KATEDRA DIDAKTIKY MATEMATIKY
MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA UNIVERZITY KARLOVY

CESTY K MATEMATICE

Sborník konference

Praha, 25. a 26. září 2014

Antonín Slavík (ed.)

matfyzpress
VYDAVATELSTVÍ
MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTY
UNIVERZITY KARLOVY V PRAZE

Autoři

doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
RNDr. Růžena Blažková, CSc.
doc. RNDr. Leo Boček, CSc.
RNDr. Eva Davidová
Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.
RNDr. Dag Hrubý
RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.
PaedDr. Josef Kubeš
Mgr. Hana Mahnelová, Ph.D.
doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc.
doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.
RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
RNDr. Jakub Staněk, Ph.D.
RNDr. Petra Surynková, Ph.D.
PhDr. Alena Šarounová, CSc.
prof. PhDr. Stanislav Štech, CSc.
RNDr. Martina Štěpánová, Ph.D.
Bc. Yulianna Tolkunova

Recenzenti

doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.
RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D.
doc. Mgr. Robert Mařík, Ph.D.
RNDr. Martin Melcer, Ph.D.
RNDr. Vlasta Moravcová
RNDr. Pavla Pavlíková, Ph.D.
Mgr. Zuzana Pátíková, Ph.D.
doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.
RNDr. Irena Sýkorová, Ph.D.
RNDr. Martina Štěpánová, Ph.D.
RNDr. Dana Trkovská
Mgr. Lukáš Vízek

ISBN 978-80-7378-272-6

ÚVODNÍ SLOVO

Ve dnech 25. a 26. září 2014 se v Profesním domě na Malostranském náměstí v Praze, v jedné z historických budov Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, koná celostátní konference *Cesty k matematice.* Organizuje ji Katedra didaktiky matematiky MFF UK,[1] spolupořadatelem je Středočeská pobočka JČMF. Akce volně navazuje na konference *Jak připravit učitele matematiky*[2] a *Matematika a reálný svět*[3] pořádané na stejném místě v letech 2010 a 2012.

Konference je určena pracovníkům fakult připravujících učitele matematiky, středoškolským učitelům matematiky, doktorandům a studentům vyšších ročníků, kteří se připravují na učitelskou profesi s aprobací matematika pro třetí stupeň, pracovníkům různých výzkumných institucí a dalším zájemcům o problematiku vzdělávání.

Konference je zaměřena na následující okruhy:

- podpora motivace ke studiu matematiky a k pochopení jejího významu,
- metody a příklady přispívající k rozvíjení matematického poznání,
- zaměření přípravy budoucích učitelů na přístupy vedoucí ke zvýšení zájmu středoškolských studentů o matematiku.

Součástí konference je výstavka učebnic, učebních textů a dalších publikací, učebních pomůcek, bakalářských a diplomových prací studentů učitelství obhájených na MFF UK, a prodejní výstava publikací z nakladatelství Prometheus.

Tento sborník obsahuje texty většiny konferenčních příspěvků. Seznam účastníků a některé další materiály jsou k dispozici na webové stránce konference:

`http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/konference2014/`

Děkujeme programovému a organizačnímu výboru za přípravu konference, řečníkům za přednesení příspěvků a dodání jejich písemné verze a recenzentům za pečlivou kontrolu všech textů a řadu podnětných připomínek.

---

[1] Programový výbor: Jarmila Robová (předsedkyně), Jindřich Bečvář, Martina Bečvářová, Leo Boček, Adolf Karger, Oldřich Odvárko, Alena Šarounová (KDM MFF UK), Dag Hrubý (Gymnázium v Jevíčku), František Kopecký (Gymnázium J. Nerudy v Praze)
Organizační výbor: Antonín Slavík (předseda), Alena Blažková, Zdeněk Halas, Jana Hromadová, Jakub Staněk, Petra Surynková, Martina Štěpánová (KDM MFF UK), Vlasta Moravcová, Luboš Moravec, Dana Trkovská, Lukáš Vízek (doktorandi)

[2] Texty příspěvků z této konference byly publikovány ve sborníku J. Bečvář, M. Bečvářová, A. Slavík (eds.): *Jak připravit učitele matematiky.* Matfyzpress, Praha, 2010. Jsou též k dispozici v elektronické verzi na webové stránce
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/konference2010/`.

[3] Texty příspěvků z této konference byly publikovány v elektronickém sborníku A. Slavík (ed.): *Matematika a reálný svět.* Matfyzpress, Praha, 2012. Je k dispozici na adrese
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/konference2012/sbornik.pdf`.

OBSAH

Program konference

CESTY K MATEMATICE

(Profesní dům, MFF UK, Malostranské nám. 25, Praha 1)

Čtvrtek 25. 9. 2014 (refektář Profesního domu)

8,45 – 10,00	Registrace účastníků
10,00 – 10,30	Zahájení konference
10,30 – 11,20	S. Štech: *Vztah žáků k poznání – mýtus „buněk na ...“ vs. ideál mobilizace?*
11,20 – 12,10	L. Pick: *Rozličné radosti matematikova života*
12,10 – 13,30	Přestávka na oběd
13,30 – 14,00	J. Bečvář: *O motivaci*
14,00 – 14,30	Z. Halas: *Motivační příklady z antické matematiky*
14,30 – 15,00	J. Robová, O. Odvárko: *Didaktická příprava budoucích učitelů matematiky a praxe*
15,00 – 15,30	A. Slavík: *Neobvyklé sady hracích kostek*
15,30 – 16,00	Přestávka na kávu
16,00 – 16,30	E. Davidová: *Matematika s radostí – interaktivní testy a hry*
16,30 – 17,00	H. Mahnelová: *Vybrané úlohy projektu MatemaTech*
17,00 – 17,30	D. Hrubý: *Zajímavé rovnice a nerovnice*
17,30 – 18,00	E. Řídká, D. Tomandlová: *Společná část maturitní zkoušky aneb berme vážně výsledky žáků v matematice*
18,00 – 19,00	Přestávka na večeři
19,00 – 21,00	Kulturní program v refektáři Profesního domu

Pátek 26. 9. 2014 (posluchárna S9 v 1. patře)

9,00 – 9,30	J. Kubeš: *Motivuje státní maturitní zkouška ke studiu matematiky?*
9,30 – 10,00	A. Jančařík: *Matematická analýza na středních školách: minulost, současnost a budoucnost?*
10,00 – 10,30	R. Blažková: *Některé příčiny problémů středoškolských studentů v matematice*
10,30 – 11,00	Přestávka na kávu
11,00 – 11,30	V. Blažek: *Aritmetické operace skrývající se v systémech číslovek různých jazyků*
11,30 – 12,00	J. Hromadová: *Sbírka aplikačních úloh ze středoškolské matematiky*
12,00 – 13,30	Přestávka na oběd

13,30 – 14,00	M. Štěpánová: *Lokalizace vlastních čísel*
14,00 – 14,30	J. Staněk: *Náhoda kolem nás*
14,30 – 15,00	P. Surynková: *Geometrické projekce s využitím 3D modelování*
15,00 – 15,30	Přestávka na kávu
15,30 – 16,00	A. Šarounová: *Sčítání křivek – grafický experiment*
16,00 – 16,30	L. Boček: *Matematická olympiáda – jedna z cest k matematice*
16,30 – 17,00	Závěr konference

VZTAH ŽÁKŮ K POZNÁNÍ – MÝTUS „BUNĚK NA …“ VS. IDEÁL MOBILIZACE?

Stanislav Štech

Úvod: motivace k učení – „kámen mudrců“ školního vzdělávání?

Matematika vystupuje v představách mnoha lidí jako téměř emblematický příklad školního vzdělávání odtrženého od života. Je to vysoce abstraktní cvičení mysli, které spíše třídí děti „nadané“ od těch ostatních. A většinu z nich nepřipravuje na něco potřebného, co se jim bude někdy v životě hodit – snad s výjimkou jednoduchých kalkulů blízkých každodenní protoaritmetice. Tuto představu posiluje ještě fakt, jak vyplývá z různých dotazníkových šetření, že postoje našich žáků k matematice nejsou moc dobré, že je výuka nudí nebo je pro ně strašákem. Domnívám se, že hledat souvislosti vztahu žáků k matematice (jakož i k jiným předmětům) a jejich úspěšnosti v ní je třeba v širším kontextu. Zamyslet se musíme na jedné straně nad tím, co se označuje jako širší vztah žáka k poznání, na straně druhé je třeba provést sondu do vnitřní struktury poznávací činnosti, kterou žákům ve výuce nabízíme. A obě úvahy pak vzájemně propojit.

Motivace – tento souhrn pohnutek, popudů, vnějších podnětů, které dodávají energii, řídí a usměrňují činnost žáka – je totiž podmínkou *sine qua non* pro kultivaci jeho vědomostí, schopností, dovedností i osobnostních vlastností. Bez zvládnutí úkolu motivovat učitel selhává na samém začátku svého úkolu. Když se žák nepustí do úkolu, cvičení, do přemýšlení – jak usuzovat na jeho kognitivní slabiny a silné stránky? Přitom je zřejmé, že svou roli v tom, jak učitel bude úspěšný, hraje i přesvědčení učitele. Někdy se hovoří o skryté, implicitní epistemologii matematiky. Ta je nejen sdílena didaktiky a učiteli, ale ve výuce je předávána žákům. V literatuře se tradují tři implicitní epistemologie. A každá z nich má různé důsledky pro motivaci žáků a pro jejich vztah k matematice.

1 Implicitní epistemologie: co je předmětem matematiky a co znamená „dělat matematiku“?

Jak známo, nejstarším epistemologickým pojetím matematiky je platónská verze jakési *nebeské matematiky* (Desanti 1968). Ta je rozšířena nejen v obecném povědomí, ale i mezi mnoha učiteli. Vychází z představy, že matematické ideje existují před tím, než je uchopí matematik, jaksi „o sobě“. Jsou to čisté a evidentní ideje a matematik (i ten, kdo se matematiku učí) je jen objevuje (např. jejich vazby a strukturu). Tento svět matematických idejí v podstatě nezávisí na jeho činnosti; je transcendentní a je dostupný percepcí a nazřením. Francouzský epistemolog René Thom říká, že v tomto pojetí jsou matematické struktury nejen nezávislé na člověku, ale ten o nich má vždycky jen neúplnou a fragmentární představu (1974). Úloha školního vyučování matematiky pak spočívá v tom, že učitel předkládá co nejjasněji svět matematických idejí a napomáhá žákovi, aby si osvojil abstraktní myšlení. Jsme v metafoře světla a percepce čili pohledu, kdy „okem duše" je žákova mysl. Z této implicitní epistemologické koncepce vychází tzv. tradiční vyučování, které staví především na výkladu následovaném cvičeními. Vztah žáků k matematice je tedy vztahem kontemplace, nazírání, vhledu. Ten nejčastěji vyúsťuje v binární logiku typu „vidí – nevidí" podstatu poznatku (operace, axiomu). Uvedené pojetí matematiky a z něj odvozený způsob vyučování ovšem zakrývají nezbytné předpoklady každého jedince k odhalení podstaty a funkce poznatku. Přehnaně pak sugerují vysvětlení jeho úspěšného osvojení *nadáním* – ať už ve významu biologickém („má na to buňky" nebo „je to bedna na matiku") nebo sociokulturním („chybí mu kulturní kapitál abstraktního kódu"). Význam motivace žáka k učení je v tomto pojetí silně omezen. Buď má nadání a pohybuje se ve vzestupné spirále úspěchu a následné aktivizace, nebo ho nemá, a jeho rezignace je jen logickým důsledkem.

Druhá vlivná koncepce matematiky může být označena jako *pozemská.* Ta nepředpokládá, že existují autonomní matematické entity. Matematické poznatky jen odrážejí strukturu přírodního a sociálního světa. Matematik nenazírá nějaké nezávislé abstraktní entity; naopak, abstrahuje (spíše: extrahuje) ze světa ideelní strukturu tohoto světa, která je matematická. Matematika opět existuje kdesi mimo jedince, ale jako struktura, kterou musí vytěžit, nikoli jako nezávislé ideje. Není transcendentní, ale imanentní. Z této implicitní epistemologické koncepce vychází vyučování reformní, či tzv. nová pedagogika, která se snaží, aby dítě objevilo matematiku především (nebo jen) manipulací s konkrétními matematickými „předměty". Velký důraz je pak kladen na užití matematiky v různých praktických situacích. Dítěti se tak ukazuje, že (a) matematika je užitečná, tj. je k něčemu v praktickém životě a (b) matematické pojmy, zákonitosti a struktury existují, mají svou racionalitu, kterou je důležité se naučit číst tak, jak to umějí autority. V každém případě dělat matematiku znamená znovu objevovat již dané, ale tentokrát nikoli percepcí (vyžadující především memorizaci a automatizaci vzorových postupů), nýbrž analytickou manipulací. Vztah žáků k matematice je určován jeho vlastní aktivitou, cvičeními, zapojením do řešení úkolů. Motivace žáka je zásadně určována „zvenku" a klíčové jsou podněty učitele, který klade důraz na vztah matematických poznatků k jejich užití v každodenním světě.

Třetí koncepci matematiky můžeme označit jako *instrumentální* – matematické poznatky představují nástroje, které slouží k řešení *problémových situací.* Matematika neexistuje předem ani na nebi, ani skryta ve světě kolem nás. Dělat matematiku neznamená objevovat, ale sám tvořit. Hlavním konstatováním je, že matematika je historicky vytvořena za určitých sociálních podmínek konkrétními lidmi, kteří sami hledali odpověď na konkrétní problémy. Matematická činnost je pak tvorba konkrétních instrumentálních operací a současně i utváření určitého pole operací, jejich propojené sítě.

Z této epistemologické koncepce vychází vyučování, které metodologicky spoléhá na to, že učení nastane, když se podaří matematické poznatky ukázat jako nástroje řešení problémových situací. Ty nemusejí být jenom konkrétní a vycházet z každodenního života. A dále, když se podaří pomoci žákovi vymyslet (invent) pojem nebo pravidlo umožňující najít řešení takové situace. Není přitom možné vymyslet cokoli, protože zadané situace musejí mít potenciál pro vytváření matematických instrumentů a vykazovat vnitřní normativitu, resp. požadavky na činnost, kterou dítě může v situaci dělat. Nemůže si tedy nezávazně hrát a nerespektovat omezení situace.

Vztah žáka k matematice je definován jako tvůrčí úkol hledání řešení problémů, který zakrývá význam memorizace, opakování, drilu, upevňování operačních invariantů. Motivace žáků spočívá ve vybízecím charakteru problémů a stojí na předpokladu, že všechny žáky zaujme a přivede k poznávací práci záhadný rébus.

Vývoj nahlížení na matematiku a v důsledku na vyučování/učení se matematice vedl v posledních desetiletích k tomu, že dominantní platónská epistemologie je ve školách stále více doplňována hrovými aktivizujícími metodami a občas se objevuje i instrumentální nebo konstruktivistické pojetí. Myšlenka, že učit se matematice znamená ji „dělat“, tj. tvořit, produkovat, vyrábět nástroje řešení úkolů (problémových situací) v podobě matematických pojmů a postupů, je dnes obecně sdílena. Je však přijímána především na úrovni diskursu a především didaktiky a psychology. Ve školách zaznamenává aplikace této myšlenky leckdy jen vlažné přijetí a často vede k neúspěchu.

To nás musí vést k zamyšlení, zda přehnaný důraz na učení se matematickým pojmům v problémových situacích přibližujících se každodennímu životu (situované učení) je tím nejúčinnějším postupem. A zda při vyučování nemá vyniknout právě specifičnost školní formalizované matematiky ve srovnání s matematikou každodenní. Vždyť cílem školní socializace v kognitivní oblasti obecně je koneckonců přispět k vývoji psychických funkcí a osobnosti dítěte.

Dále nás mnohé negativní výsledky vedou k otázce, zda „aktivita“ či lépe poznávací činnost žáka nestojí za diferencovanější analýzu. A zda z toho neplyne, že učení se matematice je složitě komponovaná činnost zahrnující třeba i memorování definic, rutinní procvičování stejně jako obtížné formulování hypotézy tváří v tvář problémové situaci.

Nejprve však pár slov k širšímu vztahu žáka k pozná(vá)ní, jehož je školní učení zvláštním případem. A který ovlivňuje motivaci žáka učit se.

2 Vztah žáků k poznání je individuální i sociální povahy

Pojem *vztah žáka k poznání* původně Charlot (1991) vymezil jako silně sociálně a kulturně determinovaný – rodinou a mimoškolním lokálním světem, v němž se žák pohybuje. Jeho definice říká, že „vztah k poznání je souhrnem představ, očekávání, soudů a hodnocení, které se týkají sociálního smyslu a funkce poznání a školy, vyučovacího předmětu, konkrétní situace učení i sebe sama v něm".

Vztah žáka k poznání má tři základní dimenze. První z nich nazývá Charlot *epistemickou.* Ta vyjadřuje míru pochopení, že poznávat a učit se je něco zcela jiného, než se naučit, jak třeba opravit kolo nebo přemluvit kamaráda, aby se mnou šel do kina. První komplikací při osvojování epistemické dimenze ovšem je, že epistemický prvek „dělání matematiky" je jiný než v dějepisu nebo v jazyce (hovorově řečeno: matematici jsou jinak „trhlí" než historici nebo filologové). Druhou komplikaci představuje, že epistemická dimenze se nedá předat přímo, obtížně se o ní hovoří: co to vlastně ti lidé dělají a proč, jak o tom mohou mluvit tou zvláštní řečí, v jakém divném světě to žijí. Ale má-li být žák ve škole v učení úspěšný, musí se i s touto skutečností, mnohdy tak odlišnou oproti tomu, co zná z domova a své lokální kultury, vyrovnat.

Druhou dimenzi můžeme označit jako *kognitivní.* Ta je mnohem více viditelná pro žáky i učitele. A na ni se zaměřuje jejich pozornost. Vyjadřuje vztah žáků ke konkrétním poznávacím operacím. Ten zahrnuje takové kroky, jako je např. pochopení vztahu mezi čitatelem a jmenovatelem u zlomku, práce se závorkou a vytýkáním před ní, rozdíl mezi aritmetickou a geometrickou řadou apod. Tyto operace musí žák automatizovat, aby dospěl do stadia, kdy na ně nemusí myslet a užíval je jako znakové/symbolické nástroje pro poznávací činnost vyššího řádu. Jen tak se mu uvolňuje kapacita pro pochopení smyslu učení se matematickému poznatku vyjádřenému v podobě axiomů, vzorců apod. Otázkou je, zda lze vůbec dospět k epistemické dimenzi matematiky bez zvládnutí kognitivních nástrojů. Výzkumy pracovní a dlouhodobé paměti (např. J. Sweller, 1988; Paas, 2004) i stylů učení (přehledově Mareš, 1998) ukazují, že je to těžko představitelné.

Třetí dimenzí, kterou Charlot zdůrazňuje, je dimenze *identitní.* Zjednodušeně ji můžeme vymezit jako žákovu odpověď na otázku: co znamená učení v tomto předmětu právě pro mě? Každý žák má nějaké minulé zkušenosti s poznáváním a učením. Zpracovává je do představ o sobě, srovnává se s druhými, ať už se členy rodiny nebo se spolužáky. Také si nějak představuje svou budoucnost, co by chtěl dělat a jaký by chtěl být. A to ovlivňuje jeho mobilizaci ve vztahu ke konkrétním kognitivním operacím, které po něm předmět učení vyžaduje.

Charlot (1991) zjistili několik odlišných rovin identitní dimenze. Podle jejich dat se žáci neuvědomovaně „situují" v každém aktu učení vůči konkrétnímu poznatku (krácení zlomků, rovnice a neznámé), vůči celému vyučovacímu předmětu (matematika a ta její zvláštní řeč) i vůči příslušné pedagogické situaci (opakovací cvičení, pětiminutovka, řešení slovní problémové úlohy).

U školsky neúspěšných žáků ze znevýhodněného sociokulturního prostředí identifikovali následující roviny s typickou modální větou, která je charakterizuje. *Sociální* rovina identitního vztahu k poznání těchto žáků byla ilustrována výrokem „matika – to je záležitost úředníků, učitelů a různých vědátorů, nic pro nás, obyčejné lidi, jako jsou mí rodiče, sourozenci a známí". *Institucionální* rovina se zejména na konci základní školní docházky projevovala výroky typu „matika je pro ty, kdo chtějí jít dál na školy, pro mě, když se chci jen vyučit, to nemá význam". *Kulturní* prvek v biografické dimenzi vztahu k poznání se dá idealtypicky vyjádřit výrokem: „matika je nuda ve srovnání s muzikou nebo skejtováním". A konečně ryze *individuální* rovina spočívala ve srovnání s druhými lidmi (nejčastěji se spolužáky) a jejich vlastnostmi („jsem sice hloupý na matiku, ale nechtěl bych se podobat těm, co v ní vynikají").

Opačně vyznívající výroky lze jistě najít u žáků úspěšných (Charlot a kol. prováděli své výzkumy v socioekonomicky znevýhodněných předměstích Paříže). Podstatná v našem kontextu je však skutečnost, že motivaci k učení a její vztah k úspěšnosti žáka nelze dostatečně pochopit, když zůstaneme uzavřeni v úzkém rámci osobnosti žáka, úrovně jeho rozumových schopností (IQ), jeho píle a individuálně interpretovaných vlastností (za které si může sám). Jedinečná je pak u každého žáka *kombinace* zmíněných rovin a dimenzí vztahu k poznání. A právě ta činí otázku efektivnosti učení i motivace žáka tak složitou.

3 Co konkrétně žáci dělají a jak se mění jejich vztah k učení?

A. N. Leontjev upozorňuje na hierarchickou a vnitřně diferencovanou strukturu každé činnosti, včetně poznávací. Chápe činnost (activity) jako velmi molární jednotku tvořenou dílčími úrovněmi, které představují úkoly nebo akce (tasks či actions). Každý úkol je na nižší úrovni zase tvořen operacemi (1978). Uvedené členění, které jsem podrobněji komentoval dříve (Štech, 2008), respektuje výše uvedené poznatky o dimenzích a rovinách vztahu žáka k poznání a učení. Jeho pohled se však zaměřuje na obsah činnosti, tj. na její předmět, a také na to, zda poznávací činnost má pro žáka smysl (a jaký). Nejde tedy ani tolik o to, kdo dítěti zadává otázky a staví problém, ani zda forma činnosti je dost hrová nebo utilitárně aplikační.

Zajímavé na tomto pojetí činnosti jsou vztahy mezi jednotlivými úrovněmi činnosti a jejich funkcemi. Ukazuje se, že je potřebné odlišit vztahy *účinnosti* procvičování operací a plnění úkolů od vztahů vytvářejících *smysl* činnosti samotné. A přitom zajistit jejich vzájemnou podmíněnost. Úrovně činnosti lze přehledně vyjádřit v tabulce.

Činnost	Předmět	Funkce
I. Molární: Algebraické transformace	**Motiv** – ovládnout principy algebry – estetický prožitek – být dobrý právě v matematice …	**Povzbuzující** Udržet úsilí při překonávání překážek a obtíží vzniklých na úrovni I a II
II. Úkoly: – sestrojení grafu funkcí různého typu – vyřešení slovní úlohy – řešení soustav rovnic – atd.	**Cíl** – nalézt správné řešení – identifikovat hodnotu neznámých – atd.	**Orientační** – správná vstupní analýza úkolu – dobrá „příprava“ řešení – rozvržení kroků, jejich návaznosti a časové dotace – atd.
III. Operace: – násobení, krácení – poziční zápis – diskriminace symbolů – pamětní zvládání operací	**Nástroje** materiální i symbolické (včetně kognitivních funkcí jako paměť, pozornost, aritmetické operátory apod.)	**Realizační** – materiální stopy (poznámky, náčrty, pomocné výpočty) – nezbytná technická podpora (infrastruktura) operací

Vztah mezi kvalitou zvládnutých operací (III.) a kvalitou řešení úkolů (II.) vyjadřuje *účinnost* poznávací činnosti/učení, obvykle v podobě „mikrogenetických“ zlepšení. Automatizace jako výsledek opakování invariantů je příkladem takového zlepšení. Postupně dochází ke zkrácení operace a k jejímu ovládnutí do té míry, že se žákovi otevírá prostor pro vyšší úroveň obecnosti operačního pojmu a k rozšíření škály úkolů, které s jeho pomocí dokáže v dané oblasti učiva řešit.

Vztah mezi povahou, četností, obtížností a hlavně provázaností (artikulací) úkolů (II) a podstatou činnosti vyjádřenou v jejím předmětu (I) definuje *smysl* učení.

Učení se matematickému poznatku (pojmu) je tedy složitě strukturovaná činnost zahrnující třeba i memorování definic, rutinní procvičování a upevňování operací, stejně jako obtížné formulování hypotézy tváří v tvář problémové situaci. Nabídka pertinentních úkolů doplněná jen verbální persuazí a modelovou demonstrací bez propracování činností na I. a II. úrovni nemůže vést k úspěchu. „Smysl“ totiž nemůže být žákovi verbálně zvnějšku vnucen; žák musí mít nástroje k tomu, aby si ho vypracoval sám. Bez účinných operací (zahrnujících i mentální funkce: pozornost, paměť) a zvládaných úkolů není možné dospět k vytvoření motivu smysluplného učení. Jen sama tato účinnost však nezajistí, že žáci dospějí k nalezení smyslu v tom, co se jim může jevit jako nelogické zřetězení nesouvisejících úkolů nebo dokonce samoúčelného drilu izolovaných operací.

V našem výzkumu vztahu českých žáků k poznání jsme v letech 1992, 2002 a 2011 sledovali semi-projektivní metodou váhu školních a intelektuálních činností a poznatků v jejich subjektivním oceňování toho, co se dosud v životě naučili (PSŠE 2000, 2004; Kubín, 2012). Žáci pocházeli z pražských základních škol a sociální složení zahrnovalo všechny socioekonomické vrstvy. Obsahová analýza ukázala, že „školní učení“ pro ně představují subkategorie trivium, konkrétní obsahy učiva (častěji ovšem podávali výčet názvů vyučovacích předmětů s ohledem na jejich důležitost a využitelnost pro budoucnost) a dále metodologické a normativní poznatky společně s metakognitivními a metodologickými poznatky, které odrážejí reflexi žáků nad školou a k učením.

Souhrnně se dá říci, že žáci si školní učení spojují zejména s osvojením základů (trivium) – tvoří polovinu všech jejich výroků o škole. Na druhém místě pak figurují konkrétní obsahy (vědomosti), ale jejich váha osciluje: v r. 1992 představovaly tyto konkrétní dovednosti třetinu všech školních a intelektuálních poznatků, v r. 2002 necelou pětinu a v r. 2011 znovu téměř 29 %.

Vzhledem k výše uvedené struktuře poznávací činnosti nás ovšem nejvíc zajímá, jak žáci vnímají smysl těchto činností, což se projevuje v kritické reflexi a hodnotících soudech o vztahu úkolů a operací, resp. úkolů a povaze činnosti v příslušném předmětu. Z oněch konkrétních vědomostí a dovedností tvořily výše zmíněné subjektivně uvědomované normativní, metodologické nebo metakognitivní dovednosti v letech 1992 a 2002 10 až 12 %, zatímco v r. 2011 6,4 %. Představují je výroky uvádějící, že „díky matice jsem se naučil myslet a logicky uvažovat“, „umím už argumentovat“, „naučil jsem se klást otázky a taky vyvodit závěr“ apod.

Žáci zde kladou důraz na schopnost samostatně pozorovat a experimentovat, porovnávat získané výsledky, kriticky je posoudit a vyvodit z nich závěry pro další využití. Pro tuto schopnost v našich datech (subkategoriích) konstatujeme statisticky významný propad oproti roku 2002. Dnešní žáci tuto kompetenci zjevně naplňují méně, než před deseti lety.

Souhrnně lze na základě výsledků našich šetření říci, že žáci z výzkumného souboru 2011 si daleko méně než jejich předchůdci z roku 2002 uvědomují význam základních operací, jejich propojení s předepisovanými úkoly a skryté metakognitivní zisky z učení.

4 Rizika motivování k učení se (matematice)

Z dosud uvedeného vyplývá, že sama motivace žáka (chuť dítěte učit se, snaha, píle) představuje špičku ledovce, jehož podstatná část je nám skryta. Je-li navíc vyučování vedeno v duchu matematiky „nebeské“ (viz výše), je argument „buňkami na matematiku“ (jazyky, chemii atd.) po ruce. Jeví se jako nejsnazší vysvětlení žákových úspěchů nebo neúspěchů. Stranou mohou zůstat dopady sociálně a kulturně determinovaného vztahu žáka k poznávací práci i promýšlení vnitřní struktury činností, které učitel žákům nabízí. Výsledkem je defétistická strategie rezignace na klíčový úkol učitele – každému dopřát právo na zlepšení.

Sociokulturně orientovaní psychologové a pedagogové ovšem nezřídka v zápalu inkluzivního diskursu akceptují jakýsi povrchní optimismus skrytý v „mobilizační strategii“. Rezignují na potřebné pre-rekvizity vyžadující tvrdý dril a upevnění základních operací, zajištění účinnosti při řešení jednotlivých úkolů (viz Leontjevovo schéma vnitřní struktury činnosti) a vrhají se přímo na aktivizaci dětí různými náhražkovými aktivitami hrové či kognitivně méně náročné povahy. Dítě musí být zapojeno, aktivní, vtaženo do projektu, bavit se atd. Je-li navíc vyučování vedeno v duchu matematiky konstruktivisticky „pozemské“, je bezmezná víra v mobilizaci pro mobilizaci často cestou do slepé uličky.

Literatura

[1] B. Charlot, *Budu dělník jako táta, tak k čemu je mi učení?* In Groupe Français d'Education Nouvelle, *Všichni na jedničku! Alternativní didaktické postupy*, Praha, Karolinum, 1991, s. 129–151.

[2] B. Charlot, *L'épistémologie implicite des pratiques d'enseignement des mathématiques.* In R. Bkouche, B. Charlot, N. Rouche, *Faire des mathématiques: le plaisir du sens*, Paris, Armand Colin, 1991, s. 171–194.

[3] B. Charlot, E. Bautier, J.-Y. Rochex, *Ecole et savoir dans les banlieues … et ailleurs*, Paris, Armand Colin, 1992.

[4] J. T. Desanti, *Les idéalités mathématiques* Paris, Seuil, 1968.

[5] D. Kubín, *Vztah žáků k učení – váha a struktura intelektuálních a školních poznatků*, bakalářská práce, PedF UK, katedra psychologie (vedoucí S. Štech), 2012.

[6] A. N. Leontjev, *Činnost, vědomí, osobnost*, Praha, Svoboda, 1978.

[7] J. Mareš, *Styly učení žáků a studentů*, Praha, Portál, 1998.

[8] F. Paas, A. Renkel, J. Sweller, *Cognitive load theory: instructional implications of the interaction between information structures and cognitive architecture*, Instructional Science 32 (2004), 1–8.

[9] Pražská skupina školní etnografie, *Co se v mládí naučíš …*, Praha, Pedagogická fakulta UK, 2001.

[10] Pražská skupina školní etnografie, *Čeští žáci po deseti letech*, Praha, Pedagogická fakulta UK, 2004, s. 124–146.

[11] J. Sweller, *Cognitive load during problem solving: effects on learning*, Cognitive Science 12 (2) (1988), 257–285.

[12] S. Štech, *School mathematics as a developmental activity.* In A. Watson, P. Winbourne (eds.), *New directions for situated cognition in mathematics education*, London, Springer, 2008, s. 13–30.

[13] R. Thom, *Les mathématiques „modernes“, une erreur pédagogique et philosophique?* In R. Jaulin (ed.), *Pourquoi la mathématique?*, Paris, Éditions 10–18, 1974, s. 39–88.

prof. PhDr. Stanislav Štech, CSc.
Pedagogická fakulta UK
M. D. Rettigové 4
116 39 Praha 1
stanislav.stech@pedf.cuni.cz

O MOTIVACI

Jindřich Bečvář

V první části tohoto příspěvku se zamyslíme nad reformními aktivitami posledního čtvrtstoletí a nad jejich důsledky. Připomeneme některé příčiny současného neuspokojivého stavu znalostí a dovedností žáků a studentů, který je zjevný zejména v počátcích středoškolského studia, při maturitách a příchodu na školy vysoké. Zmíníme se rovněž o plošném testování, které se pro naše základní a střední školství připravuje.

Ve druhé části se budeme věnovat výhradně matematice. I přes obecně nepříznivé podmínky, které v našem školství panují, se pokusíme naznačit cesty, po kterých by se naše kroky směřující k dílčím zlepšením matematického vzdělávání mohly ubírat.

Ve třetí části uvedeme několik příkladů a témat, kterými lze vzbudit zájem žáků a studentů a spřátelit je s matematikou.

V závěru připojíme několik myšlenek a mravoučných úvah na téma „jak dál“.

1 Uplynulé čtvrtstoletí

Po roce 1990 došlo v naší školské sféře k řadě převratných změn, většina se velmi citelně dotkla i matematiky. Některé z nich jsou stručně charakterizovány v následujících bodech.

- Matematické učivo na základních i středních školách bylo redukováno v souvislosti se snížením počtu vyučovacích hodin. Dnes proto i na takové vysoké školy, na nichž je vzdělávání víceméně postaveno na matematice, přicházejí ve značném počtu studenti, kteří se dosud nesetkali s komplexními čísly, kombinatorikou, pravděpodobností a statistikou, stereometrií, analytickou geometrií v prostoru, diferenciálním a integrálním počtem atd., navíc vůbec netuší, co to je důkaz a jaký je jeho význam v matematice.
- Byly zrušeny osnovy, zaváděny standardy, rušeny standardy, zaváděny rámcové vzdělávací programy. Učitelé jednotlivých škol museli na svých školách vytvářet rozsáhlé, mnohasetstránkové školní vzdělávací programy, místo aby se věnovali výuce, žákům a studentům a svému dalšímu vzdělávání. Žáci a studenti dnes sice získávají tzv. *klíčové kompetence*, nemají však *znalosti* a *dovednosti.*
- Byly zrušeny povinné maturity z matematiky. Již řadu let jsme svědky křečovité snahy o jakési jejich znovuzavedení (tzv. *státní maturity*). V celém dlouhém procesu jejich vytváření jde hlavně o čerpání značných finančních prostředků ze státního rozpočtu nikoli o samotné maturity.

- Soustavně bylo a je pranýřováno tzv. *biflování* a *memorování*. Žáci i studenti proto usuzují, že se nemusí (nebo dokonce nemají) *učit*, že to je škodlivé, že takovou věc po nich nikdo rozumný nemůže vyžadovat. Úzce to souvisí s proklamacemi *nic není třeba se učit, vše se přece dá najít na internetu*. Je tak bohužel potlačován nejen rozvoj paměti, ale i rozvoj myšlení, které musí být založeno na operování s dobře osvojenými pojmy a poznatky.
- Neustále je odsuzován tzv. *dril*. Pod heslem *Pryč s drilem!* bylo a je likvidováno procvičování poznatků, pracovních postupů a nejrůznějších početních i konstrukčních algoritmů. Mnohde došlo k výrazné redukci či úplnému odstranění domácích úkolů. Připomeňme, že procvičování je nesmírně důležité, vede k nabývání užitečných návyků nezbytných k získávání dalších poznatků, k rozvíjení dalších dovedností a k zahájení vyššího stupně vzdělávání. Upustilo se od pravidelného opakování probraného učiva, které vede k upevnění znalostí a dovedností, k fixování návyků (dobře připravený student nemusí při výuce derivací a integrálů přemýšlet, jak se pracuje se zlomky, jak se upraví algebraický výraz apod., a může se plně soustředit na derivování či integrování).
- Moderní vyučovací metody (*e-learning*, *projekty*, *konstruktivní metody*, *badatelský přístup* apod.) jsou bohužel stavěny do protikladu ke klasickým, které jsou zcela zavrhovány. Přehnaná propagace výpočetní techniky a moderních technologií často vede k neplodnému hraní si s počítačem, k bezbřehému bloudění po internetu. Zdůrazněme, že moderní technologie je smysluplné využívat tam, kde to přináší výrazné klady, ke složitým výpočtům, k rýsování komplikovaných obrázků, k domácí přípravě a samostatné práci apod. Viz například článek Š. Gergelitsové a T. Holana [15].
- Propagovány jsou rovněž plytké diskuse nepodložené jakýmikoliv znalostmi o diskutovaném tématu, což mnohé žáky (a bohužel i učitele) velice baví; jedná se totiž o činnost intelektuálně nenáročnou na přípravu (studentů i učitele).
- Financování škol podle počtu studentů vede k boji o studenty, k razantnímu snižování požadavků na přijímané studenty, k rušení přijímacích zkoušek na střední i vysoké školy, k podbízení všeho druhu (*dostanete notebook, máme klub, čajovnu, hřiště, máme pomalované zdi a lavice poházené po učebnách, …*). Žáci základních škol, kteří před lety usilovali o přijetí na střední školu, propočítali Bělounovu sbírku a přišli na střední školu matematicky velmi dobře vybaveni. Dnes je zcela jiná situace. Žáky nic nenutí se učit a připravovat se na následné studium na středních školách. Na nich je přece míst dost! Ani studenty středních škol nic nenutí se učit a připravovat na budoucí studium na vysokých školách. I na nich je míst dost. Vždyť usilujeme o co největší procento „vysokoškolsky vzdělaných“ osob v populaci (tzv. masifikace). Opět přišlo ke slovu staré známé heslo *Dohnat a předehnat!*

- Vznikla řada univerzit, řada škol s nejrůznějším zaměřením, řada škol soukromých. Bohužel, mnohé nemají příliš dobrou úroveň.[1]
- Do škol vstoupila nesprávně chápaná a prosazovaná svoboda. Učitel sice dostal mírnou volnost ve výběru témat, která bude učit, velmi často je však tlačen do tzv. moderních vyučovacích metod, bývá ostouzen, pokud učí tzv. frontálním způsobem. Žáci a studenti dostali obrovskou volnost. Mnohde nemusí mít učebnice, sešity, nemusí psát domácí úkoly, nemusí se příliš podrobovat školní kázni, nemusí případně do školy chodit, na některých školách mohou mít stovky neomluvených hodin. Studentům a rodičům musí učitelé a škola ve všech směrech, vždy a za jakýchkoli okolností vycházet vstříc.
- Práva žáků, studentů a jejich rodičů vůči učitelům a škole byla výrazně posílena, povinnosti žáků a studentů byly silně omezeny, prakticky vymizely. Na mnoha školách je cítit strach z právníků a z rodičů-sponzorů.
- Soustavně kladený důraz na metodu chválení studentů bez ohledu na jejich výsledky spolu s prosazováním slovních hodnocení za současného zpochybňování a zesměšňování klasického známkování vedlo u mnoha studentů k nezdravým pocitům spokojenosti s dosahovanými výsledky, které je nemotivuje k většímu výkonu. Chybí jim srovnání s ostatními. K němu bohužel většinou dojde příliš pozdě (u maturity, na vysoké škole, po nástupu do zaměstnání).
- Mnoho škod v postojích veřejnosti ke vzdělanosti, školám a učitelům napáchala média.

To vše se v uplynulém období dělo pod hesly *humanizace*, *zlepšení atmosféry ve školách*, *zlepšení vztahu ke vzdělávání* apod. Jedním z takovýchto hesel bylo rovněž *zvýšení obliby matematiky.* Stav, do něhož jsme po čtvrtstoletí dospěli, je bohužel v příkrém rozporu jak s tehdejšími proklamacemi školských reformátorů, tak s tehdejšími přáními a očekáváními společnosti.

- Výrazně poklesla obliba matematiky.
- Výrazně poklesla připravenost k dalšímu studiu (při přechodu ze základní školy na školu střední, při přechodu ze střední školy na školu vysokou, při nástupu na doktorské studium, při nástupu do praxe).
- Výrazně poklesla všestranná úroveň znalostí a dovedností maturantů, a to nejen v matematice, přestože se dnes maturuje až v devatenácti, resp. ve dvaceti letech (dříve v osmnácti, ale i v sedmnácti letech).
- Výrazně poklesla obecná připravenost maturantů k vysokoškolskému studiu. Mnozí studenti přicházejí na vysoké školy nejen bez znalostí a dovedností, které bývaly dříve zcela běžné, ale zejména bez studijních a pracovních návyků, bez jakéhokoli vztahu k řádnému plnění povinností. Nejsou připraveni sledovat přednášky, dělat si poznámky, soustavně pracovat. Rok od roku z nich v prvním ročníku vysokoškolského studia vyzařuje větší a větší údiv: „Co po nás proboha chcete?“

---

[1] Karel Čapek roku 1933 napsal: *… povážlivá otázka, nemáme-li snad vysokých škol a stolic příliš mnoho …* ([11], str. 23)

Všeobecný úpadek úrovně znalostí, dovedností, pracovních návyků a obecné připravenosti k dalšímu studiu prokazují různé oficiální i neoficiální výzkumy a statistiky. Dlouhodobé zkušenosti jednotlivých učitelů jasně ukazují, že prověrky, které byly v té či oné věkové kategorii zadávány v minulých letech (před čtyřiceti, třiceti, dvaceti, deseti, ale i před pouhými pěti roky) jsou dnes „příliš těžké“, a proto nepoužitelné. Mnohé úlohy nedávných maturitních testů byly postaveny pouze na znalostech základní školy, studenti však přesto příliš úspěšní nebyli.

Zlepšení situace nelze očekávat, většina společnosti o náročnější vzdělávání nestojí, jak naznačují výzkumy. Například společnost McKinsey & Company zveřejnila v září roku 2010 studii, v níž mimo jiné uvádí (viz [20]):

- *Výsledky českého základního a středního školství klesají, což ohrožuje ekonomickou konkurenceschopnost České republiky. Výhled do budoucna je negativní a odkládání řešení znamená vysoké náklady.*
- *České školství vykazuje průměrné, klesající a nerovnoměrné výsledky.*
- *Výhled do budoucna je negativní, protože v nejdůležitějších postupech řízení (podpora učitelů a ředitelů, jakož i standardy a hodnocení) český systém zaostává za nejlepšími.*
- *Situace je alarmující, protože rané vzdělávání je důležité a odkládání řešení znamená vysoké náklady. Většina rodičů je však spokojena, což pravděpodobně snižuje možnost politického mandátu ke změně. … I kdyby se dnes dosavadní pokles zastavil, zhoršení výsledků od r. 1995 by zemi do r. 2050 stálo v ekonomickém vyjádření odhadem až 11 % HDP ročně. To představuje v dnešní situaci cca 400 miliard Kč. Přesto je s českými základními a středními školami spokojeno 81 % rodičů a 71 % učitelů.*

Prof. Libor Pátý, fyzik, který mnoho let působil na MFF UK, nedávno poukázal na základní příčinu neblahé situace:

Příčinu klesající úrovně vzdělanosti u nás spatřuji v obecném poklesu hodnot v současné společnosti. Těžko lze očekávat od společnosti preferující hmotné až triviálně materiální hodnoty přiznání priority takové duchovní hodnotě, jako je vzdělanost. ([21], str. 68)

V současné době se jako všelék prosazuje testování žáků a studentů na všech úrovních a další masivní zavádění moderních technologií do vzdělávání (interaktivní tabule, notebooky, tablety, elektronické učebnice atd.). Opět jde hlavně o čerpání peněz ze státního rozpočtu ať už na tvorbu a vyhodnocování testů nebo na plošné vybavování škol, resp. žáků a studentů moderními technologiemi.

