nátura prof. Šaláta vždy zaručovala šarmantnú a patrične okorenú odpoveď. Spytoval som sa:

Kedy sa u Vás začal prejavovať záujem o matematiku? Kto formoval Vaše sklony?

*Už v národnej, vtedy ľudovej, škole. Podnietil ma môj otec, ktorý ma učil a pokúšal sa, na jeho prekvapenie úspešne, preberať so mnou veci z matematiky, ktoré prekračovali učivo školy. Neskôr to bol učiteľ E. Bánó na gymnáziu v Šuranoch, hlavne však učitelia na pražskej univerzite, profesori V. Jarník, M. Kössler, E. Čech, Vl. Kořínek.*

Kedy ste uverejnili svoj prvý odborný príspevok? O ktoré matematické odbory máte najväčší záujem? Ktoré Vaše výsledky v matematike si ceníte najviac?

*Už prvá moja práca vyšla roku 1954 v Matematicko-fyzikálnom časopise SAV. Trvale som bol pripútaný k teórii čísel a k teórii reálnych funkcií. Tieto sklony, infikované V. Jarníkom a M. Kösslerom, mi zostali ako duchovné dedičstvo na celý život. Najviac si cením výsledky dosiahnuté v rámci spolupráce s mojimi priateľmi v zahraničí, s prof. J.S. Lipińskim a prof. W. Narkiewiczom i doc. Janinom Ewertom z Poľska, s prof. R. Tijdemanom z Holandska, s prof. F. Schweigerom z Rakúska.*

Zmenil sa štýl Vašej práce po skončení štúdia? Ktoré študijné metódy odporúčate pre matematiku?

*Štýl práce sa menil, dúfam, že postupom času sa znižoval podiel formalizmu v štúdiu matematiky. Najdôležitejším sa mi zdá vzbudiť sám v sebe eminentný záujem a záľubu v študovanej tematike. To potom implikuje aj snahu o hlbšie štúdium spojené s tvorivou špekuláciou. To je rada aj pre študentov.*

Odkedy sa zaoberáte pedagogickou problematikou? Je didaktika matematiky Vašou

srdečnou záležitosťou? Čo s teóriou vyučovania matematiky?

*Sám som kedysi dávno učil, viac než rok, na strednej škole. Pedagogické otázky vysokej školy ma zaujímali od začiatku môjho vysokoškolského pôsobenia. Domnievam sa, že je potrebné, aby každý vyučujúci tvorivo premýšľal v oblasti pedagogiky. Čo s teóriou vyučovania? To je veľmi široká otázka. Domnievam sa, že mnohé komplikácie, ktoré vznikajú okolo tejto disciplíny, majú pôvod v tom, že nevyrástla podobne ako niektoré u nás pestované matematické disciplíny, ktorých úroveň u nás je porovnateľná so svetovou úrovňou.*

Vidíte pri vyučovaní a štúdiu matematiky nové účinné formy?

*Hlavná je motivácia a získanie záujmu o tematiku. Najdôležitejšia metóda štúdia matematiky je ono Halmosovo „robenie matematiky“.*

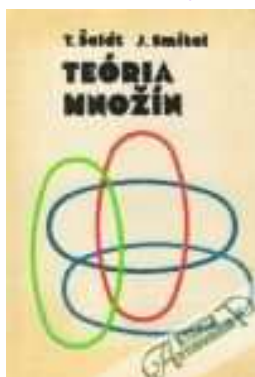
V akom svetle vidíte stredoškolskú matematiku? V čom sú jej hodnoty?

*Domnievam sa, že súčasné predimenzovanie učiva zasiahlo aj matematiku na strednej škole. Vhodne zvolená „redukčná komisia“ by iste dokázala poriadne skreslať rozsah tohto učiva s tým, aby po tejto redukcii boli študenti lepšie pripravení na vysokoškolské štúdium, než je to doteraz. Nenahraditeľné je osvojenie si matematického štýlu myslenia, napr. rozpoznať nutnú podmienku od postačujúcej a ovládanie základných počítačských techník, napr. úpravy výrazov. Hodnota štúdia matematiky nie je ani tak v samotných poznatkoch, ktoré sú veľmi pomíňajúce, ale skôr v osvojení si štýlu matematického myslenia, poriadku v myslení, kontrole úsudkov, v kritickosti a v zmysle pre logickú analýzu. S tým úzko súvisí schopnosť jadrne formulovať vlastné myšlienky.*

Možno mať z matematického poznania radosť? Možno ju šíriť?