Za prezidenta George W. Bushe (nar. 1946) začala roku 2002 v USA reforma školství založená na plošném testování žáků a studentů pod heslem *No Child Left Behind*. Úspěšná nebyla. Po deseti letech se jí začalo posměšně přezdívat

No Child Left Behind Alone. My nyní připravujeme testování podle „amerického vzoru“. Naší vlastností je totiž poklonkování cizím vzorům. Sovětské vzory jsme vyměnili za americké.

Reformátoři zdůrazňují, že jsme ještě málo omezili dril a biflování, zavedli málo nových metod, málo nových technologií. Připomíná to auto, které jede do Prahy, přičemž na ukazatelích je postupně psáno Praha 30 km, Praha 50 km, Praha 80 km atd. Jak se dostat rychle do Prahy? Je třeba zvýšit rychlost!

Nikdo ze zodpovědných bohužel nechce slyšet nejrůznější varovné hlasy. Upozorněme alespoň na některé:

- Články Jany Bradley – [1] až [9],
- Diane Ravitch: *The Death and Life of the Great American School System: How Testing and Choice Are Undermining Education* [22],
- Manfred Spitzer: *Digitální demence. Jak připravujeme sami sebe a naše děti o rozum* [23],
- Konrad Paul Liessmann: *Teorie nevzdělanosti. Omyly společnosti vědění* [19],
- Jan Keller, Lubor Tvrdý: *Vzdělanostní společnost? Chrám, výtah a pojišťovna* [17].

2 Matematika

Věnujme se nyní výhradně matematice. Pokusíme se odpovědět na otázky, proč je dnes matematika na základních a středních školách tak málo oblíbená, proč studenti obvykle přicházejí na vysoké školy nedostatečně připraveni, proč se matematice pokud možno vyhýbají, a to i na školách, jejichž zaměření je na matematice přímo postaveno. Skutečnosti uvedené v předchozí části článku shrneme v následujících dvou bodech.

- Postupnými redukcemi učiva (vynucenými mimo jiné snížením počtu vyučovacích hodin) bylo ve školské matematice zlikvidováno vše zajímavé a inspirativní, vše, co některé studenty okouzlovalo a motivovalo ke studiu matematiky. Zůstal pouze jakýsi okleštěný nudný základ.
- Razantním a soustavným omezováním procvičování (dril!), poukazováním na zbytečnost a škodlivost učení (biflování!) nebylo žákům a studentům dopřáno získat pocit uspokojení z ovládnutí určitého aparátu, početních algoritmů a geometrických konstrukcí, nebylo jim umožněno zažít pocit úspěšnosti z pochopení matematických postupů, z nabytých schopností k vyřešení řady úloh různých typů a pocítit radost z hlubšího porozumění zajímavým problémům. Byli připraveni o pocit zadostiučinění z dobře odvedené práce.

Matematika zbavená všeho zajímavého, předkládaná jen jako snůška receptů, které není třeba ani pochopit ani se naučit, nepodložená soustavnou a cílevědomou prací, počítáním, rýsováním, odvozováním a zdůvodňováním se tak bohužel stala nesrozumitelným předmětem, strašákem a obecným nepřítelem.

Pokud se chceme pokusit o zlepšení výsledků matematického vzdělávání na základních a středních školách, musíme matematiku obohatit o **zajímavá témata** a žáky a studenty vést k **soustavnému a důslednému získávání trvalých znalostí a dovedností**. Toho je možno docílit inteligentní motivací a trpělivou a cílevědomou prací. Čas, který tím zprvu „ztratíme", se nám později vrátí. Je třeba rovněž poukazovat na oblasti, v nichž se bez matematiky neobejdeme (chceme-li být alespoň trochu úspěšní) – např. elementární znalost finanční matematiky. Rovněž je třeba poukazovat na případy, kdy neznalost matematiky vedla ke katastrofám či velkým ekonomickým ztrátám. Nutným předpokladem úspěchu je však odborně i pedagogicky zdatný učitel, kterého jeho profese těší a je to na něm znát.

Na vysokých školách nesmíme zapomenout na zdůrazňování aplikací matematiky. Můžeme využívat kontakty s odbornými katedrami, s jinými fakultami, s pracovišti z praxe atd. V kurzovních přednáškách a cvičeních, kde je třeba probrat základní látku, můžeme aplikace většinou pouze zmínit, ve výběrových přednáškách a seminářích se jim však můžeme věnovat podrobněji. Musíme rovněž zdůrazňovat souvislosti jednotlivých matematických disciplín, jejich provázanost, zájem můžeme vzbudit přednáškami o vývoji matematiky, o aplikacích apod.[2]

Připomeňme ještě několik myšlenek z *Analytické didaktiky* J. A. Komenského (1592–1670) týkající se připravenosti žáků ke studiu a významu motivace:

XXXI. *Nepouštěj se do učení, leč když jsi je žáku dobře doporučil.*

Důsledek: Vším možným způsobem máme usilovati, aby žák učení, do něhož se dává, pokládal za něco obdivuhodného. (*Tento obdiv roznítí zálibu, záliba touhu a touha pilnost.*) ([18], str. 18)

XXXII. *Nezačínej s učením, leč až když jsi náležitě vzbudil žákův zájem.* ([18], str. 18)

CLXX. *Smysly žáků mají býti stále povzbuzovány tím, co je může navnadit.* ([18], str. 75)

CLXXIII. *Všechno, čemu se vyučuje, budiž promíšeno příjemnou rozmanitostí.* ([18], str. 76)

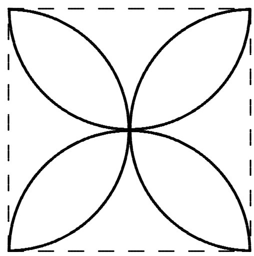
V následující části článku je uvedeno několik inspirativních příkladů, některé jsou poměrně známé. Při vhodném podání mohou žáky a studenty překvapit, zaujmout, probudit v nich zájem o matematiku, motivovat je k práci a ke studiu. Některé mohou šokovat svou jednoduchostí, originálním nápadem vedoucím k jejich vyřešení, u některých se může dostavit tzv. *aha-efekt*, který je úžasným intelektuálním prožitkem navozujícím touhu po dalším.

[2] Na učitelském studiu na MFF UK tyto cíle plní například následující přednášky a semináře: Z. Halas: *Bakalářský seminář*, Z. Halas: *Aplikace matematiky*, M. Hykšová: *Teorie her*, P. Surynková: *Počítačová geometrie*, P. Surynková: *Plochy stavební praxe*, O. Odvárko: *Finanční matematika*, A. Slavík: *Mathematica pro začátečníky*, A. Slavík: *Mathematica pro pokročilé*, J. Bečvář, M. Bečvářová: *Dějiny matematiky* atd.

3 Konkrétní náměty

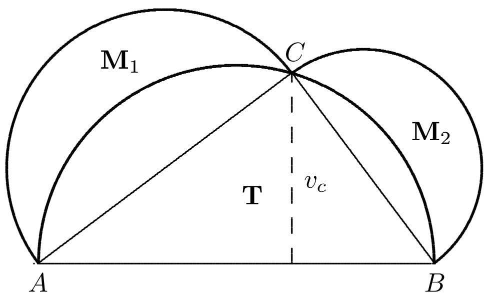
Čtyřlístek pro štěstí

V osmé třídě na základní škole se mi velice líbila tato úloha (viz následující obrázek): Vypočtěte obsah čtyřlístku vepsaného do čtverce.[3] Obrázek je krásný, má estetickou hodnotu. Navíc se dá snadno narýsovat (klasicky i počítačově). Současně je úžasné, že lze obsah čtyřlístku snadno vypočítat (pokud ovšem umíme vypočítat obsah čtverce a obsah kruhu). Stačí si obrázek pozorně prohlédnout.



Hippokratovy měsíčky, Archimédův arbelos a salínon

Uvažujme pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Tři půlkružnice sestrojené nad jeho stranami vymezují tzv. *Hippokratovy měsíčky* (*menisky*). Při procvičování vzorců pro výpočet obsahů rovinných útvarů lze dát za úkol vypočítat součet obsahů obou měsíčků. Studenty patrně překvapí, že součet obsahů $\mathbf{M}_1$ a $\mathbf{M}_2$ obou měsíčků je roven obsahu $\mathbf{T}$ trojúhelníku ABC.



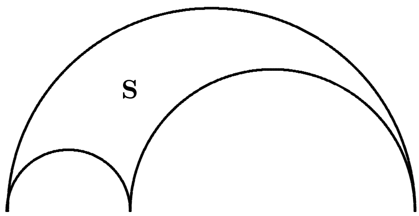
Výše uvedený fakt, že součet obsahů obou měsíčků je roven obsahu výchozího trojúhelníku, však nemusíme vůbec počítat. Stačí se na obrázek pozorně podívat a použít Pýthagorovu větu modifikovanou pro podobné útvary (místo

[3] Matematická olympiáda 1960/61, kategorie D.

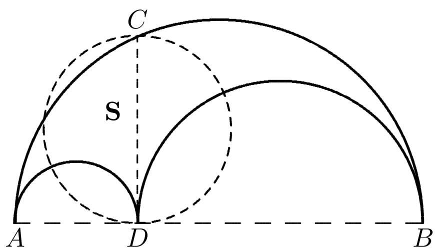
čtverců) sestrojené nad stranami pravoúhlého trojúhelníku (zde se jedná o půlkruhy, ten největší je „na druhé straně“ přepony než jsme zvyklí). Pochopení této úvahy může být pro studenty velmi okouzlující.

Poznamenejme, že výška v_c spuštěná z vrcholu C na stranu c rozdělí trojúhelník na dva menší trojúhelníky. Jejich obsahy však nejsou rovny obsahům odpovídajících měsíčků. Rovnost nastane pouze v případě, že je trojúhelník ABC rovnoramenný.

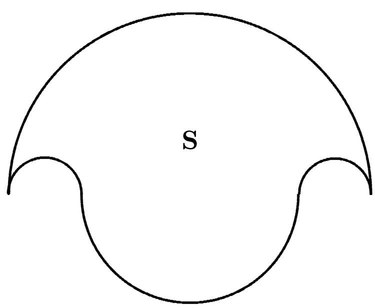
Podobnou úlohou je nalezení obsahu **S** útvaru nazývaného *arbelos*, který zkoumal Archimédés (287–212). Jedná se o část roviny, která je omezena třemi polokružnicemi (viz následující obrázek):



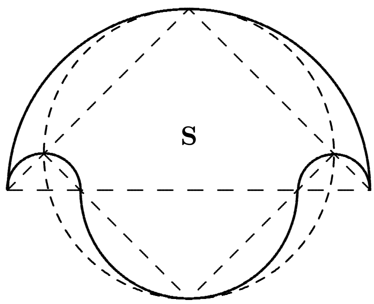
Snadno se vypočte, že obsah **S** útvaru arbelos je roven obsahu kruhu, který je na následujícím obrázku ohraničen čárkovanou kružnicí. Ani tento obsah však není nutno počítat, stačí se s porozuměním dívat na obrázek a užít Pýthagorovu větu pro půlkruhy nad stranami trojúhelníků ABC, ADC a BDC.



Další Archimédova úloha se týká obsahu **S** útvaru ohraničeného čtyřmi polokružnicemi, z nichž dvě mají stejný poloměr (viz následující obrázek). Nazývá se *salínon*.

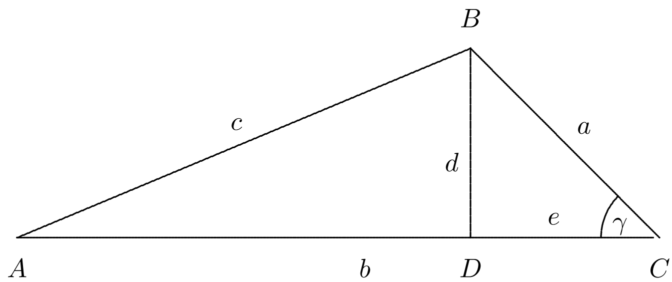


Z následujícího obrázku lze nahlédnout, že obsah **S** je roven obsahu kruhu vymezeného čárkovanou kružnicí.



Pýthagorova a kosinová věta

Pýthagorova věta a kosinová věta patří k základům elementární matematiky. Snad je obecně známo, že kosinová věta je zobecněním věty Pýthagorovy (tedy z kosinové věty plyne věta Pýthagorova). Málokdo však ví, že jsou tyto dvě věty ekvivalentní. Z Pýthagorovy věty totiž snadno dokážeme větu kosinovou.



Užijeme-li Pýthagorovu větu pro trojúhelníky CDB a ADB, dostáváme rovnosti

$$a^2 = d^2 + e^2, \qquad (b-e)^2 + d^2 = c^2,$$

které upravíme do podoby

$$a^2 = d^2 + e^2, \qquad b^2 - 2be = c^2 - d^2 - e^2.$$

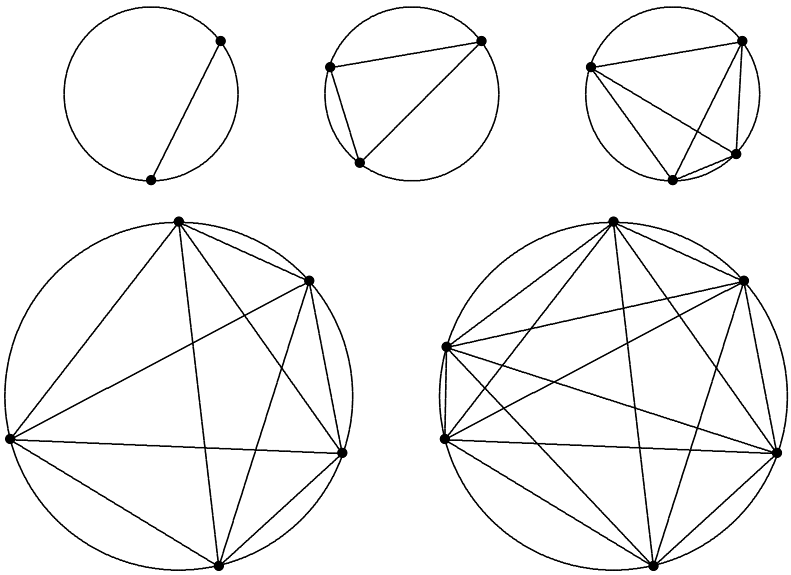
Poslední dvě rovnosti již jen sečteme a máme $a^2 + b^2 - 2be = c^2$. Nyní si stačí uvědomit, že $e = a\cos\gamma$. Důkaz jsme provedli pro případ, kdy je úhel γ ostrý. Obdobně se postupuje, je-li úhel γ tupý.

Pro mnohé studenty (ale i pro učitele) je velmi překvapivé, že mohou být ekvivalentní dvě tvrzení, z nichž jedno je výrazným zobecněním druhého.[4] Upozorněme v této souvislosti na článek V. Dlaba *Důkladné porozumění pojmu ekvivalence* [13] a na poučnou diskusi (z řady hledisek) k tomuto tématu, která je vystavena na webové stránce časopisu Učitel matematiky (viz [13]).

[4] Autor tohoto příspěvku se o tom v poslední době mnohokrát přesvědčil.

Rozdělení kruhu tětivami

Dvěma různými body na obvodu kruhu je určena jedna tětiva, která dělí kruh na dvě části. Třemi různými body na obvodu kruhu jsou určeny tři tětivy, které dělí kruh na čtyři části. Čtyřmi různými body na obvodu kruhu je určeno šest tětiv, které dělí kruh na osm částí. Pěti různými body na obvodu kruhu je určeno deset tětiv, které dělí kruh na šestnáct částí. Jaký je *největší počet částí*, na něž lze kruh rozdělit $\binom{n}{2}$ tětivami určenými n body na jeho obvodu? (Při nevhodné volbě výchozích bodů se pro $n > 5$ kruh rozdělí na menší počet částí!) Následující obrázky ukazují situaci pro $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ a $n = 6$.



Šest bodů vhodně umístěných na obvodu kruhu však nerozdělí kruh na 32 částí, jak bychom očekávali na základě předchozích případů $n = 2, 3, 4, 5$, ale pouze na 31 částí! Maximální počet $\mu(n)$ oblastí, na které lze kruh rozdělit tětivami určenými vhodně rozmístěnými n body na obvodu je dán vzorcem

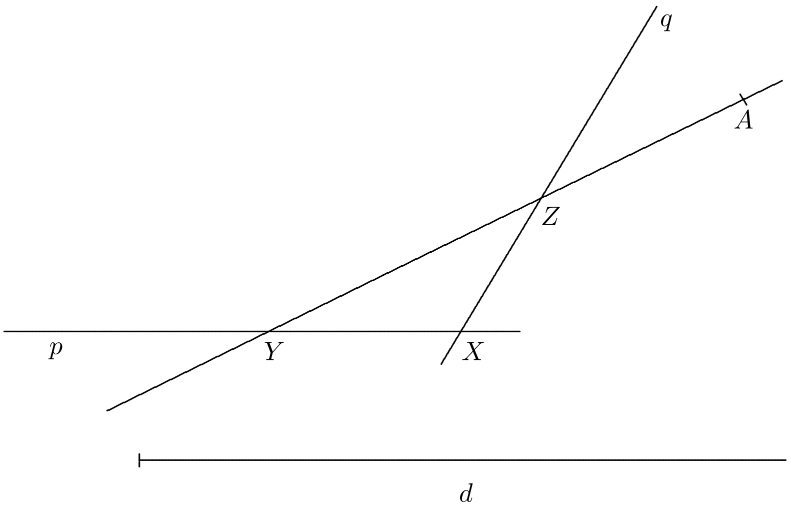
$$\mu(n) = \frac{1}{24}\big(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24\big),$$

který není tak úplně jednoduché odvodit.

Úloha o trojúhelníku

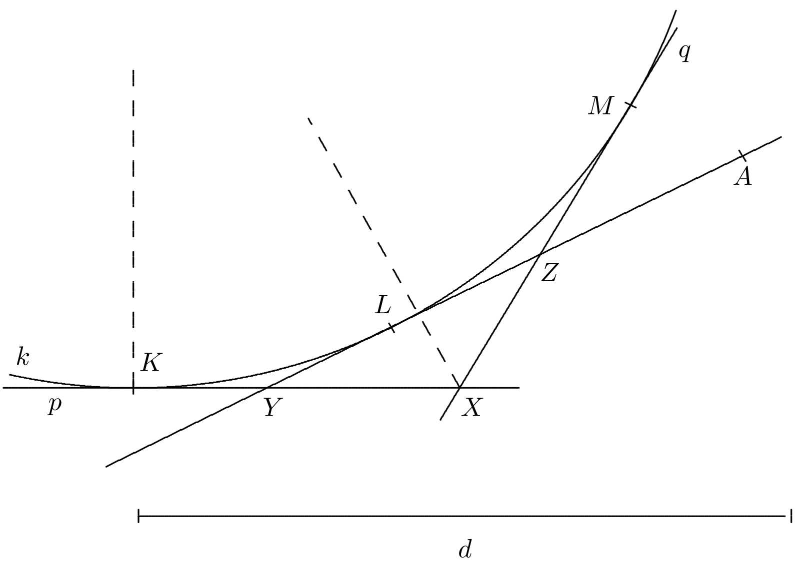
V maturitním ročníku jsem byl zaskočen touto úlohou (viz následující obrázek): V rovině jsou dány polopřímky p a q se společným počátečním bodem X. Dán je bod A, který na nich neleží, a úsečka d. Úkolem je sestrojit přímku jdoucí bodem A, která protne polopřímky p, q v bodech Y, Z tak, aby byl obvod trojúhelníku XYZ roven délce úsečky d.[5]

[5] Matematická olympiáda 1964/65, kategorie A.



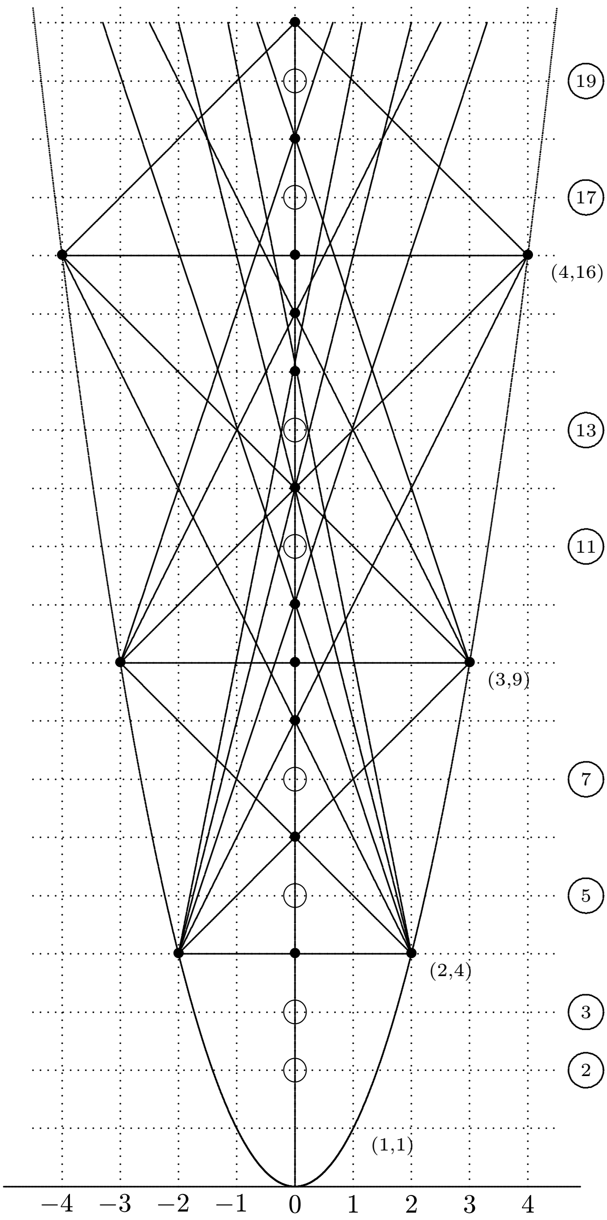
Řešení úlohy je jednoduché, pokud přijde spásný nápad. Krása matematiky spočívá rovněž v tom, že příchod spásných nápadů neumíme „naprogramovat“.

Uvažujme tzv. připsanou kružnici k hledaného trojúhelníku XYZ (viz následující obrázek). Využijeme-li vlastnosti tečen ke kružnici, vidíme, že dvojice úseček YK a YL, ZL a ZM, XK a XM mají stejnou délku. Úsečka XK má tedy délku rovnou polovině obvodu trojúhelníku XYZ, tj. polovině délky úsečky d. Odtud již snadno vyplývá konstrukce hledaného trojúhelníku (bod K; kružnice k dotýkající se polopřímek p, q a procházející bodem K – její střed je na ose úhlu, který svírají polopřímky p, q, a současně na kolmici k polopřímce p vztyčené v bodě K; tečna ke kružnici k z bodu A).



Prvočísla

Velmi zajímavým tématem jsou prvočísla. Studenty lze patrně poměrně snadno překvapit tzv. Matijasevičovou parabolou.[6]



[6] Jurij Vladimírovič Matijasevič (nar. 1947), ruský matematik a informatik.

Množinu všech prvočísel je možno znázornit takto: Nechť M je množina všech dvojic (a, b) celých čísel, pro která je $b = a^2$ (v kartézské souřadnicové soustavě to jsou body paraboly $y = x^2$, které mají celočíselné souřadnice). Pro každou dvojici $(a, b) \in M$ je $(-a, b) \in M$. Uvažujme všechny průsečíky dvojic přímek určených body (a_1, b_1), $(-a_2, b_2)$ a (a_2, b_2), $(-a_1, b_1)$ množiny M, kde a_1, a_2 jsou přirozená čísla větší než 1. Leží na ose y a „vyhýbají se prvočíslům" (viz předchozí obrázek). Není obtížné tento fakt dokázat. Studentům lze jako úkol zadat narýsování předchozího obrázku na počítači.

Dnes jsme svědky urputného hledání větších a větších prvočísel. S pomocí počítačů (počítačových sítí) a velmi rafinovaných programů jsou hledána tzv. Mersennova prvočísla, tj. prvočísla tvaru $M_p = 2^p - 1$.[7]

Od roku 1876 do roku 1951 bylo největším známým prvočíslem číslo

$$2^{127} - 1 = 170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727,$$

které má 39 cifer. Mersennovo prvočíslo $2^{57\,885\,161} - 1$ objevené roku 2013 má 17 425 170 cifer. Fascinující pokrok za šest desetiletí!

Studenty můžeme inspirovat k pravidelnému sledování honby za dalšími Mersennovými prvočísly. Stačí například zadat na Google heslo *Mersenne primes* a hned máme k disposici řadu webových stránek, na nichž lze pozorovat aktuální dění týkající se Mersennových prvočísel.

Poznamenejme, že hledání velkých prvočísel není jen samoúčelným hraním, honbou za senzací (i když také); velká prvočísla se využívají při testování rychlosti a výkonnosti počítačů, zcela zásadní roli hrají v kódování.

Harmonická řada

Aritmetická posloupnost, geometrická posloupnost a geometrická řada jsou snad stále ještě součástí středoškolské matematiky. Bývalo zvykem odvodit při výkladu vzorce pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti, geometrické posloupnosti a získat vzorec pro součet geometrické řady (za současného vymezení tzv. *kvocientu*). Důkazy (resp. odvození) zmíněných poznatků jsou vtipné a velmi poučné, dají se znázornit i geometricky.

Užitečné je v této souvislosti zmínit *harmonickou řadu*, která je velmi zvláštním matematickým objektem:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$$

Ač se to zdá neuvěřitelné, harmonická řada *diverguje*, tj. posloupnost jejích částečných součtů roste nade všechny meze. Těžko si umíme představit, že jakoukoli délku lze přesáhnout postupným sčítáním následujících délek: milimetr, polovina milimetru, třetina milimetru, čtvrtina milimetru atd. Důkaz je

---

[7] Marin Mersenne (1588–1648), francouzský matematik, fyzik a filozof. Snadno se ukáže, že když je číslo $2^p - 1$ prvočíslo, musí být p prvočíslo.

přitom velmi jednoduchý a názorný.[8] Seskupíme-li vhodným způsobem členy uvažované posloupnosti, je vše jasné:

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{2} &= 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4} &> 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} &> 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16} &> 8\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

atd. Pro každé n je tedy

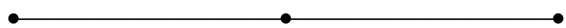
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n} > (n+2)\cdot\frac{1}{2}.$$

Harmonická řada sice diverguje, ale neuvěřitelně pomalu. Sečteme-li sto jejích členů, je součet asi 5,19, sečteme-li tisíc členů, je součet asi 7,49, sečteme-li milion členů, je součet asi 14,39, sečteme-li miliardu členů, je součet asi 21,30 atd. Na internetu snadno najdeme řadu webových stránek věnovaných harmonické řadě, objevíme i kalkulátor, který sečte zadaný počet jejích členů (např. `www.math.utah.edu/~carlson/teaching/calculus/harmonic.html`).

Matematika a hudba

Zajímavým tématem, které může studenty zaujmout, je popis *pýthagorejského ladění* a jeho následná modifikace na tzv. *temperované ladění*. Matematické základy hudby byly položeny ve starém Řecku, přičítají se přímo Pýthagorovi (6. stol. př. Kr.). Studenti se mohou přesvědčit přeměřením délky struny a rozmístění pražců na kytaře, že hudební intervaly odpovídají poměrům přirozených čísel. Připomeneme jen základní intervaly (oktáva, kvinta, kvarta, sekunda) a nejdůležitější fakta a zájemce odkážeme na podrobnou stať Z. Halase *Matematika a hudba*, která je otištěna v [16].

Oktávu získáme seškrcením struny v poměru 1 : 2:



Kvintu získáme seškrcením struny v poměru 2 : 3:

[8] Autorem uvedeného důkazu je Nicole Oresme (asi 1323 až 1382), francouzský matematik, fyzik a teolog.

Kvartu získáme seškrcením struny v poměru 3 : 4:

Sekundu (pýthagorejský tón) získáme seškrcením struny v poměru 8 : 9:

Pomocí poměrů je možno popsat i další hudební intervaly: tercie (64 : 81), sexta (16 : 27), septima (128 : 243), malý půltón (243 : 256).

Při výstavbě delší posloupnosti tónů (například na klavíru) se setkáme s nepříjemným problémem. Stavíme-li „nad sebe" oktávy, mocníme zlomek $\frac{1}{2}$. Stavíme-li nad sebe pýthagorejské kvinty, mocníme zlomek $\frac{2}{3}$. Sledy tvořených tónů se však čím dále, tím více „rozcházejí". Je zřejmé, že nikdy nemůžeme dojít do stejného bodu, neboť mocniny čísla $\frac{1}{2}$ jsou vždy různé od mocnin čísla $\frac{2}{3}$. Velmi blízké jsou si sedmá a dvanáctá mocnina:

$$0{,}007\,812\,500 \;=\; \left(\frac{1}{2}\right)^7 \neq \left(\frac{2}{3}\right)^{12} \approx\; 0{,}007\,707\,347.$$

Podíl těchto hodnot je

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{\left(\frac{2}{3}\right)^{12}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1{,}013\,643,$$

hodnota, o kterou se liší od jedničky, tj. $\approx 0{,}013\,643$, se nazývá *pýthagorejské komma.*

Vzniklý problém řeší tzv. *temperované ladění*, které zachovává nejdůležitější intervaly, tj. oktávy, a téměř neznatelně deformuje kvinty (a rovněž ostatní intervaly). Oktávu dělí na dvanáct stejných půltónů, mezi něž se rozprostře malinký interval, kterému odpovídá pýthagorejské komma. Kvinty pak ovšem nejsou „čisté", rozdíl je však zcela nepatrný. Rozdělíme-li „rovnoměrně" poměr 1 : 2 na dvanáct stejných poměrů, je kvocientem této geometrické posloupnosti číslo $\sqrt[12]{2}$. Tak dospějeme k posloupnosti

$$1,\quad \sqrt[12]{2},\quad (\sqrt[12]{2})^2 = \sqrt[6]{2},\quad \sqrt[4]{2},\quad \sqrt[3]{2},\quad (\sqrt[12]{2})^5,\quad \sqrt{2},\quad (\sqrt[12]{2})^7,$$
$$(\sqrt[3]{2})^2,\quad (\sqrt[4]{2})^3,\quad (\sqrt[6]{2})^5,\quad (\sqrt[12]{2})^{11},\quad 2.$$

Temperovaná kvinta (7. půltón) odpovídá poměru $1 : (\sqrt[12]{2})^7 \approx 0{,}667\,419\,927$, který se od poměru $2 : 3 = 0{,}\overline{6}$ liší jen nepatrně.

Poznamenejme, že výše uvedený nástin problematiky pýthagorejského a temperovaného ladění lze rovněž vyjádřit pomocí frekvencí uvažovaných tónů. Výklad založený na délce struny je však patrně názornější.

V souvislosti s temperovaným laděním se vždy připomíná Johann Sebastian Bach (1685–1750), jeden z největších hudebních skladatelů všech dob, a jeho dva cykly skladeb nazvané *Das wohltemperierte Klavier* (1722, 1744).

Obsah trojúhelníku

Obsah trojúhelníku se dá vypočítat mnoha způsoby. Vedle klasického vzorce, který operuje s délkou strany a příslušné výšky, resp. vzorce, který využívá délku sousedních stran a velikosti jimi sevřeného úhlu, známe Hérónův vzorec, můžeme k výpočtu využít determinant matice sestavené ze souřadnic vrcholů apod. Pojednání o souvislostech všech těchto vzorců z hlediska klasické geometrie, analytické geometrie, trigonometrie, lineární algebry apod. by mohlo být vhodnou studentskou seminární prací.

Obsah trojúhelníku ABC umístěného v rovině opatřené kartézskými souřadnicemi můžeme snadno vypočítat pomocí komplexních čísel. Jsou-li z_a, z_b, z_c komplexní čísla odpovídající vrcholům A, B, C, je obsah trojúhelníku ABC roven polovině absolutní hodnoty imaginární části čísla[9] $\overline{z_a}z_b + \overline{z_b}z_c + \overline{z_c}z_a$, tj.

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \Big| \operatorname{Im}\big(\overline{z_a}z_b + \overline{z_b}z_c + \overline{z_c}z_a \big) \Big|.$$

Není obtížné tento fakt dokázat. Stačí zvážit, že číslo S_Δ se nezmění ani translací ani rotací, a vyjádřit obsah trojúhelníku ABC ve speciální poloze: bod A v počátku, bod B na ose x.

Obdobný vzorec platí pro výpočet obsahu n-úhelníku $A_1A_2A_3\dots A_n$.

Gaussova celá čísla

Číselný obor $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ všech komplexních čísel s celočíselnými reálnými a imaginárními složkami (tzv. Gaussova celá čísla) je v Gaussově rovině znázorněn množinou všech vrcholů jednotkové čtvercové sítě. V určitém smyslu je podobný oboru celých čísel $\mathbb{Z}$. Pro Gaussova celá čísla totiž rovněž platí tzv. základní věta aritmetiky: *Každé nenulové Gaussovo celé číslo lze jediným způsobem rozložit na součin prvočísel.*

Důležitou roli v tomto číselném oboru hraje tzv. *norma* Gaussova čísla $a+b\,\mathrm{i}$ definovaná rovností

$$N(a+b\,\mathrm{i}) = a^2 + b^2.$$

Z geometrického hlediska je norma čísla $a + b\,\mathrm{i}$ čtvercem délky příslušného vektoru. Jednoduchým výpočtem se snadno prověří, že pro libovolná Gaussova celá čísla α, β platí rovnost

$$N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta),$$

která je základem mnoha dalších vyšetřování. S její pomocí například snadno zjistíme, že jednotkami (neboli invertibilními prvky, tj. prvky, kterými lze dělit) jsou v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ pouze prvky $1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$.[10]

[9] Poznamenejme, že znaménko imaginární části uvedeného čísla záleží na zvolené orientaci trojúhelníku. Proto je ve vzorci absolutní hodnota.

[10] Jednotkami v $\mathbb{Z}$ jsou pouze $+1$ a -1.

Celá čísla $\mathbb{Z}$ jsou podoborem Gaussových celých čísel $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Každé složené celé číslo je pochopitelně složené i v oboru Gaussových celých čísel. Některá prvočísla ze $\mathbb{Z}$ jsou však v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ čísly složenými, například

$$2=(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}), \qquad 5=(1+2\,\mathrm{i})(1-2\,\mathrm{i}), \qquad 13=(2+3\,\mathrm{i})(2-3\,\mathrm{i}).$$

Prvočísly v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ zůstávají například 3, 7, 11. „Novými“ prvočísly jsou například

$$1\pm\mathrm{i}, \qquad 1\pm2\,\mathrm{i}, \qquad 1\pm4\,\mathrm{i}, \qquad 2\pm3\,\mathrm{i}, \qquad 2\pm5\,\mathrm{i}, \qquad 2\pm7\,\mathrm{i}.$$

Podobně jako lze v oboru celých čísel zapsat každé nenulové číslo jako součin prvočísel (případně vynásobený jednotkou -1),[11] je možno každé Gaussovo celé číslo zapsat jako součin *Gaussových prvočísel*. Například

$$5=(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=(1+2\,\mathrm{i})(1-2\,\mathrm{i});$$

tyto rozklady čísla 5 považujeme za ekvivalentní, neboť jeden vzniká z druhého násobením jednotkami.[12]

$$(1+2\,\mathrm{i})(-\mathrm{i})=2-\mathrm{i}, \qquad (1-2\,\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}=2+\mathrm{i}.$$

Uvědomme si, že číslo 10 můžeme v $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ rozložit dvěma způsoby,

$$10=2\cdot5=(1+3\,\mathrm{i})(1-3\,\mathrm{i}),$$

ale ani jeden z nich není rozkladem na Gaussova prvočísla. Jak jsme již viděli, čísla 2 a 5 jsou složená, složená jsou i čísla $1+3\,\mathrm{i}$ a $1-3\,\mathrm{i}$. Rozklad čísla 10 v součin Gaussových prvočísel vypadá takto:

$$10=(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})(1+2\,\mathrm{i})(1-2\,\mathrm{i}),$$

přitom je $(1+\mathrm{i})(1+2\,\mathrm{i})=-1+3\,\mathrm{i}$, $(1-\mathrm{i})(1-2\,\mathrm{i})=-1-3\,\mathrm{i}$.

Vyšetřování dělitelnosti Gaussových celých čísel (hledání nových prvočísel a složených čísel, největšího společného dělitele apod.) lze zadat studentům jako projekt v rámci tzv. badatelsky orientované výuky.

Zajímavé číselné obory s více jednotkami

Podobné číselné struktury, v nichž platí základní věta aritmetiky, jsou například množiny reálných čísel

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]=\{\,a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}, \qquad \mathbb{Z}[\sqrt{3}\,]=\{\,a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbb{Z}\},$$

---

[11] Např. $6=2\cdot3$, $32=2^5$, $-15=(-1)\cdot3\cdot5$ atd., prvočíslo chápeme jako součin jednoprvkové množiny prvočísel, číslo 1 chápeme jako součin prázdné množiny prvočísel.

[12] V $\mathbb{Z}$ je podobně $6=2\cdot3=(-2)\cdot(-3)$.

k jejichž zkoumání využijeme opět normy definované takto:

$$N(a+b\sqrt{2}) = \left|a^2-2b^2\right|, \qquad N(a+b\sqrt{3}) = \left|a^2-3b^2\right|.$$

V obou případech výpočtem prověříme, že

$$N(\alpha\cdot\beta) = N(\alpha)\cdot N(\beta).$$

Jednotky v $\mathbb{Z}[\sqrt{2}\,]$ najdeme řešením rovnice $\left|a^2-2b^2\right| = 1$. Vychází

$$\pm1, \quad 1\pm\sqrt{2}, \quad 3\pm2\sqrt{2}, \quad 7\pm5\sqrt{2}, \quad 17\pm12\sqrt{2}, \quad 41\pm29\sqrt{2}, \quad \ldots$$

Podobně v $\mathbb{Z}[\sqrt{3}\,]$ vypočteme jednotky:

$$\pm1, \qquad 2\pm\sqrt{3}, \qquad 7\pm4\sqrt{3}, \quad \ldots$$

Velký počet jednotek do jisté míry komplikuje situaci. Rozklady konkrétního čísla, které na první pohled vypadají jako různé, různé být nemusí. Po vynásobení jednotkami přejde jeden ve druhý.

Strašidelný číselný obor

Velmi zajímavým příkladem číselného oboru je podmnožina $\mathbb{Z}[\sqrt{5}\,\mathrm{i}]$ množiny komplexních čísel $\mathbb{C}$ definovaná rovností

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}\,\mathrm{i}] = \{a+b\sqrt{5}\,\mathrm{i} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}.$$

Normu zavádíme vztahem

$$N(a+b\sqrt{5}\,\mathrm{i}) = a^2+5b^2,$$

přitom je opět

$$N(\alpha\cdot\beta) = N(\alpha)\cdot N(\beta).$$

Jednotky jsou pouze dvě: $1, -1$. Nerozložitelnými prvky jsou například

$$\pm\sqrt{5}\,\mathrm{i}, \quad 1\pm\sqrt{5}\,\mathrm{i}, \quad 2\pm\sqrt{5}\,\mathrm{i}, \quad 3\pm\sqrt{5}\,\mathrm{i}, \quad 4\pm\sqrt{5}\,\mathrm{i}, \quad 1\pm2\sqrt{5}\,\mathrm{i}, \quad 3\pm2\sqrt{5}\,\mathrm{i}, \quad \ldots,$$

dále

$$2,\ 3,\ 7,\ 11,\ 13,\ \ldots$$

Rozložitelnými prvky jsou například:

$$5 = (\sqrt{5}\,\mathrm{i})(-\sqrt{5}\,\mathrm{i}), \qquad 29 = (3+2\sqrt{5}\,\mathrm{i})(3-2\sqrt{5}\,\mathrm{i}).$$

V tomto číselném oboru mají některá čísla různé rozklady. Na to nejsme vůbec zvyklí, připadá nám to hrůzné. Například číslo 9 má dva různé rozklady, číslo 21 dokonce tři různé rozklady:

$$9 = 3\cdot3 = (2+\sqrt{5}\,\mathrm{i})(2-\sqrt{5}\,\mathrm{i}),$$

$$21 = 3\cdot7 = (1+2\sqrt{5}\,\mathrm{i})(1-2\sqrt{5}\,\mathrm{i}) = (4+\sqrt{5}\,\mathrm{i})(4-\sqrt{5}\,\mathrm{i}).$$

Navíc zde neplatí vlastnost prvočísel, která je nám důvěrně známá z oboru celých čísel. Například nerozložitelné číslo 3 dělí součin $(2+\sqrt{5}\,\mathrm{i})(2-\sqrt{5}\,\mathrm{i})$, ale nedělí ani číslo $2+\sqrt{5}\,\mathrm{i}$ ani číslo $2-\sqrt{5}\,\mathrm{i}$. V tomto číselném oboru proto musíme rozlišovat tzv. *nerozložitelné prvky* a tzv. *prvočinitele.*

4 Závěr

Učitelé mají dnes mnoho možností k obohacení výuky. Kromě klasických knih, které bývaly dříve základem vzdělávání, mají na internetu k disposici veliké množství digitalizovaných knih a časopisů, které v našich knihovnách nejsou, řadu obrázků, fotografií a dalších materiálů, aktuálních zpráv, nejrůznějších programů. Existují podnětné webové stránky věnované matematice. Sledování těch cizojazyčných vede i ke zdokonalení jazykových znalostí a podtrhuje jejich význam.

Zcela zásadní je, aby byl učitel dostatečně na výši a uměl odlišit kvalitní webové stránky od nekvalitních, aby se vyhnul nedůvěryhodným zdrojům. A tuto schopnosti je třeba rozvíjet u žáků a studentů (identifikace hodnotných zdrojů, za něž někdo odpovídá, kritické vnímání vystavených materiálů atd.). Rovněž je důležité, aby učitel nebyl ve škole zahlcen (a otráven) zbytečnou administrativou a dalšími povinnostmi a měl čas a chuť se vzdělávat, připravovat se na výuku a inovovat ji.

Při šťastné konstelaci (škola – učitel – žák – rodiče – prostředí) se matematika může stát pro mnoho žáků a studentů (a současně pro jejich učitele) okouzlujícím dobrodružstvím, tajuplnou cestou, během které čeká řada překvapení. Připomeňme v této souvislosti známý výrok Alberta Einsteina (1879–1955):

Nejkrásnější, co můžeme prožívat, je tajemno. To je základní pocit, který stojí u kolébky pravého umění a vědy. Komu to není známo, kdo se už neumí divit, neumí žasnout, ten je takříkajíc mrtev a jeho oko vyhaslé. ([14], str. 117)

Na cestě poznávání provázejí žáky a studenty učitelé. Dobrý učitel musí být pro své žáky, resp. studenty (a jejich rodiče) příkladem, vzorem, inspirací, autoritou, což je ovšem stále těžší a těžší. Velmi pěkně to vyjádřil Karel Čapek (1890–1938):

Mnoho viny jest (nebo bylo) na hodně pošetilých učebních metodách; ale více viny je na lhostejném vyučovacím řemesle mnohých učitelů, kteří, nemajíce osobního poměru k své látce, vtloukají žákům do hlavy právě to nejmechaničtější na věci, co jim dá nejméně práce a vysvětlování: tedy letopočty, definice, slovíčka a vzorce. Profesor odborník v dobrém slova smyslu, ten, který svou látku miluje a sám si ji stále myšlenkově zpracovává a rozšiřuje, který si své hodiny pečlivě připravuje, který svou nauku považuje za tak krásnou a životu potřebnou, že poctivě a horoucně hledí žákům z ní podat to nejcennější a ideově nejvyšší, je dobrý a dokonalý pedagog, i kdyby koktal a byl prchlý jako švec; a pravím, žáci ho budou milovat a poslouchat jako božího slova. … Je to příliš *stará pravda, že ve vyučování osobnost je vše; ale té se nelze učit v pedagogických kursech.* ([11], str. 16–17)

Není-li učitel dobrým odborníkem, nemá-li pedagogický talent, je-li navíc ubitý svým vlastním životem, přivyděláváním v dalším zaměstnání, je-li otrávený situací ve společnosti, ve škole, doma apod., pak lze těžko očekávat, že bude svým studentům vzorem, příkladem, autoritou, že je bude inspirovat ke studiu a vzdělávání. Vyučování bude utrpením pro obě strany.

Dnešní doba, prosazující a podporující vždy a za všech okolností individualitu, nesprávně chápanou svobodu (žáků a studentů), učitelům jejich roli ztěžuje. Učitel musí být silnou osobností, aby obstál (nebo dokonce jen přežil). Britský psychiatr a esejista Theodore Dalrymple (vlastním jménem Anthony Daniels, nar. 1949) v knize *Život na dně* napsal:

Všechno je zredukováno na pouhý souboj vůlí, a tak se dítě naučí, že veškerá omezení jsou leda svévolným břemenem, které na ně uvalil někdo či něco, co je větší a silnější než ono samo. Jsou tak položeny základy ke tvrdohlavé netoleranci každé autority, byť by se tato autorita zakládala na jasně nadřazené a benevolentní znalosti a moudrosti. Autorita jakéhokoli druhu je vnímána jako urážka vlastního já, a je tedy třeba se jí postavit, protože je to autorita. Svět je tudíž světem neustále popuzených eg, která se snaží navzájem si vnucovat svou vůli. ([12], str. 117)

Německý pedagog a filozof Wolfgang Brezinka (nar. 1928) v knize *Filozofické základy výchovy* uvádí jednu z tezí, kterou vzápětí uvážlivě komentuje:

Učitelé se mají snažit zlepšovat své metody a přitom brát ohled na dobře zdůvodněné vědecké poznatky.

Je to formulováno tak opatrně, protože se často stává, že se velebí jako osvědčené určité metody výchovy a výuky, které se později prokáží jako pochybné, jednostranné nebo jen omezené. Jako příklad vezměme globální metodu při výuce čtení nebo množiny v matematice. Povinnost dále se metodicky vzdělávat tedy nevyžaduje důvěřivé přijímání vždy nejmodernějších metod. Spíše znamená, že učitel má zůstat kritický vůči vlastním metodám a otevřený vůči vylepšením. Nemá upadnout do metodické strnulosti, nýbrž stále se učit. ([10], str. 164)

Dovolím si ukončit svůj příspěvek citátem, který jsem nalezl v Brezinkově knize *Filozofické základy výchovy* [10] (str. 11).

Mějme tedy, pokud jde o budoucnost, onu blahodárnou obavu, která vede k bdělosti a k boji, a ne onen druh změkčilé a nečinné hrůzy, která oslabuje a vyčerpává srdce.

Alexis de Tocqueville[13]

[13] Alexis de Tocqueville (1805–1859), francouzský historik, politolog, státník. Citát je z knihy *Demokracie v Americe*, Lidové noviny, Praha, 1992, str. 227. Další vydání: Academia, Praha, 2000, Rozmluvy, Praha, 2012.

Literatura

[1] J. Bradley, *Budeme jednou umět pouze testy? I*, Evropský rozhled 11. 1. 2011. `http://www.evropsky-rozhled.eu`

[2] J. Bradley, *Budeme jednou umět pouze testy? II*, Evropský rozhled 19. 1. 2011. `http://www.evropsky-rozhled.eu`

[3] J. Bradley, *Výuka psaní v USA*, Evropský rozhled 12. 2. 2011. `http://www.evropsky-rozhled.eu`

[4] J. Bradley, *Evoluce výuky matematiky v USA*, Evropský rozhled 17. 4. 2011. `http://www.evropsky-rozhled.eu`

[5] J. Bradley, *Dobře míněná, ale nedomyšlená reforma školství v USA*, Evropský rozhled 15. 5. 2011. `http://www.evropsky-rozhled.eu`

[6] J. Bradley, *Systém standardizovaných testů navrhovaný ministrem Dobešem se v americkém školství naprosto neosvědčil*, Britské listy 21. 11. 2011. `http://www.blisty.cz`

[7] J. Bradley, *Každodenní matematika – uživatelsky přívětivý (?) omyl*, Britské listy 30. 4. 2012. `http://www.blisty.cz`

[8] J. Bradley, *Melánie má konflikt s matkou, blonďák chce jinou barvu vlasů a ananas vyzval k závodu zajíce, aneb Standardizované testy čtení s porozuměním v praxi*, Britské listy 11. 5. 2012. `http://www.blisty.cz`

[9] J. Bradley, *Důsledky plošného testování – učitelská kompetence finančně hodnocena podle počtu lajků na Facebooku (postřeh z USA)*, Britské listy 24. 5. 2012. `http://www.blisty.cz`

[10] W. Brezinka, *Filozofické základy výchovy*, Zvon, České katolické nakladatelství, Praha, 1996. Přeložil I. Ozarčuk. Originál: *Glaube, Moral und Erziehung*, München, Basel, 1992.

[11] K. Čapek, *Místo pro Jonathana! Úvahy a glosy k otázkám veřejného života z let 1921–1937*, Vydavatelství Symposium, Praha, 1970.

[12] T. Dalrymple, *Život na dně. Světový názor, který vytváří spodinu společnosti*, Academia, Praha, 2005. Originál: *Life at the Bottom: The Worldview that Makes the Underclass*, 2001. Úryvek viz *O světovém názoru vytvářejícím spodinu společnosti aneb „Nechcem žádný vzdělání!“*, in *Kam kráčíš, vzdělanosti?*, Revue Prostor 71, 2006, 115–119.

[13] V. Dlab, *Důkladné porozumění pojmu ekvivalence*, Učitel matematiky 19 (2010/11), č. 1 (77), 9–13. Následná diskuse je vystavena na stránce `http://class.pedf.cuni.cz/newsuma/Default.aspx?PorZobr=19`.

[14] A. Einstein, *Jak vidím svět*, Československý spisovatel, Praha, 1966.

[15] Š. Gergelitsová, T. Holan, *Konstrukční geometrie jinak*, Učitel matematiky 22 (2013/14), č. 3 (91), 129–138.

[16] Z. Halas, *Využití matematiky v praxi*, Výukový a metodický text, Projekt OPPA, Praha, 2012.

[17] J. Keller, L. Tvrdý, *Vzdělanostní společnost? Chrám, výtah a pojišťovna*, Slon – Sociologické nakladatelství, Praha, 2008.

[18] J. A. Komenský, *Analytická didaktika*, Státní nakladatelství, Praha, 1947. Z latiny přeložil E. Čapek.

[19] K. P. Liessmann, *Teorie nevzdělanosti. Omyly společnosti vědění*, Academia, Praha, 2008. Přeložila J. Zoubková. Originál: *Theorie der Unbildung. Die Irrtümer der Wissenschaftgesellschaft*, Paul Zsolnay Verlag, Wien, 2006.

[20] McKinsey & Company, *Klesající výsledky českého základního a středního školství. Fakta a řešení.* Praha, 2010.

[21] L. Pátý, [Dopis žákovi], in *Kam kráčíš, vzdělanosti?*, Revue Prostor 71, 2006, 67–70.

[22] D. Ravitch, *The Death and Life of the Great American School System: How Testing and Choice Are Undermining Education*, Dow Jones & Company, 2011.

[23] M. Spitzer, *Digitální demence. Jak připravujeme sami sebe a naše děti o rozum*, Host, Brno, 2014. Přeložil F. Ryčl. Originál: *Digitale Demenz. Wie wir uns unsere Kinder um den Verstand bringen*, Droemer Verlag, München, 2010.

Poděkování: Autor děkuje prof. Vlastimilu Dlabovi za inspirativní podněty k sepsání tohoto článku.

doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
becvar@karlin.mff.cuni.cz

MOTIVAČNÍ PŘÍKLADY Z ANTICKÉ MATEMATIKY

Zdeněk Halas

V tomto příspěvku uvedeme několik inspirujících matematických postupů, které nejsou běžnou součástí školské matematiky. Čerpat přitom budeme zejména z antické teorie kuželoseček.

Dějiny matematiky mohou zajímavě doplňovat výuku ve více různých směrech, například:

1. osvětlení vzniku jednotlivých matematických disciplín,
2. připomenutí zajímavých pozapomenutých souvislostí či postupů,
3. propojení čisté matematiky s jejími aplikacemi,
4. vyprávění příběhů ze života matematiků.

V následujícím textu se zaměříme na první tři body, přičemž ke každému z nich uvedeme konkrétní příklad. Budeme se přitom věnovat kuželosečkám, protože na nich lze poměrně dobře ilustrovat každý z těchto tří bodů samostatně. Historické postupy budeme kvůli lepší srozumitelnosti prezentovat v modernizované podobě.

1 Názvy kuželoseček

Objev kuželoseček je v antické tradici připisován Menaichmovi (1. polovina 4. stol. př. Kr.), a to v souvislosti s řešením problému nalezení dvou středních úměrných, tj. nalezení dvou neznámých délek x a y takových, aby pro zadané délky a, b platilo

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}\,.$$

Právě na tuto úlohu převedl Hippokratés z Chiu (2. pol. 5. stol. př. Kr.) jeden ze tří slavných problémů antické matematiky – *zdvojení krychle.* Zvolíme-li totiž $a = 2b$, dostaneme po úpravě z předchozího vztahu

$$y^3 = 2b^3.$$

Je tedy nalezena délka y hrany krychle, která má oproti zadané krychli s délkou hrany b dvojnásobný objem. Menaichmos vyřešil problém nalezení dvou středních úměrných pomocí kuželoseček; algebraicky zapsáno:

$$xy = ab, \qquad y^2 = bx,$$

nebo

$$x^2 = ay, \qquad y^2 = bx.$$

Z dochovaného zlomku obsahujícího toto řešení[1] však vyplývá, že Menaichmos pracoval s kuželosečkami na poměrně vysoké úrovni. Zdá se tedy být pravděpodobné, že byly studovány už před ním.

Kuželosečky byly zpočátku studovány jako křivky vznikající řezem pláště kuželu rovinou vedenou kolmo na několikterou povrchovou přímku. Jednotlivé kuželosečky pak byly získány volbou úhlu při vrcholu kuželu. Elipsa tak byla nazývána *řezem ostroúhlého kuželu*, parabola *řezem pravoúhlého kuželu* a hyperbola *řezem tupoúhlého kuželu*. Podrobněji je historie kuželoseček zpracována například v [2].

Současnou terminologii však zavedl až Apollónios z Pergé (kol. 200 př. Kr.) ve svém díle *Kónika* (viz např. [8]),[2] které se stalo na téměř 2 000 let základním spisem o kuželosečkách. Toto dílo se nezachovalo v úplnosti, z původních osmi kapitol jich je dochováno pouze sedm, přičemž poslední tři jen v arabském překladu. Apollónios studoval obecně řezy kosé kuželové plochy. Jeho dílo je poměrně náročné, proto se omezíme na zjednodušené odvození paraboly jako řezu kuželové plochy, přičemž budeme využívat moderní symboliku. O elipse a hyperbole pak pojednáme s využitím analytické geometrie.

Uvažujme pro jednoduchost kolmou kuželovou plochu a veďme rovinu rovnoběžnou s povrchovou přímkou AG (viz obr. 1). Ukážeme, že řezem je parabola. Nechť řídicí kružnice této kuželové plochy prochází body $BDGE$ a nechť kružnice KMN leží v rovině rovnoběžné s rovinou řídicí kružnice. Její průměr je MN, bod K na ní leží a KL je rovnoběžná s DE a kolmá na MN. Podobně i DE je kolmá na BG. Jelikož je trojúhelník KMN pravoúhlý (Thalétova kružnice), plyne z Eukleidovy věty o výšce

$$|KL|^2 = |ML| \cdot |LN| \,.$$

Jelikož je rovina řezu rovnoběžná s povrchovou přímkou AG, tak $|LN| = |HG|$. Navíc z podobnosti trojúhelníků $\triangle ZML$ a $\triangle ZBH$ dostáváme

$$\frac{|ML|}{|BH|} = \frac{|ZL|}{|ZH|} \,.$$

Proto

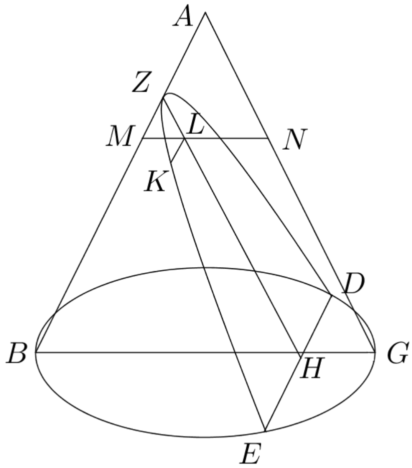
$$|KL|^2 = |ML| \cdot |LN| = \frac{|ZL| \cdot |BH|}{|ZH|} \cdot |HG| = |ZL| \cdot \frac{|BH| \cdot |HG|}{|ZH|} \,.$$

Z předchozího vztahu také vyplývá, že poměr $\frac{|BH|}{|ZH|} = \frac{|ML|}{|ZL|}$ nezávisí na volbě kruhového řezu rovnoběžného s řídicí kružnicí, je proto konstantní. Podobně se také zachovává délka úsečky HG. Výraz $\frac{|BH| \cdot |HG|}{|ZH|}$ je tedy konstantou. Označíme-li ji p, $|KL| = y$ a $|ZL| = x$, dostaneme známou rovnici paraboly

$$y^2 = p\,x \,.$$

[1] Viz Eutokiův komentář k Archimédovu spisu *O kouli a válci*, odst. 78.13–80.24, publikovaný v J. L. Heiberg (ed.), *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii, vol. III.*, Teubner, Leipzig, 1915.

[2] Názvy parabola, hyperbola a elipsa se poprvé vyskytují postupně ve větách 11, 12 a 13 první knihy *Kónik*.



Obr. 1: Parabola jako řez kuželu[3]

Tuto rovnici můžeme interpretovat jako úlohu nalézt k zadané úsečce délky p úsečku délky x takovou, aby měl obdélník s těmito stranami stejný obsah, jako předepsaný čtverec se stranou délky y. Tato úloha se týká tzv. *přikládání ploch* (řecky paraballó, srov. též Eukleidovy *Základy*, I, 44). Odtud pochází název parabola (řecky parabolé).

Obdobným způsobem bychom se mohli zabývat i elipsou a hyperbolou. Odvození je však v těchto případech náročnější.[4] Výsledný vztah by bylo nicméně možno v obou případech přepsat pomocí podobné rovnice jako u paraboly, rozdíl by byl jen v jednom přidaném členu. Snadno ji lze odvodit pomocí analytické geometrie. Rovnice elipsy, resp. hyperboly, jejíž jeden vrchol prochází počátkem, je totiž

$$\frac{(x \mp a)^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

neboli po úpravě

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}\, x \mp \frac{b^2}{a^2}\, x^2.$$

Označíme-li $p = \frac{2b^2}{a}$, přejde tato vrcholová rovnice na tvar

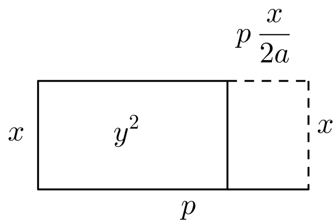
$$y^2 = p\, x \mp \frac{p}{2a}\, x^2,$$

který můžeme v případě znaménka minus interpretovat jako úlohu přiložit k zadané úsečce délky p úsečku délky x takovou, aby výsledný obdélník obsahoval menší obdélník (plnou čarou) se stranou x, který by měl stejný obsah, jako předepsaný čtverec se stranou délky y, a zároveň byl menší o obdélník (čárkovaně) podobný zadanému obdélníku se stranami $2a$, p. Velkému obdélníku

[3] Tento obrázek vznikl na základě překladu Apollóniových *Kónik* [8]. Podobné náčrtky odrážející schematizující přístup nacházíme i ve starých edicích.

[4] Viz např. [8], kapitola I, věty 12 a 13.

tedy „chybí“ (řecky elleipó) čárkovaný obdélník a odtud má elipsa svůj název (elleipsis).



Obr. 2: Elipsa – přikládání ploch

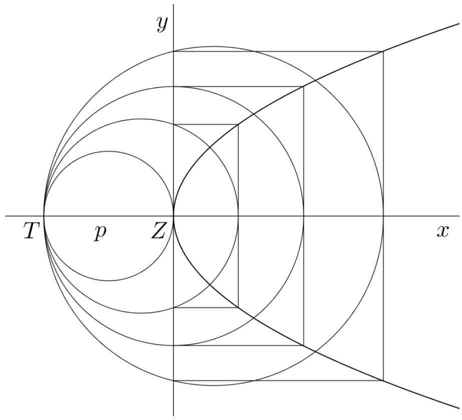
V případě znaménka plus by obdélník o obsahu y^2 přesahoval (řecky hyperballó) obdélník se stranami p, x. Tento případ by odpovídal hyperbole (řecky hyperbolé).

Stručně jsme tak nastínili původ názvů jednotlivých regulárních kuželoseček. Používali jsme přitom analytickou geometrii a moderní matematický aparát. Historicky přesnější odvození a znění příslušných vět, které je však o něco náročnější, lze nalézt například v [8], případně [7].

2 Konstrukce paraboly

Nyní vytěžíme z obrázku 1 jednoduchou, ale poměrně zajímavou souvislost. Jedná se o konstrukci paraboly, která se nevyskytuje příliš často. Poprvé se objevuje v komentáři k Apollóniovým *Kónikám*, který sepsal perský lékař, astronom a matematik ibn Síná (asi 980–1037), známý též jako Avicenna.

Pokud zakreslíme do jedné roviny kruhové řezy kolmé kuželové plochy vedené rovinami rovnoběžnými s její řídicí kružnicí (viz obrázek 1) a připojíme také příslušnou parabolu, dostaneme přímo návod na jednoduchou konstrukci bodů paraboly.



Obr. 3: Konstrukce paraboly

Na tuto geometrickou situaci můžeme následně pohlížet jako na přímou aplikaci Eukleidovy věty o výšce, která je však také podstatou původního Apollóniova odvození na kuželové ploše. Označíme-li p vzdálenost $|TZ|$ (průměr kružnice dotýkající se osy y), dostaneme ihned rovnici paraboly

$$y^2 = p\,x\,.$$

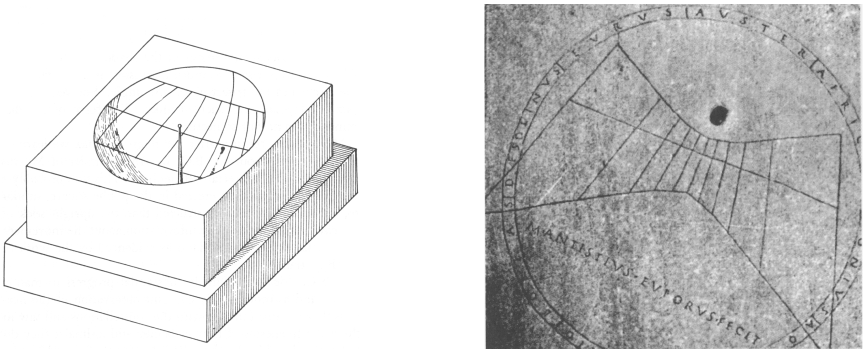
3 Kuželosečky a sluneční hodiny

V této kapitole si ukážeme jeden z příkladů, jak se poznatky o kuželosečkách projevily v praxi. Zpočátku se pro měření času používal svislý obelisk, tzv. *gnómón*. Čas se odečítal z délky jeho stínu, což bylo zatíženo značnými nepřesnostmi, neboť se délka stínu v průběhu roku mění. Gnómony byly užívány například v Egyptě či Mezopotámii. Odtud se jejich používání rozšířilo do Řecka. Právě tam se v průběhu 7. stol. př. Kr. objevil nový, mnohem přesnější typ – horizontální duté polokulové sluneční hodiny zvané *skafé* (viz obr. 4), které měly rovnoměrnou stupnici nanesenou na vnitřní plochu polosféry a hrot ukazatele ve středu této sféry. Jejich výhodou byla nezávislost na dni v roce, čímž bylo dosaženo mnohem větší přesnosti, neboť se čas neodečítal z délky stínu, ale z jeho směru. Vycházelo se tak vlastně ze zemské rotace. Výroba takovýchto polokulových slunečních hodin však byla poměrně náročná.

Na konstrukci byly mnohem jednodušší sluneční hodiny rovinné. První takové se objevily v Egyptě ve 4. stol. př. Kr. Zohledňovaly různé deklinace Slunce během roku, ale byly zatím vytvářeny pouze experimentálně. Aby bylo možno zkonstruovat *datové čáry*, tj. křivky, po nichž se pohybuje konec stínu ukazatele v průběhu daného dne v roce, bylo užitečné znát jejich základní matematické vlastnosti.

Není nijak obtížné odvodit, že datovými čarami jsou právě kuželosečky. Představíme-li si totiž denní dráhu Slunce po obloze jako kružnici (část jí je pod obzorem) a špičku ukazatele slunečních hodin jako bod, je ihned zřejmé, že spojením všech bodů této kružnice s tímto jedním bodem vznikne kuželová plocha. Jejím průnikem s rovinou číselníku je tedy nutně kuželosečka. V našich zeměpisných šířkách se jedná vesměs o hyperboly.[5] Jelikož se výška Slunce na obloze v průběhu roku mění, je možno postupně pozorovat soustavu hyperbol (s výjimkou jarní a podzimní rovnodennosti, kdy hyperboly přecházejí v přímku). S jejich pomocí lze odečítat datum. Vyznačení datových čar (alespoň pro slunovraty a rovnodennosti) na číselníku slunečních hodin také usnadňuje přesné narýsování čar hodinových.

[5] Na pólu se jedná o kružnice, neboť dráha Slunce v průběhu dne se pozorovateli jeví jako kružnice umístěná rovnoběžně se zemí. Tato kružnice v průběhu roku stoupá či klesá pod obzor (polární den a noc). Směrem k rovníku se pak tato řídicí kružnice kuželové plochy naklání čím dál tím více, takže datové čáry přecházejí postupně v elipsy, paraboly a v širokém pásu mezi polárními kruhy v hyperboly.



Obr. 4: Sluneční hodiny: skafé a rovinné sluneční hodiny (zdroj: [6])

Rovinné sluneční hodiny opatřené datovými čarami se v antice skutečně objevily. Přirozeně až poté, co se rozšířila alespoň základní znalost kuželoseček. Vzhledem k jejich relativně snadné výrobě pak starší typ – skafé – postupem času ustoupil slunečním hodinám rovinným.

4 Závěr

Antické spisy obsahují mnohem více příkladů, které mohou inspirovat, podpořit porozumění matematice i zájem o ni. Stručně naznačíme některé zajímavé možnosti, které tyto spisy nabízejí.

Významnou oblastí jsou zejména výpočty obsahů a objemů geometrických útvarů. Jedná se nejen o Eudoxovu „exhaustivní“ metodu, ale i jiné postupy, které se nám dochovaly u Archiméda ze Syrákús (souvislost obsahu a obvodu kruhu, výpočet konstanty π, objem koule, objem úseče rotačního paraboloidu a další), viz např. [1].

Inspirativní jsou také antické postupy, které bychom dnes zařadili mezi výpočty hodnot elementárních funkcí. Zde je třeba poznamenat, že se ve školské matematice často pracuje s funkcemi, které jsou sice definovány, odvodí se mnohé jejich vlastnosti, ale stále zůstávají zčásti jakousi „černou skříňkou“, neboť není na první pohled zřejmé, jak lze jejich hodnoty vypočítat. Přitom například k vytvoření tabulky hodnot funkce sinus postačuje dobrá znalost součtových vzorců a elementární geometrie, jak vyplývá z postupů popsaných v první knize *Almagestu* alexandrijského astronoma a geografa Klaudia Ptolemaia (modernizované zpracování viz např. [4], český překlad příslušné pasáže viz [7], str. 500–519). V této souvislosti můžeme také připomenout odmocniny, několik elegantních postupů jejich výpočtu je představeno například v [5].

Jelikož má již zmíněná goniometrie svůj počátek právě v antice, může být zajímavé sledovat, jaké výpočty byly tehdy v této oblasti prováděny. Lze tak získat poměrně dobrou představu o raných aplikacích goniometrie a o tom, proč vlastně vznikla. Podrobnější zpracování této otázky lze nalézt např. v [3].

Obecně lze říci, že matematice na atraktivitě přidává srozumitelný a živý výklad. Je žádoucí, aby byl dle možností doplňován zajímavými souvislostmi, propojeními s reálnými aplikacemi a vysvětlením toho, proč vlastně některé oblasti matematiky vznikly. Studium antické matematiky k tomu může významně přispět.

Literatura

[1] J. Bečvář, *Měření kruhu*. In Z. Halas (ed.), *Archimédés, několik pohledů do jeho života a díla*, Matfyzpress, Praha, 2012, str. 45–53.
[Dostupné z `http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/402371`]

[2] J. L. Coolidge, *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces*, Oxford University Press, Oxford, 1945.

[3] Z. Halas, *Aplikace matematiky v běhu věků*. In A. Slavík (ed.), *Matematika a reálný svět*, Matfyzpress, Praha, 2012, str. 93–98.
[Dostupné z `http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/konference2012/sbornik.pdf`]

[4] Z. Halas, *Výpočty hodnot goniometrických funkcí*. In J. Bečvář, M. Bečvářová (eds.), *Matematika v proměnách věků VI*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 45, Matfyzpress, Praha, 2010, str. 120–140.
[Dostupné z `http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/401740`]

[5] V. Honzlová Exnerová, *Výpočty odmocnin od starověku po současnost*, závěrečná práce CŽV, KDM MFF UK, Praha, 2014.
[Dostupné z `http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/czv/vypocet_odmocnin.pdf`]

[6] M. Nosek, M. Brož (eds.), *Sluneční hodiny na pevných stanovištích*, Academia, Praha, 2004.

[7] Z. Šír, *Řecké matematické texty*, OIKOYMENH, Praha, 2011.

[8] R. C. Taliaferro, *Apollonius of Perga, Conics*, Books I–III, Green Lion Press, Santa Fe, 2000.

Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`halas@karlin.mff.cuni.cz`

DIDAKTICKÁ PŘÍPRAVA BUDOUCÍCH UČITELŮ MATEMATIKY A PRAXE

Jarmila Robová, Oldřich Odvárko

1 Úvod

Nároky na práci a roli učitele ve výchově a vzdělávání se v průběhu vývoje společnosti mění v souvislosti s tím, jak se mění požadavky společnosti. K základům úspěšného působení učitele matematiky v praxi však stále patří jeho odborná matematická úroveň a pedagogicko-didaktická způsobilost. V rámci vysokoškolské přípravy budoucích učitelů matematiky by měly být tyto dvě základní složky vzájemně propojeny již od začátku jejich studia.

2 Cesty ke studiu učitelství matematiky z pohledu budoucích pedagogů

Důležitou součástí pedagogicko-didaktické přípravy učitele matematiky je rozvíjení schopnosti žáky zaujmout a motivovat k učení v matematice. Matematika často patří mezi obávané a méně oblíbené předměty, a proto nás zajímalo, jaké názory a zkušenosti mají budoucí učitelé z hlediska podpory zájmu o matematiku u žáků.

Na začátku letního semestru akademického roku 2013/2014 byl studentům – budoucím učitelům v prvním a ve čtvrtém ročníku na MFF UK zadán jednoduchý dotazník se třemi otevřenými otázkami:

- Co mne přivedlo ke studiu matematiky, resp. učitelství matematiky?
- Co se mi v hodinách matematiky na střední škole líbilo?
- Jaké jsou podle Vás možnosti, jak podpořit zájem studentů na střední či vysoké škole o studium matematiky?

Dotazník vyplnilo 35 studentů prvního ročníku a 12 studentů čtvrtého ročníku, tedy celkem 47 respondentů.

Při zpracování odpovědí jsme jednak sledovali uváděné jevy a jejich četnost, jednak jsme se zaměřili na identifikaci možných vazeb a souvislostí. Ke každé ze tří položek dotazníku dále uvádíme tabulku (tab. 1 až tab. 3), ve které jsou seřazeny jevy podle četnosti jejich výskytu v odpovědích; následuje stručný komentář. Vzhledem k tomu, že někteří studenti uváděli ve svých odpovědích více jevů současně, je součet četností všech jednotlivých jevů ve všech otázkách větší než celkový počet respondentů.

Důvod	Četnost
Nadání na matematiku	29
Můj učitel matematiky (jeho přístup, metody)	16
Povolání učitele	9
Vliv rodiny (absolventi MFF UK, učitelé)	4
Význam, krása matematiky	2

Tab. 1: Co mne přivedlo ke studiu matematiky, resp. učitelství matematiky?

Z tabulky je zřejmé, že nadání na matematiku jako hlavní důvod napsala výrazná většina respondentů. Tento důvod se častěji vyskytoval u studentů prvního ročníku (přibližně 70 %) než u čtvrtého ročníku. Uvádíme několik konkrétních odpovědí na tuto otázku:

- *Matematika mne již bavila od základní školy.*
- *Vliv výborných učitelů v posledním roce studia – zjistila jsem, že dobrý učitel dokáže opravdu hodně.*
- *Špatní učitelé matematiky, rozhodla jsem se, že to změním.*

Nyní se podívejme na výsledky druhé otázky v dotazníku, ve které jsme sledovali oblíbené činnosti studentů v hodinách matematiky na střední škole.

Důvod	Četnost
Přístup učitele v hodinách (jeho podání, zaujetí)	13
Počítání, radost ze správného výsledku	10
Srozumitelnost, logičnost předmětu a výuky	7
Subjektivní snadnost (nemusel/la jsem se připravovat)	7
Příklady související s užitím matematiky	5
Konkrétní matematické téma (kombinatorika, algebra, . . .)	8

Tab. 2: Co se mi v hodinách matematiky na střední škole líbilo?

Je zajímavé, že subjektivní snadnost předmětu zmiňovali především studenti prvního ročníku; pouze jeden student čtvrtého ročníku uvedl tento důvod. Z hlediska konkrétních témat školské matematiky (poslední řádek v tabulce) nebyl v odpovědích respondentů patrný zvýšený zájem o žádné z nich. Potěšující je skutečnost, že se několikrát vyskytla témata z geometrie. Opět uvádíme některé odpovědi respondentů:

- *To, že se nemusím učit tolik věcí nazpaměť jako u humanitních předmětů.*
- *Velká autorita učitele, který vše jasně, jednoduše VYSVĚTLIL (asi tomu dobře sám rozuměl).*
- *Přístup učitele matematiky a logika – žádné výjimky a žádné dlouhé testy.*

V poslední otázce jsme sledovali případy motivace, které studenti považují za přínosné z hlediska podpoření zájmu o matematiku.

Možnosti motivace	**Četnost**
Kvalitní učitel matematiky	15
Ukázky užití matematiky v praxi	11
Metody práce (soutěže, samostatné práce, aktivita, ...)	9
Význam matematiky	5
Historické zajímavosti a příklady	3
Modernizace výuky, ICT	3
Začít na základní škole	3

Tab. 3: Jaké jsou možnosti podpoření zájmu studentů na SŠ či VŠ o studium matematiky?

Respondenti uváděli na druhém místě z hlediska četnosti jako důležitý motivační prvek ukázky využití matematiky v praxi. Tento výsledek však nekoresponduje s odpověďmi na druhou otázku, kde tento důvod byl až na předposledním místě. Podívejme se opět na některé konkrétní odpovědi respondentů:

- *Vyučovat dovednost, nikoliv znalost.*
- *Vychovávat dobré učitele, kteří by matematiku nepředkládali jako snůšku „vzorečků“ a čísel.*
- *Ukázat, že matematika není jen nudné počítání.*

Shrneme-li stručně výsledky této malé dotazníkové sondy, je zřejmé, že i budoucí pedagogové jsou si vědomi důležité role učitele. Důraz na kvalitního učitele se u dvou otázek vyskytl na prvním místě, v jedné otázce na druhém.

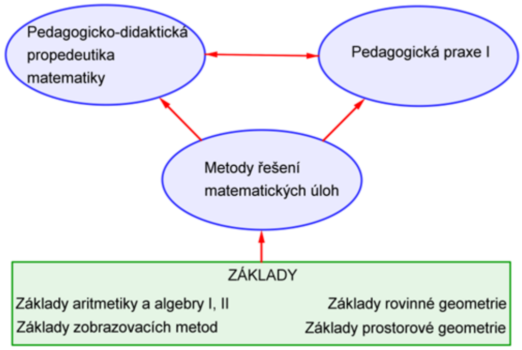
3 Příprava učitelů matematiky na MFF UK

Z výsledků dotazníkové sondy je zřetelně patrné, že osobnost učitele, jeho odborné znalosti a pedagogické schopnosti mají ve výchovně vzdělávacím procesu dominantní roli. Učitel matematiky by měl vědomosti i dovednosti z jednotlivých oblastí efektivně propojovat a aplikovat ve výuce.

3.1 Změny v přípravě budoucích učitelů matematiky

Na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze je od akademického roku 2012/2013 realizován na úrovni bakalářského studia nově koncipovaný studijní obor *Matematika se zaměřením na vzdělávání* v rámci studijního programu *Matematika.* Nové pojetí studia posiluje propojení matematické a pedagogicko-didaktické části přípravy. V nově zařazených matematických disciplínách, které v názvu vždy začínají *Základy* ..., je zdůrazňován zřetel na postupný přechod od středoškolské matematiky k vysokoškolské matematice.

K podstatným změnám došlo rovněž v pedagogicko-didaktické přípravě. Následující schéma (obr. 1) ukazuje strukturu předmětů a vzájemné vazby v této části.



Obr. 1: Schéma předmětů

V souvislosti s uvedenými změnami je na katedře didaktiky matematiky MFF UK řešen rozvojový projekt MŠMT s názvem *Inovace didaktické přípravy v studijním oboru „Matematika zaměřená na vzdělávání"*. V rámci projektu jsme se zaměřili na reformu předmětu *Metody řešení matematických úloh*, který byl přeřazen z magisterské úrovně studia do bakalářské, dále na úpravy *Pedagogické praxe I* (rovněž přeřazené z magisterské úrovně studia do bakalářské) a na rozpracování koncepce nového předmětu *Pedagogicko-didaktická propedeutika matematiky.* V navazující části článku se podrobněji zmíníme o výuce prvního z uvedených předmětů.

3.2 Metody řešení matematických úloh

V inovovaném semináři *Metody řešení matematických úloh* jsou řešeny náročnější úlohy středoškolské matematiky (až do úrovně úloh matematické olympiády), v centru pozornosti je objevování různých metod řešení, sledují se vazby mezi postupy vysokoškolské a středoškolské matematiky.

Předpokládáme, že v rámci domácí přípravy na seminář sestaví každý student seminární práci zaměřenou na nalezení a zhodnocení několika metod řešení zadaného matematického problému, a to jednak z hlediska matematické náročnosti, jednak z hlediska přiměřenosti a vhodnosti pro daný věk a úroveň žáků.

Ukážeme si nyní konkrétní matematický problém z oblasti výrokové logiky a načrtneme různé přístupy k jeho řešení. Uvedená ilustrace má formální charakter, poskytuje však řadu možností hlouběji pochopit výroky a vztahy mezi nimi.

Koncert

Účast Anny, Barbory, Cyrila a Dušana na koncertě je vázána těmito podmínkami: Přijde aspoň jeden chlapec, nejvýše jedna dívka a právě jeden ze sourozenců Anna-Cyril. Barbora nepřijde bez Dušana, přitom je však vyloučeno, aby přišla Anna spolu s Dušanem. Které skupiny z této čtveřice se mohou zúčastnit koncertu a kdo na koncert určitě nepůjde?

Nejdříve vyhledáme „základní" výroky, z nichž lze sestavit všechny podmínky úlohy (v těchto slovních úlohách nemusí žáci podmínky ze zadání chápat a interpretovat vždy jednoznačně):

A: *Anna přijde na koncert.*
B: *Barbora přijde na koncert.*
C: *Cyril přijde na koncert.*
D: *Dušan přijde na koncert.*

Dále s využitím výroků A, B, C, D vyjádříme všechny podmínky ze zadání, které označíme čísly (1) až (5):

$$C \vee D \tag{1}$$
$$\neg A \vee \neg B, \text{ resp. } \neg(A \wedge B) \tag{2}$$
$$(A \vee C) \wedge \neg(A \wedge C), \text{ resp. } (A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C) \tag{3}$$
$$\neg D \Rightarrow \neg B, \text{ resp. } B \Rightarrow D \tag{4}$$
$$\neg(A \wedge D), \text{ resp. } \neg A \vee \neg D \tag{5}$$

Řešení spočívá v základní myšlence, že všechny výše uvedené podmínky-výroky musí být současně pravdivé, tj. že výrok

$$(C \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge [(A \vee C) \wedge \neg(A \wedge C)] \wedge (\neg D \Rightarrow \neg B) \wedge \neg(A \wedge D) \tag{6}$$

je pravdivý.

Problém lze řešit různými metodami. Tři metody řešení ukážeme podrobněji, o dalších dvou se pouze zmíníme.

3.2.1 Tabulková metoda

Tabulková metoda je často při řešení úloh z oblasti výrokové logiky využívána, v případě většího počtu jednoduchých výroků je však časově náročná a může vést k formálnímu vnímání logických vazeb jako hry s jedničkami a nulami. Řešení touto metodou je ukázáno v tabulce 4.

A	B	C	D	$C \vee D$	$\neg A \vee \neg B$	$A \vee C$	$\neg(A \wedge C)$	$B \Rightarrow D$	$\neg(A \wedge D)$
1	1	1	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1

Tab. 4

Ze zvýrazněných řádků tabulky (platná konjunkce uvedených podmínek-výroků) je vidět, že na koncert půjdou buď *Barbora a Cyril a Dušan*, nebo *Cyril a Dušan*, nebo pouze *Cyril*. Na koncert určitě nepřijde *Anna*.

3.2.2 Škrtací metoda

Další z možných metod, kterými lze danou úlohu řešit, je škrtací metoda. Ta je založena na vyškrtávání těch čtveřic jedniček a nul, které odpovídají nepravdivým výrokům. Například pravdivý výrok $C \vee D$ znamená, že nemůže nastat možnost, že nepřijde ani Cyril ani Dušan. Proto škrtneme všechny řádky, které mají ve sloupcích odpovídající výrokům C a D obě nuly (v tabulce jde o třetí a čtvrtý sloupec, viz tab. 5).

A	B	C	D
1	1	1	1
1	1	1	0
1	1	0	1
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
1	0	1	1
1	0	1	0
1	0	0	1
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
0	1	1	1
0	1	1	0
0	1	0	1
~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
0	0	1	1
0	0	1	0
0	0	0	1
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~

A	B	C	D
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
1	0	1	1
1	0	1	0
1	0	0	1
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
0	1	1	1
0	1	1	0
0	1	0	1
~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
0	0	1	1
0	0	1	0
0	0	0	1
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~

A	B	C	D
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~
~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
0	1	1	1
~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~
~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~
~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
0	0	1	1
0	0	1	0
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~

Tab. 5, 6, 7

Obdobně postupujeme dále. V případě platnosti dalšího výroku $\neg(A \wedge B)$ vyškrtneme ty řádky, které mají ve sloupcích odpovídající výrokům A a B obě jedničky (v tabulce první a druhý sloupec, viz tab. 6). Postupně tak na základě platnosti výroků (1) až (5) získáme řešení zachycené v tab. 7.

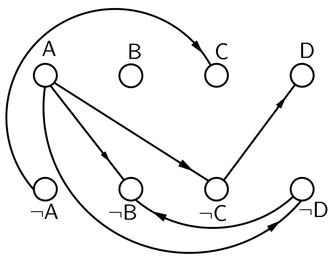
Uvedený postup je časově nenáročný, jde o efektivní a snadno pochopitelnou metodu i z pohledu žáků.

3.2.3 Grafická metoda

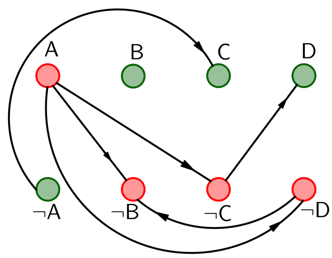
V případě grafické metody vyjádříme nejdříve všechny výroky (1) až (5) pomocí implikací:

$$\neg C \Rightarrow D \tag{1'}$$
$$A \Rightarrow \neg B \tag{2'}$$
$$A \Rightarrow \neg C \tag{3'}$$
$$\neg A \Rightarrow C \tag{3''}$$
$$\neg D \Rightarrow \neg B \tag{4'}$$
$$A \Rightarrow \neg D \tag{5'}$$

Každý z výroků A, B, C, D a jejich negace znázorníme kolečky (uzly), implikace zobrazíme orientovanými čarami (orientovanými hranami) od předpokladu k závěru. Sestavíme schéma (orientovaný graf) obsahující všechny uvedené výroky, jejich negace a zadané implikace (1') až (5'), viz obr. 2.



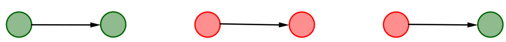
Obr. 2



Obr. 3

Graf obarvujeme podle těchto pravidel:

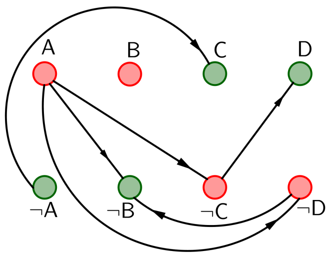
- Je-li výrok vyznačený kolečkem pravdivý, obarvíme jej zeleně, v opačném případě červeně. Dále využíváme toho, že výrok a jeho negace mají opačné pravdivostní hodnoty.
- Kolečka spojená orientovanou čarou vybarvujeme na základě definice implikace. Přípustná jsou tedy jen ta obarvení dvou uzlů spojených orientovanou čarou, která jsou uvedena na obr. 4.