*Mne osobne hlavnú radosť v matematickom poznaní poskytoval istý pocit pravdy, ktorý vzniká pri vydarenom dôkaze alebo pri úspešnom výpočte náročnejšej úlohy. Skutočná matematika nie je len radosť a pobavenie, ale aj značná duševná námaha. Treba rozlišovať medzi skutočnou matematikou a rečami o matematike. Reči o matematike možno viesť bez veľkej námahy s rôznymi stupňami podivného sebauspokojenia.*

Vytušil som, že "prihára". S pocitom nemalého úsilia a vážnym uspokojením v srdci neodbytného osvetárskeho matematikára – učiteľa počtov a merby, som stíchol. Stačil som poďakovať.



Pamätám si profesora Tibora Šaláta nielen zo skúšky v postgraduálnom štúdiu, z prednášok na učiteľských konferenciách, ale aj z krátko spoločného pôsobenia na obnovennej Trnavskej univerzite, kde v prvých rokoch katedry matematiky tvorivo vypomáhal. V mojich spomienkach zostal zapísaný ako presvedčivý učiteľ matematiky nielen so svojským humorom, ale aj netradičnými didakticko–motivačnými podnetmi pre šírenie matematickej kultúry.

## Alan TURING – mysliaci stroj kacírскеj teórie

### Šifry a šifrovanie

Kultúrne dejiny ľudstva už dlho poznajú rôzne spôsoby utajovania. Šifrované správy rozhodovali o osude štátov i jednotlivcov. Tajné šifry prinášali i odnášali veľké finančné čiastky. Z kryptológie sa stala solídna veda s počítačovým vybavením a matematickým softwarom, v ktorom hrajú dôležitú úlohu aj vlastnosti prvočísiel.



Jedným z vynikajúcich matematikov, ktorý prispel k tvorbe šifrovacieho prístroja (AGNES) bol **Alan M. Turing (1912–1954)**, priekopník elektronických samočinných počítačov, algoritmizácie i umelej inteligencie.

### Cesta životom

Mal veľmi vzdelaných rodičov, ktorí sa zosobášili v Indii. Narodil sa 23. júna 1912 v Londýne. Školu navštevoval v Sherborne (od r. 1926) a potom študoval matematiku na univerzite v Cambridge (od r. 1931). Bol kritizovaný za svoj rukopis, zápasil s angličtinou, z chémie si robil vlastné experimenty, mal svoj myšlienkový svet, v ktorom mali svoje miesto aj teória relativity a kvantová mechanika.



V roku 1934 **Turing** promoval, stal sa členom Kráľovského kolégia (1935) a obhajoval dizertačnú prácu na tému Základná limitná veta pravdepodobnosti. V rokoch 1936 – 1938 študoval na univerzite v Princetone (doktorát u A. Churcha). Počas 2. svetovej vojny bol aj dôstojníkom pre dekódovanie. Od roku 1945 pracoval v národnom fyzikálnom laboratóriu. Neskôr (1948) prešiel na univerzitu do Manchesteru. Stal sa (1951) členom Londýnskej kráľovskej spoločnosti. V roku 1952 bol väznený za násilné protesty proti obmedzeniam britských homosexuálov. Nečakaná smrť prišla 7. júna 1954 vo Wilmslowe. Vyšetovanie určilo za príčinu smrti samovraždu otrávením sa kyanidom. Jeho matka tvrdila, že to bola nehoda.

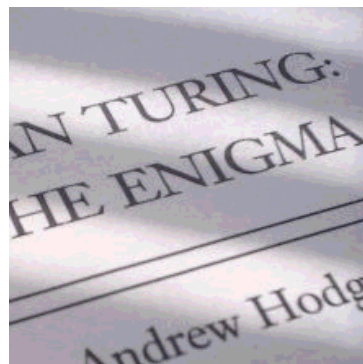
### Myšlienky odborných prác



**Turing** venoval pozornosť matematickej logike a teórii rekurzívnych funkcií. V práci *On computable Numbers – O počítateľných číslach* vypracoval teóriu algoritmov. Súčasne (1936) s E.S. Postom publikoval **Turing** teóriu abstraktného počítača, kde vysvetlil funkčné procesy počítačového automatu. V roku 1947 zverejnil pojednanie *Mysliaci stroj – kacírскеj teória*, kde uvažoval o učiacom sa stroji a umelej inteligencii. V roku 1950 sa zaoberal biologickými javmi a ich vysvetlením matematickým a algoritmickým popisom.

## Turingov stroj

Zariadenie obsahuje hlavicu a pásku. Hlavica je mechanizmus, ktorý v každom okamihu ukazuje na jedno okienko pásky. Stroj má možnosť posunu o jedno okienko doľava a doprava. V okienkach môžu byť zapísané symboly konečnej abecedy. Páska prechádza čítacou hlavicom, ktorá priradí riadiacej jednotke pre každý okamih jeden z možných stavov. Jednotka obsahuje program, ktorý určuje podľa konkrétneho stavu nový stav. Takto bol popísaný model abstraktného programovacieho stroja na spracovanie symbolov.



## Význam diela

**Alan Mathison Turing** prispel k riešeniu problémov efektívne vyčísliteľných funkcií, aproximácií Lieových grúp i teórie Riemannovej dzeta funkcie. Spresnil intuitívny pojem algoritmu a rozvinul nové metódy riešenia algoritmizovateľných problémov. Podieľal sa na realizácii prvého anglického počítača a jeho programového vybavenia. Predpokladal, že stroje môžu imitovať myšlienkové procesy, generovať odpovede mimo rámec ohraničenej množiny možností, prejaviť umelú inteligenciu. Presvedčil seba aj ostatných, že principiálna možnosť riešenia ľubovoľného algoritmizovateľného problému je technicky reálna.



## ULUG BEG – stredoveký panovník, astronóm i matematik

### Sultán i zručný počtár

V histórii nie je veľa prípadov, aby sa v jednej osobnosti zlúčili rodové panovnícke predpoklady spolu s úspechmi vo vedeckej oblasti. Nedá sa vždy presne oddeliť vlastný osobný odborný prístup od organizačných a materiálnych zásluh. V tomto prípade historické údaje pripúšťajú, že panovník bol nielen organizátor a mecenáš, ale aj dobre vzdelaný výskumník. Jeho celé meno znelo: **Mírzá Mohammad Táregh bin Šáhroch (Ulug Beg** znamená "veľký vládca") alebo aj **Muhammad Taragaj**.

### V základoch rodu

Jeho starý otec Timur (1336–1405) pochádzajúci z mongolského kmeňa a turko-tatárskej rodiny (tvrdil o sebe, že je potomok Džingischána), zjednotil turecko-mongolské kmene a obsadil veľké územia (v dnešnom Iráne, Afganistáne, Iraku i v Turecku; napadol severnú Indiu, zmasakroval mesto Dillí). Ako následník trónu **Ulug Beg** (\***22. marec 1394** – †**27. október 1449**) bol vnukom dobyvateľa Timura a najstarším synom Shah Rukha a perzskej šľachtickej. Ako vnuk panovníka cestoval s ním po bojiskách v celej ríši. Šestnásťročný sa stal guvernérom v Samarkande (1409) a vládcom ríše bol od roku 1447. Smutný osud panovníka ho dostihol tým, že bol asi zavraždený svojim vlastným synom.



### Podpora vzdelania

**Ulug Beg** bol nielen primerane vzdelaným a štedrým mecenášom vyššieho vzdelávania, ale aj sám bol schopný skúmať astronomické javy a študovať trigonometrické tabuľky potrebné pre astronomické výpočty a merania. Svedčí o tom písomné vyjadrenie významného súdobého matematika a astronóma al-Kášího (1370–1429), prezývaného aj *Druhý Ptolemaios*, ktorý opísal v listoch vedecký život vo vtedajšom Samarkande. Pochválil odborné matematické i astronomické schopnosti **Ulug Bega**, ktorý nechal založiť (12417–1420) vyššie školy, knižnicu i univerzitu, na ktorú povolal mnohých významných bádateľov a vybudoval trojposchodovú budovu observatória s najlepšimi prístrojmi svojej doby (sextant mal polomer vyše 40 metrov). Samarkand bol vtedy významným strediskom poznania. Tu boli uskutočnené veľmi presné astronomické merania a vypracovaný (1420–1437) hviezdny katalóg. Zachovali sa výpočty polôh 1018 hviezd, ktoré boli najpresnejšie až do zavedenia



optických prístrojov. Tu stanovili dĺžku trvania roka na 365 dní 6 hodín 10 minút 8 sekúnd. Dielo podporované, ale aj tvorené Ulug Begom pôvodne v arabskom jazyku, bolo preložené aj do perzštiny. Slávnym sa stal Ulug Begov výrok: *Ríše sa rozpadnú, náboženstvá pominú ako hmla, len veda žije a je večná.*