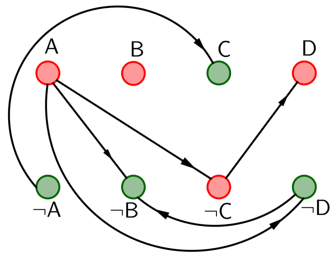
Obr. 4

Nemáme-li informaci o pravdivosti žádného z výroků A, B, C, D, vybereme na začátku řešení jeden z nich a přiřadíme mu jednu z hodnot pravda, či nepravda. Graf poté začneme obarvovat podle pravidel. Uvažujme například nejprve případ, že D je pravdivý výrok (přijde Dušan). Graf postupně obarvujeme a dojdeme do situace, že máme obarvené uzly A, C, D i uzly $\neg A$, $\neg C$, $\neg D$. Nemáme však žádné informace, jak obarvit uzel B. Zvolíme tedy možnost, že výrok B je pravdivý (přijde Barbora), a získáme obarvení na obr. 3. Ze zobrazeného grafu vyplývá, že pravdivé jsou výroky B, C, D.

Nyní musíme prošetřit případ, že D je pravdivý výrok a současně B je nepravdivý (přijde Dušan a nepřijde Barbora). Získáme obarvení na obr. 5, ze kterého vyplývá, že platí výroky C, D.



Obr. 5



Obr. 6

Ještě nám zbývá prošetřit možnost, že výrok D je nepravdivý. Z obarveného grafu na obr. 6 je vidět, že v tom případě je pravdivý pouze výrok C.

Tato metoda je časově náročnější, podporuje však myšlenkové postupy žáků, kteří se opírají o vizualizaci matematických situací.

3.2.4 Řetězcová metoda

Tato metoda je obdobná předchozí grafické metodě, avšak grafy se při ní nepoužívají. Výroky (1) až (5) se uspořádají do takového řetězce, který vede buď ke sporu se zvoleným předpokladem, nebo se postupně naleznou jednotlivá řešení.

Předpokládejme nejprve, že výrok A je pravdivý. Z platnosti (2) plyne, že výrok B je nepravdivý. Z (5) zjistíme, že D je nepravdivý výrok, a dále z (1), že C je pravdivý výrok. Z (3) dostáváme, že C je nepravdivý výrok. Odtud plyne spor. Dále pokračujeme analogicky jako u grafické metody, vycházíme nyní z předpokladu, že A je nepravdivý výrok.

Uvedený postup řešení je myšlenkově náročný, neboť vyžaduje vyhledání vhodného řetězce výroků, který povede k výsledkům.

3.2.5 Booleovská metoda

Při této metodě řešíme daný problém v algebře pravdivostních hodnot výroků $(\{0,1\},+,\cdot,')$ s binárními operacemi sčítání a násobení a s unární operací komplement (doplněk), která je dvouprvkovým modelem Booleovy algebry. V tomto modelu pracujeme s proměnnými – pravdivostními hodnotami a, b, c, d výroků A, B, C, D. Pomocí těchto proměnných a příslušných operací převedeme výrok (6) na tvar

$$(c+d)\cdot(a'+b')\cdot[(a+c)\cdot(a\cdot c)']\cdot(d+b')\cdot(a\cdot d)'$$

a zjišťujeme, kdy je tento výraz roven 1.

Postupnými úpravami podle axiomů a vět platných v algebře pravdivostních hodnot dospějeme k rovnici

$$a' \cdot b \cdot c \cdot d + a' \cdot b' \cdot c \cdot d + a' \cdot b' \cdot c \cdot d' = 1.$$

Odtud již získáme výsledek.

Tato metoda vyžaduje znalosti z oblasti Booleových algeber, z tohoto pohledu se jeví vhodnější pro vysokou školu. Podrobnosti k této metodě lze nalézt v publikaci [2] nebo [3].

4 Závěr

Domníváme se, že v přípravě budoucích učitelů matematiky nelze odtrhnout pedagogicko-didaktickou část přípravy od přípravy matematické. Je však třeba tyto obě složky vhodně propojovat, neboť učitel matematiky potřebuje mít strukturované vědomosti a dovednosti odlišně od matematika-vědce. Učitel potřebuje znát souvislosti i návaznosti při zavádění pojmů ve školské matematice, možnosti jejich modelování, měl by rovněž umět uplatňovat didaktické zásady i respektovat mentální vývoj svých žáků.

Literatura

[1] J. Blažek, O. Odvárko, *Tabulky k řešení logických a množinových úloh*, Matematika a fyzika ve škole, roč. 2, č. 10, 1971/1972.

[2] O. Odvárko, *Booleova algebra*, Edice Škola mladých matematiků, Praha, Mladá fronta, 1973.

[3] O. Odvárko, *Algebra pravdivostních hodnot výroků pro IV. ročník gymnázií se zaměřením na matematiku*, Praha, SPN, 1988.

[4] J. Robová, *Grafické řešení logických úloh.* In D. Jirotková, N. Stehlíková (eds.), *Dva dny s didaktikou matematiky*, Praha, PedF UK, 2005.

[5] J. Šedivý a kol., *Metody řešení matematických úloh II*, Praha, SPN, 1987.

doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`robova@karlin.mff.cuni.cz`

doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`odvarko@karlin.mff.cuni.cz`

NEOBVYKLÉ SADY HRACÍCH KOSTEK

Antonín Slavík

Snad žádný kurz elementární teorie pravděpodobnosti se neobejde bez úloh o hracích kostkách. Obvykle se jedná o klasické šestistěnné kostky ohodnocené čísly 1 až 6. Z pohledu matematiky je však celkem přirozené studovat i některé modifikované druhy kostek, zejména

- kostky s libovolným počtem stěn,
- kostky, kde stěny nejsou očíslovány po sobě jdoucími přirozenými čísly.

V praxi lze snadno vyrobit kostky ve tvaru pravidelných mnohostěnů o čtyřech, šesti, osmi, dvanácti a dvaceti stěnách. Ani jiné počty stěn nepředstavují konstrukční problém. Spojíme-li například podstavy dvou shodných pravidelných n-bokých jehlanů, získáme „kostku" o $2n$ stěnách. Jinou možností je vzít pravidelný n-boký hranol, kde rozměry podstavy budou zanedbatelné vzhledem k výšce hranolu. Očíslováním stěn hranolu pak vznikne „kostka" o n stěnách.

Nestandardní kostky nepředstavují jen matematickou kuriozitu, ale skutečně se využívají ve hrách jako např. Dungeons & Dragons.

Kostky ze hry Dungeons & Dragons (Wikimedia Commons)

Kostku můžeme v matematice chápat jako diskrétní náhodnou veličinu, která nabývá hodnot z jisté konečné množiny s předepsanými pravděpodobnostmi. V tomto příspěvku ovšem vystačíme s intuitivním chápáním kostek. Vždy budeme předpokládat, že všechny stěny kostky padají se stejnou pravděpodobností. Nebudeme studovat jednotlivé kostky, ale zaměříme se na sady nestandardních kostek. Ty mohou vykazovat nejrůznější překvapivé vlastnosti, které jsou dobře srozumitelné i laikům. Úlohy o kostkách tak mohou posloužit jako motivace ke studiu středoškolské, případně vysokoškolské matematiky, která je k hlubšímu porozumění problematice nezbytná.

1 Netranzitivní sady

Asi nejznámějším příkladem neobvyklých sad hracích kostek jsou tzv. netranzitivní sady. Do širšího povědomí veřejnosti (nejen z řad matematiků) se dostaly díky článku M. Gardnera [3]. V něm je popsán následující příklad pocházející od B. Efrona, matematika ze Stanfordovy univerzity. Jedná se o sadu čtyř šestistěnných kostek s ohodnocením

$$K_1 = (4, 4, 4, 4, 0, 0), \quad K_2 = (3, 3, 3, 3, 3, 3),$$
$$K_3 = (6, 6, 2, 2, 2, 2), \quad K_4 = (5, 5, 5, 1, 1, 1).$$

Představme si nyní hru pro dva hráče A a B s následujícími pravidly: Hráč A si na začátku vybere libovolnou ze čtyř kostek, hráč B poté zvolí některou ze zbývajících tří kostek. Oba hráči pak opakovaně házejí vybranými kostkami. Vítězem každého kola je hráč, na jehož kostce padlo vyšší číslo.

Na první pohled vypadá hra příznivěji pro hráče A, který na začátku může vybírat z většího počtu kostek. Ukažme si, že ve skutečnosti je ve výhodě hráč B. Označme symbolem $P(K_i > K_j)$ pravděpodobnost, že na kostce K_i padne vyšší číslo než na kostce K_j. Rozborem případů se snadno přesvědčíme, že platí

$$P(K_1 > K_2) = \frac{2}{3}, \;\; P(K_2 > K_3) = \frac{2}{3}, \;\; P(K_3 > K_4) = \frac{2}{3}, \;\; P(K_4 > K_1) = \frac{2}{3}.$$

Odtud plyne, že hráč B může svou kostku vždy zvolit tak, aby vyhrával přibližně ve dvou třetinách případů.

Předchozí příklad přirozeně vede k následující definici: Sada n kostek je netranzitivní, pokud je můžeme seřadit do posloupnosti $K_1, \ldots, K_n$ tak, aby platilo

$$P(K_1 > K_2) > \frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad P(K_{n-1} > K_n) > \frac{1}{2}, \;\; P(K_n > K_1) > \frac{1}{2}.$$

Existence takových sad ukazuje zdánlivě paradoxní skutečnost, že relace „na kostce X padá ve většině případů větší číslo než na kostce Y" není tranzitivní; odtud pochází i název „netranzitivní sady". Jedná se o jakousi obdobu známého Condorcetova volební paradoxu (viz např. [7]).

Přičtení stejného čísla k hodnotám na všech stěnách všech kostek libovolné netranzitivní sady zachovává netranzitivitu; je tedy zjevné, že existuje nekonečně mnoho příkladů netranzitivních sad kostek. Pokud se nám např. u výše uvedeného Efronova příkladu nelíbí nulové hodnoty na stěnách první kostky, stačí čísla na všech stěnách všech kostek zvětšit o jedničku.

Mnohem zajímavější jsou ovšem příklady netranzitivních sad, které nelze získat přičtením konstanty. Sám Efron navrhl ještě další dvě sady, kde každá z nich se skládá ze čtyř šestistěnných kostek (viz [3, 5]). Každá netranzitivní sada zjevně musí obsahovat aspoň tři kostky. Jednoduchý příklad netranzitivní sady s právě třemi kostkami lze najít v článku [8]:

$$K_1 = (1,5,9), \quad K_2 = (3,4,8), \quad K_3 = (2,6,7) \tag{1}$$

Jestliže pro nějakou netranzitivní sadu platí

$$P(K_1 > K_2) = \cdots = P(K_{n-1} > K_n) = P(K_n > K_1),$$

budeme společnou hodnotu těchto pravděpodobností nazývat mírou dominance dané sady. Například výše uvedená Efronova sada má míru dominance $\frac{2}{3}$, zatímco sada (1) má míru dominance $\frac{5}{9}$. Vrátíme-li se k výše popsané hře dvou hráčů, pak pro hráče B bude výhodná netranzitivní sada s co největší mírou dominance. V článku [8] je dokázáno, že míra dominance je vždy menší než $\frac{3}{4}$. Pro trojici kostek lze dosáhnout maximální dominance 0,618, pro čtveřici $\frac{2}{3} \doteq 0{,}667$, pro deset kostek nejvýše 0,732; s rostoucím počtem kostek se maximum limitně blíží ke $\frac{3}{4}$.

Netranzitivní sady kostek existují nejen na papíře, ale dají se zakoupit také u výrobců hraček; na obrázku je fotografie Efronovy sady, kterou nabízí obchod Grand Illusions [9].

Efronova sada kostek (Grand Illusions)

2 Sady se stejně pravděpodobnými součty

Uvažujme situaci, kdy házíme několika kostkami současně. Zajímá nás, jaké součty mohou padnout a jaké jsou příslušné pravděpodobnosti těchto součtů. Např. při hodu třemi klasickými kostkami může nastat celkem $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ možností. Nejmenší možný součet 3 dostaneme pouze v jednom případě, součet 4 ve třech případech, součet 5 v šesti případech (jde o uspořádané trojice hodnot $(3,1,1)$, $(1,3,1)$, $(1,1,3)$, $(2,2,1)$, $(2,1,2)$, $(1,2,2)$), atd. Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce.

Součet	Četnost
3 nebo 18	1
4 nebo 17	3
5 nebo 16	6
6 nebo 15	10
7 nebo 14	15
8 nebo 13	21
9 nebo 12	25
10 nebo 11	27

V případě většího počtu kostek bude rozbor všech případů dost namáhavý. Problém však můžeme převést na jinou úlohu, kterou snadno zvládneme s pomocí počítače. Prohlédněme si následující rovnost:

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3 = x^3 + 3x^4 + 6x^5 + 10x^6 + 15x^7 + 21x^8 + 25x^9 + \\ + 27x^{10} + 27x^{11} + 25x^{12} + 21x^{13} + 15x^{14} + 10x^{15} + 6x^{16} + 3x^{17} + x^{18}$$

Vidíme, že koeficient u členu x^n na pravé straně přesně odpovídá počtu možností, kdy při hodu třemi kostkami padne součet n. Zdůvodnění je jednoduché, stačí si levou stranu představit ve tvaru součinu tří polynomů $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$. Při roznásobování tohoto součinu získáme polynom, ve kterém se člen x^n objeví tolikrát, kolika způsoby lze n zapsat jako součet uspořádané trojice čísel $i, j, k \in \{1, \dots, 6\}$.

Předchozí postup snadno zobecníme na případ, kdy házíme současně k kostkami; pak stačí najít koeficienty polynomu $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^k$. Pro člověka je roznásobování součinu zhruba stejně pracné jako vypisování všech kombinací, můžeme však použít vhodný počítačový program pro symbolické výpočty (stačí i volně dostupný systém *Wolfram Alpha*).

Uvažujme nyní případ, kdy házíme dvěma klasickými kostkami. Víme, že součty 2 a 12 padnou se stejnou pravděpodobností; totéž platí o dvojicích součtů 3 a 11, 4 a 10, 5 a 7. Mohli bychom nějakým vhodným očíslováním stěn získat dvojici šestistěnných kostek, které budou opět dávat součty 2, … , 12, ale všechny se stejnou pravděpodobností? Ukažme, že to není možné. Při hodu dvěma kostkami může nastat celkem $6^2 = 36$ případů. Každý z uvažovaných jedenácti součtů má padat stejně často, tj. v $\frac{36}{11}$ případech, což ovšem není celé číslo.

Pokud se nebudeme omezovat na součty 2, … , 12, dá se snadno najít dvojice šestistěnných kostek, kde všechny součty padají stejně často. Vezměme např. dvojici kostek s očíslováním

$$K_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6), \quad K_2 = (1, 1, 1, 7, 7, 7).$$

Vidíme, že při hodu oběma kostkami současně získáme součet aspoň 2 a nejvýše 13. Rozborem všech případů bychom zjistili, že každý součet z množiny

$\{2, \ldots, 13\}$ padá stejně často. Poněkud elegantněji můžeme postupovat tak, že vynásobíme polynomy

$$(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^1 + x^1 + x^1 + x^7 + x^7 + x^7) =$$
$$= 3x^2 + 3x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 3x^9 + 3x^{10} + 3x^{11} + 3x^{12} + 3x^{13}$$

a uvědomíme si, že koeficient u x^n ve výsledném polynomu odpovídá četnosti součtu n. Všechny součty tedy padají se stejnou pravděpodobností $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Jak se situace změní, jestliže budeme uvažovat sady n šestistěnných kostek? U klasické sady nabývají součty hodnot $n, \ldots, 6n$. Chceme najít sadu, která zachová tyto součty, ale všechny z nich budou padat stejně často. Podobně jako u dvojice kostek musí platit, že celkový počet případů 6^n musí být dělitelný celkovým počtem součtů, tj. $6n - n + 1$. Postupným dosazováním zjistíme, že nejmenší $n \geq 2$ takové, že $\frac{6^n}{5n+1}$ je celé, je $n = 7$.

Příslušná sada sedmi kostek skutečně existuje; čtenář si může ověřit, že např. pro sedm kostek s ohodnocením

$$K_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6), \quad K_2 = (1, 1, 7, 7, 13, 13),$$
$$K_3 = (1, 1, 1, 19, 19, 19), \quad K_4 = K_5 = K_6 = K_7 = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

dostaneme stejné součty jako u sedmi klasických kostek, tj. 7, … , 42, přičemž všechny padají s pravděpodobností $\frac{1}{36}$. Tato sada sedmi kostek je převzata z článku [1], kde je problém studován v obecnějším kontextu n kostek o m stěnách. Snadno si rozmyslíme, že pro existenci řešení musí být číslo m^n dělitelné číslem $mn - n + 1$, tato podmínka však není postačující. V článku [1] je podrobně rozebrán případ $m = p \cdot q$, kde p, q jsou prvočísla (v klasickém případě máme $p = 2$, $q = 3$). Autoři se také zamýšlejí nad obtížnější otázkou, zda se lze vyvarovat případu, kdy na některé kostce budou mít všechny stěny stejné ohodnocení.

3 Sichermanovy sady

Existují nestandardní sady kostek, u kterých je pravděpodobnost výskytu jednotlivých součtů stejná jako při použití stejného počtu klasických kostek? M. Gardner uvádí [4], že tuto otázku si zřejmě jako první položil jistý plukovník G. Sicherman z Buffala. Ten také objevil sadu dvou šestistěnných kostek s ohodnocením

$$K_1 = (1, 2, 2, 3, 3, 4), \quad K_2 = (1, 3, 4, 5, 6, 8). \tag{2}$$

Vidíme, že při hodu oběma kostkami současně získáme součet aspoň 2 a nejvýše 12. Skutečnost, že každý součet z množiny $\{2, \ldots, 12\}$ padne se stejnou pravděpodobností jako u dvojice klasických kostek, můžeme buď ověřit rozborem všech případů, nebo vynásobíme polynomy

$$(x^1 + x^2 + x^2 + x^3 + x^3 + x^4) \cdot (x^1 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8) =$$
$$= x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12}$$

a ověříme, že výsledek se shoduje s polynomem

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 =$$
$$= x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12}.$$

Sichermanovy kostky rovněž nalezneme v nabídce obchodu Grand Illusions [9].

Sichermanovy kostky (Grand Illusions)

Nemusíme se omezovat jen na dvojice šestistěnných kostek. Každou sadu kostek o m stěnách, u které je pravděpodobnost výskytu jednotlivých součtů stejná jako u stejného počtu „klasických" kostek s ohodnocením $(1, 2, \ldots, m)$, nazveme Sichermanovou sadou.

Čtenář si může vyzkoušet, že např. tři šestnáctistěnné kostky s ohodnocením

$$K_1 = (1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 9, 11, 11, 13, 13, 15, 15, 17),$$
$$K_2 = (1, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 9, 11, 11, 13, 13, 15, 15, 17, 19),$$
$$K_3 = (1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12)$$

tvoří Sichermanovu sadu.

Problém rozhodnout, zda je nějaká sada kostek Sichermanova, jsme převedli na rutinní algebraický výpočet. Nabízí se však přirozeně otázka, jak takové sady konstruovat, jestliže je předepsán počet kostek a počet stěn na každé kostce.

Řekněme, že máme sadu n kostek $K_1, \ldots, K_n$, přičemž každá z nich má právě m stěn; tyto stěny jsou ohodnoceny přirozenými čísly. Víme, že kostce s ohodnocením $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ můžeme přiřadit polynom $x^{i_1} + x^{i_2} + \cdots + x^{i_m}$; tímto způsobem vznikne n polynomů $P_1, \ldots, P_n$, které odpovídají jednotlivým kostkám. Daná sada je pak Sichermanova právě tehdy, když

$$P_1(x) \cdot P_2(x) \cdots P_n(x) = (x + x^2 + \cdots + x^m)^n, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Úloha nalézt Sichermanovu sadu n kostek o m stěnách je tedy ekvivalentní s hledáním rozkladu polynomu $(x + x^2 + \cdots + x^m)^n$ na součin polynomů $P_1, \ldots, P_n$, jejichž koeficienty jsou nezáporná celá čísla; od polynomů $P_1, \ldots, P_n$ pak snadno přejdeme zpět ke kostkám. Všechny dílčí polynomy P_i musejí mít následující vlastnosti:

1) Součet koeficientů polynomu P_i je roven m, tj. $P_i(1) = m$.
2) Koeficient u nejvyšší mocniny polynomu P_i je roven 1.
3) Polynom P_i má jednoduchý nulový kořen a všechny ostatní kořeny jsou m-té odmocniny z jedné, tj. jsou to komplexní čísla z taková, že $z^m = 1$.

První tvrzení je zřejmé ze způsobu, jakým přiřazujeme kostkám polynomy. Druhé tvrzení dokážeme sporem: Pokud by některý polynom měl u nejvyšší mocniny koeficient větší než 1, pak v součinu $P_1(x) \cdot P_2(x) \cdots P_n(x)$ bude u nejvyšší mocniny také koeficient větší než 1, což odporuje vztahu (3). Pro důkaz třetího tvrzení přepíšeme pravou stranu vztahu (3) do tvaru

$$(x + x^2 + \cdots + x^m)^n = x^n(1 + x + \cdots + x^{m-1})^n = \frac{x^n(x^m - 1)^n}{(x-1)^n}.$$

Vidíme, že tento polynom má n-násobný nulový kořen a všechny ostatní kořeny jsou m-té odmocniny z jedné. Zároveň víme, že každý z polynomů P_i má nulový kořen násobnosti aspoň 1 (sestává totiž z členů x^i, kde i je ohodnocení některé stěny, a tedy $i \geq 1$). Z předchozích faktů plyne, že P_i má jednoduchý nulový kořen a všechny ostatní kořeny jsou m-té odmocniny z jedné.

Ukažme si, jak bychom tyto poznatky mohli využít k nalezení Sichermanovy sady (2), pokud bychom ji neznali. Zároveň dokážeme, že to je jediná dvojice šestistěnných nestandardních kostek, které tvoří Sichermanovu sadu. Hledáme tedy dvojici polynomů P_1, P_2 tak, aby platilo

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = (x + x^2 + \cdots + x^6)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Polynom v závorce na pravé straně se dá přepsat do tvaru

$$x + x^2 + \cdots + x^6 = x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1), \tag{4}$$

o čemž se snadno přesvědčíme roznásobením (rozklad lze snadno objevit pomocí počítače, např. ve *Wolfram Alpha*). Bude tedy platit

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = x^2(x+1)^2(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Kvadratické polynomy na pravé straně tohoto vztahu již nelze rozložit na součiny lineárních polynomů s koeficienty v $\mathbb{Z}$. Odtud plyne, že polynomy P_1, P_2 mají tvar

$$P_i(x) = x^{a_i}(x+1)^{b_i}(x^2+x+1)^{c_i}(x^2-x+1)^{d_i}, \quad i \in \{1, 2\},$$

kde a_i, b_i, c_i, $d_i \in \{0, 1, 2\}$. Jelikož P_i musí mít jednoduchý nulový kořen, bude $a_i = 1$. Dosazením $x = 1$ a využitím vlastnosti 1 dále zjistíme, že $6 = P_i(1) = 2^{b_i}3^{c_i}$, a proto $b_i = c_i = 1$. Pro exponenty d_i připadají v úvahu možnosti $d_i = 0$, $d_i = 1$ nebo $d_i = 2$, přičemž $d_1 + d_2 = 2$. Pokud $d_1 = 1$, pak

$$P_1(x) = P_2(x) = x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1) = x + x^2 + \cdots + x^6,$$

což odpovídá dvojici klasických kostek. Pokud $d_1 = 0$, pak

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x(x+1)(x^2+x+1) = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4, \\ P_2(x) &= x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^2 = x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8, \end{aligned}$$

což jsou polynomy odpovídající Sichermanově sadě (2). Konečně pro $d_1 = 2$ se pouze vymění role polynomů P_1, P_2 a žádnou novou Sichermanovu sadu tak nedostaneme.

K dalšímu zkoumání Sichermanových sad je nutná znalost tzv. cyklotomických polynomů a jejich základních vlastností. Nejprve potřebujeme pojem primitivní m-té odmocniny z jedné, což je každé číslo $z \in \mathbb{C}$ takové, že $z^m = 1$ a $z^k \neq 1$ pro $k \in \{1, \dots, m-1\}$. Tuto vlastnost mají právě všechna čísla tvaru $e^{j \cdot \frac{2\pi i}{m}}$, kde $j \in \{1, \dots, m\}$ a j je nesoudělné s m. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ pak definujeme m-tý cyklotomický polynom λ_m jako polynom, jehož kořeny jsou právě všechny primitivní m-té odmocniny z jedné, tyto kořeny jsou jednoduché, a koeficient u nejvyšší mocniny polynomu je 1. Například

$$\begin{aligned}
\lambda_1(x) &= x - 1, \\
\lambda_2(x) &= x + 1, \\
\lambda_3(x) &= (x - e^{\frac{2\pi i}{3}})(x - e^{\frac{4\pi i}{3}}) = x^2 + x + 1.
\end{aligned}$$

Nalezení cyklotomického polynomu λ_p je obzvláště jednoduché v případě, kdy p je prvočíslo. Stačí si uvědomit, že jediná p-tá odmocnina z jedné, která není primitivní, je 1. Odtud plyne, že p-tý cyklotomický polynom má tvar

$$\lambda_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}.$$

Je známo, že koeficienty cyklotomických polynomů jsou vždy celočíselné. Druhou klíčovou vlastností je ireducibilita cyklotomických polynomů v $\mathbb{Z}$; žádný cyklotomický polynom nelze rozložit na součin polynomů nižších stupňů s koeficienty v $\mathbb{Z}$.

Souvislosti mezi Sichermanovými sadami a cyklotomickými polynomy jsou podrobně rozebrány v pracích [2, 5]. Zde se omezíme pouze na přehled některých výsledků.

Nejprve ukážeme, že pokud p je prvočíslo a $n \in \mathbb{N}$, pak jediná Sichermanova sada n kostek o p stěnách je sada n kostek s ohodnocením $(1, 2, 3, \dots, p)$. Víme, že nalezení Sichermanovy sady n kostek o p stěnách je ekvivalentní s nalezením polynomů $P_1, \dots, P_n$ s nezápornými celočíselnými koeficienty tak, aby platilo

$$P_1(x) \cdot P_2(x) \cdots P_n(x) = x^n (1 + x + \cdots + x^{p-1})^n.$$

Polynom v závorce je cyklotomický, a tedy nerozložitelný na součin polynomů nižších stupňů s koeficienty v $\mathbb{Z}$. S přihlédnutím k dříve formulovaným podmínkám 1, 3 vidíme, že pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$ musí platit

$$P_i(x) = x(1 + x + \cdots + x^{p-1}) = x + x^2 + \cdots + x^p,$$

což je polynom odpovídající kostce s ohodnocením $(1, 2, 3, \dots, p)$.

Další tvrzení již uvedeme bez důkazů (zájemce odkazujeme na [2, 5]):

- Jestliže $p > 2$ je prvočíslo, pak v každé Sichermanově sadě kostek o $2p$ stěnách se mohou vyskytovat pouze tři druhy kostek s ohodnocením

$$(1, 2, 3, \dots, 2p),$$
$$(1, 2, 2, 3, 3, \dots, p, p, p + 1),$$
$$(1, 3, 5, \dots, p-2, p, p+1, p+2, \dots, 2p-2, 2p-1, 2p, 2p+2, 2p+4, \dots, 3p-1).$$

- Jestliže $p > 2$ je prvočíslo, pak v každé Sichermanově sadě kostek o p^2 stěnách se mohou vyskytovat pouze tři druhy kostek s ohodnocením

$$(1, 2, 3, \dots, p^2),$$
$$(1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3, \dots, p \times p, (p-1) \times (p+1), \dots, 2 \times (2p-2), 1 \times (2p-1)),$$
$$(1 \times 1, 2 \times (p+1), 3 \times (2p+1), \dots, p \times ((p-1)p+1), (p-1) \times (pp+1), \dots$$
$$\dots, 1 \times ((2p-2)p+1)),$$

  kde zápis $k \times h$ znamená, že hodnota h se vyskytuje na k stěnách.

- Mějme libovolnou kostku náležící nějaké Sichermanově sadě. Nechť největší číslo na této kostce je k a $a_1, \dots, a_k$ značí počty výskytů čísel 1, … , k na stěnách kostky. Pak platí $(a_1, \dots, a_k) = (a_k, \dots, a_1)$, neboli $a_1 = a_k$, $a_2 = a_{k-1}$, atd.
- Každý polynom P_i s nezápornými celočíselnými koeficienty, který splňuje podmínky 1), 2), 3), lze doplnit dalšími polynomy P_1, … , P_{i-1}, P_{i+1}, … , P_n tak, že platí rovnost (3) a P_1, … , P_m odpovídají kostkám z nějaké Sichermanovy sady.

Speciální případ prvního tvrzení odpovídající $p = 3$ jsme již odvodili v předchozím textu, když jsme ukázali, že kromě Sichermanovy dvojice kostek (2) a dvojice klasických kostek už neexistují žádné jiné Sichermanovy sady dvou šestistěnných kostek. Čtenář si může zkusit rozmyslet, že postup pro obecné prvočíslo $p > 2$ by byl velmi podobný. Stačí místo rozkladu (4) použít obecnější vztah

$$x + x^2 + \dots + x^{2p} = x\frac{x^{2p} - 1}{x - 1} = x\lambda_2(x)\lambda_p(x)\lambda_{2p}(x)$$

a uvědomit si, že pro každé prvočíslo $p > 2$ platí

$$\lambda_{2p}(x) = \frac{x^p + 1}{x + 1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{p-1}$$

(oba vzorce plynou poměrně snadno z definice cyklotomických polynomů).

4 Závěr

Náš příspěvek nepokrývá všechny zajímavé typy neobvyklých sad hracích kostek. Další zajímavý příklad představují tzv. Lake Wobegon sady. Jedná se o sady kostek $K_1, \ldots, K_n$, kde každá z nich je v jistém smyslu nadprůměrná. Přesněji, hodíme-li všemi kostkami současně, pak pro každou kostku K_i je pravděpodobnější možnost, že překoná průměr sady v daném hodu, než možnost, že na ní padne hodnota menší než průměr sady v daném hodu. Symbolicky vyjářeno platí

$$P\left(K_i > \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} K_j\right) > P\left(K_i < \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} K_j\right)$$

pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$. Příklady takových sad a teoretický rozbor jejich vlastností najde čtenář v [5, 6].

Literatura

[1] F. Bermudez, A. Medina, A. Rosin, E. Scott, *Are Stupid Dice Necessary?*, The College Mathematics Journal 44 (2013), no. 4, 315–322.

[2] J. A. Gallian, D. J. Rusin, *Cyclotomic polynomials and nonstandard dice*, Discrete Mathematics 27 (1979), 245–259.

[3] M. Gardner, *Nontransitive dice and other probability paradoxes.* In *Wheels, Life, and Other Mathematical Amusements*, W. H. Freeman and Company, New York, 1983.

[4] M. Gardner, *Sicherman dice, the Kruskal count and other curiosities.* In *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers ... and the Return of Dr. Matrix*, The Mathematical Association of America, 1997.

[5] L. Chybová, *Nestandardní sady hracích kostek*, bakalářská práce, MFF UK, 2014.

[6] J. Moraleda, D. G. Stork, *Lake Wobegon Dice*, The College Mathematics Journal 43 (2012), no. 2, 152–159.

[7] A. Slavík, *Volební matematika.* In A. Slavík (ed.), *Matematika a reálný svět*, Matfyzpress, Praha, 2012, 62–69.

[8] R. L. Tenney, C. C. Foster, *Non-transitive dominance*, Mathematics Magazine 49 (1976), no. 3, 115–120.

[9] `http://www.grand-illusions.com/acatalog/Maths_Toys.html`

RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`slavik@karlin.mff.cuni.cz`

MATEMATIKA S RADOSTÍ – INTERAKTIVNÍ TESTY A HRY

Eva Davidová

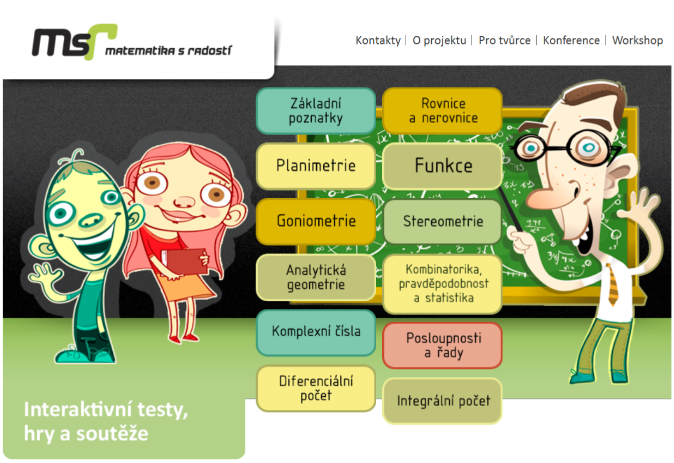
Obsahem příspěvku je informace o výstupech projektu *Matematika s radostí*, v jehož rámci vznikají interaktivní materiály a hry pro podporu výuky matematiky na středních školách. V příspěvku jsou zařazeny a komentovány i ukázky jednotlivých typů testů a her.

1 O projektu

V rámci projektu *Matematika s radostí* vznikají interaktivní výukové materiály, které by měly být nápomocny k oživení výuky matematiky na středních školách. Autoři interaktivních testů a her si zvolili nelehký cíl – nabídnout středoškolským studentům a jejich učitelům zajímavou a nenásilnou formu nácviku a procvičování matematických znalostí a dovedností.

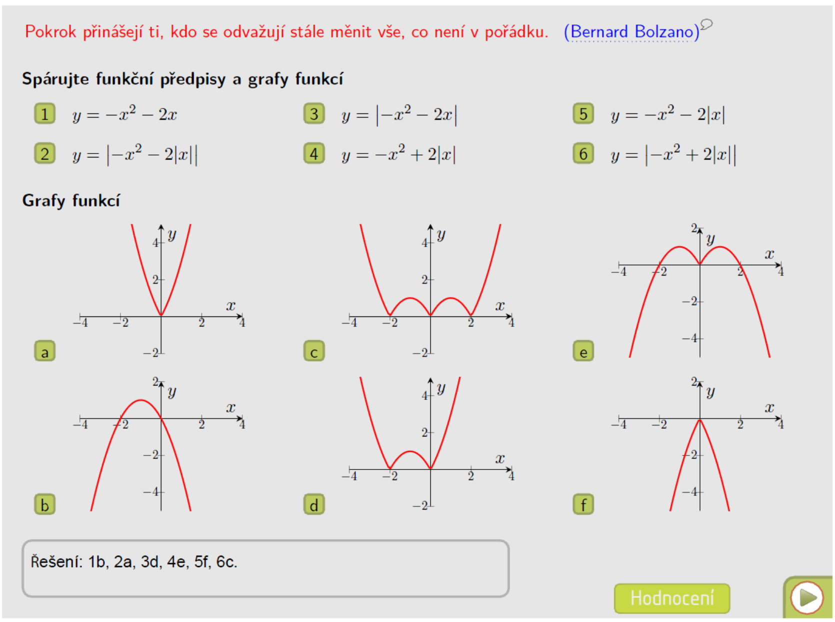
Na tříletém projektu spolupracují pedagogové z Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava s metodiky z pěti středních škol z Moravskoslezského a Olomouckého kraje. Všechny materiály jsou navrženy středoškolskými učiteli ze tří gymnázií a dvou středních odborných škol a jsou kontrolovány vysokoškolskými pedagogy. Ve vícestupňových kontrolách se autoři snaží o minimalizaci výskytu chyb, používání správné terminologie a symboliky.

Do února roku 2015 bude v rámci projektu vytvořeno minimálně 300 testů, 170 párovacích her, 300 her typu *Neriskuj*, *AZ kviz* a *Odkryj obrázek* a cca 60 krokovaných úloh. V současnosti je hotovo zhruba 75 % plánovaných materiálů. V závěru interaktivní materiály pokryjí rámcově všechny partie středoškolské matematiky. Rozdělení materiálů podle oblastí je patrné z titulní stránky webu projektu `http://msr.vsb.cz`:

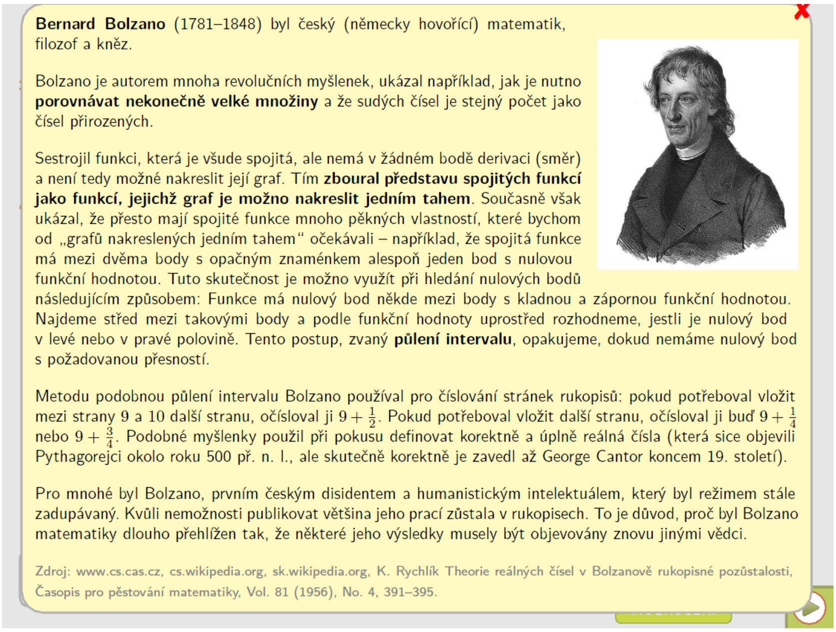


Testy a párovací hry jsou vytvářeny ve třech úrovních obtížnosti, takže jsou použitelné na všech typech středních škol. V rámci projektu vznikají jak materiály monotematické, sloužící k nácviku nově probírané látky, tak materiály komplexního charakteru, které mohou posloužit k závěrečnému procvičení probírané látky. Některé testy a zejména hry typu *Odkryj obrázek*, *AZ kviz* a *Neriskuj*, jsou sestaveny převážně z úloh, u kterých se uplatní logický úsudek opírající se o znalosti tématu, případně vyžadují jen krátký výpočet. Jiné typy materiálů obsahují i úlohy vyžadující hlubší znalosti, případně delší výpočet s použitím kalkulátoru. Zájemci zde naleznou i náročné úlohy pro matematický seminář apod.

Pro zvýšení atraktivity materiálů jsou některé z nich doplněny odkrývajícími se tajenkami v závislosti na úspěšnosti práce řešitele. V některých případech jsou hry doplněny zajímavostmi o autorech citátů. V přiložené ukázce je správně vyřešená párovací hra a připojená informace o autorovi citátu.



Všechny výukové materiály mají jednotnou grafickou podobu. Vlastní texty jsou vysázeny systémem TEX a následně převedeny do podoby interaktivních PDF. Uživatel označuje zaklikáváním správné odpovědi a podle typu testu nebo hry se dozví buď okamžitě, případně po skončení práce, jak byl úspěšný. Následuje závěrečné vyhodnocení. Formuláře PDF souborů využívají Java Scripty, proto je nutné soubory otevírat v prohlížeči Adobe Reader, který zatím jako jediný podporuje zmíněné Java Scripty. Nicméně výhodou takto vytvořených materiálů je, že k jejich spuštění či vyhodnocování správnosti odpovědí není potřeba připojení k internetu ani speciální software. Učitel může svým žákům



stáhnout podle svého uvážení vhodné materiály a studenti pak s nimi mohou pracovat bez připojení na internet. Výsledné testy a hry je tedy možné prohlížet a spouštět jednak on-line přímo z webu `http://msr.vsb.cz`, jednak z lokálního úložiště, kam si je uživatel stáhne dle vlastního výběru.

2 Typy interaktivních materiálů

2.1 Testy

V projektu bude vytvořeno minimálně 300 interaktivních testů. Podle funkčnosti je lze rozdělit do čtyř skupin:

- testy s jednou správnou odpovědí,
- testy s více správnými odpověďmi,
- testy typu ANO – NE,
- testy s tabulkovým výběrem.

Více napoví následující ukázky.

Příklad testu s jednou správnou odpovědí z oblasti *Základní poznatky z matematiky*:

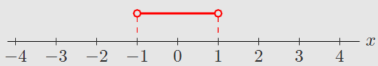
Absolutní hodnota – porovnání výrazů a geometrický význam

Test – středně těžký

Pro každou otázku v testu existuje právě jedna správná odpověď, kterou označíte kliknutím na příslušné políčko. Tlačítko Vyhodnotit slouží k ukončení testu, zobrazení výsledků a správných odpovědí. Další informace k ovládání testu naleznete na msr.vsb.cz/navody.

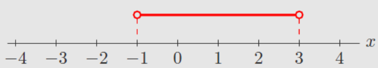
Test byl vytvořen v rámci projektu Matematika s radostí dle návrhu Martina Kotka.

1. Určete, která z nabídnutých nerovnic má množinu všech řešení graficky znázorněnou na obrázku.



- ☐ $|x| > 1;\ x \in \mathbb{R}$
- ☐ $|x+1| < 1;\ x \in \mathbb{R}$
- ☐ $|x| < 1;\ x \in \mathbb{R}$
- ☐ $|x-1| > 0;\ x \in \mathbb{R}$
- ☐ $|x-1| < 0;\ x \in \mathbb{R}$

2. Určete, která z nabídnutých nerovnic má množinu všech řešení graficky znázorněnou na obrázku.

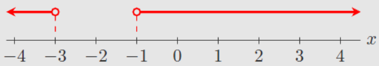


- ☐ $|x-1| < 2;\ x \in \mathbb{R}$
- ☐ $|x-1| > 2;\ x \in \mathbb{R}$
- ☐ $|x+1| < 2;\ x \in \mathbb{R}$
- ☐ $|x-2| > 1;\ x \in \mathbb{R}$
- ☐ $|x+1| > 2;\ x \in \mathbb{R}$

3. Určete, která z nabídnutých nerovnic má množinu všech řešení graficky znázorněnou na obrázku.

- $|x-1| < 2;\ x \in \mathbb{R}$
- $|x+1| < 2;\ x \in \mathbb{R}$
- $|x-2| > 1;\ x \in \mathbb{R}$
- $|x-1| > 2;\ x \in \mathbb{R}$
- $|x+1| > 2;\ x \in \mathbb{R}$

4. Určete, která z nabídnutých nerovnic má množinu všech řešení graficky znázorněnou na obrázku.



- $|2+x| > 1;\ x \in \mathbb{R}$
- $|2-x| < 1;\ x \in \mathbb{R}$
- $|1+x| > 2;\ x \in \mathbb{R}$
- $|2+x| < 1;\ x \in \mathbb{R}$
- $|2-x| > 1;\ x \in \mathbb{R}$

5. Určete, která z nabídnutých nerovnic má množinu všech řešení graficky znázorněnou na obrázku.

- $|2-x| > 1;\ x \in \mathbb{R}$
- $|2-x| < 1;\ x \in \mathbb{R}$
- $|2+x| < 1;\ x \in \mathbb{R}$
- $|2+x| > 1;\ x \in \mathbb{R}$
- $|1-x| < 2;\ x \in \mathbb{R}$

6. Určete, jaký vztah platí mezi výrazy $|x|$ a $|-x|$, kde $x \in \mathbb{R}$.

- $|x| = |-x|$
- $|x| < |-x|$
- Není možné jednoznačně určit. Záleží na hodnotě proměnné x.
- $|x| > |-x|$

7. Určete, jaký vztah platí mezi výrazy $|x-y|$ a $|y-x|$, kde $x,y \in \mathbb{R}$.

- $|x-y| > |y-x|$
- $|x-y| = |y-x|$
- Není možné jednoznačně určit. Záleží na hodnotě proměnné x,y.
- $|x-y| < |y-x|$

8. Jsou dány výrazy $|x|$; $|-x|$; $-|x|$; $-x$, kde $x \in \mathbb{R}^-$. Vyberte variantu, v níž je uveden výraz nabývající pouze záporných hodnot.

- $|x|$
- $-|x|$
- $|-x|$
- $-x$

9. Jsou dány výrazy $1+|x|$; $|1+x|$; $1-|x|$; $|1-x|$, kde $x \in (-\infty;-1)$. Vyberte variantu, která obsahuje výraz, který má v daném oboru proměnné nejmenší hodnotu.

- $1+|x|$
- $1-|x|$
- $|1+x|$
- $|1-x|$
- Stejnou nejmenší hodnotu má více uvedených výrazů.

Pokud si stejný test otevře jiný student, pořadí odpovědí u každé otázky se mu promíchá. Po vyřešení testu si student nechá test vyhodnotit. Pokud se dopustí dejme tomu tří chyb, objeví se mu např. toto hodnocení:

Pokud si budete chtít test sami vyplnit, použijte odkaz `msr.vsb.cz/zakladni-poznatky/ciselne-mnoziny-a-teorie-cisel` a otevřete si test *Absolutní hodnota – porovnání výrazů a geometrický význam.* Aby vám vše správně fungovalo, nezapomeňte, že soubor je třeba otevřít přes Adobe Reader.

Ukázka vyřešeného testu nejlehčí úrovně s více správnými odpověďmi z oblasti *Goniometrie*:

Kořeny goniometrických rovnic

Test – lehký

K některým otázkám může existovat více správných odpovědí. Otázka je zodpovězena správně, pokud jsou zatrženy právě všechny správné odpovědi. Tlačítko Vyhodnotit slouží k ukončení testu, zobrazení výsledků a správných odpovědí. Další informace k ovládání testu naleznete na msr.vsb.cz/navody.

Test byl vytvořen v rámci projektu Matematika s radostí dle návrhu Magdaleny Gažarové.

Určete, ve kterých kvadrantech budou ležet kořeny následujících goniometrických rovnic, jestliže je vyznačíme v radiánech na jednotkové kružnici.

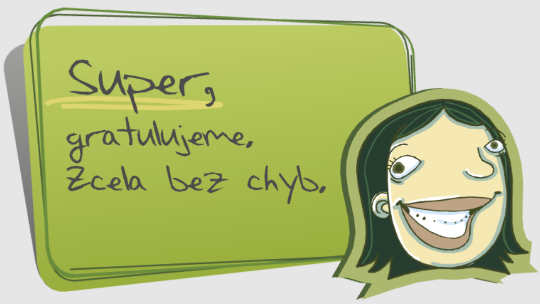
			I. kvadrant	II. kvadrant	III. kvadrant	IV. kvadrant
2 b	**1.**	$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	☑	☑	☐	☐
2 b	**2.**	$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	☐	☐	☑	☑
2 b	**3.**	$\sin x = -\frac{1}{6}$	☐	☐	☑	☑
2 b	**4.**	$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	☑	☐	☐	☑
2 b	**5.**	$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	☐	☑	☑	☐
2 b	**6.**	$\cos x = \frac{3}{5}$	☑	☐	☐	☑

matematika s radostí

Určete, ve kterých kvadrantech budou ležet kořeny následujících goniometrických rovnic, jestliže je vyznačíme v radiánech na jednotkové kružnici.

			I. kvadrant	II. kvadrant
1b	7.	$\operatorname{tg} x = 1$	✓	
1b	8.	$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$		✓
1b	9.	$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$	✓	
1b	10.	$\operatorname{tg} x = -0{,}3$		✓
1b	11.	$\operatorname{cotg} x = -1$		✓
1b	12.	$\operatorname{cotg} x = \sqrt{3}$	✓	
1b	13.	$\operatorname{cotg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$		✓
1b	14.	$\operatorname{cotg} x = 0{,}3$	✓	

matematika s radostí



Počet správně a úplně zodpovězených otázek: 14 z celkových 14

Získané body: 20 z celkových 20

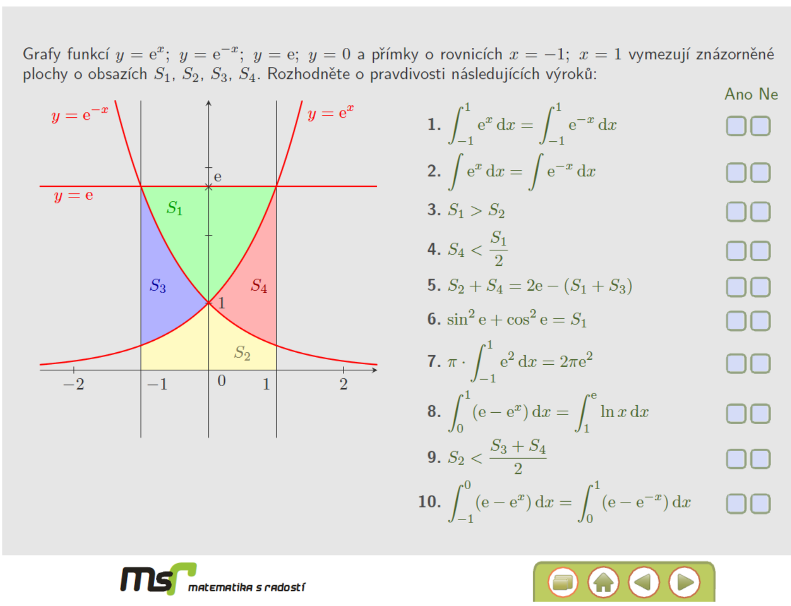
Procento úspěšnosti: 100%

Opravy byly vyznačeny do testu. Pro jejich prohlédnutí se můžete vrátit na předchozí stránky.

matematika s radostí

Pokud si budete chtít test sami vyplnit, použijte odkaz `msr.vsb.cz/goniometrie/goniometricke-rovnice-a-nerovnice` a otevřete si test *Kořeny goniometrických rovnic*.

Ukázka testu střední úrovně typu ANO – NE z oblasti *Integrální počet*:



Pro vaše vlastní řešení použijte prosím odkaz
`msr.vsb.cz/integralni-pocet/aplikace-urciteho-integralu`
a otevřete si test *Exponenciála a integrály*.

Ukázka lehčího testu s tabulkovým výběrem odpovědí z oblasti *Diferenciální počet*:

Limity elementárních funkcí

Test – lehký

Pro každou otázku v testu existuje právě jedna správná odpověď, kterou označíte kliknutím na příslušné políčko. Tlačítko Vyhodnotit slouží k ukončení testu, zobrazení výsledků a správných odpovědí. Další informace k ovládání testu naleznete na http://msr.vsb.cz/napoveda/testy.

Test byl vytvořen v rámci projektu Matematika s radostí dle návrhu Marcely Vondrové.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

matematika s radostí

Určete limity funkcí.

1.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$	☐ $-\infty$	☐ 0	☐ 1	☐ $+\infty$
2.	$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}$	☐ $-\infty$	☐ 0	☐ 1	☐ $+\infty$
3.	$\lim\limits_{x\to-\infty}x^2$	☐ $-\infty$	☐ 0	☐ 1	☐ $+\infty$
4.	$\lim\limits_{x\to-1}x^2$	☐ $-\infty$	☐ 0	☐ 1	☐ $+\infty$
5.	$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}\pi^-}\operatorname{tg}x$	☐ $-\infty$	☐ 0	☐ 1	☐ $+\infty$
6.	$\lim\limits_{x\to0^-}\operatorname{cotg}x$	☐ $-\infty$	☐ 0	☐ 1	☐ $+\infty$
7.	$\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^x$	☐ $-\infty$	☐ 0	☐ 1	☐ $+\infty$
8.	$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x$	☐ $-\infty$	☐ 0	☐ 1	☐ $+\infty$
9.	$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x$	☐ $-\infty$	☐ 0	☐ 1	☐ $+\infty$
10.	$\lim\limits_{x\to1}\ln x$	☐ $-\infty$	☐ 0	☐ 1	☐ $+\infty$

matematika s radostí

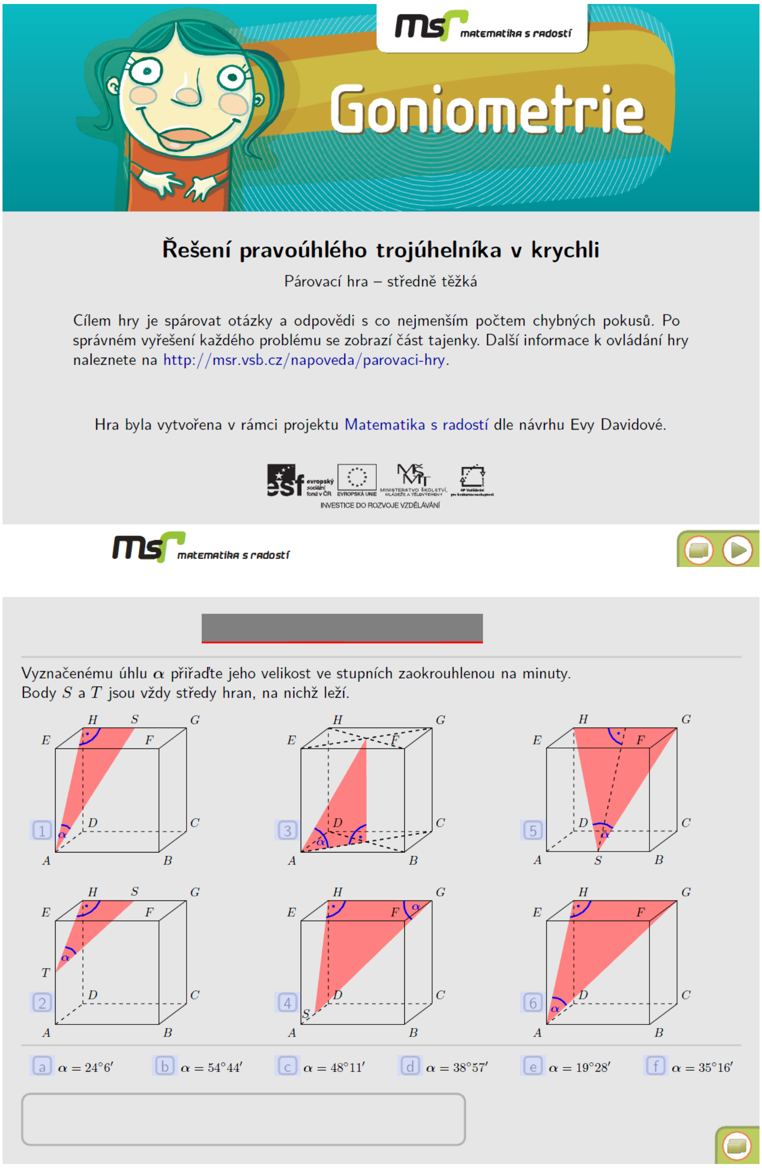
Pro vyplnění testu použijte prosím odkaz
`msr.vsb.cz/diferencialni-pocet/limita-a-spojitost-funkce`
a otevřete si test *Limity elementárních funkcí*.

Řešitel páruje otázky a odpovědi, přičemž ke každé otázce existuje jediná správná odpověď. Odpovědí přitom může být více, než otázek. U párovací hry se se správnou odpovědí odhalí část tajenky. Hru lze vždy dohrát do konce, ale ve vyhodnocení se objeví počet špatných odpovědí. U některých her jsou doplněny zajímavosti o autorovi citátu. Při každém novém otevření téže párovací hry dojde k promíchání pořadí nabídnutých odpovědí.

Ukázka vyřešené středně těžké párovací hry z oblasti *Funkce*:

Hru naleznete na adrese `msr.vsb.cz/funkce/odmocniny-upravy-vyrazu-s-odmocninami-a-racionalnim-exponentem` pod názvem *Násobení a dělení výrazů s odmocninami.*

Ukázka středně těžké párovací hry z oblasti *Trigonometrie*:

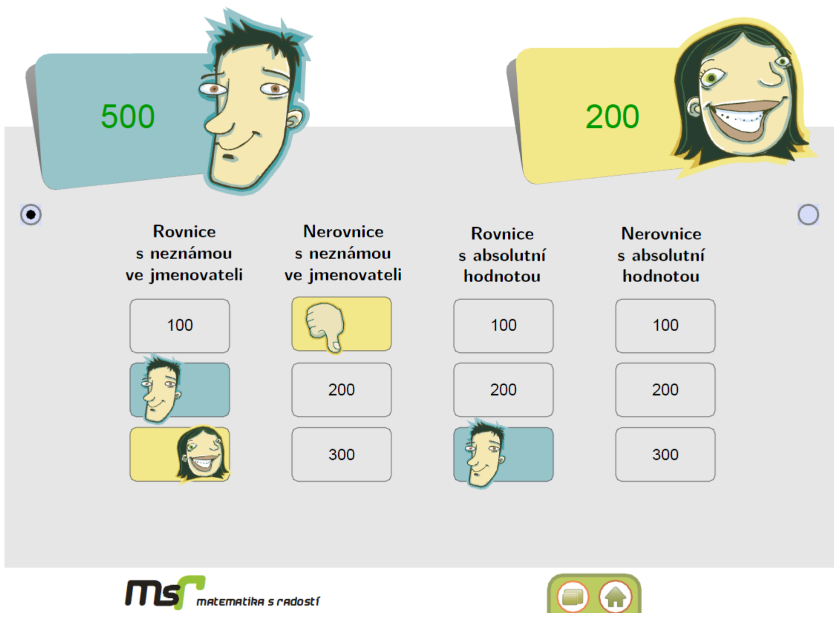


Pro zájemce přikládám odkaz
`msr.vsb.cz/goniometrie/trigonometrie`,
Párovací hry, Řešení pravoúhlého trojúhelníka v krychli.

Tuto hru jsem s úspěchem odzkoušela na nižším i vyšším gymnáziu. Studenti dokázali část úloh vyřešit jen s kalkulačkou, u některých si pomohli krátkým písemným výpočtem. Grafické zadání významně ušetřilo čas.

Parafráze her typu riskuj – přejmenováno na *Neriskuj*, protože snahou autorů je docílit, aby žáci přemýšleli a počítali, nikoli tipovali výsledky. Hra má čtyři tematicky zaměřené sloupce a 3 řádky za 100, 200 a 300 bodů. Je určena pro jednoho nebo dva hráče. Uživatelé mají na výběr dívčí a chlapecké obličeje. Otázky sestavují metodici ze souboru otázek vytvořených pro testy s výběrem odpovědí.

Ukázka grafického prostředí hry z tematické oblasti *Rovnice a nerovnice* a příslušný odkaz pro zájemce:



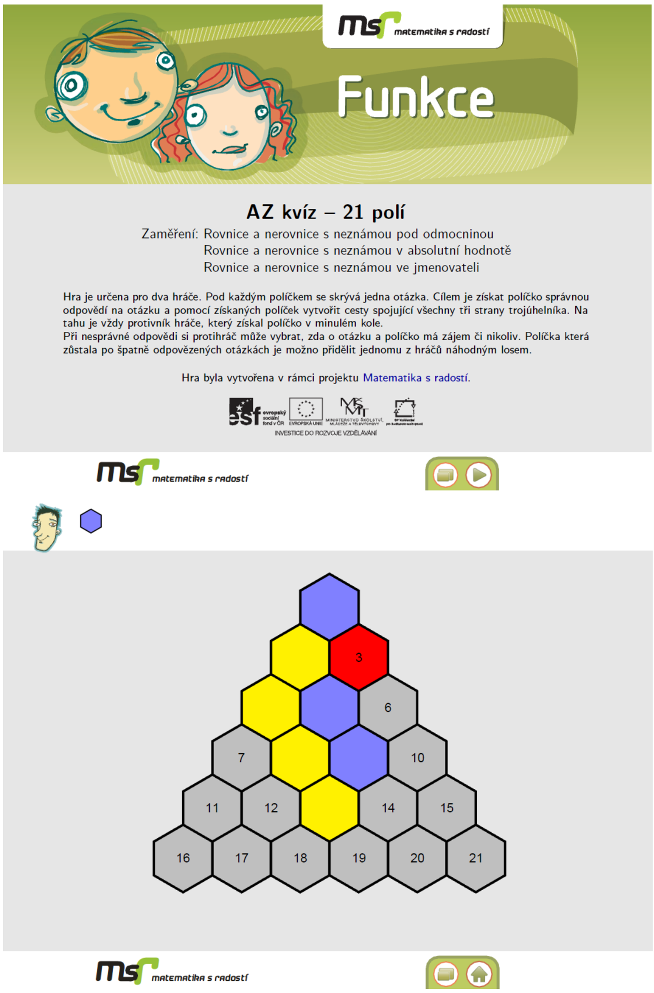
`msr.vsb.cz/algebraicke-rovnice-a-nerovnice/neriskuj-az-kviz-a-odkryj-obrazek`

Nabídka her v oblasti *Rovnice a nerovnice* je velice obsáhlá. Uživatel si může vybrat podle obsahu, druhu i úrovní. Uvedená hra se skrývá pod názvem *Rovnice a nerovnice – neznámá ve jmenovateli, absolutní hodnota.*

2.4 Hry typu AZ kviz

Herní plán má 21 nebo 28 polí. Pravidla jsou stejná jako u televizního *AZ kvizu*. Hry jsou zaměřeny podle oblastí a jsou v nich použity otázky z testů s jednoznačnou odpovědí. Hru mohou hrát dva týmy, resp. dva hráči. Při zahájení nové hry s tímtéž názvem, jsou otázky nově náhodně vygenerovány ze souboru všech dostupných testových otázek.

Ukázka grafického prostředí hry *AZ kviz* z tematické oblasti *Funkce* a příslušný odkaz pro zájemce:



`msr.vsb.cz/algebraicke-rovnice-a-nerovnice/neriskuj-az-kviz`
`-a-odkryj-obrazek`

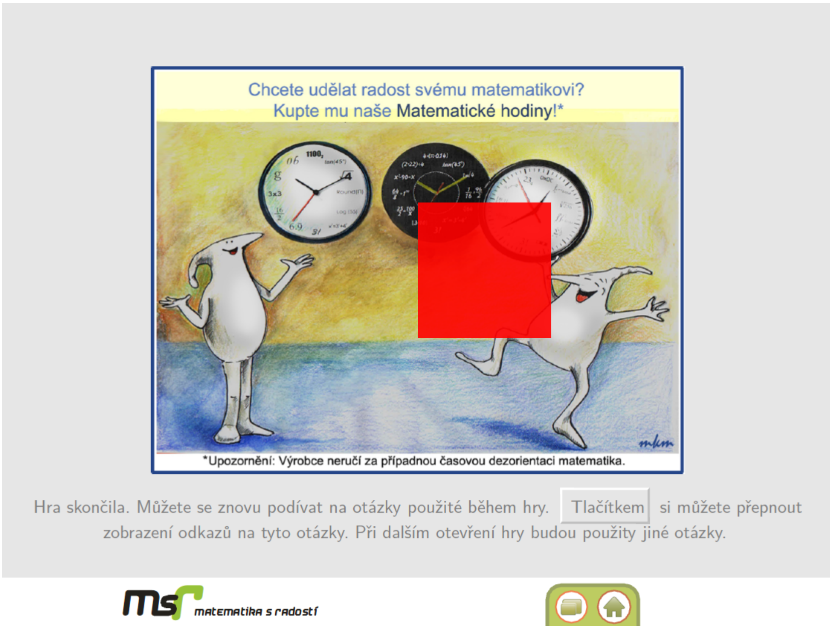
Na této adrese najdete v současnosti výběr z 18 AZ kvizů se zaměřením na algebraické rovnice a nerovnice nejrůznějších typů.

Hry typu *Neriskuj* a *AZ Kviz* patří k nejoblíbenějším. Probouzejí ve studentech přirozenou soutěživost a hravost. Lze je použít jednak jako hru pro dva jednotlivce – pak je ideální, pokud jsou oba v matematice na stejné úrovni vědomostí a dovedností – ale také frontálně, třeba jako hru, kde soupeří proti sobě dívky a chlapci.

2.5 Hry typu Odkryj obrázek

Uživatel odkrývá 12 polí, pod nimiž se skrývají úlohy z dané oblasti. Pokud odpoví správně, odkryje se mu výřez obrázku odpovídající příslušnému políčku. Pokud odpoví špatně, má ještě jednu možnost opravy. Pokud znovu odpoví špatně, políčko se již ve hře neodkryje. Otázky jsou opět náhodně generovány ze souboru testových otázek.

Ukázka grafického prostředí hry *Odkryj obrázek* z tematické oblasti *Funkce* a příslušný odkaz pro zájemce:



`msr.vsb.cz/algebraicke-rovnice-a-nerovnice/neriskuj-az-kviz-a-odkryj-obrazek`

Zde najde uživatel devět her typu *Odkryj obrázek* zaměřených na elementární funkce. Výše uvedená ukázka demonstruje případ, kdy soutěžící nedokázal na jednu z 12 otázek ani napodruhé odpovědět správně.

3 Tipy pro užití výstupů projektu ve výuce

Z vlastní dlouholeté praxe vím, že významným protivníkem učitele matematiky je čas. Jistě by bylo možné shromáždit spoustu argumentů, proč se to či ono nedá stihnout. Zdánlivě vše, co je nad rámec klasické výuky, nám ubírá čas, protože bychom nedobrali, co musíme stihnout, atp.

Aby výstupy z projektu *Matematika s radostí* byly pro učitele i jeho žáka přínosem a nikoli zátěží, je třeba počátkům práce s nimi věnovat trochu péče. Osvědčilo se mi přichystat studentům např. při probírání goniometrie a trigonometrie cca 10–12 testů a her a uspořádat jim je podle náročnosti. Soubory umístím na školní síť a v počítačové učebně nechám s uspořádanými materiály po krátké instruktáži žáky pracovat samostatně. Jen radím, odpovídám na dotazy. Až další hodinu připojím ukázky her pro dva hráče (*Neriskuj*, *AZ kviz*) a seznámím je stručně s obsahem a strukturou webu `msr.vsb.cz`. Víc času většinou pro tento účel nemohu obětovat. Ale občas se pak zmíním, třeba před písemkou – tahle párovací hra by vám pomohla při procvičování, onen test obsahuje přesně to, co máte umět… apod. Hodně studentů raději „sáhne“ doma po internetu než po sbírce příkladů.

Pokud se naskytne další příležitost, posadím k jednomu počítači studenty se stejnou úrovní matematických znalostí a dovedností a doporučím jim nějaké hry pro dva hráče. Mnohdy mě překvapí, jak usilovně studenti hledají řešení, jak je mnohdy ovládnou emoce a zdravá soutěživost. Protože v materiálech lze nalézt vedle těžkých testů a her i testy lehké, mohou pocit úspěchu zažít i slabší studenti. Často mě pak volají k obrazovce, abych se přesvědčila, jak je jim v závěru testu gratulováno k slušnému výkonu. Pak opravdu pociťuji, že název našeho projektu *Matematika s radostí*, není reklamním sloganem, ale při troše vůle a snahy dojde svého naplnění.

Další informace o obsahové i technické stránce projektu zazněly v obsáhlém diskusním příspěvku na konferenci „Užití počítačů ve výuce matematiky" konané roku 2013 v Českých Budějovicích, který přednesla RNDr. Petra Vondráková (Šarmanová), Ph.D. z Katedry aplikované matematiky, FEI, VŠB Technické univerzity Ostrava. Příspěvek s interaktivními odkazy můžete nalézt ve sborníku konference:

`http://home.pf.jcu.cz/~upvvm/2013/sbornik/prispevky.htm`

Přáli bychom si, abychom uživatelům výstupů našeho projektu dokázali předat aspoň část té radosti, kterou jsme si dali do názvu a která nás provázela a provází při tvorbě našich interaktivních výukových materiálů.

Literatura a reference

[1] R. Plch, P. Šarmanová, *Math games – interactive teaching materials in PDF format.* In J. Kapounová, K. Kostolányová, *Information and Communication Technology in Education*, University of Ostrava, 2012, s. 209–218.

[2] R. Mařík, R. Plch, P. Šarmanová, *Tvorba interaktivních testů pomocí systému AcroTEX*, Zpravodaj Československého sdružení uživatelů TEXu, sv. 20 (2010), č. 4, s. 266–291.

[3] R. Mařík, *Vkládání JavaScriptů pdfLATEXem prakticky*, Zpravodaj Československého sdružení uživatelů TEX, sv. 17 (2007), č. 2, s. 72–83.

[4] R. Mařík, *PdfLATEX a tvorba nestatických elektronických dokumentů.* In R. Blaško, A. Kozubík, P. Stříž, L. Ševčovič (eds.), *Otvorený softvér vo vzdelávaní, výskume a v IT riešeniach. Zborník príspevkov medzinárodnej konferencie OSSConf 2013*, Spoločnosť pre otvorené informačné technológie, Bratislava, 2013, s. 17–24.

[5] J. Polák, *Názvy a značky školské matematiky*, Praha, SPN, 1988.

[6] R. Mařík, *Jeopardy*, `http://www.ctan.org/tex-archive/macros/latex/contrib/jeopardy`.

[7] D. Story, *The AcroTEX education bundle*, `http://www.ctan.org/tex-archive/macros/latex/contrib/acrotex`.

[8] D. Story, *Das Puzzle Spiel*, `http://www.ctan.org/tex-archive/macros/latex/contrib/dps`.

[9] Projekt OPVK, reg. č. CZ.1.07/1.1.00/26.0042: *Matematika s radostí – vytvoření interaktivního vzdělávacího obsahu pro zvýšení zájmu o matematiku, radost z učení a zlepšení matematických dovedností*, `http://msr.vsb.cz`.

[10] E. Davidová, L. Stachovcová, P. Vondráková, *Matematika s radostí – interaktivní výukové materiály a hry*. In Sborník příspěvků 6. konference *Užití počítačů ve výuce matematiky*, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2013, `http://home.pf.jcu.cz/~upvvm/2013/sbornik/prispevky.htm`.

RNDr. Eva Davidová
Wichterlovo gymnázium
Čs. exilu 669
708 00 Ostrava-Poruba
`davidova@wigym.cz`

VYBRANÉ ÚLOHY PROJEKTU MATEMATECH

Hana Mahnelová

Článek stručně prezentuje projekt *MatemaTech*, zaměřený na hledání nových postupů výuky matematiky, vedoucích k zatraktivnění vlastního procesu a zvýšení motivace žáků středních škol k učení. Obsahuje pět konkrétních ukázkových příkladů s podporou programu *GeoGebra*, které jsou odzkoušeny přímo v hodinách. Každý je doplněn internetovým odkazem na předem připravený soubor, který je možné přímo použít.

1 Projekt MatemaTech

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích (JCU) jako vedoucí partner společně s dalším partnerem Johannes Kepler Universität Linz (JKU) realizují v letech 2012–2014 společný projekt *Jak zvýšit zájem středoškolských studentů o matematiku – výměna zkušeností a hledání nových cest, Matematika přes hranice*, který je financován z operačního programu Cíl Evropská územní spolupráce Rakousko – Česká republika 2007–2013. Ukazuje se, že pokles zájmu žáků a studentů středních škol o dosažení kvalitních výsledků v matematice je (nejen) problémem obou příhraničních regionů, Jihočeského kraje a Horního Rakouska. Hlavním cílem projektu se tak stává vzájemná spolupráce obou univerzit směřující k hledání nových způsobů pozitivní motivace jak žáků, tak učitelů, a inovativních metod výuky včetně užití počítačů. To vše za aktivní účasti zkušených učitelů několika typů středních škol obou zemí i studentů učitelství matematiky na obou univerzitách. Nové náměty, úlohy a metody jsou pilotovány přímo na školách a následně veřejně prezentovány na webových stránkách projektu `www.matematech.cz`, prostřednictvím několika pořádaných seminářů pro učitele, textové brožury s vybranými příklady a návody a na podzim vydanou dvojjazyčnou publikací. V samotném závěru projektového období se uskuteční odborná konference zaměřená na zhodnocení výsledků a cílů projektu.

2 Zapojení počítače do výuky

V dnešní době je důležité posilovat roli moderních technologií ve výuce, prolomit nedůvěru učitelů a ukazovat, že počítač může být dobrým pomocníkem ve vzdělávacím procesu. Často se setkáváme s užitím počítače jako prezentačního prostředku, oblíbené jsou programy propojené s interaktivní tabulí. Velkou motivací pro žáky je jejich vlastní práce na PC. Z tohoto důvodu zařazujeme též úlohy, které vyžadují učebnu se žákovskými počítači a také zkušenosti učitele s organizací takové vyučovací hodiny. Nabídka dnes dostupných počítačových programů je velmi rozmanitá a výběr závisí na účelu, ke kterému program chceme využít. Řešitelé projektu vybrali program *GeoGebra* z několika důvodů. Především se jedná o volně dostupný, světově známý a populární matematický software s velmi bohatou zásobou vytvořených materiálů v různých jazycích. Program patří do skupiny DGS (programy dynamické geometrie), v omezené míře pracuje jako CAS (program počítačové algebry). Je průběžně vyvíjen a aktualizován, připravuje se také 3D verze. Ovládání není nijak složité, uživatelské prostředí s logicky uspořádanými ikonami usnadňuje intuitivní užití. Pomocí tohoto programu můžeme provádět náčrtky (s využitím stopy objektu), přesné a rychlé konstrukce, které šetří ve výuce jinak drahocenný čas, některé algebraické a numerické výpočty. Program také pracuje s tabulkami, jež převádí do grafů, čímž se přibližuje činnosti tabulkového procesoru. Propojení geometrie a algebry je základem celého programu a jeho dynamičnost dobře poslouží k ověření či vyvracení vyslovených hypotéz.

Užití počítače vyžaduje v přípravné fázi učitele jasné stanovení edukačních cílů a účel aplikace ICT. Proto ve všech materiálech projektu *MatemaTech* autoři uvádějí u svých úloh přehled konkrétních vzdělávacích cílů a vlastní zkušenosti s použitím ve výuce. Z těchto materiálů vybíráme pět příkladů. Podrobnější informace ke každému z nich včetně metodického doporučení a mnoho dalších úloh najdeme na stránkách projektu nebo v chystané publikaci.

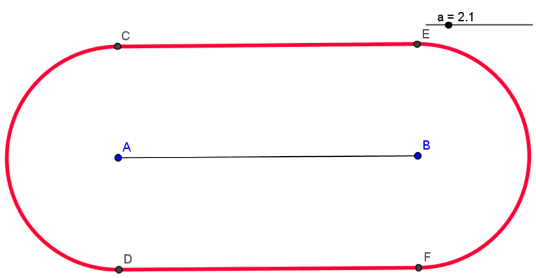
3 Vybrané úlohy

Příklad 1 (H. Mahnelová)

a) Je dána úsečka AB. Sestrojte množinu všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od úsečky AB. Najdeme uplatnění výsledné množiny v reálném životě?

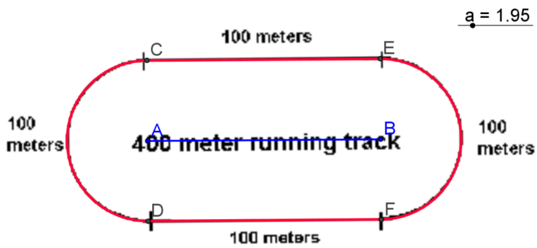
b) Vypočtěte poloměr zatáčky atletického oválu.

Hlavními vzdělávacími cíli úlohy jsou analýza případu pro nalezení ne zcela učebnicového příkladu množiny bodů s využitím její charakteristické vlastnosti, ukázka propojení matematiky s realitou, experimentování pomocí počítače, tvorba počítačového modelu pomocí programu dynamické geometrie, využití moderních technologií jako podpůrného nástroje pro tvorbu modelu a přesné konstrukce, pro formulaci, ověřování, příp. vyvracení hypotéz.



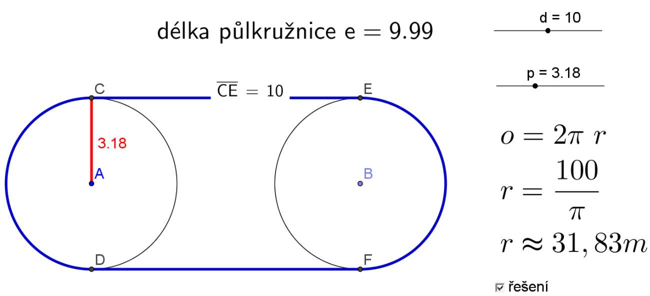
Obr. 1: Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od úsečky AB

Žáci v rámci úkolu a) několik minut pracují samostatně v prostředí programu *GeoGebra*, experimentálně zjišťují podobu hledané množiny s využitím nástroje *Vzdálenost*. Poté společně s učitelem sestrojí dynamický model měnící se v závislosti na hodnotě parametru a vyjadřující požadovanou vzdálenost (obr. 1). Žákům je možné předvést praktickou ukázku vložením obrázku půdorysu atletického oválu jako pozadí a manipulací s posuvníkem nastavit takovou polohu, kdy se oba objekty překrývají (obr. 2).



Obr. 2: Porovnání výsledné bodové množiny a tvaru atletického oválu

Vnitřní dráha atletického oválu má délku 400 metrů a skládá se ze dvou rovných úseků dlouhých 100 m a dvou kruhových oblouků také délky 100 m. Na oválu je 8 drah, přičemž obvykle bývá šířka každé z nich 1,22 m. Nyní je příležitost k zadání úkolu b) a samostatnému počítání žáků. Společná kontrola proběhne opět s využitím předem připraveného počítačového modelu (obr. 3, dostupný z `http://www.geogebratube.org/material/show/id/131871`). Při vlastní tvorbě počítačového modelu pro ověření výpočtu poloměru zatáčky bylo třeba změnit měřítko, takže posuvník d ukazující délku rovného úseku a posuvník p ukazující velikost poloměru zatáčky mají hodnoty desetkrát menší, než ve skutečnosti. Výpočet je proveden algebraicky a zobrazení řešení ovládáme kliknutím na zaškrtávací políčko.



Obr. 3: Výpočet poloměru zatáčky

Příklad 2 (H. Mahnelová)

Sestrojte množinu všech bodů roviny, které jsou stejně vzdáleny (např. 2 jednotky) od hranice daného čtverce (příp. jiného mnohoúhelníku). Setkáme se s takovou množinou v praxi?

Tento příklad navazuje na předcházející, kdy žáci zpravidla samostatně výslednou množinu pomocí nástrojů programu *GeoGebra* sestrojí. Učitel pak prezentuje dynamické modely výsledných množin spojené s praktickou ukázkou ze života. Úloha spojuje matematiku s dopravní výchovou. Dopravní značky se vyrábějí z kovového materiálu a z bezpečnostních důvodů musí být bez ostrých zakončení. Žáci si také mohou hotový interaktivní obrázek otevřít sami z adresy `http://www.geogebratube.org/material/show/id/131873` nebo `http://www.geogebratube.org/material/show/id/131874`. V obou modelech je umístěn v levém dolním rohu čtyřúhelník s vyznačenými vrcholy M, P, jejichž manipulací roztáhneme vložený obrázek jako pozadí zkonstruované množiny. Žákům dáme např. za úkol najít řídicí čtverec (obdélník), jemuž odpovídá ohraničení vnitřní modré (žluté) oblasti značky (obr. 4). S modely je možné pracovat i dále, např. nechat žáky počítat poměry obsahů různě zabarvených ploch.

Obr. 4: Řídicí obdélník cyklistické značky

Příklad 3 (B. Kunová, M. Stejskalová, E. Vortelová)

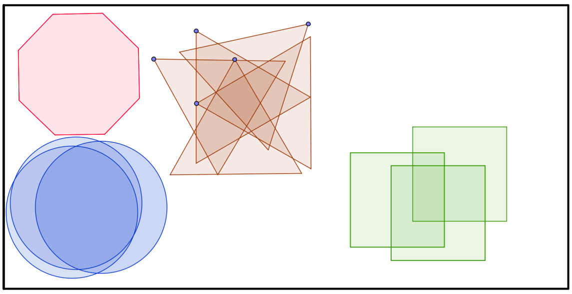
Střední průmyslová škola dostala zakázku na vyhotovení plechových dopravních značek pro nově budované dopravní hřiště:

- 2 ks *Dej přednost v jízdě*
- 2 ks *Zákaz vjezdu všech vozidel*
- 1 ks *Hlavní silnice*
- 1 ks *Přikázaný směr jízdy*
- 1 ks *Jiné nebezpečí*
- 1 ks *Přechod pro chodce*
- 1 ks *Pozor, kruhový objezd*
- 1 ks *Křižovatka s vedlejší silnicí*
- 1 ks *Přednost před protijedoucími vozidly*
- 1 ks *Stůj, dej přednost v jízdě*

Potřebné značky ilustruje obr. 5 (převzato z webu [3]).

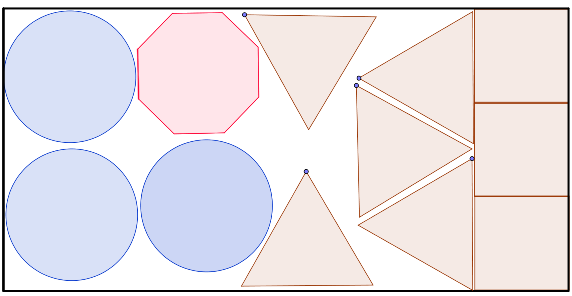
Obr. 5: Dopravní značky

Podle Ministerstva dopravy musí být dodrženy tyto základní rozměry: rovnostranný trojúhelník o délce strany 70 cm, čtverec se stranou 50 cm, kruh o průměru 70 cm a pravidelný osmiúhelník s délkou nejdelší úhlopříčky 70 cm. Vypočtěte, kolik m^2 plechu bude potřeba na výrobu dopravních značek. Podaří se klempířům vystřihnout všechny potřebné značky z plechové tabule o rozměrech 3 m $\times$ 1,5 m? Kolik procent bude činit odpad? Zbyde ještě plech na vyrobení některé další z požadovaných dopravních značek?

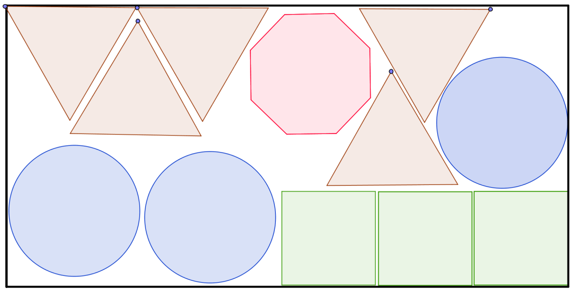


Obr. 6: Model značek na plechu

Prvním úkolem žáků je výpočet obsahů jednotlivých značek, následuje zjištění obsahu celkové plochy, kterou zaujímají všechny značky dohromady, a jeho porovnání s plochou daného plechu. Potud celkem tradiční úloha, z pohledu žáků zdlouhavá a náročná na rutinní počítání. Užitím dynamického softwaru ji můžeme zatraktivnit. Žákům zpřístupníme předem připravený interaktivní obrázek `znacky.ggb` s obdélníkovým modelem plechového plátu a odpovídajícím počtem geometrických útvarů napodobujících požadované značky (obr. 6). Ti pak samostatně (nebo při využití interaktivní tabule společně) zkouší rozmístit geometrické tvary tak, aby se nepřekrývaly. Tabulka ukazuje hodnoty obsahů jednotlivých typů značek i procentuální odpad. Vzorce pro jednotlivé výpočty může učitel vytvořit společně se žáky. Příklad je ukázkou modelování pomocí počítače a vede žáky k úvahám potřebným pro reálné řešení problémů. Např. z praktického hlediska existuje několik způsobů umístění útvarů (obr. 7 a 8) a důležité je neopomenout, že je třeba ještě pomyslet na nutné prostřihy.



Obr. 7: Jedna z možností výsledného uspořádání

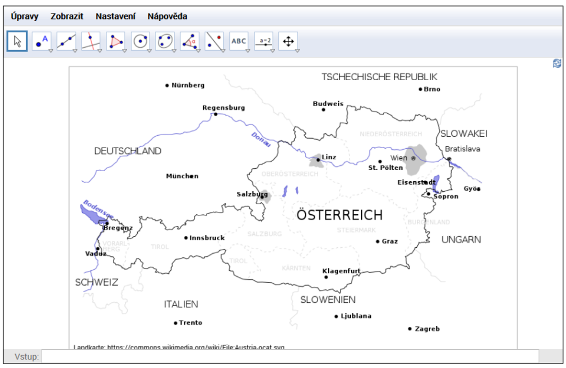


Obr. 8: Další z možností uspořádání

Příklad 4 (P. Pöchtrager, H. Pöchtrager)

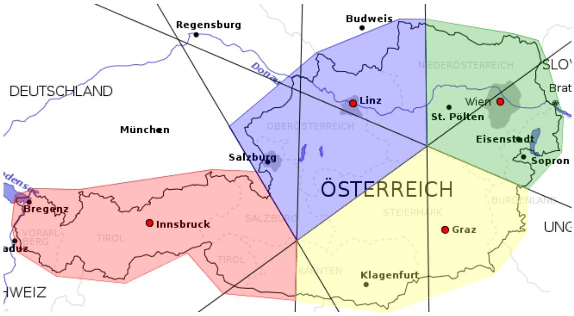
V Rakouských městech Wien, Linz, Innsbruck a Graz jsou umístěny stanice letecké záchranné služby s několika vrtulníky. Na obrázku mapy `http://www.geogebratube.org/student/mPD5JLAG6` (obr. 9) barevně vyznačte oblasti použití vrtulníků, jestliže vzdálenost k místu nehody musí být co nejkratší.