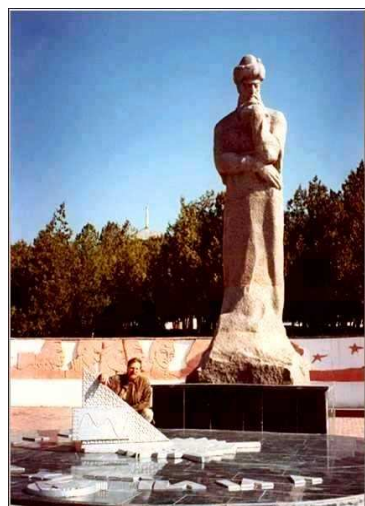
### Najznámejší spolupracovník

Al-Káší (asi 1370–1429) za panovania **Ulug Bega** chápal algebru ako určovanie neznámych veličín pomocou príslušných známych veličín. Vtedajšiu elementárnu matematiku zhrnul v pojednaní *Kľúč aritmetiky* (1427). Tam je spracovaná aj šesťdesiatková pozičná sústava. Matematik Al-Káší v *Traktáte o kruhu* (1424) už používa desatinné čísla a uvádza hodnotu  $2\pi$  ako 6,2831853071795865. Uznal, že *celú pravdu o tom, okrem Alaha, nikto nepozná.*



### Súčasnosť 21. storočia

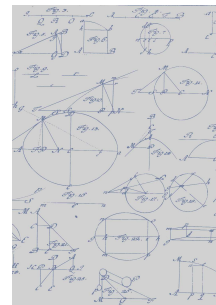
Timur a **Ulug Beg** sú pochovaní v mauzóleu Gur Emir, vystavanom na prelome štrnásteho a pätnásteho storočia. Interiér je vykladaný mramorom, vyzdobený pozlátenými mozaikami a reliéfmi. Timurov sarkofág patrí k svetovým raritám, je to najväčší nefritový balvan na svete. Uzbecký matematik, astronóm sa určite podstatne zaslúžil o rozvoj vedy i astronomický výskum v 15. storočí. **Ulug Beg** ako patrón umenia i vedy, ktorý nezanedbal ani Korán, režíroval matematické postupy i astronomické výskumy svojej doby. Zapísal sa tým do histórie kalendárnych výpočtov a úspechov trigonometrie. Aj na Mesiaci je kráter s menom **Ulug Beg**.



## Stanislav VYDRA – profesor matematiky na pražskej univerzite

### Uznávaný pedagóg

Za 30 rokov svojho pôsobenia vzdelával viac než 10 tisíc študentov. Od roku 1772 bol profesorom matematiky na univerzite v Prahe. Stal sa výraznou postavou prvej generácie českého národného obrodnenia. Svojich žiakov viedol nielen k matematickej kultúre, ale aj ku vzťahu k českému jazyku a literatúre. Uznal, že história vývoja matematických poznatkov je účinným prostriedkom pre získanie záujmu o matematické vedy.



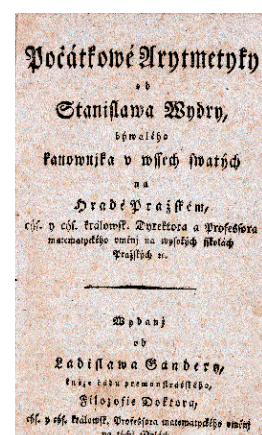
### Životný osud



Pochádzal z mesta Hradec Králové, tu sa narodil 13. novembra 1741, chodil do gymnázia, aj vstúpil do jezuitskej reholy (1757). Ako novic bol dva roky v Brne. V pražskom Klementíne si rozšíril svoje vzdelanie aj o francúzštinu i históriu. Matematiku a filozofiu vyštudoval (1762–1764) u J. Steplinga a J. Tesánka v Prahe. Po krátkom pôsobení v Jičíne sa stal Steplingovým asistentom (1766) pri astronomických pozorovaniach. Po vysvätení za kňaza (1769) učil opäť v Jičíne a potom bol farárom vo Vilémove (1771–1772). Profesorom elementárnej matematiky na pražskej univerzite sa stal na Steplingov návrh (1771) a na tomto mieste úspešne pôsobil aj po zrušení jezuitského rádu (1773). V rokoch 1789–1799 bol zvolený za dekana filozofickej fakulty a od roku 1800 bol aj rektorom Karlo-Ferdinandovej univerzity. Zomrel na mŕtvicu 3. decembra 1804, keď pred tým (1803) oslepol.