Ze kterého místa bude vyslán záchranný vrtulník, jestliže k nehodě dojde ve městě Salzburg? Za jakou dobu můžeme předpokládat, že vrtulník dorazí na místo neštěstí? Pro výpočet využijte údaje o vzdušných vzdálenostech z `www.luftlinie.org` a předpokládejte, že průměrná rychlost letu je 200 km/h.



Obr. 9: Mapa Rakouska

Příklad je zaměřen na reálnou aplikaci množin bodů dané vlastnosti. Navádí žáky, aby si uvědomili praktický význam grafického znázornění takových množin. Díky možnosti vložení obrázku mapy do pozadí grafického okna programu *GeoGebra* a dalších jeho nástrojů můžeme experimentálně zkoumat a ověřovat potřebné vzdálenosti. Zobrazení celé situace motivuje žáky k diskusi, ze které stanice poletí záchranný vrtulník do Salzburgu. Správnost svého odhadu si ověří graficky (obr. 10) a také výpočtem. Z uvedeného internetového odkazu zjistí informace o vzdušných vzdálenostech mezi jednotlivými městy. Užitím známého vzorce pro rovnoměrný pohyb pak spočítají dobu letu.

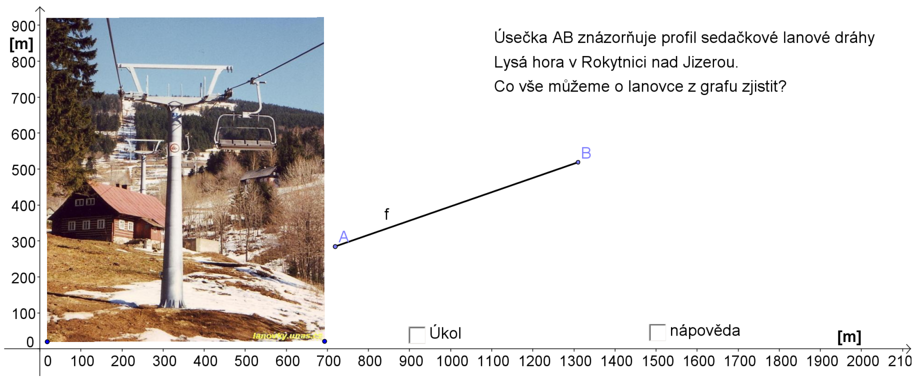


Obr. 10: Zásahové oblasti vrtulníků

Příklad 5 (H. Mahnelová)

Úsečka AB na obrázku `Lanovka.ggb` (obr. 11) znázorňuje profil lanové dráhy Lysá hora v Rokytnici nad Jizerou. Z grafu lze vyčíst mnoho zajímavých informací, víte kterých? Určete je.

Za jakou nejkratší dobu vyjedeme sedačkou nahoru, jestliže maximální dopravní rychlost lanové dráhy je 5 m/s?



Obr. 11: Lanová dráha

Úloha je zaměřena na individuální práci s lineární funkcí a prověřuje schopnost žáka vyčíst z grafu důležitá data potřebná k dalším výpočtům. Obrázek lze minimalizovat pohybem pravého dolního rohu. Žáci pracují samostatně, využívají konstrukce v nákresně nebo informace v algebraickém okně. Zaškrtávací políčko „nápověda“ odkryje informace, na které lze odpovědi vyčíst z grafu. Druhé zaškrtávací políčko zobrazí text dalšího početního úkolu. Výsledky je možné porovnat s informacemi na oficiální stránce `http://www.lanove-drahy.cz/?page=lan&lan=33`. I v tomto případě počítač simuluje reálnou situaci a nenásilnou formou přispívá k upevnění základních matematických poznatků.

4 Závěr

Součástí malého průzkumu na začátku realizace projektu *MatemaTech* byly dotazníková šetření a řízené rozhovory mezi žáky různých typů středních škol za neúčasti vyučujícího. Diskuse směřovala k vyjádření žáků na tři základní otázky: zda vyjmenují kladné stránky matematiky, uvedou, co je na matematice nejobtížnější, a pokud by měli možnost ve výuce něco změnit, aby se stala matematika oblíbenější, co by to bylo? Výsledky byly podobné v obou zemích. Ukázaly, že v očích žáků není matematika zatracená věda, uvědomují si její význam pro další obory a pro praxi. Za obtížné obvykle považují potřebnou důslednost, nutnost drilových návyků a porozumění probírané látce. Často se vyskytovaly názory týkající se výměny učitele, potřeby zvýšení motivace k učení a počtu ukázek aplikovatelnosti matematiky. A právě těmito závěry se inspirovali řešitelé projektu při tvorbě svých úloh. Zkušenosti ukazují, že motivaci žáků může zvýšit propojení matematiky s reálným životem, ukázky její aplikovatelnosti především v oblastech blízkých věku a zájmům mladé generace. Důležitou roli v procesu učení hraje také citlivé užití vhodných a moderních pomůcek, např. stále oblíbených prostorových modelů nebo inovativních prostředků ICT. Hlavním režisérem vzdělávání je učitel. Na něm závisí, jak ochotně se učí používat nové technologie a jak vhodně je umí použít. I když není v současné době vůbec jednoduché držet krok v oblasti informačních technologií se žáky, přece jen ocení učitelovu snahu a při nějakém problému rádi poradí. A to je velmi důležité pro správné fungování vztahu učitel – žák, který je nezbytným předpokladem úspěšné motivace obou aktérů.

Literatura

[1] `http://www.geogebratube.org`

[2] `http://www.matematech.cz`

[3] `http://www.zakruta.cz`

Mgr. Hana Mahnelová, Ph.D.
Gymnázium Bohumila Hrabala v Nymburce
Komenského 779
288 40 Nymburk
`mahnelova@gym-nymburk.cz`

ZAJÍMAVÉ ROVNICE A NEROVNICE

Dag Hrubý

Impulzem k napsání tohoto článku byla rovnice

$$2^x(6-x)=8x,$$

která má kořeny $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, jak se můžeme snadno přesvědčit. Rovnici lze jednoduše geometricky interpretovat. Pro interpretaci zvolíme vyjádření ve tvaru

$$2^x=\frac{8x}{6-x}.$$

Grafem funkce na levé straně je exponenciela a grafem funkce na pravé straně je hyperbola. Tyto křivky se protínají ve třech bodech. Ukážeme, jak lze takovou rovnici sestavit. Vyjdeme z rovnice

$$2^x=\frac{ax+b}{cx+d}$$

a budeme tentokrát požadovat, aby rovnice měla kořeny

$$x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=3.$$

Po dosazení postupně dostáváme

$$2=\frac{a+b}{c+d},\qquad 4=\frac{2a+b}{2c+d},\qquad 8=\frac{3a+b}{3c+d},$$

$$\begin{aligned} a+b-2c-2d&=0,\\ 2a+b-8c-4d&=0,\\ 3a+b-24c-8d&=0. \end{aligned}$$

Z nekonečně mnoha řešení této soustavy $K=\{[-4t,-4t,t,-5t],\ t\in\mathbb{R}\}$ zvolíme řešení $\{[-4,-4,1,-5]\}$. Získáme tak rovnici

$$2^x=\frac{4x+4}{5-x},$$

která má požadované kořeny 1, 2, 3.

Nyní se pokusíme sestavit rovnice tvaru $2^x = P(x)$,

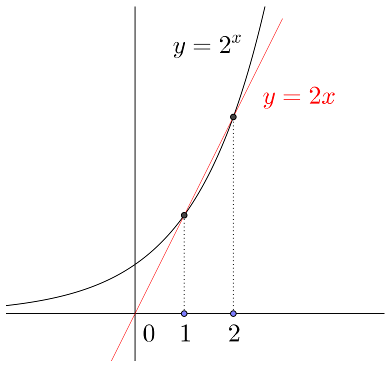
$$\begin{aligned} P(x)&=ax+b,\\ P(x)&=ax^2+bx+c,\\ P(x)&=ax^3+bx^2+cx+d. \end{aligned}$$

Úloha 1. Sestavte rovnici $2^x = ax + b$, která má kořeny $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Řešení:

$$2 = a + b \qquad 4 = 2a + b$$

Pro řešení soustavy platí $a = 2$, $b = 0$. Hledaná rovnice má tvar $2^x = 2x$.



Úloha 2. Sestavte rovnici $2^x = ax^2 + bx + c$ s kořeny $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

Řešení:

$$2 = a + b + c \quad 4 = 4a + 2b + c \quad 8 = 9a + 3b + c$$

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ 4a + 2b + c &= 4 \\ 9a + 3b + c &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 9 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pro řešení soustavy platí

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = 2.$$

Hledaná rovnice má tvar

$$2^x = x^2 - x + 2.$$

Úloha 3. Sestavte rovnici $2^x = ax^3 + bx^2 + cx + d$ s kořeny $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.

Řešení:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 2 \\ 8a + 4b + 2c + d &= 4 \\ 27a + 9b + 3c + d &= 8 \\ 64a + 16b + 4c + d &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 8 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 11 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro řešení soustavy platí

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = -1, \quad c = \frac{8}{3}, \quad d = 0.$$

Hledaná rovnice má tvar

$$2^x = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{8}{3}x.$$

V obecném případě můžeme zkoumat rovnici

$$n^x = P(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 2.$$

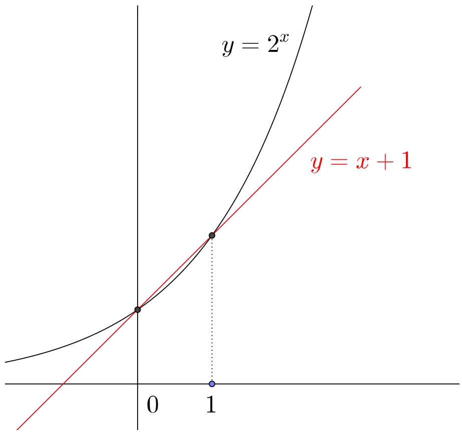
Hledání Eulerova čísla

Následující úlohu použijeme v případě, že žáci neznají pojem derivace funkce a Eulerovo číslo. Úloha je vhodnou motivací pro objevení Eulerova čísla. Výchozím bodem bude následující věta:

Pro která $a > 0$ platí:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x \geq 1 + x$$

Dosadíme-li $x = 1$, dostaneme $a \geq 2$. Ukážeme, že $a > 2$. Rovnice $2^x = 1 + x$ má totiž dva kořeny $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Exponenciela protíná přímku ve dvou bodech. Neplatí tedy $\forall x \in \mathbb{R} \quad 2^x \geq 1 + x$.



Zvolíme-li $x = \frac{1}{2}$, dostaneme $\sqrt{a} \geq \frac{3}{2}$, resp. $a \geq 2{,}25$. Pokud máme čas a žáci mají kalkulátory, můžeme postupně dosazovat $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{4}$, atd. Logickým vyústěním je dosazení $x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Dostaneme nerovnici $a^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n}$. Odtud již snadno plyne

$$a \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Dále žákům vysvětlíme, že pro další dosazování je výhodný interval $(-1, 0)$. Například pro $x = -\frac{1}{2}$ dostáváme $a^{-\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}$ a po úpravě $a \leq 4$. Podobně pro $x = -\frac{1}{3}$ je $a^{-\frac{1}{3}} \geq \frac{2}{3}$ a platí $a \leq 3{,}375$. Pro $x = -\frac{1}{6}$ platí $a \leq 2{,}985\,984$. Na základě těchto pokusů můžeme s jistotou tvrdit, že pro hledané číslo a platí $a \in (2, 3)$. Položíme-li nyní $x = -\frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, dostaneme $a^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}$. Pro a pak platí $a \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Spojením předcházejících nerovností můžeme vyslovit hypotézu:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq a \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Například pro $n = 100$ dostaneme po zaokrouhlení $2{,}705 < a < 2{,}732$.

RNDr. Dag Hrubý
Gymnázium Jevíčko
A. K. Vitáka 452
569 43 Jevíčko
hruby@gymjev.cz

MOTIVUJE STÁTNÍ MATURITNÍ ZKOUŠKA KE STUDIU MATEMATIKY?

Josef Kubeš

Ve svém příspěvku se zamýšlím nad možností motivace ke studiu matematiky na gymnáziu a kladu si otázku, zda zavedení státní části maturitní zkoušky s možností volby matematiky zvýšilo motivaci k jejímu studiu.

1 Zařazení matematiky na naší škole do výukových plánů

Moje názory vycházejí z mnohaleté praxe na gymnáziu, které řadu let patřilo ke školám, na kterých žáci absolvovali třídu zaměřenou na matematiku a byli do ní přijímáni poměrně náročnými talentovými zkouškami. Tento dobře propracovaný systém dostal vážnou trhlinu s nástupem víceleté formy vzdělání. Přesto se na naší škole podařilo zaměřit jednu ze tříd víceleté formy opět na matematiku. V této třídě se na naší škole vychovali velmi kvalitní budoucí matematicky, přírodovědně i technicky zaměření odborníci. Uvedenou trhlinu se obsahově podařilo zacelit, ovšem cca na přelomu tisíciletí byl obrovský problém takovou třídu vůbec naplnit. Jeden z důvodů byla náročnost, ale také mnohem snadnější přístup k vysokoškolskému studiu s nižší úrovní znalosti matematiky. Vždyť na přijetí stačilo absolvování učebního oboru s maturitou, tak proč se učit náročnou matematiku? To je pohled řady našich studentů, kteří s dostatečnou z matematiky nastupují na strojní fakulty.

Zatím největší úder matematickému vzdělání přinesl ŠVP. V základním kurzu matematiky pro vyšší stupeň je podle RVP [1] 10 hodin. I když ředitel zvedl z disponibilních hodin dotaci na 15 hodin u tzv. třídy se zaměřením na matematiku a přírodní vědy [2], což byl maximální možný kompromis, proti dotaci 24 hodin u matematických tříd je evidentní úbytek, který se nedá nahradit bez snížení rozsahu látky i dostatečného procvičení. Zacelení tohoto nepoměru jsme částečně provedli reorganizací látky a rozdělením studentů do skupin a nasazením volitelných předmětů v maturitním ročníku. Zákonitě musí být výsledné kompetence nižší, než v případě zaměřené třídy na matematiku.

2 Jaká má být požadovaná náročnost výuky matematiky

V souvislosti se změnou zakončování studia a nástupem státní části maturitní zkoušky jsem si položil otázku, zda je nutné, aby naši absolventi opravdu získávali solidní matematické základy s dostatečným procvičením a vyřešením řady logických a problémových úloh. Řadu úloh jsme před zavedením ŠVP velmi šikovně propojovali s výpočetní technikou. Mnohdy sami žáci formulovali úlohy, které si částečně zadali s využitím programu *Derive*. Jako příklad uvedu dvě takové úlohy.

1. *Vysvětlete význam parametru a na průběh funkce* $f : y = a \cdot 2^x$.
2. *Určete množinu všech vrcholů parabol, které jsou grafy funkcí* $y = x^2 + bx + 5$, *kde b je libovolné reálné číslo.*

Ústředním tématem našeho setkání je motivace žáků k matematice. Netroufám si na teoretické poučky a závěry. Následující poznatky spíše vycházejí z každodenního kontaktu se studenty. Osobně jsem si studenty rozdělil zhruba na čtyři skupiny.

V první jsou žáci, kteří jsou obdarováni matematickými schopnostmi. Ty nemusíme motivovat. Jejich schopnosti je třeba rozvíjet a smířit se s tím, že nás tito studenti brzy přerostou. Takové studenty směřuji do matematické olympiády, korespondenčních soutěží a soustředění, kde se setkávají se stejně talentovanými vrstevníky a mnohem fundovanějšími přednášejícími. Naším úkolem je takové studenty i s jejich občasnou složitou povahou rozpoznat a správně je nasměrovat. Spíše vidím naši roli v sociální oblasti a pomoci začlenění do zbytku třídy, neboť často zůstávají nepochopeni.

Do druhé skupiny zařazuji studenty, kteří nejsou matematickými výraznými talenty, ale jsou přirozeně inteligentní. Nelze s nimi dosahovat na úlohy olympionického typu, ale při dostatečném vysvětlení pojmů a příslušným procvičením, jsou schopni nacházet souvislosti a matematický aparát aktivně používat, aniž by jim to přinášelo obtíže. Tady vidím pro nás veliký prostor. Podnítit chuť přemýšlet a z daných poznatků vyvozovat další souvislosti, to je ta oblast, kterou budou potřebovat v dalším studiu libovolného oboru. Tady vidím nezastupitelnou úlohu matematiky.

Do třetí oblasti zařazuji studenty, kteří i při maximální snaze jsou schopni zvládnout pouze typové úlohy. I když zadáme typově podobnou úlohu s pozměněným zadáním, nejsou schopni ji vyřešit. Například dát do souvislosti předpis lineární funkce a směrnicovou rovnici přímky je na hranici jejich schopností. V takovém případě se snažím rozvíjet alespoň základní obraty a směřovat je na obory, ve kterých budou více používat paměť, než logické uvažování.

Ve čtvrté skupině se trápím se studenty, kteří se studiu brání, a vzdělávám je proti jejich vůli. Většinou jim stačí absolvování s minimálním úsilím. Je to jejich způsob plnění povinností a je třeba jim nastavit minimum tak, aby nebylo dosažitelné bezpracně.

Mé dělení je interní a určitě hrubé. Ale v mé práci většinou stačí pro zvolení metod práce a komunikaci se studenty.

Aniž bychom si to uvědomovali, motivujeme sami sebou. Je-li učitel matematiky tvořivý, přenáší se taková vlastnost i na žáky. Pokud předává hotová fakta, asi nevychová studenty hledající souvislosti. V matematice je osobnost učitele snad ještě výraznější než v jiných předmětech. Samostudia nových poznatků v matematice je schopna jen velmi malá část populace. Situace se podstatně změní, pokud studentům látku zasadíme do kontextu, vyvodíme nové závěry z již existujících. Pokud zadané úlohy začínají studenti zvládat, dostávají zdravou chuť jít dál. Nastavení obtížnosti a její postupné zvyšování, případně snižování je zase na osobnosti učitele. Vzhledem k náročnosti výstupů v RVP pro gymnázia a požadavků ke složení státní maturitní zkoušky z matematiky je v omezené míře i prostor, kam snižovat.

Shrnu-li své úvahy, docházím k závěru, že na mou položenou otázku, zda je nutné, aby naši absolventi opravdu získávali solidní matematické základy s dostatečným procvičením a vyřešením řady logických a problémových úloh, docházím k závěru, že se posunujeme spíše k základům, než solidním základům. Problémové úlohy dnes již většinou řeší pouze studenti z mé první skupiny.

Příčiny opravdu vidím v minimální časové dotaci. Většina látky je spíše odpřednášená bez dostatečného procvičení. Máme dvě možnosti. Vypustíme tradiční středoškolská témata a budeme se držet pouze témat v RVP. Studentům ovšem budou chybět např. komplexní čísla. Jejich znalost ovšem řada oborů vysokých škol vyžaduje. Nebudu tady rozebírat diferenciální a integrální počet.

Druhá možnost je spíše přejit k faktickému předávání poznatků a soustředit se na řešení úloh a aplikovat fakta. Prostor k motivaci studentů se tak docela výrazně snižuje. Tento přístup ovšem docela dobře postačuje k dalšímu studiu, neboť stačí ovládat kalkul.

Dalším nepřítelem je pro nás menší domácí příprava a její pravidelnost. Studenti většinou pracují nárazově. Jejich znalosti jsou v takovém případě nesouvislé a velmi těžko se na nich nechá stavět. Soustavnou práci lze obvykle u studentů pozorovat v závěru studia, kdy se připravují na přijímací zkoušky formou SCIO testů a následně maturitní zkoušku.

3 Motivace a maturitní zkouška

Závěr studia ukončuje zatím ve státní části maturitní zkoušky zkouška z jazyka českého a volba mezi matematikou a cizím jazykem. Na naší škole je ve větší míře volena matematika. Ze 150 maturujících žáků si matematiku vybralo 115 studentů. Taková volba je částečně zapříčiněna zaměřením, ale také zdánlivě jednodušší formou. Z pohledu studenta stačí zvládnout jeden didaktický test oproti didaktickému testu, písemné práci a ústní zkoušce.

Státní maturitní zkouška z matematiky pro vlastní výuku matematiky na naší škole přinesla pozitivní, ale i negativní přínos.

Za kladné lze hodnotit, že studenti musí zvládnout alespoň základní kompetence a mít přehled a jistotu ve znalostech daných požadavky. Vzhledem k počtu úloh musí být každá úloha v podstatě na jeden jev. Kromě znalostí základní matematiky musí mít student také solidní čtenářskou gramotnost, neboť je třeba v krátkém časovém okamžiku přečíst a pochopit rozsah cca deseti stran odborného textu. Řadu studentů donutila k opakování a utřibení si minima, který by měl gymnazista zvládat.

Za negativní považuji právě rozsah látky. Například úlohu č. 3 jarního termínu roku 2014 [3]:

Výraz (s proměnnou $a \in \mathbb{R}$)

$$3[a - a(a-1)]^2$$

zjednodušte tak, aby neobsahoval závorky.

by měl zvládnout žák základní školy, který se o studium na střední škole uchází. Pochopitelně, že se najdou úlohy, které jsou typicky středoškolské a vyžadují logické uvažování. Přesto po zadání testu z minulých let jej většina studentů napíše bez přípravy a získá tak dojem snadného zvládnutí. Pokud si žáci odnesou jen znalosti v rozsahu státní maturitní zkoušky, musí na řadě vysokých škol technického, přírodovědného i matematického zaměření hodně dohánět a první rok vysoké školy je pro ně náročný. Z řady rozhovorů se svými absolventy vím, že výuka matematiky na vysokých školách s tímto faktem v určité míře počítá, ale problémem jsou většinou přírodovědné a technické předměty, kde se použije obrat například z matematické analýzy a student se látku naučí mechanicky bez porozumění. Další paradox, který vnímám, je užití moderní techniky. V obecné rovině je v RVP [1] požadováno vhodné využití ICT, ale žák při zkoušce může použít pouze kalkulátor se základními funkcemi. Jdeme trochu proti vývoji v praxi. Spíše mám pocit, že je podporováno pamětné učení než tvořivý přístup.

Další negativum vnímám v přínosu pro žáka. Student hodnocený známkou výborně má přeci perfektní znalosti, ale on sám velmi těžce může odhadnout, že ovládá jen základ. Má oprávněnou představu, že je dostatečně připraven pro studium vysokoškolských oborů, kde je matematika hlavním, případně podpůrným předmětem. Myslím si, že tomu tak úplně není a trochu studentům lžeme. Porovnám-li komplexnost a náročnost maturitní písemné práce ve třídách zaměřených na matematiku a matematiku a fyziku, které byly centrálně zadávané, a současnou maturitní zkoušku, musím konstatovat, že po zvládnutí staršího typu zkoušky byly garantovány vyšší matematické kompetence. Pochopitelně si uvědomuji, že takto zaměřené třídy nebyly pro každého středoškoláka a trochu se dostávám na jiný úhel pohledu.

Přesto považuji státní maturitní zkoušku za určitý přínos a donucení části studentské obce ke shrnutí a upevnění matematických kompetencí na základní úrovni. V tomto okamžiku lze říci, že dochází k motivaci studia matematiky, ovšem asi ne takové, kterou bychom si představovali.

4 Závěr

Mé kritické poznámky jsou námětem k zamyšlení. Spíše chci apelovat, abychom studentům jasně sdělili, že požadavky stanovené státní maturitní zkouškou jsou spíše minimem, které by gymnazista měl zvládnout a ne cílem, kam bychom měli dojít.

Literatura

[1] Rámcový vzdělávací program pro gymnázia, http://www.nuv.cz/file/159

[2] Školský vzdělávací program Gymnázia Plzeň, Mikulášské náměstí 23.

[3] Matematika – didaktický test jaro 2014, http://www.novamaturita.cz/zadani-pisemnych-zkousek-jaro-2014-1404036938.html

PaedDr. Josef Kubeš
Gymnázium Plzeň, Mikulášské nám. 23
Mikulášské náměstí 23
326 00 Plzeň
josef.kubes@mikulasske.cz

MATEMATICKÁ ANALÝZA NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH: MINULOST, SOUČASNOST A BUDOUCNOST

Antonín Jančařík

Obsahem tohoto příspěvku je představení alternativního přístupu k výuce matematické analýzy na středních školách. Příspěvek reaguje na aktuální změny vzdělávacích programů, v rámci kterých byla výuka matematické analýzy vyřazena z učiva středních škol.

1 Pohled do historie

Matematická analýza tvoří jednu z fundamentálních oblastí matematiky. Zvládnutí nekonečna, se kterým se v matematické analýze setkáváme, tvoří základ pro studium jak technických, tak i přírodovědných oborů. Matematická analýza se jako vědní obor začala formulovat v první polovině 17. století. S některými myšlenkami, ze kterých matematická analýza vychází, se však můžeme setkat již u starořeckých matematiků.

Z původně univerzitního prostředí se výuka matematické analýzy začala přesouvat na školy střední na konci století devatenáctého (připomeňme česky psaný učební text *Přídavek k Algebře pro vyšší gymnázia* profesora Šimerky z roku 1864 ([1]), který zavádí základní pojmy diferenciálního a integrálního počtu). Systematické snahy o zavedení matematické analýzy do středoškolské výuky lze datovat do prvních let století dvacátého. V roce 1905 na setkání německých přírodovědců v Meranu vystupuje význačný matematik a pozdější první prezident ICMI Felix Klein a požaduje zařazení základů diferenciálního a integrálního počtu do středoškolské matematiky, neboť tzv. funkční myšlení má tvořit osu vyučování v matematice.

Kleinova snaha, známá také jako Kleinův program, se setkala s vřelou odezvou v mnoha evropských zemích, včetně zemí českých. Za všechny snahy uveďme přednášku *K otázce infinitesimálního počtu na rakouské střední škole* školního rady K. Zahradníčka z roku 1906 (citováno dle [2]), ve které uvedl: „Je velmi žádoucí, aby ve středoškolské matematice byl obsažen pojem funkce a prvky diferenciálního a integrálního počtu; je to nutné při moderním pojetí didaktiky matematiky, má-li odpovídat současnému vědeckému pojetí, a je to nutné i pro použití matematiky ve fyzice, která svým charakterem spadá do oblasti infinitesimální analýzy, jejíž metody zde mohou být jednoduše užity.“

Argumenty, které pro zavádění matematické analýzy zazněly, byly natolik závažné, že matematická analýza se postupně stala součástí učiva matematiky na gymnáziích a technických školách. Například na gymnáziích se zaměřením na matematiku se studenti seznamovali se základy diferenciálního a integrálního počtu povinně již od třetího ročníku. Kromě specializovaných textů (např. [3]) bylo obvyklé, že studenti těchto škol čerpali znalosti i z klasických vysokoškolských materiálů, jako jsou například knihy profesora Jarníka. Úlohy, které byly v té době používány například při písemné maturitní zkoušce z matematiky, jasně ukazují, že úroveň výuky matematické analýzy byla na velmi vysoké úrovni. Je také jasné, že významně pozitivním způsobem ovlivňovala znalost fyziky.

2 Změny RVP

K výrazné změně přístupu k výuce matematiky na středních školách došlo s vydáním nových Rámcových vzdělávacích programů. V rámci úprav obsahu učiva došlo k tomu, že diferenciální a integrální počet již není součástí povinné výuky matematiky na středních školách. Rámcový vzdělávací program pro gymnázia sice v rámci očekávaných výstupů stanoví, že student formuluje a zdůvodňuje vlastnosti studovaných funkcí a posloupností, řešení tohoto typu úloh pomocí diferenciálního počtu však není povinné. Ve státní maturitě (dokonce ani ve zkoušce Matematika+) se proto dnes nesetkáme s žádnými úlohami na limity, derivace či integrály. Výuka matematiky na středních školách se svým obsahem vrátila v jedné ze stěžejních oblastí – v oblasti funkčního myšlení – zpět na úroveň devatenáctého století. Podobně jako v té době má výuka diferenciálního počtu podobu nepovinného rozšíření, kterému se věnuje pár nadšenců na elitních školách.

Dopady, které bude mít tento krok na studium na vysokých školách, je v současnosti ještě těžké hodnotit. Je ale zřejmé, že se stále více rozevírají nůžky mezi studenty, kteří přicházejí ze škol, které matematickou analýzu vyučují, a těmi, kteří se s ní poprvé setkají až na vysoké škole. Mnoho žáků se se základními koncepty matematické analýzy – limitou, derivací, či integrálem setkává až při studiu na vysoké škole. Nezřídka se setkáváme s tím, že studenti nejsou schopni tyto koncepty pochopit a jsou důvodem pro ukončení jejich studia.

Vyřazení matematické analýzy z učiva střední školy sebou nese i podstatné otázky teoretické, týkající se přípravy budoucích učitelů matematiky. Zásadní jsou především následující dvě:

1. V jakém rozsahu má být matematická analýza, která doposud s algebrou a geometrií tvořila základní pilíře přípravy budoucích učitelů, součástí studia? Je smysluplné věnovat takovou část přípravy předmětu, který učitelé nebudou ve své praxi vůbec potřebovat?
2. Jakým způsobem s matematickou analýzou seznamovat jak budoucí učitele matematiky, tak i středoškolské žáky, kteří mají o tuto problematiku zájem, nebo ji budou potřebovat při svém studiu na vysoké škole?

První otázka je z velké míry otázkou politickou, o které budou rozhodovat garanti studijní programů, reprezentace vysokých škol i akreditační komise. Je možné, že se současný trend otevření středoškolského i vysokoškolského studia pokud možno co největšímu počtu studentů, tedy i studentům průměrným a podprůměrným, časem změní a nároky na studenty kladené se opět zvýší. V takovém případě by se ustupování ze současných pozic a snižování nároků na budoucí učitele mohlo ukázat jako krok krátkozraký a chybný. Mnohem zajímavější se však jeví druhá otázka. Nedává přesunutí látky z oblasti povinné do oblasti volitelné prostor pro změnu přístupu k výuce? Je pravdou, že jazyk epsilon-delta aritmetiky nám poskytuje přesnost vyjadřování. Na druhou stranu je pro mnoho studentů překážkou pro porozumění konceptům a stává se pouze jazykem nesrozumitelným, který pochopení věcí přispívá jen pramálo. V myslích žáků a studentů tak místo představ a obrazů zůstávají jen formálně zapamatované a slovo od slova opakované definice. Vyřazení analýzy z povinného učiva otevírá prostor pro návrat k původnímu, mnohem intuitivnějšímu přístupu k tomuto předmětu, který je založen na představě nekonečně malých veličin, přístupu, který používal Leibnitz a Newton. Na nekonečně malých veličinách je založen i již výše zmiňovaný učební text Šimerkův.

3 Nekonečně malé veličiny

Nekonečně malé veličiny nejsou jen reliktem minulosti, mnoho současných matematiků se snaží o jejich rehabilitaci a zavedení formou jasnou, nepostrádající vědecké přesnosti, tak i o rehabilitaci tohoto konceptu z pohledu filozofického. Za všechny přístupy jmenujme nestandardní analýzu A. Robinsona, alternativní teorii čísel rozvíjenou v rámci kombinatorické teorie her, či myšlenky význačného českého matematika a filozofa prof. Petra Vopěnky, které jsou dostupné v jeho díle *Calculus infinitesimalis.* Výuka matematické analýzy pomocí nekonečně malých veličin je také používána na různých zahraničních vysokých školách. Pro zavedení na české střední školy jsou však potřebné učebnice a metodické materiály pro učitele v českém jazyce. V současné době jsou dostupné materiály, které vznikly v rámci projektu *OP PA Podpora vědy a přechodu na VŠ.* V rámci tohoto projektu byl vytvořen on-line kurz pro středoškolské studenty a akreditován kurz *Nestandardní analýza pro učitele*, ke kterému byl vydán krátký stejnojmenný učební materiál.

V dalším textu se pokusím představit základní myšlenku infinitesimálního počtu – nekonečně malou veličinu a její použití způsobem, je tento pojem v obou kurzech zaváděn a využíván.

Pojem nekonečně malé veličiny je nejproblematičtějším místem celého infinitesimálního počtu. Nekonečně malá je na jednu stranu větší než nula, ale současně menší než všechna reálná čísla. Pro mnoho úvah si lze nekonečně malou představit jako velice malé číslo (např. takové, že jej kalkulačka při výpočtech již ignoruje a zaokrouhluje na nulu). Takto malé číslo již není nutné brát v úvahu při počítání s reálnými čísly, prostým přičtením se nám jednoduše ztratí. Pokud vynásobíme reálné číslo nekonečně malou veličinou, dostaneme opět nekonečně malou veličinu, a tudíž z našeho pohledu počítání s reálnými čísly nulu. Pokud ale například nekonečně malou veličinu umocníme na druhou, dostaneme veličinu, která je i v optice nekonečně malých tak malá, že ji můžeme zanedbat.

Při praktických výpočtech nám nekonečně malé veličiny vstupují do výpočtů jako změny. Otázkou, kterou si budeme opakovaně pokládat, je, jak se změní hodnota funkce při změně proměnných. Tuto změnu budeme nazývat diferenciálem a značit pomocí δ. Pokud máme funkci danou předpisem $y = f(x)$ a provedeme změnu proměnné o δx, změní se hodnota funkce o δy. Dostáváme tedy rovnici

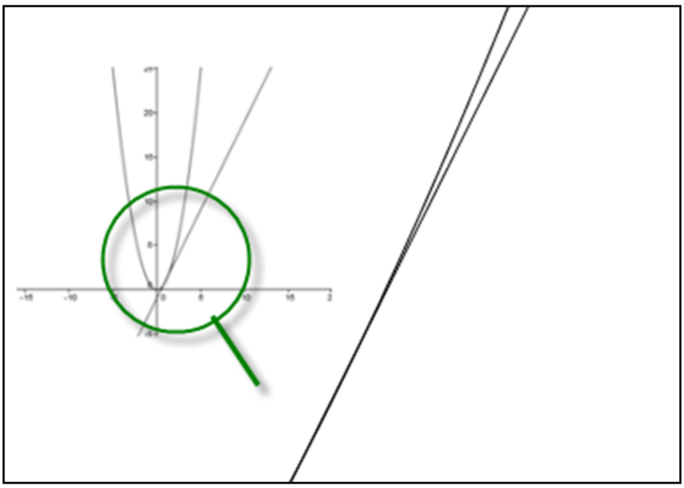
$$y + \delta y = f(x + \delta x),$$

odkud úpravou a dosazením dostáváme základní vztah

$$\delta y = f(x + \delta x) - f(x).$$

Diferenciál funkce nám popisuje, jak „rychle" roste funkce v okolí bodu x. Pokud je funkce dostatečně „hladká" můžeme její chování v okolí bodu popsat s dostatečnou přesnou pomocí přímky (viz obrázek 1). Tuto přímku budeme nazývat tečnou. Pro určení průběhu funkce je velice důležité znát směrnici tečny, neboť ta nám určuje „rychlost růstu" funkce v daném bodu. Směrnici tečny budeme nazývat derivací funkce a budeme ji vyjadřovat jako tangens úhlu, který svírá tečna s osou x. Pokud známe diferenciál funkce, může derivaci snadno vypočítat pomocí vzorce při použití nekonečně malého δx:

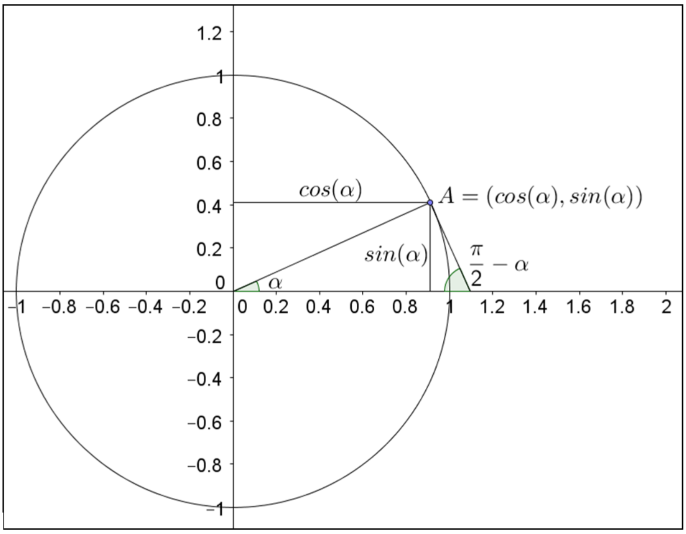
$$f'(x) = \frac{\delta y}{\delta x}$$



Obr. 1: Aproximace funkce tečnou (zdroj: [4])

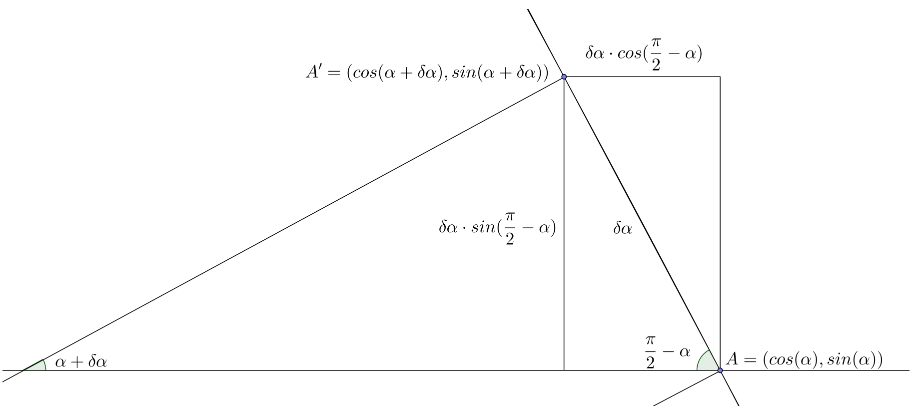
4 Ukázka použití – derivace funkce sinus

Je potřeba si uvědomit, že podmínka „hladkosti" je při naprosté většině výpočtů spojených s reálným životem splněna. Ke změnám fyzikálních veličin dochází spojitě, nikoli skokovitě. Představa aproximace křivky na malém okolí pomocí úsečky nám umožňuje počítat nejen délku křivky či obsah a objem, ale také určit derivaci funkce. Jako praktickou ukázku si představíme odvození vzorce pro derivaci funkce sinus. Pro derivaci sinu a kosinu musíme použít jejich geometrickou interpretaci (viz obrázek 2).



Obr. 2: Sinus a kosinus (zdroj: [4])

Při velmi malé změně (zvětšení) úhlu α o $\delta\alpha$ lze kružnici aproximovat její tečnou a bod A se posune po tečně o $\delta\alpha$, neboť velikost úhlu je uváděna přímo obloukovou mírou, tedy délkou příslušného oblouku na jednotkové kružnici. Na následujícím obrázku je znázorněn výřez z obrázku 2, na kterém je zobrazen jako bod A.



Obr. 3: Změny hodnot goniometrických funkcí (zdroj: [4])

Z obrázku 3 je zřejmé, že když zvětšíme velikost úhlu α o nekonečně malou veličinu $\delta\alpha$, zvětší se hodnota funkce sinus o $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)\delta\alpha = \cos(\alpha)\delta\alpha$. Platí tedy, že derivací sinu je kosinus.

5 Závěr

Matematická analýza byla a je nástrojem, který je nezbytný pro studium přírodních věd. Současná situace, kdy bylo toto téma vyřazeno ze středoškolského studia, vede k tomu, že na vysoké školy přírodovědného a technického zaměření přichází studenti, kteří se s tímto tématem nikdy nesetkali a mají tudíž při svém studiu potíže. Na druhou stranu vyřazení tématu z osnov umožňuje učitelům seznamovat své žáky s tímto tématem jinak, než kdyby se jednalo o látku povinnou. V rámci projektu *Podpora vědy a přechodu na VŠ*, jehož výsledky jsou v článku představeny, byly zpracovány základní materiály, které umožňují alternativní přístup k matematické analýze. Věříme, že intuitivní přístup využívající nekonečně malé veličiny je pro žáky srozumitelnější a umožňuje snažší porozumění principům kalkulku i jeho využití pro praktické výpočty jak v geometrii, tak i přírodních vědách.

Literatura

[1] V. Šimerka, *Přídavek k Algebře pro vyšší gymnasia*, E. Grégr, 1864.

[2] A. Kopáčková: *Václav Šimerka a počátky matematické analýzy v české školské matematice*, `http://math.ku.sk/data/portal/data/zbornik2007/Articles/Kopackova_Alena.pdf`.

[3] B. Riečan, T. Neubrunn, *Základy diferenciálního počtu: pro III. ročník tříd gymnázií se zaměřením na matematiku*, SPN, 1986.

[4] A. Jančařík, *Alternativní přístup k matematické analýze*, PedF UK v Praze, 2014, `http://popularizacevedy.cuni.cz/pro-ucitele/matematika`.

RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.
Pedagogická fakulta UK
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
M. Rettigové 4
116 39 Praha 1
antonin.jancarik@pedf.cuni.cz

NĚKTERÉ PŘÍČINY PROBLÉMŮ STŘEDOŠKOLSKÝCH STUDENTŮ V MATEMATICE

Růžena Blažková

Příspěvek uvádí zamyšlení nad několika příčinami, které způsobují středoškolským studentům problémy v matematice, a nad možnostmi, jak studentům pomoci tyto problémy překonávat. Současný stav úrovně matematických vědomostí neposkytuje právě důvod k radosti, výsledky maturit v matematice nejsou také právě uspokojivé. Jaké jsou příčiny tohoto stavu a kde je můžeme hledat? Můžeme je nalézt v mnoha oblastech, jak společenských, tak školských, některé lze výukou napravovat, jiné ne. Zaměříme se zejména na oblasti, které souvisejí se studentem, jeho předpoklady ke studiu, možnostmi zvládnutí učiva a postojem studenta k vzdělávání na střední škole.

1 Příčiny problémů v matematice

Příčiny problémů středoškolských studentů v matematice je možné rozčlenit do několika skupin:

- příčiny způsobené specifickými poruchami učení,
- příčiny způsobené osobnostními vlastnostmi studenta,
- příčiny způsobené nevhodnou výukou pro žáky s poruchami učení,
- příčiny způsobené systémem přijímání na střední školy.

1.1 Specifické poruchy učení

Problematika specifických poruch učení obecně je předmětem zájmu učitelů základních škol, avšak v současnosti se posouvá i na školy vyšších stupňů. Na středních i vysokých školách studují studenti, kteří měli v dětství diagnostikovánu některou ze specifických poruch učení, byl na ně v této souvislosti brán ohled ve výuce, a tito žáci potřebují pochopení i na středních a vysokých školách (někteří je dokonce vyžadují). Nejde přitom o úlevy ve výuce matematiky, ale o vypracování vhodných kompenzačních a reedukačních postupů, které napomohou žákům při studiu zvoleného oboru. Téma poruch učení je aktuální z mnoha důvodů:

- Počet žáků se specifickými poruchami učení na všech typech škol neustále narůstá.
- Požadavky na výstupní znalosti žáků se zvyšují (např. vzhledem ke státní maturitě z matematiky), přitom vstupní vědomosti často nejsou stanoveny a jsou na nízké úrovni.
- Na mnoha školách nejsou jasně formulovány vstupní požadavky na vědomosti v matematice, ani výstupní požadavky na profil absolventa týkající se matematických znalostí.
- Zvyšují se i požadavky na matematické znalosti v mnoha povoláních.

Mezi specifické poruchy učení řadíme dyslexii, dysgrafii, dysortografii, dyskalkulii, dysmúzii, dyspinxii, dyspraxii. Jednotlivé poruchy se navzájem ovlivňují a téměř všechny mají vliv na výsledky studenta v matematice.

1.2 Dyskalkulie a její projevy

Pod pojmem dyskalkulie rozumíme specifickou poruchu, kdy žák má zřetelné obtíže při práci s matematickými objekty, přitom má průměrnou až nadprůměrnou úroveň rozumových schopností, příznivé sociokulturní zázemí, avšak projevuje se u něj dysfunkce centrální nervové soustavy v určité oblasti (např. kognitivních center mozku). Dyskalkulie bývá zpravidla diagnostikována na prvním stupni základní školy, avšak v posledních letech není výjimkou, že se diagnostikuje i u středoškolských studentů. Můžeme se setkat se žáky a studenty, kteří nepodceňují matematické vzdělávání, věnují přípravě do matematiky veliké úsilí, avšak jejich výsledky neodpovídají vynaložené námaze.

Klasifikaci dyskalkulie provádějí speciální pedagogové (např. Košč 1972, Novák 2004) a podle toho, která oblast je postižena, rozlišují dyskalkulii:

- *Praktognostickou* – porucha manipulace s konkrétními předměty nebo symboly, u žáka se nevytvoří pojem přirozeného čísla a v návaznosti na to i pojmy v dalších číselných oborech (desetinné číslo, zlomek). Žák není schopen provádět diferenciaci geometrických útvarů, má poruchu prostorového faktoru, pravolevé orientace.
- *Verbální* – žák má problémy se slovním označováním předmětů, operačních znaků, symbolů, neumí vyjmenovat řadu čísel v určitém uspořádání, nepochopí vyslovené číslo, symbol.
- *Lexickou* – žák není schopen číst matematické znaky, symboly, zaměňuje tvarově podobné číslice, má poruchu orientace v prostoru, poruchu pravolevé orientace.
- *Grafickou* – žák má problémy se zápisem matematických znaků, zápisem víceciferných čísel, zápisem čísel v algoritmech operací, rýsováním obrazců. Velké problémy mu činí psaní čísel podle diktátu.
- *Operační* – projevuje se narušenou schopností provádět matematické operace s přirozenými čísly (i s čísly v dalších oborech), žák jednotlivé operace zaměňuje, má problémy s osvojováním pamětných spojů, s prováděním algoritmů písemných operací, s respektováním priority operací apod.
- *Ideognostickou* – jde o poruchu v pojmové oblasti, v chápání vztahů mezi jednotlivými pojmy, poruchu při zobecňování, řešení slovních úloh apod.

Jde tedy o specifickou vývojovou poruchu projevující se v oblasti matematiky, zejména v nabývání a používání základních početních dovedností, jejíž příčinou není mentální retardace nebo nevhodný způsob výuky.

Žáci a studenti dosahují v ostatních předmětech průměrných až nadprůměrných výsledků, v matematice mají však velké problémy, často propadají.

1.3 Vliv dalších specifických poruch na úspěšnost v matematice

Pokud má žák nebo student diagnostikovánu některou další ze specifických poruch učení, je třeba s nimi počítat i při výuce matematiky. Jednotlivé poruchy se ovlivňují a nedostatky v matematice nemusí být způsobeny neznalostí, ale právě některou z dalších poruch učení:

Dyslexie postihuje rozlišování některých písmen, číslic, porozumění textu, zejména zadání matematických a slovních úloh, používání symbolického jazyka. Největší problém činí přepis textu slovní úlohy do matematického symbolického jazyka. Pomalost čtení omezuje žáka v matematice, student pak může prožívat stres z časového faktoru.

Dysgrafie se projevuje v obtížích při osvojování si zápisu jednotlivých číslic, čísel, znaků, zápisem čísel v algoritmech jednotlivých operací, problémy při rýsování. Chyby v matematických operacích mohou být způsobené neupraveností zápisů nebo výraznou pomalostí při psaní.

Dyspinxie se projevuje v neobratnosti při zvládání jemné motoriky ruky, projevuje se v obtížích při rýsování, v chápání vztahu rovina – prostor.

Dysmúzie se v matematice projevuje zejména ztrátou smyslu pro rytmus, který je v matematice také důležitý.

Dyspraxie má vliv na upravenost matematických prací, upravenost narýsovaných obrázků, účelnost uspořádání pracovního místa apod.

Učitel matematiky nemůže podceňovat ostatní specifické poruchy učení, neboť právě tyto poruchy mohou být příčinou některých problémů žáka v matematice.

2 Další příčiny neúspěšnosti studentů v matematice

Na úspěšnost žáků a studentů v matematice má vliv řada dalších činitelů. Jde zejména o samotnou matematiku, osobnostní vlastnosti studentů, přístup učitele matematiky, přístup rodičů.

2.1 Obsah matematiky

Matematika je disciplína, která pracuje s abstraktními pojmy a jejich správné vytváření je náročné na psychiku žáka. Má přesnou logickou výstavbu a je budována deduktivně. Proces zobecňování a abstrakce vyžaduje schopnost postupně přecházet od konkrétních představ k obecnějším, a to je pro žáky velmi složité. I když se ve školské matematice využívají vesměs induktivní přístupy, určité zobecnění a abstrakce jsou nutné (například již při vytváření pojmu přirozeného čísla, zlomku apod.). Navíc školská matematika je předmětem, kde každý prvek nižší úrovně je nezbytným předpokladem zvládnutí prvků vyšší úrovně, tedy žáci si musí to, co se již dříve naučili, neustále pamatovat. Například zvládnutí pamětného počítání je nezbytné při počítání písemném, tedy při výuce algoritmů početních operací. Přitom žáci neustále využívají paměti dlouhodobé, krátkodobé i pracovní. Zásadní stanovisko pro vytváření vědomostí v matematice je možné uvést takto:

a) nejprve je nutné pochopení každého z matematických pojmů a jeho správné vytvoření,
b) podle schopností žáků je třeba stanovit míru vědomostí a dovedností, které jsou schopni vzhledem ke svým předpokladům zvládnout,
c) neustále je třeba posilovat paměť.

2.2 Osobnost žáka

Žáci se nerozvíjejí stejně rychle, některé myšlenkové operace mohou mít vyvinuty poněkud později, avšak přitom není snížena úroveň jejich rozumových schopností a ani nemusí trpět specifickou poruchou učení. Příčiny neúspěchů žáků v matematice mohou být způsobeny určitou nedozrálostí vzhledem k danému učivu. Častokrát se stává, že žák v daném okamžiku učivo nechápe, ale po určitém časovém úseku (např. za půl roku) chápe toto učivo již bez problémů.

Další příčiny problémů žáků v matematice souvisejí s jejich volními vlastnostmi. Matematika vyžaduje každodenní systematickou práci. Pokud žáci nejsou schopni k této práci se sami přimět a pokud v jejich okolí není nikdo, kdo by jim pomohl, nemají šanci na úspěch v matematice. Většinou se objeví problém v některém úseku učiva a žák již není schopen sám navázat a zvládat učivo následující. S malou úspěšností žáků v matematice souvisí také jejich nepozornost, nezájem, ale také malé sebevědomí, úzkost, ztráta naděje na úspěch, role outsidera mezi spolužáky aj.

Velmi důležité je sledovat tzv. psychické bariéry, kterými jsou např. syndrom bílého papíru – obavy z písemných prací, pětiminutovek, dále obavy ze sloupců příkladů, slovních úloh, některého tématu aj. Tyto psychické problémy jsou velmi závažné a je třeba je vnímat jako varovné signály v práci učitele a v komunikaci se žáky. Podezírat žáky, že něco tzv. předstírají, může být velmi nebezpečné.

2.3 Osobnost učitele

Nejčastější příčiny poruch učení dětí v matematice, související s osobností učitele, mohou být způsobeny nedostatečnou odbornou znalostí učitele, jak v oblasti matematiky, tak v oblasti pedagogicko-psychologické a speciálně pedagogické. Dále jsou příčiny poruch ve stylu výuky, který může být dobrý, ale není vhodný právě pro tohoto žáka, volbě metod práce, dále pak v oblasti komunikace se žáky, v nedostatečné trpělivosti učitele, formálním přístupu k práci se žáky s problémy v matematice. Příčiny mohou být také v nedostatečné motivaci žáků k učení i nedostatečné motivaci matematického učiva, v nezvládnutí problematiky hodnocení a klasifikace apod. Pro žáky je velmi málo motivující učitelovo očekávání sníženého výkonu žáků s poruchou učení bez naděje na zlepšení, nebo nedostatek empatie učitele k žákům s dyskalkulií.

2.4 Vliv rodičů

Reakce rodičů na neúspěšnost v matematice i na poruchy učení v matematice je různá a můžeme uvést několik skupin podle vztahu k jejich dítěti. Do první skupiny můžeme zařadit rodiče, kteří mají pro dítě plné pochopení, spolupracují s pedagogicko-psychologickou poradnou i učitelem matematiky a snaží se dítěti pomoci vzhledem k jeho handicapu. Pomáhají mu překonávat problémy v matematice a neočekávají nereálné výsledky. Druhá skupina rodičů jsou rodiče ambiciózní, nepřiměřeně ctižádostiví, kteří nejsou schopni smířit se s tím, že mají dítě s problémy v matematice. Tito rodiče buď dítě odmítají, nebo zaujímají trpitelské stanovisko (proč právě my máme takové dítě), nebo dítě přetěžují neustálým doučováním a nepřiměřenými nároky. Někteří rodiče děti trestají, nikoliv fyzicky, ale psychicky. Další skupinou rodičů jsou rodiče, kteří se snaží za každou cenu dítěti pomáhat tak, že vymýšlejí nejrůznější postupy a didaktická zjednodušení, která se však v budoucnu v dalším učivu projeví jako chybná a způsobí dětem další problémy. Další skupina rodičů se sice o dítě zajímá, ale rezignuje a nechá dítě bez odborné pomoci (nedá se nic dělat, my jsme na matematiku také „nebyli“). Existuje také skupina rodičů, kteří nespolupracují ani s poradnou, ani s učitelem a o dítě se nestarají. Práce s rodiči je někdy náročnější než práce s dětmi.

2.5 Další příčiny

Mezi další příčiny, které mají vliv na úspěšnost žáků v matematice řadíme rovněž poruchy koncentrace, poruchy pravolevé orientace, poruchy sluchového a zrakového vnímání, poruchy řeči, poruchy jemné motoriky, poruchy chování apod.

3 Projevy dyskalkulických chyb

Uvádíme některé příčiny nejčastějších chyb v matematice, které jsou způsobeny specifickou poruchou učení, zejména dyskalkulií. Tyto problémy provázejí člověka po celý život a i když mohou být kompenzovány nově vytvořenými postupy, nebo reedukovány, vždy se na ně žák musí koncentrovat. Navíc se problémy objevují v dalších, náročnějších matematických tématech. Je třeba uvědomit si, že problémy žáků jsou výrazně individuální a také přístupy k jejich nápravě jsou individuální.

3.1 Nepochopení matematických pojmů

Nezbytným předpokladem úspěšné práce v matematice je správné vytvoření a pochopení matematických pojmů. Proces vytváření matematických pojmů má své zákonitosti a je nepřenosný. Každý žák by si měl vytvářet pojmy vlastní činností, na základě vlastní zkušenosti a k poznatku by měl dospět zcela samostatně. Pokud pracuje pouze s předávanými informacemi a potřebné pojmy si nevytvoří tak, aby věděl, jaký je význam daného pojmu a co znamená, nemá naději na úspěch v matematice na kterémkoliv stupni školy. Zprostředkované vědomosti (já jim to řeknu, napíši a ať si to opíší a naučí se to) nejsou dobrým předpokladem k úspěchu při budování matematických vědomostí. Například mnoho žáků nepochopí pojem přirozeného čísla, nechápe podstatu desítkové soustavy, nerozlišuje mezi pojmy číslo a číslice, geometrickým útvarem a jeho velikostí (např. obdélník a obsah obdélníku), nechápe význam záporného čísla, zlomku, význam písmene v algebraickém výrazu apod. Pokud žák nechápe, jaký má daný pojem význam, je obtížné zvládat další učivo.

3.2 Zápis a čtení čísel a symbolů

Správný zápis čísel a symbolů ovlivňují, mimo jiné, poruchy pravolevé orientace. Pokud má žák již v první třídě problémy s psaním písmen a číslic, které mají určitou orientaci (např. b, d, 3, 7, 6, 9), musí se vždy, když tyto symboly píše, plně soustředit na to, jak má příslušné písmeno či číslici napsat, a to jej odvádí od podstaty řešené situace. Porucha pravolevé orientace se dále projevuje při zápisu víceciferných čísel, např. žák nerozlišuje zápisy 24, 42. Další problémy se vyskytují při zápisu čísel s nulami (502, 52) a neschopnosti tato čísla přečíst. Např. číslo 2008 čtou dva nula nula osm. Žákům činí potíže rozlišovat symboly pro porovnávání čísel (větší, menší), symbol pro odmocninu, neumí správně přečíst mocniny i odmocniny, algebraické výrazy apod.

3.3 Operace s přirozenými čísly

Problémy, které se vyskytují v souvislosti s operacemi s přirozenými čísly a v návaznosti na to i s čísly v dalších číselných oborech, můžeme obecně formulovat takto:

- nepochopení dané operace,
- převaha paměti nad porozuměním,
- nezvládnutí základních spojů každé z operací,
- nezvládnutí algoritmů písemných výpočtů.

Potíže žáků vesměs vycházejí z toho, že žák vůbec nepochopí podstatu operace, vůbec neví, co s danými čísly při operaci provádět. Počátek je již při pochopení významu odčítání přirozených čísel, kdy žák nepochopí význam znaménka minus, nepochopení významu operací násobení a dělení. I když se na středních školách ve větší míře využívá k výpočtům kalkulátor, nenahradí to plně potřebné využívání operací v dalších tématech. Pokud má žák problémy s odčítáním s přechodem přes základ deset, např. příklad $17 - 9$ počítá jako $19 - 7 = 12$, bude mít problémy při řešení rovnic, ve kterých se vyskytne $17x - 9x$. Podobně, pokud nezvládá základní spoje v oboru přirozených čísel, bude mít problémy při počítání s mocninami, úpravou algebraických výrazů aj. Jestliže se naučí základní spoje jednotlivých operací zpaměti, bez porozumění, velmi brzy je zapomene. Při písemných výpočtech je potřeba, aby byly spoje zautomatizovány, aby se žák soustředil na příslušný zápis algoritmu. Rovněž respektování priority jednotlivých operací je pro žáky problematické. Začíná to číselnými výrazy např. $4 + 3 \cdot 5 = 35$, které počítají jako $(4 + 3) \cdot 5$, tyto chyby se dále projevují při práci se zlomky a algebraickými výrazy. Chyby, které se vyskytují při provádění operací s čísly přirozenými, se zcela jistě objeví při počítání s čísly desetinnými. Často žáci chybují při počítání se zlomky. Jestliže žák řádně nepochopí pojem zlomku, např. sčítání zlomků provádí tak, že součet čitatelů lomí součtem jmenovatelů.

3.4 Řešení slovních a aplikačních úloh

Řešení slovních úloh je kritériem pochopení učiva, neboť žák by měl poznat, jaké operace zvolit, aby úlohu správně vyřešil. Pro žáky se specifickými poruchami učení je problémem zadání úlohy přečíst s porozuměním a provést přepis slovního textu do matematického symbolického jazyka (příkladu, rovnice, nerovnice). Zpravidla se zaměří jen na číselné údaje uvedené v zadání úlohy, ale jen ty, které jsou zapsány pomocí cifer, a ty zpravidla sečtou. Při vlastním řešení se pak vyskytují chyby, které se objevují v souvislosti s operacemi s čísly v jednotlivých oborech (nezvládnuté operace s čísly, práce se závorkami, se zlomky), takže se často stává, že žák sice správně matematizuje danou úlohu, ale vzhledem ke svým problémům nedokáže úlohu správně vyřešit. Rovněž správné uplatňování ekvivalentních či důsledkových úprav při řešení rovnic nebo nerovnic činí některým žákům potíže.

3.5 Problémy v geometrii

V rámci geometrického učiva je problematické:

- úroveň geometrické a prostorové představivosti,
- správné představy geometrických pojmů a jejich vytváření,
- schopnost kreslení a rýsování geometrických útvarů,
- řešení konstrukčních úloh,
- pochopení vztahů pro míry geometrických útvarů,
- práce s jednotkami měr.

Pro některé žáky s dyskalkulií může být geometrie záchranou, neboť se zde mohou částečně vyhnout problémům, které mají při počítání s čísly. Tyto problémy se však objeví v rámci početní geometrie při výpočtech obvodů a obsahů geometrických útvarů nebo povrchů a objemů těles. To je však možné řešit s využitím kalkulátoru, avšak žáci by měli mít odhad reálných výsledků řešených aplikačních úloh. Rovněž využívání počítače a různých geometrických programů může napomoci pochopení geometrického učiva. Problematika nezvládnutí učiva jednotek měr a jejich převodů má kořeny jednak v tom, že žáci nemají představu o příslušných jednotkách, jednak v nepochopení násobení a dělení desetinných čísel mocninami deseti.

3.6 Převaha paměti nad porozuměním

Pokud jsou vědomosti založeny jen na pamětném zvládnutí učiva, žáci neumí v podstatě nic. Nejprve se učí zpaměti základním spojům operací s přirozenými čísly, avšak nikdy neví, kdy jakou operaci využít např. při řešení praktických problémů a slovních úloh. Později se naučí memorovat poučky nebo různé vzorce, avšak protože jim nerozumějí, neumí je uplatnit při řešení úloh. Toto se pak projevuje ve velké míře v algebře a v početní geometrii.

4 Postoje žáků a studentů k matematice

Na všech stupních škol se zpravidla setkáváme s určitými skupinami žáků a studentů, kteří mají jisté postoje k výuce vůbec a k výuce matematiky speciálně. Jedná se o tyto skupiny:

- Žáci se chtějí učit, mají určité předpoklady a jsou schopni na určité úrovni matematické učivo zvládnout.
- Žáci se chtějí učit, předpoklady nemají, ale mají velkou snahu učivo zvládnout.
- Žáci mají předpoklady, ale učit se nechtějí.
- Žáci nemají předpoklady a učit se nechtějí.
- Žáci mají na základě předchozích trvalých neúspěchů negativní vztah k matematice a obavy cokoliv provádět, protože to zase nebude správně.

4.1 Přístupy studentů středních škol

- Změna chování žáků na střední škole oproti škole základní, protože někteří žáci svoji poruchu neprezentují, skrývají ji zejména před spolužáky, mají obavy z ohrožení svého společenského postavení ve třídě.
- Mnoho žáků s dyskalkulií má vytvořeny vlastní kompenzační postupy, které si vypracovali v průběhu předchozí školní docházky. Žáci jsou schopni vypracovat si sami své strategie řešení úloh, které mohou být odlišné od obecně uplatňovaných postupů, avšak jsou správné.
- Žáci účelně využívají kompenzačních pomůcek. I když na střední škole není kalkulačka kompenzační pomůckou, protože ji využívají k výpočtům všichni žáci, žák musí překonávat problémy, které se v oblasti výpočtů objevovaly na základní škole.
- Žák umí zřetelně formulovat své problémy. Protože se matematice chce naučit, je si vědom oblastí, které vzhledem ke své poruše nezvládá a hledá pomoc a nápravná opatření. Zpravidla žádá pomoc v počátku řešení úlohy (potřebuje „nastartovat“).
- Má zájem a snahu o nápravu, hledá pro sebe vhodné postupy.
- Je schopen respektovat pravidla (např. využívá doučování nebo dalších forem pomoci). Žáci s dyskalkulií jsou vesměs velmi pracovití, musí vykonat mnohem více práce než jejich spolužáci a za to by měli být oceněni.

4.2 Vztah společnosti ke vzdělávání, speciálně ke vzdělávání matematickému

Při práci se žáky se specifickými vzdělávacími potřebami nelze pominout i další faktory, které vztah k matematickému vzdělávání ovlivňují. Některé z nich jsou tyto (bez nároku na úplnost):

- Celkové klima společnosti vzhledem k ocenění významu matematiky pro rozvoj osobnosti člověka i pro všechny ostatní obory. Řada „VIP osob“ se chlubí svým negativním vztahem k matematice („na matematiku jsem nikdy nebyl/a“). Přitom tak zjevně nevystavují své nedostatky, které z jejich projevu vyplývají, i v ostatních předmětech, zejména v jazyce českém.

- Požadavky na výstupní a vstupní vědomosti jednotlivých stupňů škol se změnily, mnoho středních škol přijímá žáka bez přijímacích zkoušek z matematiky, učivo tak není upevněno a zopakováno a je zapomenuto, protože některá témata žák slyšel jen jednou a nikdy se k nim nevrátil.
- Výuku matematiky na druhém stupni základních škol ovlivňuje i odchod poměrně velkého procenta žáků z 5. ročníku ZŠ na víceletá gymnázia. Na základní škole není pak ve třídě nikdo, kdo by pomohl učiteli ukázat vyšší úroveň vědomostí.
- Vliv přílišného využívání pracovních listů. Předpoklad, že prostřednictvím pracovních listů se žáci naučí více, se zřejmě tak úplně nenaplnil, neboť mnoho práce je za žáky vykonáno a pracovní list se většinou stává doplňovačkou. Je např. předepsán zápis úlohy, místo pro výpočet, dokonce i odpověď a žáci jen doplňují čísla bez hlubšího rozboru úlohy a zamyšlení. I pro učitele mohou být učebnice zpracované formou pracovních listů brzdou, neboť se soustředí na vyplňování jedné stránky za druhou bez hlubšího promyšlení přípravy a souvislostí jednotlivých témat.
- Projevuje se malá ochota žáků přemýšlet a systematicky pracovat. Nejčastější dotazy jsou „k čemu to je“, „nač to budu potřebovat“, „proč se to vůbec učíme“.

4.3 Příklady případových studií

Zbyněk. Žák střední školy SPŠ elektr. a informačních technologií – obor sociální činnost, dnes student VOŠ. Velmi houževnatý žák, dyskalkulik, navíc s oční vadou, avšak se snahou za každou cenu dokončit studium, které si vybral. Veškeré problémy, které měl s matematikou (v prvním pololetí prvního ročníku propadal), i doporučení, aby změnil školu, překonával výraznou pracovitostí, neustálými konzultacemi s učitelkou z jiného pracoviště, která dokázala vystihnout jádro problému a najít účinná nápravná cvičení. V závěru studia měl z matematiky dvojku, ale nematuroval z ní. Nyní studuje na Vyšší odborné škole sociálního zaměření.

Yvetta. Absolventka Veřejnosprávní akademie, dnes studuje angličtinu. Navštěvovala několik středních škol, vždy školu opustila z důvodu neúspěšnosti v matematice. Je dyskalkulička a nikdo to nebral na vědomí. Její neutěšená situace vedla i k problémům somatického rázu. Na škole, na kterou již v pokročilejším věku (ve srovnání se spolužáky) byla přijata, si uvědomila, že pokud si nepomůže sama, nepomůže jí nikdo. Začala se, za výrazného přispění spolužáků, připravovat na písemné práce tak, aby nedostala nedostatečnou. Školu absolvovala, má mnoho jiných dovedností, které zvládá na vysoké úrovni (hra na housle, péče o postižené dítě, péče o seniory aj.). V dospělosti se vyrovnala se svým handicapem a je schopna využívat čísel v běžném životě, nemá již stres, když jí počítání trvá déle než ostatním. Nyní studuje angličtinu, aby mohla případně pracovat v zahraničí.

Xénie. Žákyně SŠ obchodu a služeb, přechod ze střední školy na učební obor kuchařka, cukrářka. Žákyně, výrazná dyskalkulička, byla přijata na střední školu, avšak po poradě s pedagogicko-psychologickou poradnou, učiteli školy a jejím vedením i s rodiči přešla na učební obor. I zde se výrazně projevovaly její problémy v matematice, zejména při praktických úlohách, které vyžadovaly výpočty (např. normování). Velkou péčí a pochopením učitelů a postupem podle individuálního plánu školu dokončila a úspěšně složila závěrečné zkoušky.

Valérie. Žákyně střední zdravotnické školy, dnes studentka VOŠ. Žákyně, která ve všech předmětech prospívala bez problémů, avšak v matematice se objevovaly problémy, byla pomalá, nic nestihla vypočítat do konce, měla problémy s procentovým počtem (např. s počítáním koncentrací roztoků). S pomocí rodičů a starších sourozenců učivo zvládla tak, aby nepropadla. Nyní je velmi úspěšnou zdravotní sestrou a začala studovat Vyšší odbornou školu.

Ulrich. Student VUT. „Jsem diagnostikovaný dyslektik a dysgrafik. V matematice to nikdo nikdy nezohledňoval. Problémy v matematice jsem měl proto, že jsem např. špatně opsal zadání, a i když jsem příklad se změněným zadáním vypočítal správně, nebylo mi z toho nic uznáno. Někdy jsem si zapsal čísla neupraveně, málo čitelně. Výraznou vzpomínku mám, když na střední škole mi učitel celou práci škrtl a dal mi 5, že je nečitelná, i když byly všechny příklady vypočítány správně. Až po přezkoumání ředitelem školy, také matematikem, s mým vysvětlením, se mi dostalo uznání. Velkou pomocí mi bylo, když jsem mohl psát písemné práce na počítači. Od té doby jsem s matematikou velký kamarád, neboť logická úvaha je mou zálibou. Studium na VUT zvládám v pohodě."

Tadeáš. „Studoval jsem učební obor s maturitou, k maturitě jsem si vybral matematiku, i když jsem diagnostikovaný dyskalkulik. Bohužel se mi nepodařilo složit ji ani napotřetí, při každé další zkoušce jsem měl méně bodů než v předchozí, i když jsem se intenzivně připravoval. Moje příprava byla asi neúčinná, ale naprosto mi nevyhovoval systém maturitních testů s výběrem správných odpovědí. Nepomohlo mi ani to, že jsem mohl mít více času vzhledem ke své poruše."

Štěpán. Student střední odborné školy, dyslektik. K maturitě si vybral matematiku, avšak při přípravě zjistil, že jeho předchozí matematická příprava byla naprosto nedostatečná, objevovaly se závažné chyby z učiva základní školy. Po dvou neúspěšných pokusech a po intenzivní přípravě s třemi různými učiteli (každý mi to vysvětlil z jiné stránky a pokaždé jsem něco pochopil) maturitu nakonec úspěšně složil.

4.4 Možnosti nápravných opatření

Při zamyšlení nad volbou nápravných opatření můžeme připomenout myšlenky učitele národů Jana Ámose Komenského:

- *Nikdo nechybuje, protože chce.*
- *Nemoci se léčí správnou životosprávou, spíše než léky.*

Nápravná opatření vycházejí z individuálních potřeb každého žáka. Vždy vycházejí z toho učiva, které žák nezvládá. Je třeba, aby učitel matematiky rozhodl, do jaké míry bude žák „dohánět" nezvládnuté učivo z nižších ročníků, nebo jak bude toto učivo kompenzováno. Zásady reedukačních cvičení jsou:

- Oblast budování pojmů – žák by měl mít jasnou představu o každém pojmu a měl by s nimi pracovat na základě pochopení, nikoliv jen na základě formálního přístupu (např. pamětné učení bez pochopení). Např. žák nerozlišuje pojmy obdélník a obsah obdélníku, zaměňuje vztahy pro obvod obdélníku a jeho obsah aj. Výukové metody volit tak, aby žák co nejvíce manipuloval s předměty a všechny vztahy si odvodil samostatně.
- Vyvození operací – každá operace musí být vyvozena nejprve v oboru přirozených čísel, aby žák věděl, co se s čísly při jednotlivých operacích děje. Měl by zvládnout vlastnosti jednotlivých operací a účelně je využívat (např. k snadnějším výpočtům). Teprve po pochopení operací s čísly přirozenými může žák pochopit operace s dalšími čísly (racionálními, reálnými). Velký význam pro výuku algebry a úprav algebraických výrazů má správné vyvození a pochopení počítání s číselnými výrazy a vyvození jednotlivých operací se zlomky.
- Schopnost matematizace slovních formulací – vztahy vyjádřené prostřednictvím českých vět zapsat pomocí matematického symbolického jazyka (a naopak čtení matematických zápisů). Schopnost pracovat s matematickým textem svědčí o určité kultuře žáka.
- Řešení aplikačních úloh a problémů – slovní a aplikační úlohy jsou kritériem aktivního zvládnutí učiva, kdy žák s porozuměním volí početní operace vhodné k vyřešení úlohy. Pro žáky s dyskalkulií je vhodné sestavovat metodické řady úloh s rostoucí náročností tak, aby jednotlivé úlohy byly východiskem k řešení úloh náročnějších.
- Užití matematiky v praktickém životě, její význam pro žáka – každá profese má jisté nároky na úroveň matematických vědomostí a ty by měl žák zvládat především. Pokud žák klade otázku „k čemu mi to bude", a nevidí účelnost učiva k řešení praktických problémů nebo k rozvoji myšlení, když nevidí krásu matematiky, není s výukou matematiky něco v pořádku.
- Příprava specifických pracovních listů, ve kterých je vždy jeden příklad vzorově vyřešen a další příklady žáci počítají podle vzoru. Na závěr pracovního listu je uvedena slovní úloha, která učiva využívá. Učivo je uváděno ve velmi jemných metodických řadách (např. úpravy algebraických výrazů, řešení rovnic, početní úlohy v geometrii aj.), kdy v každém novém příkladu je jeden nový krok.
- Využívání grafického znázornění problematiky, barevné označení, využití geometrické prezentace algebraického učiva. Pro žáky s poruchami učení má velký význam vizualizace dané problematiky.
- Systematická práce s chybou, kdy žák se postupně učí hledat chybu

sám a také ji opravit. Neustále se navracíme ke kořenům, neboť chyby zpravidla vyplývají z nezvládnutého základního učiva.
- Potřeba komunikace s žákem, sledování jeho myšlenkových postupů a nalezení míst, v kterých potřebuje pomoc. Pokud je žáku poskytnuta pomoc v okamžiku, kdy si sám uvědomí, že ji potřebuje, je výuka efektivní.
- Volba vhodných diagnostických a klasifikačních nástrojů. Zkoušky testem s nabízenou odpovědí nejsou v mnoha případech vhodnou formou zjišťování vědomostí dyskalkulických žáků a studentů.

5 Základní kritéria, podle kterých můžeme usoudit, zda je žák dyskalkulik

- Existuje zřetelný rozpor mezi zjištěnou inteligencí a podávanými výkony v matematice.
- Úroveň rozumových schopností není v pásmu podprůměru.
- Porucha nemá příčinu v tělesné nemoci, nevznikla na základě sociálním nebo emocionálním.
- Žák má normální rodinné zázemí.
- Lze prokázat dysfunkci kognitivních center mozku.

Pokud lze u žáka identifikovat některé z těchto příznaků, provádí se odborné vyšetření v pedagogicko-psychologické poradně, která prostřednictvím důkladného odborného vyšetření poruchu učení diagnostikuje. Učitel matematiky pak zpracuje individuální vzdělávací program (IVP), podle kterého žák pracuje. IVP se zpracovává v součinnosti s poradnou, vedením školy, rodiči, případně i se žákem. V IVP se řeší, za jakých podmínek bude žák v matematice pracovat podle svých předpokladů. Nejde jen o úlevy, ale o účinnou péči, která řeší i budoucnost žáka. Dyskalkulie v žádném případě neopravňuje žáka k nečinnosti v matematice. V historii lze uvést mnoho příkladů osobností, které vynikly právě v matematice nebo fyzice či v technice, a přitom jako děti měly potíže, i dyskalkulického rázu. Je třeba mít na paměti, že neexistuje matematická slepota, že každý člověk si může najít postupy, kterým porozumí (s pomocí učitelů, spolužáků, rodičů, pracovníků poraden apod.), a může zvládat požadavky na matematickou úroveň znalostí potřebných v profesi, kterou dělá.

6 Závěr

Práce se žáky se specifickými poruchami učení vyžaduje od učitele matematiky velké nasazení. Provádí diagnostiku matematických vědomostí vzhledem k ročníku, který žák navštěvuje, a učiní rozhodnutí, jak nedostatky eliminovat a jaké kompenzační pomůcky používat, aby žák mohl pracovat na úrovni svých schopností. Musí se naučit komunikovat se žákem s poruchou učení, pochopit jeho problém, neustále žáka motivovat k další práci a neustále chválit i sebemenší úspěch. Zpracuje individuální vzdělávací plán a vhodná reedukační cvičení. Zváží vhodné využití ICT technologií tak, aby žáku byly přínosem. Volí vhodné způsoby hodnocení a klasifikace žáka s poruchou učení, aby pro něj byly motivující, ale zároveň aby si žák byl vědom svých limitů. Jsou očekávány i osobnostní vlastnosti učitele, zejména trpělivost, empatie. To vše a ještě mnoho jiného podle individuálních potřeb žáka zvládá vedle své běžné pedagogické činnosti. Odměnou je mu zpravidla jen každý maličký úspěch žáka. Rozhodnutí o volbě střední školy v současnosti záleží na žákovi a jeho rodičích a je na jejich odpovědnosti, zda volili správně školu vzhledem k matematickým předpokladům a volním vlastnostem jejich dítěte. Žádný učitel netouží po tom, aby jeho žáci nezvládali matematické učivo. Každého učitele uspokojí, když žáci učivu rozumějí, zvládají je a baví je.

Literatura

[1] R. Blažková, *Dyskalkulie 3. Vliv dyskalkulie na profesní zařazení jedinců v dospělosti*, Brno, MU, 2012.

[2] R. Blažková, *Training Teachers for Teaching Pupils with Leasing Disorders*, London, Lewisham College, 2005.

[3] S. Chinn, *The Trouble with Maths*, Abington, Routledge, 2012.

[4] L. Košč, *Vývinová dyskalkulia ako porucha matematických schopností v detskom veku*, Praha, SPN, 1972.

[5] J. Novák, *Dyskalkulie*, Havlíčkův Brod, Tobiáš, 2004.

[6] O. Zelinková, *Pedagogická diagnostika a individuální vzdělávací program*, Praha, Portál, 2001.

RNDr. Růžena Blažková, CSc.
Katedra matematiky Pdf MU
Poříčí 31
603 00 Brno
blazkova@ped.muni.cz

SBÍRKA APLIKAČNÍCH ÚLOH ZE STŘEDOŠKOLSKÉ MATEMATIKY

Jana Hromadová

1 Úvod

Každý učitel jistě v souvislosti s probíranou látkou mnohokrát slyšel otázku „K čemu nám to bude?“. Matematika se řadí mezi předměty, v nichž schopnost učitele motivovat žáky ke studiu hraje velmi důležitou roli. Jedna z možností, jak studenta vtáhnout do výuky, je ukázat využití probírané látky na skutečných životních situacích. To bylo cílem i právě vydané *Sbírky aplikačních úloh ze středoškolské matematiky* [1]. Sbírka nenásilnou formou ukazuje, že s matematikou se v životě potkáváme na každém kroku, ať již při pokládání nové podlahy, při rozhodování, zda si koupit auto s benzinovým či naftovým motorem, nebo třeba při detekci spamů v mailové korespondenci.

2 Představení sbírky

Sbírku připravil kolektiv autorů z Katedry didaktiky matematiky MFF UK v Praze (v abecedním pořadí): RNDr. Jana Hromadová, Ph.D., RNDr. Magdalena Hykšová, Ph.D., doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc., RNDr. Pavla Pavlíková, Ph.D., doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc., RNDr. Antonín Slavík, Ph.D. Na tvorbě publikace se aktivně podílel také RNDr. Ivan Saxl, DrSc. (zemřel 2009).

Sbírka pokrývá nejdůležitější partie ze středoškolské matematiky. Je rozdělena do následujících čtyř základních kapitol, které jsou dále členěny na podkapitoly:

- Základní poznatky
- Rovnice a nerovnice, funkce
- Geometrie
- Pravděpodobnost

Každá kapitola obsahuje několik podrobně řešených vzorových příkladů, za nimiž následují neřešená cvičení obdobného charakteru. Výsledky cvičení spolu s návody k řešení těžších cvičení jsou k dispozici v závěrečné části sbírky.

K řešení některých vzorových příkladů jsou kromě elementárního matematického aparátu zapotřebí ještě znalosti z dalších oborů, případně hlubší matematické znalosti. Takovéto příklady jsou doplněny krátkým úvodem do dané problematiky, případně i poučnými historickými poznámkami.

Některé řešené příklady obsahují kromě výpočtu a slovního vyhodnocení závěru i další praktické rady či poučení plynoucí z daného příkladu.

Snahou autorů bylo vyhnout se pseudoaplikačním úlohám, které zdánlivě vycházejí z praxe, přitom řeší problémy, které v reálném životě žák nikdy řešit nebude. Uveďme alespoň jednu ukázku takové úlohy:

Na dvoře pobíhají slepice a ovce. Sečteme-li všechny hlavy, dojdeme k číslu 22. Sečteme-li nohy, dostaneme číslo 58. Kolik je na dvoře ovcí?

Ukázky dalších pseudoaplikačních úloh naleznete např. v článku docenta Odvárka z minulého ročníku konference [2]. Takovéto pseudoaplikace mohou negativně ovlivnit vztah žáka k matematice. Žák získává pocit, že matematika je jen věda sama pro sebe, a nevidí její užitečnost a význam pro praxi. Správně vybrané aplikační úlohy mohou naopak posloužit jako velmi efektivní motivační nástroj, který vzbudí zájem studentů o danou problematiku. Pevně doufám, že příklady uvedené v naší sbírce učitele i studenty zaujmou a budou je dále inspirovat k vytváření vlastních zadání.

Pro ilustraci uveďme v následujícím textu několik řešených příkladů z představované sbírky. Další ukázky naleznete na webových stránkách Katedry didaktiky matematiky MFF UK [3].

3 Ukázky řešených příkladů

Předjíždění na dálnici

Na dálnici jel v pomalém jízdním pruhu kamion dlouhý 12 m rychlostí $v_0 = 80$ km/h. Když se k němu zezadu na vzdálenost 100 m přiblížil druhý kamion jedoucí rychlostí 90 km/h, vybočil tento druhý kamion do rychlého jízdního pruhu a pustil se do předjíždění. Když byl 100 m před předjížděným kamionem, vrátil se zpět do pomalého jízdního pruhu a pokračoval v jízdě. Pro zjednodušení předpokládejme, že oba řidiči měli nastavený tempomat, takže udržovali po celou dobu manévru konstantní rychlost.

a) Jak dlouho při celém předjíždění blokoval kamion rychlý pruh dálnice?
b) Odvoďte obecný vztah pro dobu předjíždění t, označíme-li rychlost předjíždějícího kamionu v. Sestrojte graf závislosti doby předjíždění t v sekundách na rychlosti v předjíždějícího kamionu pro 81 km/h $\leqq v \leqq$ 100 km/h.
c) Vypočtěte, jakou rychlostí by musel kamion předjíždět, aby rychlý pruh blokoval maximálně po dobu jedné minuty.

Řešení.

a) Během předjíždění musel druhý kamion ujet o (100+12+100) metrů více než kamion, který byl předjížděn. Druhý kamion se vzhledem k prvnímu pohyboval rychlostí o 10 km/h větší. Celý předjížděcí manévr mu proto trval dobu

$$t = \frac{(100 + 12 + 100) \cdot 0{,}001}{10}\ \text{h} = 0{,}021\,2\,\text{h},$$

tedy $t \doteq 76$ s.

Rychlý pruh dálnice byl blokován po dobu 76 s, tedy déle než jednu minutu. Nelze se proto divit, že na mnoha úsecích našich silnic je jízda kamionů v rychlém pruhu zakázána.

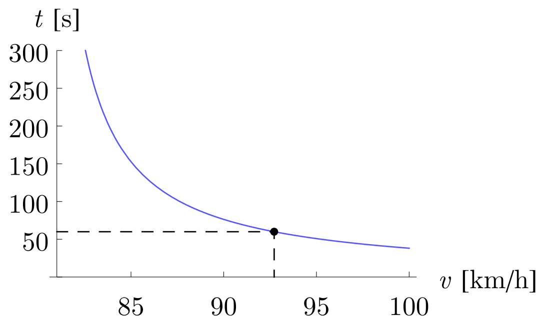
b) Pro čas t vyjádřený v hodinách lze odvodit vztah

$$t = \frac{(100 + 12 + 100) \cdot 0{,}001}{v - v_0} \text{ h} = \frac{0{,}212}{v - v_0} \text{ h},$$

tedy

$$t = \frac{0{,}212}{v - v_0} \cdot 3\,600 \text{ s} = \frac{763{,}2}{v - v_0} \text{ s},$$

kde v je rychlost předjíždějícího kamionu v km/h a $v_0 = 80$ km/h. Čas t je lineární lomenou funkcí rychlosti v. Pro 81 km/h $\leqq v \leqq$ 100 km/h dostaneme část větve hyperboly.



c) Označme x číselnou hodnotu hledané rychlosti. Řešíme proto nerovnici

$$\frac{763{,}2}{x - 80} \leqq 60.$$

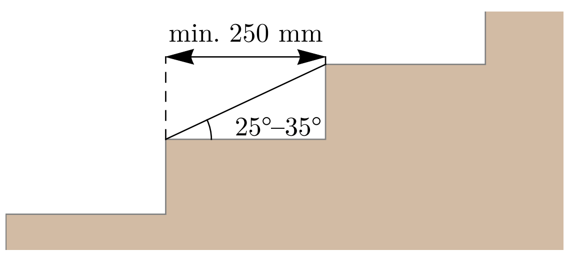
Vzhledem k tomu, že jmenovatel zlomku je kladný, získáme řešení

$$x \geqq 92{,}72.$$

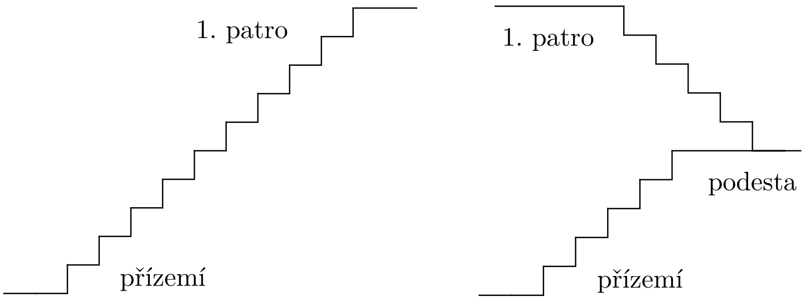
Kamion by musel předjíždět rychlostí alespoň 92,72 km/h.