### Vzťah k matematike a vedám prírodným

Keď bol poverený vedením úvodného kurzu pre študentov filozofickej fakulty (trval dva – tri roky), svoje miesto v ňom mali aj matematické vedy (vtedy tam patrili okrem matematiky aj fyzika, mechanika a zememeračstvo). Od roku 1752 vyučoval povinnú elementárnu matematiku študentov 1. ročníka a od roku 1775 aj aplikovanú matematiku poslucháčov 2. ročníka. Neskôr tam pribudol aj úvod do diferenciálneho a integrálneho počtu s jednoduchými geometrickými a mechanickými aplikáciami.

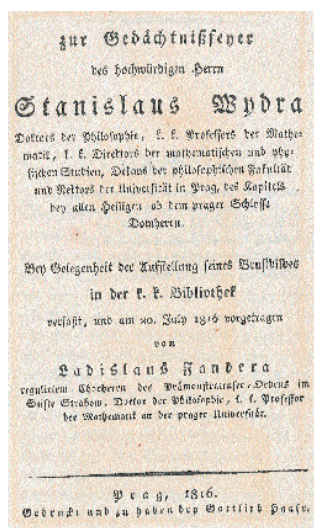


**Vydra** bol zodpovedný učiteľ sústredený predovšetkým na pedagogický prístup a didaktický výklad. Napriek tomu, že mal českých rodičov, myslel, písal a hovoril latinsky. Od roku 1784 sa začala vyučovať matematika na univerzite

namiesto latinsky po nemecky. Medzi vzdelancov sa dostávali učebnice zo zahraničia a začala vznikať profesia odborného učiteľa matematiky. **Stanislav Vydra** dosiahol vynikajúcu pedagogickú zručnosť aj didakticko-motivačnú tvorivosť. Vo svojich *Epigrammátoch* (z roku 1804) uviedol v 7. epigrame: *Quare tam paucis grata est divina Mathesis? Paucis vera placent, ludicra vulgus amant.* (*Matematika božská, prečo si tak málo uctievaná? Pravda sa málo páči, ľud miluje zábavu.*) Veľmi pôsobivo spájal výučbu matematiky s pripomienkami významných udalostí v dejinách Čiech a Moravy. V známom diele *Historia Matheseos in Bohemia et Moravia cultae* (1778) uviedol životopisy 98 matematikov, fyzikov a astronómov, ktorí sa narodili alebo pôsobili v českých krajoch. Vydróm pripravovanú učebnicu *Počátky aritmetiky* vydal (1806) jeho žiak a nástupca profesor J. Jandera.



### Buditel'ská láska k českému jazyku

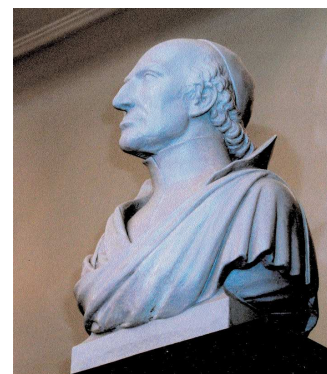


**Stanislav Vydra** patril k popredným predstaviteľom národného obrozenectva v Čechách (jeho portrét podal aj A. Jirásek v diele *F.L. Věk* alebo J. Jungman v *Elégii na smrt' S. Vydru*). Rozvíjal poznatky o českom jazyku a literatúre. Napísal aj životopis B. Balbína (1621–1688) známeho českého, latinsky píšuceho, historika, ktorý spísal diela *Učené Čechy*, *Výber z dejín Čiech*, *Obrana jazyka slovanského, zvlášť českého*. Páter **Vydra** bol vynikajúci rečník, jeho kázne na významné cirkevné sviatky (aj v češtine) v pražských kostoloch boli navštevované veriacimi v pomerne hojnom počte. Možno aj preto si *umyslíl počátky všeho matematického umění v jazyku vlasteneckém vydati*.

### Trvalá spomienka



Svojim pôsobivým vyučovaním profesor **Vydra** podstatne ovplyvnil mnohých svojich poslucháčov. Bol uznávaný, vážený i ctený nielen v kruhoch cirkevných alebo akademických, ale aj občianskych. Dodnes je v budove MFF UK na Karlove (matematický ústav; na schodisku pred veľkou posluchárňou) v Prahe umiestnená busta S. Vydru, ktorú vytvorili roku 1814. Študenti si tak môžu pripomenúť aj zásluhy tohto obetavého učiteľa matematiky, ktorý sa nezištne zaslúžil o šírenie matematickej kultúry.



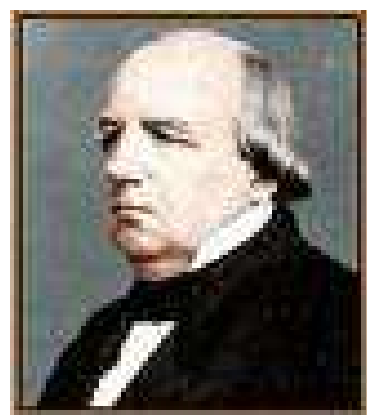


## Karl WEIERSTRASS – neobyčajne svedomitý matematik

### Študent i učiteľ

Ak sa zahľbíte do riešenia zaujímavého problému, zabudnete aj na čas. Stalo sa to i mladému učiteľovi matematiky. Jedného dňa neprišiel do svojej triedy. Keď ho riaditeľ školy vyhládal, našiel ho doma zahľbeného v matematických úvahách. Budúci významný nemecký matematik **Karl Weierstrass (1815–1897)** pracoval v izbe, kde boli zatahnuté záclony a nezbadal, že už je deň a treba ísť opäť do školy.

Úradníci v štátnej službe boli často prekladaní z miesta na miesto. Tak aj malý Karl, narodený 31. 10. 1815 v Ostenfelde, úradníkov syn, navštevoval postupne rôzne základné školy. V roku 1829 prišiel na gymnázium v Paderborne. Bol veľmi úspešný študent v rôznych oblastiach. Bol viackrát najlepším žiakom v mnohých predmetoch, napr. v nemčine, latinčine, gréčtine i matematike. V roku 1834, po päť a polročnom štúdiu, namiesto osemročného, zmaturoval s ocenením „prvý zo všetkých“. I keď mladého Weierstrassa zaujímala matematika, otec chcel mať z neho štátneho úradníka a dal ho študovať právo do Bonnu. Syn nezanedbával štúdium, ale povrávalo sa, že ne jeden večer patril v krčmičkách k najveselším. Nechýbal ani na šermiarskom kolbišti. Túžba po matematických vedomostiach predsa len prevládla. Štúdium práva zanechal nedokončené a odišiel na akadémiu do Münsteru urobiť učiteľské skúšky z filozofie, pedagogiky a matematiky. Tu ho pre hlbšie štúdium matematiky nadchol a získal dobrý učiteľ K. Gundermann. Ten spoznal, že **Weierstrass** si samoštúdiom doplnil základné vedomosti a je schopný ďalej rozvíjať teóriu eliptických funkcií.



Prvé gymnaziálne miesto získal **Weierstrass** v Deutsch–Krone v západnom Prusku. Vyučoval týždenne 30 hodín, učil okrem matematiky a fyziky aj botaniku, zemepis, dejepis, nemecký jazyk, krasopis i telocvik. Pritom študoval diela Abela, rozvíjal nové matematické myšlienky. Od roku 1848 až do 1855 vyučoval na strednej škole v Braunsbergu. Publikovaním niektorých výsledkov svojich prác vzbudil pozornosť matematikov v samotnom Berlíne. Od roku 1856 začal prednášať matematiku na polytechnike v Berlíne. Neskôr sa stal profesorom na univerzite a členom berlínskej akadémie (1864). Veľa prednášal, vedecky pracoval od skorého rána do neskorej noci. Bol dekanom filozofickej fakulty (1873/74) i rektorom univerzity. Posledné prednášky konal 75-ročný **Weierstrass** v školskom roku 1889/90. Zomrel v Berlíne 19. 2. 1897.

## Matematické výsledky



Dôslednými prednáškami **Weierstrass** prehlboval svoje matematické myšlienky. Pozorne dobudoval základy matematickej analýzy. Presne objasnil pojmy infimum a minimum, funkcia, spojitosť, derivácia. Popularizoval  $\varepsilon - \delta$  symboliku. Zaviedol absolútnu hodnotu, totálny diferenciál, rovnomernú konvergenciu. Zdôvodnil teóriu komplexných funkcií pomocou mocninných radov. Ukázal príklad funkcie, ktorá je spojitá a nemá v žiadnom bode deriváciu. Z izolovaných výsledkov vybudoval modernú a presne zdôvodnenú teóriu eliptických funkcií na základe teórie funkcií komplexnej premennej. Princípy matematickej analýzy sa snažil transformovať na najjednoduchšie aritmetické pojmy. Výsledkami svojej práce sa natrvalo zapísal do teórie analytických funkcií a variačného počtu. Ovplyvnil teóriu reálnych čísel, lineárnu algebru i diferenciálnu geometriu.

Profesor **Weierstrass** založil na univerzite v Berlíne prvý čisto matematický seminár. Jeho ozdobou boli aj úspešní žiaci: G. Frobenius, H. A. Schwarz, S. Kovalevská, Mittag-Leffler, G. Cantor, I. Fuchs a mnohí ďalší. I keď boli Weierstrassove prednášky niekedy dosť neurovnané, originálne matematické myšlienky produkoval sústavne. Mnohí sa zúčastňovali jeho prednášok a seminárov aj preto, že pre mnohých z nich bol priateľom a spolupracovníkom. Veľmi málo však sám publikoval. Mnohé diela vyšli až posmrtno ako zápisy prednášok, ktoré urobili jeho najlepšie žiaci. Zobraté spisy vyšli až v rokoch 1894 až 1927. Weierstrassove výsledky sa často dostali z prednášok či nepublikovaných spisov na verejnosť a tak sa stalo, že si niektorí matematici privlastnili jeho nápady.



## Vedieť študovať



Z vidieckeho učiteľa sa postupne stal významný vysokoškolský profesor a slávny matematik. Jeho matematická tvorivosť pôsobila v hlavných smeroch vtedajšej matematiky. Skromný a usilovný **Weierstrass** bol zaslúžene ocenený členstvom v akadémiách vied v Miláne (1863), Paríži (1868). Vedel ukazovať cesty k účinným výsledkom, naznačoval body, z ktorých sa možno dostať k novým objavom. Bol presvedčený, že dôležité je – naučiť sa učiť sa.

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k \pi x)$$

## Antoni S. ZYGMUND – matematický analytik 20. storočia

### Pozoruhodná spolupráca

Ovplyvnil viac než 80 svojich doktorandov, z ktorých mnohí dosiahli podnetné a významné matematické výsledky. V zoznamoch jeho študentov a spolupracovníkov môžeme nájsť významné osobnosti modernej matematiky: A. Calderón (1920–1998), argentínsky matematik), P. Cohen (1934–2007), N. Fine (1916–1994), Elias Stein (\*1931, matematik v Princetone, ocenený aj Wolfovou cenou), J. Marcinkiewicz (1910–1940)). V Anglicku spolupracoval s G. Hardyom (1877–1947) i J. Littlewoodom (1855–1977), neskôr aj s N. Wienerom (1894–1964). Získal aj pozoruhodné ocenenia, napr. členstvo v národných akadémiách USA (1961), Poľska (1959), Argentíny (1964) a Španielska (1967). Získal čestné doktoráty univerzít vo Washingtone, Toruni, Paríži, Uppsale i Palerme, V USA dostal (1986) Národnú medailu za vedu ako ocenenie výsledkov matematického výskumu.

### Životný osud

**Antoni Szczepan Zygmund** sa narodil 25. decembra 1900 vo Varšave. Pochádzal z vidieckej rodiny rozdeleného Poľska. Bol najstarším medzi štyrmi súrodencami. V roku 1914 bola ich rodina evakuovaná do Poltavy na Ukrajine, odkiaľ sa vrátili až v roku 1918. Po ukončení gymnázia nastúpil na univerzitu vo Varšave (1919). Oblúbenú astronómiu nemohol študovať, lebo tento vedný odbor sa v tom čase neotváral, tak sa rozhodol pre matematiku. Jeho matematické záujmy veľmi ovplyvnili matematici Mazurkiewicz, Sierpiński a Janiszewski. Najviac sa do jeho srdca zapísal učiteľ A. Rajchman a spolužiak S. Saks. V roku 1923 ukončil štúdiá doktorátom a začal vyučovať na varšavskej polytechnike (1922–1929). **Zygmund** sa oženil (1925) a habilitoval (1926) na univerzite. Na študijnom pobyte v Anglicku bol v školskom roku 1929/30. Potom bol ustanovený za učiteľa na univerzitu vo Vilniuse. V roku 1940 odišiel **Zygmund** s manželkou a synom z obsadeného Poľska do Spojených štátov amerických. Pôsobil v MIT (Massachusetts Institute of Technology), na univerzite v Michigene a v Pensylvánii, od roku 1947 až do odchodu na dôchodok (1980) pôsobil na univerzite v Chicagu. Zomrel 30. mája roku 1992.



## Odborné výsledky



**Antoni Zygmund** napísal 6 kníh a okolo 200 vedeckých pojednaní. Stal sa symbolom úspechov harmonickej analýzy, matematickej teórie miery a integrálu. Medzi jeho najvýznamnejšie práce patria s Calderónom vypracované pojednania o singulárnych integrálnych operátoroch. Calderónov–Zygmundov rozklad patrí k najhlbším myšlienkam v modernej harmonickej analýze. Veľmi známe a uznávané sa stali publikácie *Goniometrické rady* (1935, 1959, 2002), *Analytické funkcie* (1938) a *Miera a integrál* (1977). Profesor **Zygmund** sa stal zakladateľom Chicagskej školy matematickej analýzy, ktorá sa orientovala na Fourierovu analýzu a jej aplikácie v oblasti riešenia parciálnych diferenciálnych rovníc. Vo svojich prácach študoval zovšeobecnenia Fourierovych radov a Fourierovej transformácie. Základnou myšlienkou celej harmonickej analýzy je skladanie funkcií. Tento odbor má široké praktické využitie, napr. v spracovaní elektromagnetických signálov, v kvantovej mechanike alebo aj v neurológii. Fourierova transformácia sa dnes v digitálnom svete využíva aj na niektoré populárne grafické, či zvukové formáty (napr. JPEG, či MP3) ako prostriedok na kompresiu údajov.

## Teória, prax, kultúra

Významný matematik **Antoni Zygmund** (\* 25. 12. 1900 – † 30. 5. 1992) sa stal uznávaným aj ako vysokoškolský učiteľ. O pojednaní *Miera a integrál* (1977) napísal Richard L. Wheeden: *Táto učebnica bola koncipovaná s výslovným zámerom poskytovať jednoduchý a rýchly prístup k najužitočnejším technikám miery a integrácie v modernej analýze reálnej premennej. Tento cieľ bol dosiahnutý s veľmi pozoruhodným úspechom.* „Publikácia *Goniometrické rady* bola a stále je jednou z najvplyvnejších kníh v histórii matematickej analýzy. Jej obrovská dlhovekosť (vyšla v niekoľkých vydaniach) je svedectvom o jej hĺbke a zrozumiteľnosti“ (Robert A. Fefferman).

Láskavý a veľkorysý človek **Antoni Zygmund** bol jedným z najvplyvnejších analytikov svojej modernej doby. Prispel k prehĺbeniu významu i rozšíreniu použitia matematickej kultúry v 20. storočí.



$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta).$$

## Závěrečné rozlučenie

Abecedný systém usporiadania medailónov neumožnil zaradiť zatiaľ do takýchto súborov aj niektorých ďalších význačných matematikov. Je pravdou, že spracúvam osudy len mŕtvych, ktorí už dopísali svoje dielo a podčiarkli svoj osud. Priznám sa bez mučenia, že mám spracované medailóny: *Banach, Bourbaki, Cavalieri, Clairaut, Fibonacci, Germainová, Hadamard, Kresa, Laplace, Lebesgue, Legendre, Pacioli, Peano, Poincaré, Riemann, Weyl*. Chcel by som si možno ešte pripraviť: Beltrami, Bernoulliovci, Borel, Borůvka, Brouwer, Bydžovský, Cohen, Courant, Dedekind, Fields, Freudenthal, Fubini, Halmos, Hardy, Hausdorff, Hermite, Huygens, Church, Kolibiar, Korec, Kronecker, Krygowská, Lichnerowicz, Littlewood, Luzin, Markov, Osgood, Péterová, Poisson, Rényi, Rota, Skolem, Thom, Quine, Veblen, Nevieľ, koľko toho ešte stihnem, no ak to bude stovka, tak to určite budem chcieť niekomu vnútiť. Spýtajte sa, ako som na tom, či som ešte živý, zdravý a normálny...

Ešte sa priznám k jednému poklesku. Zostavil a na vlastné náklady som vydal tlačou: **Päťročnica výročí významných M-F** (ISBN 978-80-89173-23-5), súbor 60 medailónov o matematikoch a fyzikoch, na každý kalendárny mesiac pri okrúhľom (deliteľnom piatimi) výročí \* alebo †, v priebehu piatich rokov.

Ponúkam päť obrázkov, možno tiež charakterizujúcich to, čo som asi chcel vyjadriť písaním etúd, esejí aj epizód o matematikoch.

Dušan JEDINÁK