Schodiště

Pan Novák staví dvoupatrový rodinný domek. Při stavbě schodiště je nutno brát v úvahu normu (ČSN 73 4130). Tato norma stanovuje minimální dovolenou hloubku schodu jako 250 mm, za optimální bývá považován sklon schodiště 25° až 35°.



Dle normy musí mít všechny schody stejnou výšku, jedno schodišťové rameno smí mít v rodinném domě maximálně 18 schodů, v opačném případě musí být rozděleno podestou do více ramen.

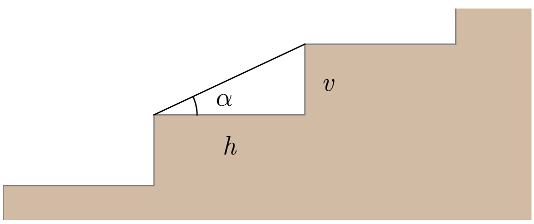


Výškový rozdíl jednotlivých podlaží domku je 3 m, pan Novák předpokládá, že podlaží budou spojena jednoramenným schodištěm.

a) V jakém rozmezí musí pan Novák zvolit výšku jednoho schodu, aby při hloubce 280 mm dosáhl optimálního sklonu?
b) Kolik schodů o jaké výšce bude zapotřebí?

Řešení.

a) Při zvolené hloubce schodu $h = 280$ mm můžeme výšku schodu v vypočítat podle vztahu $v = h \cdot \operatorname{tg} \alpha$.



Pro sklon schodu $\alpha = 25°$ dostáváme $v \doteq 131$ mm, pro sklon $\alpha = 35°$ je $v \doteq 196$ mm.
Výšku jednoho schodu musí pan Novák volit v rozmezí 131 mm až 196 mm.

b) Chce-li pan Novák napojit patra pouze jedním schodišťovým ramenem, může použít maximálně 18 schodů. Výšku jednoho schodu vypočítáme jako podíl výškového rozdílu pater (3 m) a zvoleného počtu schodů.

Počet schodů	18	17	16	15
Výška jednoho schodu (mm)	167	176	188	200

Pan Novák může zvolit tři varianty počtu schodů, a to 16, 17 a 18, neboť pro nižší počet schodů je sklon schodiště větší než 35°.

Z hlediska optimálního návrhu dispozice je výhodnější zvolit menší počet schodů, aby schodiště zabíralo co nejmenší užitnou plochu domu, z bezpečnostního hlediska je naopak výhodné zvolit co nejmenší výšku schodu.

Streptokoková infekce

Lékař má podezření, že příčinou potíží jeho pacienta, pana Veselého, je streptokoková infekce. V takovém případě by byla nutná léčba antibiotiky. Mohlo by se však také jednat o virózu. Pak by byla antibiotika zbytečná a přinesla by jen řadu nepříznivých důsledků. Na základě pozorovaných příznaků, které nejsou příliš přesvědčivé, lékař odhadne pravděpodobnost streptokokové infekce na 50 %. Pro upřesnění diagnózy panu Veselému provede výtěr z krku a do laboratoře pošle celkem pět stěrů. Test není dokonalý: má-li pacient streptokokovou infekci, bude výsledek pozitivní v 70 % případů, ve zbývajících 30 % případů bude negativní. U pacientů, kteří streptokokovou infekci nemají, je výsledek v 90 % případů negativní a v 10 % případů pozitivní. Výsledek laboratorních zkoušek je následující: *pozitivní*, *negativní*, *pozitivní*, *negativní*, *pozitivní*.

Jak na základě výsledků stěrů lékař původní odhad pravděpodobnosti streptokokové infekce přehodnotí?

Řešení.

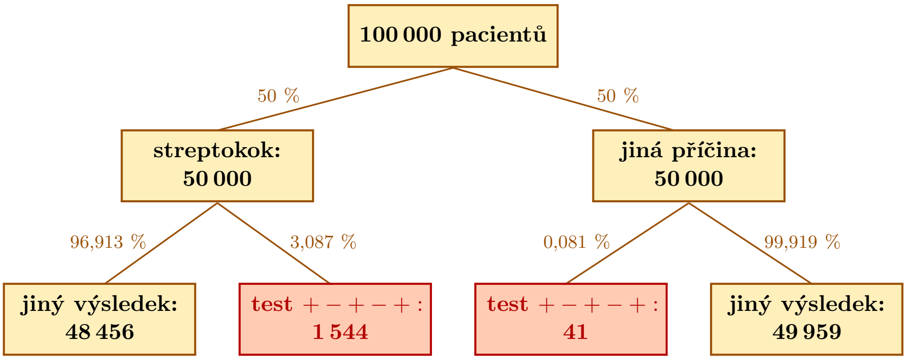
Kdyby určitý pacient trpěl streptokokovou infekcí, byla by pravděpodobnost uvedeného výsledku laboratorních zkoušek

$$P(+-+-+\,|\,\text{streptokok}) \doteq 0{,}7\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7 = 0{,}030\,87,\ \text{ tj. } 3{,}087\ \%.$$

Kdyby jeho potíže měly jinou příčinu, byla by pravděpodobnost uvedeného výsledku

$$P(+-+-+\,|\,\text{jiná infekce}) \doteq 0{,}1\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1 = 0{,}000\,81,\ \text{ tj. } 0{,}081\ \%.$$

Uvažujme například 100 000 pacientů s podobnými příznaky. Podle lékařova názoru by přibližně 50 000 z nich trpělo streptokokovou infekcí. Z toho by přibližně 1 544 pacientům vyšel test stejně jako panu Veselému a přibližně 48 456 pacientům by test vyšel jinak. U zbývajících 50 000 pacientů by byly potíže způsobeny jinou příčinou. Přibližně 41 z těchto osob by test vyšel stejně jako panu Veselému, ostatních 49 959 pacientů by mělo jiné výsledky – viz následující obrázek. Celkem by tedy uvedené výsledky testu vyšly přibližně 1 544 pacientům se streptokokem a 41 osobám s jinou příčinou.



Pravděpodobnost, že jsou potíže pana Veselého způsobeny streptokokem, je proto přibližně

$$P(\text{streptokok} \mid + - + - +) \doteq \frac{1\,544}{1\,585} \doteq 0{,}974\,1, \text{ tj. } 97{,}41\ \%.$$

Literatura

[1] J. Robová a kol., *Sbírka aplikačních úloh ze středoškolské matematiky*, Prometheus, Praha, 2014.

[2] O. Odvárko, *Aplikační úlohy ve výuce středoškolské matematiky.* In A. Slavík (ed.), *Matematika a reálný svět*, Matfyzpress, Praha, 2012, 18–23.

[3] *Sbírka aplikačních úloh ze středoškolské matematiky*, `http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/aplikace/`.

RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`jana.hromadova@mff.cuni.cz`

LOKALIZACE VLASTNÍCH ČÍSEL

Martina Štěpánová

V matematických seminářích na některých středních školách jsou vyučovány základy maticového počtu, zejména jeho využití při řešení soustav lineárních rovnic. Odtud je již jen krůček k problematice vlastních čísel matice. Díky jednoduché a půvabné větě lze v komplexní rovině pomocí snadných aritmetických operací určit oblast, ve které leží všechna vlastní čísla dané matice. Tato lokalizace vlastních čísel je jedinečnou možností, jak ve výuce pro nadané studenty propojit znalosti z lineární algebry, aritmetiky a geometrie. Pro studenty může být motivující, že na základě středoškolských znalostí rozšířených jen o několik nenáročných poznatků mohou zvládnout látku, která nebývá obsažena ani ve vysokoškolských kurzech lineární algebry.

Abychom nemuseli středoškolským studentům vykládat obecnou teorii determinantů a seznamovat je s metodami hledání kořenů polynomů vyšších stupňů než tři, omezíme se ve výuce (a rovněž u většiny příkladů v tomto příspěvku) na hledání vlastních čísel matic druhého a třetího řádu. Teoretické znalosti uvedeme naopak spíše v obecnější formě, tj. pro matice řádu n. Budeme uvažovat čtvercové matice, a to nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$. Symbolem E budeme značit jednotkovou matici příslušného řádu.

1 Vlastní číslo matice

Zadáme-li středoškolským studentům soustavu n lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$, z nichž má být alespoň jedno x_i nenulové, a kde na pravých stranách rovnic jsou λ-násobky jednotlivých neznámých (v první rovnici λ-násobek neznámé x_1, v druhé rovnici λ-násobek neznámé x_2 atd.), tj. soustavu typu

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda x_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \lambda x_2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \lambda x_n,
\end{gathered}$$

nejdříve zřejmě odečtou od obou stran i-té rovnice výraz λx_i, $i = 1, 2, \dots, n$. Získají tak homogenní soustavu rovnic

$$\begin{gathered}
(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0,\\
a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0,
\end{gathered}$$

jejíž matice $A - \lambda E$ přesně odpovídá pojmu, který ve vysokoškolských kurzech lineární algebry nazýváme *charakteristickou maticí* matice A. Není však nezbytně nutné tento pojem zavádět. Totéž platí pro *charakteristický polynom*, tj. determinant charakteristické matice. Abychom se vyhnuli definici obecného determinantu, postačí se omezit na matice druhého, resp. třetího řádu a uvést nenáročné křížové, resp. Sarrusovo pravidlo pro výpočet jejich determinantů. Konkrétně pro matici $A - \lambda E$ počítáme její determinant $|A - \lambda E|$ (kterým je polynom jedné neurčité λ) podle následujících předpisů:

- křížové pravidlo ($n = 2$)

$$\oplus \searrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \swarrow \ominus \qquad = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21}$$

- Sarrusovo pravidlo ($n = 3$)

$$\begin{matrix} \oplus \searrow \\ \oplus \searrow \\ \oplus \searrow \end{matrix} \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \swarrow \ominus \\ \swarrow \ominus \\ \swarrow \ominus \end{matrix} \qquad =$$

$$\begin{matrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ &\quad - a_{13}(a_{22} - \lambda)a_{31} - a_{23}a_{32}(a_{11} - \lambda) - (a_{33} - \lambda)a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

Předpokládáme-li, že studenti znají základní aritmetické operace s maticemi (sčítání/odčítání matic, násobení matice skalárem), potom jsme představením křížového a Sarrusova pravidla úspěšně překlenuli (alespoň pro matice druhého a třetího řádu) zdánlivou propast mezi středoškolskou a vysokoškolskou úrovní znalostí potřebných pro další výklad.[1] Navíc jsme nastínili roli koeficientu λ v soustavě lineárních rovnic. Nyní nám nic nebrání zavést pojem vlastního čísla matice a upevnit jeho pochopení výpočtem vlastních čísel konkrétních matic.

Definice 1. Kořen polynomu neurčité $\lambda \in \mathbb{C}$, který je determinantem matice $A - \lambda E$, nazýváme *vlastní číslo matice* A. *Násobností* vlastního čísla matice rozumíme jeho násobnost jako kořene zmíněného polynomu.

---

[1] Jistou, nicméně poměrně malou nadstavbu nad středoškolskými znalostmi budeme v tomto příspěvku potřebovat v důkazech některých vět a také ve čtvrté části, která je primárně určena vysokoškolským studentům a jejich učitelům. Pro zájemce o další studium matic obecného řádu doporučujeme např. učebnici Jindřicha Bečváře *Lineární algebra* [1].

Uvědomme si, že součet násobností všech vlastních čísel matice A je roven stupni polynomu $|A - \lambda E|$, a tedy i řádu matice A.

Příklad 1. Určete vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Nejprve zapíšeme matici $A - \lambda E$:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Pomocí křížového pravidla vypočítáme determinant $|A - \lambda E|$ matice $A - \lambda E$:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda) - 1(-1) = 9 - 6\lambda + \lambda^2 = (\lambda - 3)^2.$$

Matice A má tedy jedno dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_{1,2} = 3$.

Příklad 2. Nalezněte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & i-1 & 1-2i \\ 1 & -1 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Řešení: Postupně určíme, že

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & i-1-\lambda & 1-2i \\ 1 & -1 & 1-i-\lambda \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & i-1-\lambda & 1-2i \\ 1 & -1 & 1-i-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(i-1-\lambda)(1-i-\lambda) + (-1)(-1) + (1-2i)$$
$$-(-1)(i-1-\lambda) - (1-2i)(-1)(2-\lambda) - (1-i-\lambda) =$$
$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2.$$

Pokusíme se uhodnout alespoň jeden z kořenů polynomu.[2] Je jím jistě číslo $\lambda_1 = 2$. K nalezení zbývajících kořenů vydělíme polynom $-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2$ polynomem $\lambda - 2$ a z podílu $-\lambda^2 - 1$ vypočítáme další vlastní čísla $\lambda_2 = i$ a $\lambda_3 = -i$. Matice A má tedy tři různá vlastní čísla a každé z nich má násobnost jedna.

[2] Na střední škole musíme prozíravě volit právě takové matice A třetího řádu, aby byl alespoň jeden kořen polynomu $|A - \lambda E|$ odhadnutelný.

2 Lokalizace vlastních čísel

Z teoretických znalostí (a praktických výpočtů) mnozí z nás usoudí, že mezi vlastními čísly matice není žádný vztah, že mohou i u matic s „malými“ čísly nabývat relativně velkých hodnot apod. O to větší překvapení nás čeká, když zjistíme, že oblast, v níž leží všechna vlastní čísla, lze v komplexní rovině vymezit pomocí zcela triviálních aritmetických operací s prvky matice. Pojďme se nyní naučit tuto oblast určit.

Než vyslovíme hlavní tvrzení, tzv. *Geršgorinovu větu*, uveďme pro zájemce i jeho odvození z tzv. Lévyovy-Desplanquesovy věty. K tomu potřebujeme znát následující pojem.

Definice 2. Nechť A je komplexní čtvercová matice řádu n a nechť A_i značí součet absolutních hodnot prvků i-tého řádku neležících na hlavní diagonále matice, tj.

$$A_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Jestliže $|a_{ii}| > A_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$, potom matici A nazýváme *diagonálně dominantní.*

Mezi maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ -2 & 7 & 3 \\ -3 & 2 & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2i & 1 & 0 \\ 3+i & -2 & -1 \\ 1 & -i & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je diagonálně dominantní pouze matice A (pro její prvky platí $|9| > |1| + |2|$, $|7| > |-2| + |3|$, $|-8| > |-3| + |2|$). Matice B není diagonálně dominantní, neboť $|-2| \not> |3+i| + |-1|$, a matice C není diagonálně dominantní, protože $|7| \not> |3| + |4|$.

Věta 1 (Lévyova-Desplanquesova věta). *Determinant diagonálně dominantní matice je nenulový.*

Důkaz: Předpokládejme, že determinant diagonálně dominantní matice A je nulový. Potom homogenní soustava lineárních rovnic s maticí A má netriviální řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Mezi indexy $i = 1, 2, \ldots, n$ vyberme index r, pro který je $|x_r|$ maximální. Z r-té rovnice soustavy dostaneme vztah

$$|a_{rr}||x_r| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq r}}^{n} |a_{rk}||x_k| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq r}}^{n} |a_{rk}||x_r| = A_r|x_r|,$$

kde první nerovnost plyne z vlastností absolutní hodnoty součtu a součinu, druhá z maximality $|x_r|$. Odtud vyplývá nerovnost $|a_{rr}| \leq A_r$, což je ve sporu s předpokladem. ■

Uveďme pro zajímavost alespoň dvě modifikace věty pro speciální třídy matic. Pro *nerozložitelnou* (neboli *ireducibilní*) matici řádu n, tj. čtvercovou matici, kterou nelze simultánními permutacemi řádků a sloupců převést na tvar

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix},$$

kde O je nulová matice a A a C jsou čtvercové matice alespoň prvního řádu, můžeme pro nejvýše $n-1$ řádků připustit rovnost $|a_{ii}| = A_i$ a tvrzení Lévyova-Desplanquesova teorému stále platí. Rovnost $|a_{ii}| = A_i$ pro všechny řádky však ani pro nerozložitelnou matici uvažovat nemůžeme, jak se snadno přesvědčíme na následujícím protipříkladu:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Rovněž je známo, že pro tzv. *Minkowskiho matice*, tj. reálné čtvercové matice, pro které platí $a_{ii} > A_i$ (prvky na hlavní diagonále jsou tedy nutně kladná čísla) a $a_{ij} \leq 0$ pro $i \neq j$, můžeme zesílit závěr věty: determinant Minkowskiho matice je nejen nenulový, ale dokonce kladný.

Lévyovu-Desplanquesovu větu lze ekvivalentně formulovat následujícím způsobem: *Je-li determinant matice A nulový, potom matice A není diagonálně dominantní.* Tento výsledek lze aplikovat na determinant $|A - \lambda E|$, který je pro vlastní číslo λ matice A nulový, a musí tedy existovat alespoň jeden index i, pro který $|a_{ii} - \lambda| \leq A_i$. Z geometrické interpretace absolutní hodnoty získáme následující tvrzení:

Věta 2 (Geršgorinova věta). *Všechna vlastní čísla čtvercové matice $A = (a_{ij})$ řádu n leží v oblasti*

$$\Gamma(A) = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i\,,$$

kde Γ_i jsou kruhy v komplexní rovině o středu a_{ii} a poloměru r_i, který se rovná součtu absolutních hodnot prvků ležících v i-tém řádku matice A mimo hlavní diagonálu. Tyto oblasti se nazývají Geršgorinovy kruhy a jejich sjednocení Geršgorinova množina nebo Geršgorinova oblast.

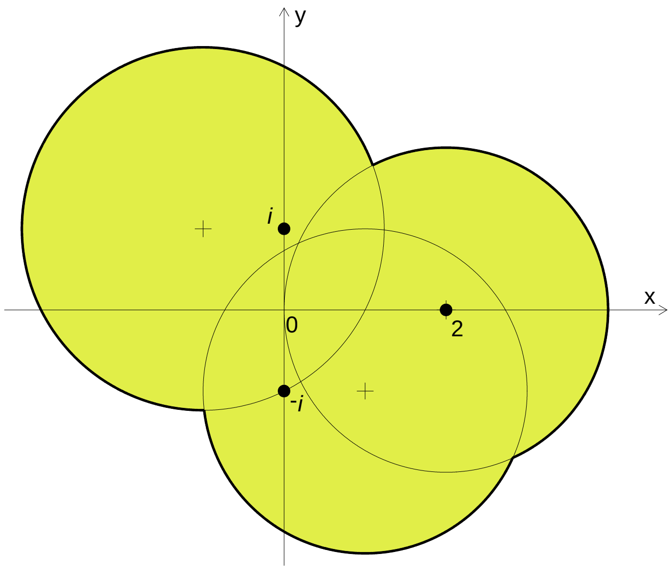
Ve větě jsme poloměry Geršgorinových kruhů na základě zvyklostí označili místo A_i symbolem r_i a budeme je tak značit i v dalším textu.

Ukažme vymezení oblasti obsahující všechna vlastní čísla matice na konkrétním příkladu.

Příklad 3. Určete Geršgorinovu množinu matice

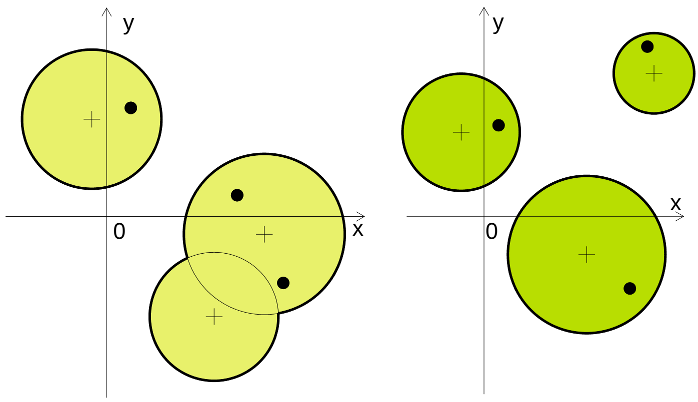
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & i-1 & 1-2i \\ 1 & -1 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Řešení: Geršgorinovy kruhy matice A mají po řadě středy $a_{11} = 2$, $a_{22} = i - 1$, $a_{33} = 1 - i$ a poloměry $r_1 = 2$, $r_2 = 1 + \sqrt{5}$, $r_3 = 2$. Sjednocení těchto kruhů, tj. příslušnou Geršgorinovu množinu, můžeme snadno zakreslit v komplexní rovině do souřadnicového systému. Na dalších obrázcích jsou použity souřadnicové systémy se stejnými jednotkami na obou osách, vlastní čísla matic jsou značena malými černými vyplněnými kroužky (vlastní čísla $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$ matice A jsme spočítali již v Příkladu 2).



Obr. 1: Geršgorinova množina obecné matice

Raději zdůrazněme, že v každém kruhu nemusí ležet právě jedno vlastní číslo. Existují dokonce matice, jejichž některé Geršgorinovy kruhy žádné vlastní číslo neobsahují. Souvislá komponenta Geršgorinovy množiny vytvořená právě z m kruhů však musí obsahovat právě m vlastních čísel, a tedy izolovaný Geršgorinův kruh musí obsahovat právě jedno vlastní číslo.



Obr. 2: Počet vlastních čísel v souvislé komponentě

Pro matici druhého řádu, jejíž Geršgorinovy kruhy se neredukují na bod, lze vyslovit dvě další tvrzení:

Věta 3. *Společný bod dvou Geršgorinových kruhů matice druhého řádu, který není jejich společným hraničním bodem, nemůže být vlastním číslem této matice.*

Důkaz: Uvažujme vlastní číslo λ matice $A = (a_{ij})$, které leží současně v obou kruzích, ale není jejich společným hraničním bodem. Pro číslo λ tedy předpokládáme současnou platnost vztahů $|a_{11} - \lambda| \leq |a_{12}|$ a $|a_{22} - \lambda| < |a_{21}|$ (nebo vztahů $|a_{11} - \lambda| < |a_{12}|$ a $|a_{22} - \lambda| \leq |a_{21}|$ – v tomto případě bychom postupovali zcela analogicky). Uvažujme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

$$(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0,$$
$$a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0.$$

Jelikož je λ vlastním číslem matice A, existuje k němu netriviální řešení uvedené soustavy. Označme řešení (x_1^*, x_2^*). Pro každou dvojicí čísel samozřejmě platí, že jsou jejich absolutní hodnoty buď sobě rovny, nebo je jedna větší než druhá. Proto také pro složky řešení platí jeden ze vztahů $|x_1^*| > |x_2^*|$, $|x_1^*| = |x_2^*|$ nebo $|x_1^*| < |x_2^*|$, z nichž je však každý ve sporu s předpokládanými nerovnostmi. ■

Věta 4. *Dvojnásobné vlastní číslo matice řádu dva může být společným hraničním bodem jejích Geršgorinových kruhů pouze v případě, že se kruhy dotýkají a mají stejný poloměr.*

Důkaz: Konkrétním příkladem matice druhého řádu, která má jedno dvojnásobné číslo λ (a není diagonální, neboť jinak by se její kruhy redukovaly na bod), je matice

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Z teorie podobnosti matic víme, že když pro čtvercové matice A a B téhož řádu platí $B = S^{-1}AS$, kde matice S je regulární, tj. její determinant je nenulový, a matice S a S^{-1} jsou navzájem inverzní, tj. $SS^{-1} = E = S^{-1}S$, potom matice A a B mají stejná vlastní čísla. K matici druhého řádu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

existuje inverzní matice právě tehdy, když $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Touto inverzní maticí je matice

$$\begin{pmatrix} a_{22}/D & -a_{12}/D \\ -a_{21}/D & a_{11}/D \end{pmatrix}.$$

Nejobecnější případ (nediagonální) matice řádu dva, jež má dvojnásobné vlastní číslo λ, lze proto psát ve tvaru

$$A = SBS^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22}/D & -a_{12}/D \\ -a_{21}/D & a_{11}/D \end{pmatrix},$$

tj. (po roznásobení a úpravě) ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} \lambda + a_{12}a_{22}/D & -a_{12}^2/D \\ a_{22}^2/D & \lambda - a_{12}a_{22}/D \end{pmatrix}.$$

Jestliže vlastní číslo λ leží uvnitř nebo na hranici kruhu odpovídajícího prvnímu řádku matice, platí $|\lambda - \lambda - a_{12}a_{22}/D| \leq |-a_{12}^2/D|$ a po úpravě $|a_{22}| \leq |a_{12}|$. Jestliže λ leží uvnitř nebo na hranici druhého kruhu, dostáváme zcela analogicky $|a_{22}| \geq |a_{12}|$. Proto $|a_{22}| = |a_{12}|$ a po dosazení do výše uvedené matice A vidíme, že oba poloměry kruhů jsou stejné (rovné číslu $a_{12}^2/|D|$) a kruhy se dotýkají (neboť jejich středy jsou středově souměrné dle bodu λ a vzdáleny $2a_{12}^2/|D|$, což je dvojnásobek jejich poloměru). ■

Větu 3 je vhodné aplikovat, jestliže se Geršgorinovy kruhy značně překrývají nebo dokonce jeden leží uvnitř druhého. Pro ilustraci obou vět vyřešíme několik konkrétních příkladů.

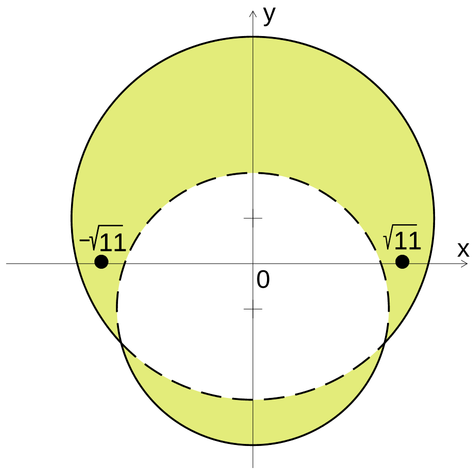
Příklad 4. Nalezněte vlastní čísla a Geršgorinovu množinu matice

$$A = \begin{pmatrix} i & 4 \\ 3 & -i \end{pmatrix}.$$

Řešení: Vyjádříme matici $A - \lambda E$ a vypočítáme její determinant

$$\begin{vmatrix} i-\lambda & 4 \\ 3 & -i-\lambda \end{vmatrix} = (i-\lambda)(-i-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 11 = (\lambda - \sqrt{11})(\lambda + \sqrt{11}).$$

Matice A má tedy dvě různá vlastní čísla $\lambda_1 = \sqrt{11}$ a $\lambda_2 = -\sqrt{11}$. Geršgorinovy kruhy matice A mají po řadě středy $a_{11} = i$, $a_{22} = -i$ a poloměry $r_1 = 4$, $r_2 = 3$. Oblast, v níž leží všechna vlastní čísla matice A, je na následujícím obrázku:



Obr. 3: Prolínání dvou Geršgorinových kruhů

Příklad 5. Určete vlastní čísla a Geršgorinovu množinu matice

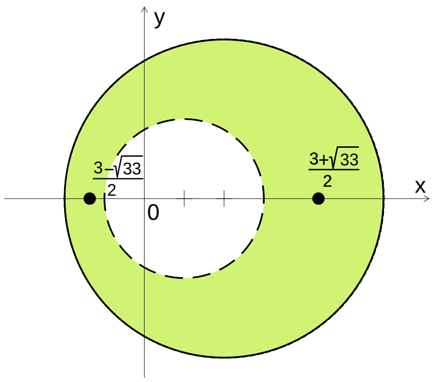
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Determinant matice $B - \lambda E$ je

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 3\lambda - 6 =$$

$$= \left(\lambda - \frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{3-\sqrt{33}}{2}\right).$$

Matice B má tedy dvě různá vlastní čísla $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{33}}{2}$ a $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{33}}{2}$. Geršgorinova množina matice B je sjednocením kruhů po řadě o středech $a_{11} = 2$, $a_{22} = 1$ a s poloměry $r_1 = 4$, $r_2 = 2$, oblast obsahující všechna vlastní čísla matice B proto vypadá takto:



Obr. 4: Jeden Geršgorinův kruh uvnitř druhého

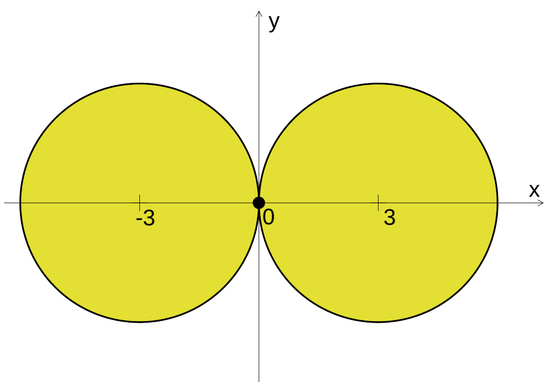
Příklad 6. Určete vlastní čísla a Geršgorinovu množinu matice

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Od zadané matice C odečteme λ-násobek jednotkové matice a vypočítáme determinant $|C - \lambda E|$ tohoto rozdílu:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 \\ 3 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-3-\lambda) + 9 = \lambda^2.$$

Matice C má jedno dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_{1,2} = 0$. Geršgorinovy kruhy matice C mají po řadě středy $a_{11} = 3$, $a_{22} = -3$ a poloměry $r_1 = 3$, $r_2 = 3$. Geršgorinova množina je níže zakreslenou oblastí komplexní roviny. Dvojnásobné vlastní číslo 0 je společným hraničním bodem dvou kruhů, které se v něm dotýkají a mají stejný poloměr.



Obr. 5: Dvojnásobné vlastní číslo na společné hranici kruhů

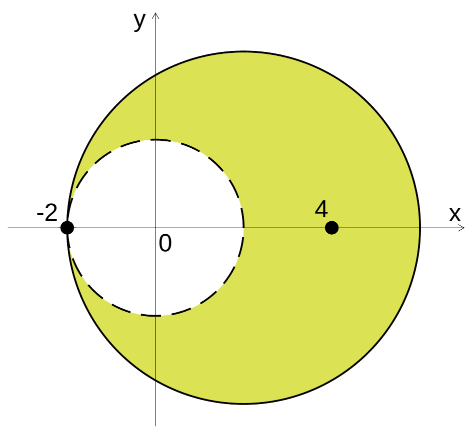
Příklad 7. Určete vlastní čísla a Geršgorinovu množinu matice

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Vyjádříme matici $D - \lambda E$ a vypočítáme její determinant

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda+2)(\lambda-4).$$

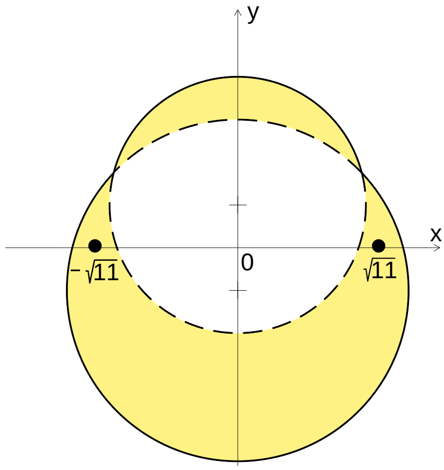
Matice D má dvě jednoduchá vlastní čísla $\lambda_1 = -2$ a $\lambda_2 = 4$. Geršgorinova množina je sjednocením kruhů, které mají po řadě středy $a_{11} = 2$, $a_{22} = 0$ a poloměry $r_1 = 4$, $r_2 = 2$. Vlastní číslo -2 je společným hraničním kruhem obou kruhů. Protože není dvojnásobné, nemusí mít kruhy tentýž poloměr.



Obr. 6: Jednoduché vlastní číslo na společné hranici kruhů

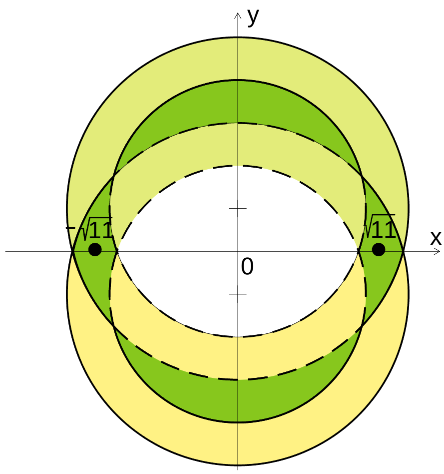
Prozatím jsme využívali Geršgorinovu větu formulovanou s pomocí součtů absolutních hodnot prvků v tomtéž řádku matice. Zcela analogické tvrzení však platí i pro její sloupce. Kombinací obou přístupů můžeme zmenšit oblast obsahující všechna vlastní čísla. Využijeme-li například nejprve „řádkovou verzi“ teorému a poté „sloupcovou“, získáme dvě Geršgorinovy oblasti příslušné k téže matici. Vlastní čísla musí proto ležet v průniku obou oblastí.

Například pro matici A z Příkladu 4 s využitím součtů „po sloupcích“ dostaneme následující Geršgorinovu oblast:



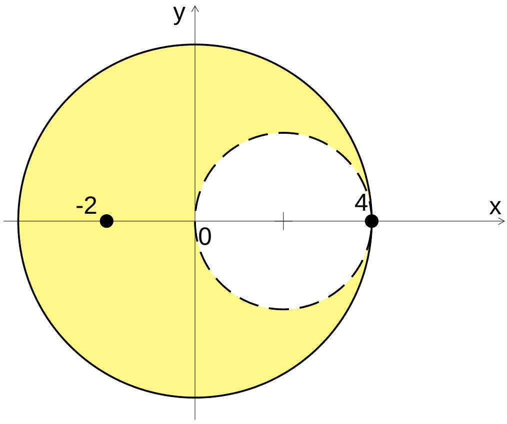
Obr. 7: Prolínání dvou kruhů matice A – „sloupcová verze“

Vlastní čísla tak musí ležet v průniku obou oblastí:



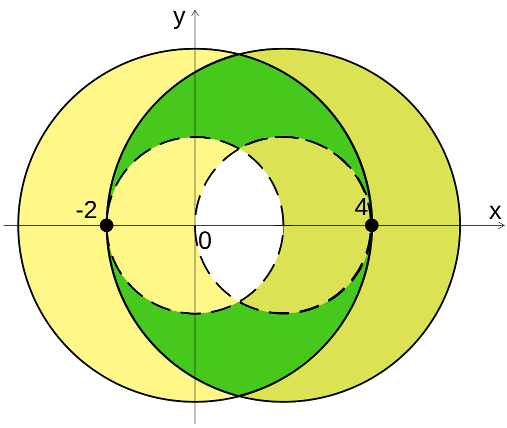
Obr. 8: Oblast obsahující všechna vlastní čísla matice A

Analogická vymezení oblastí, v nichž leží vlastní čísla matic B a D z Příkladů 5 a 7, jsou velmi podobná. Uveďme proto „transponovanou“ Geršgorinovu množinu pouze pro jednu z matic, např. pro matici D z Příkladu 7:



Obr. 9: Jeden kruh matice D uvnitř druhého – „sloupcová verze“

Vlastní čísla matice D nalezneme v průniku původní a „transponované“ oblasti:



Obr. 10: Oblast obsahující všechna vlastní čísla matice D

Pro matici C z Příkladu 6 obě Geršgorinovy oblasti splývají, jejich průnik tedy oblast výskytu vlastních čísel neupřesní.

3 Geršgorinovy množiny speciálních tříd matic

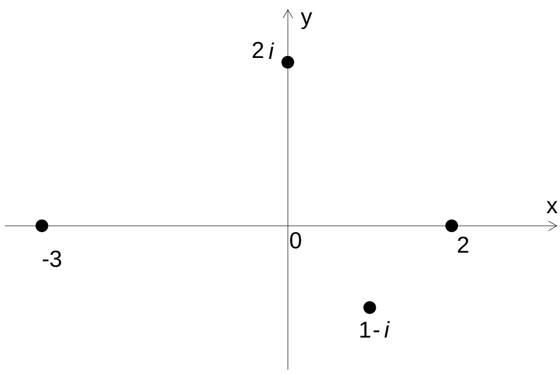
Pro některé třídy matic je určení Geršgorinových oblastí velmi jednoduché, u jiných tříd jsou kruhy jednotlivých matic shodné či stejnolehlé apod. Představme nyní alespoň některé speciální případy. V následujících příkladech vlastní čísla již počítat nebudeme, pouze je znázorníme v obrázcích. Výpočet jejich přesných hodnot necháváme na čtenáři.

Zcela triviální je situace u **diagonálních** matic. Jsou-li prvky matice mimo její hlavní diagonálu nulové, redukují se kruhy na body a vlastní čísla jsou přímo středy kruhů, tj. prvky na hlavní diagonále. Pro diagonální matice jsme takto schopni „vypočítat“ vlastní čísla matice obecného řádu n.

Příklad 8. Určete Geršgorinovu množinu diagonální matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:



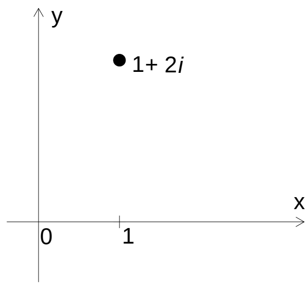
Obr. 11: Geršgorinova množina diagonální matice A

Speciálním případem diagonálních matic jsou matice **skalární**, v nichž je na hlavní diagonále tentýž prvek. Všechny kruhy mají tentýž střed a nulový poloměr, Geršgorinova množina degeneruje na jediný bod.

Příklad 9. Určete Geršgorinovu množinu skalární matice

$$B = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 & 0 \\ 0 & 1+2i & 0 \\ 0 & 0 & 1+2i \end{pmatrix}.$$

Řešení:



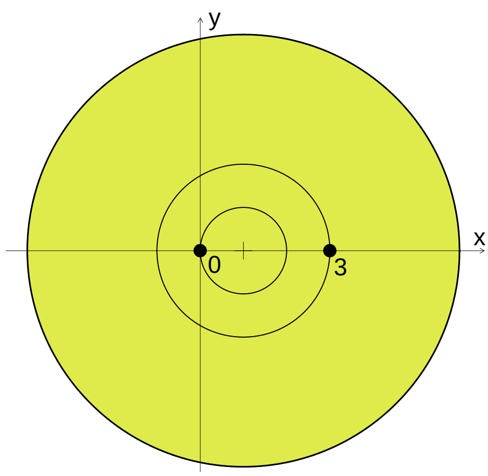
Obr. 12: Geršgorinova množina skalární matice B

Sjednocení navzájem soustředných Geršgorinových kruhů tvoří Geršgorinovu množinu u tzv. **Toeplitzových** matic, tj. matic, jejichž prvky na hlavní diagonále jsou stejné a na každé rovnoběžné linii jsou rovněž stejné. Středem všech kružnic je prvek opakující se na hlavní diagonále, hranicí Geršgorinovy množiny kruh s největším poloměrem.

Příklad 10. Určete Geršgorinovu množinu Toeplitzovy matice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:



Obr. 13: Geršgorinova množina Toeplitzovy matice C

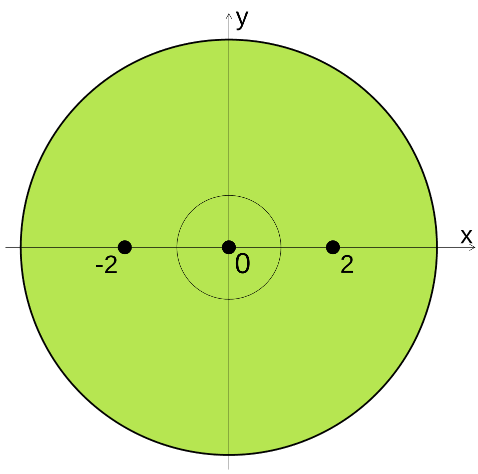
Geršgorinovy kruhy jsou soustředné i pro tzv. **Kacovy** matice. Kacovou maticí K_n rozumíme čtvercovou matici řádu $n+1$, jejíž prvky v první linii nad diagonálou jsou $1, 2, \dots, n$, v první linii pod diagonálou $n, n-1, \dots, 1$ a ostatní prvky jsou nuly, tj. matici tvaru

$$K_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 11. Určete Geršgorinovu množinu Kacovy matice

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

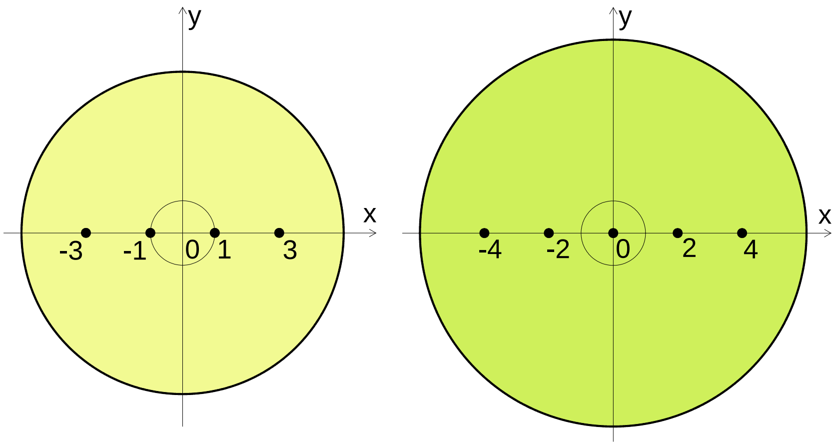
Řešení:



Obr. 14: Geršgorinova množina Kacovy matice K_2

Pro obecnou Kacovu matici K_n je známo, že její vlastní čísla jsou rovna $\pm n$, $\pm(n-2)$, $\dots$, přičemž posloupnost končí čísly ± 1, jestliže je n liché, resp. $\pm 2, 0$, jestliže je n sudé. Všech $n+1$ Geršgorinových kruhů Kacovy matice K_n se redukuje na dva soustředné kruhy se středem v počátku souřadnicového systému. První z nich vznikne splynutím dvou kruhů příslušných prvnímu a poslednímu řádku matice a jeho poloměr je vždy roven jedné, druhý vznikne splynutím kruhů příslušných všem zbývajícím řádkům matice a má poloměr, který je o dvě jednotky větší než největší vlastní číslo matice K_n (tj. o jedničku větší než řád matice K_n, tj. $n+2$). Například Geršgorinovy množiny Kacových matic K_3 a K_4 vypadají takto:

$$K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Obr. 15: Geršgorinovy množiny Kacových matic K_3 a K_4

4 Geršgorinova množina transformované matice

V této části nastíníme směr, kterým se můžeme v problematice Geršgorinových množin vydat se studenty na vysoké škole. Po absolvování vysokoškolského základního kurzu lineární algebry známe tvrzení[3], že když pro matice A a B téhož řádu existuje regulární matice S taková, že $B = S^{-1}AS$, kde S^{-1} značí matici inverzní k matici S (matice A a B jsou tzv. *podobné*), potom matice A a B mají stejná vlastní čísla. Geršgorinovy množiny podobných matic se však mohou lišit. Přechodů od dané matice k podobné matici můžeme využít více a vlastní čísla (stejná pro všechny podobné matice) musí ležet v každé z Geršgorinových množin nově vypočítaných matic, musí tedy náležet průniku všech těchto množin.

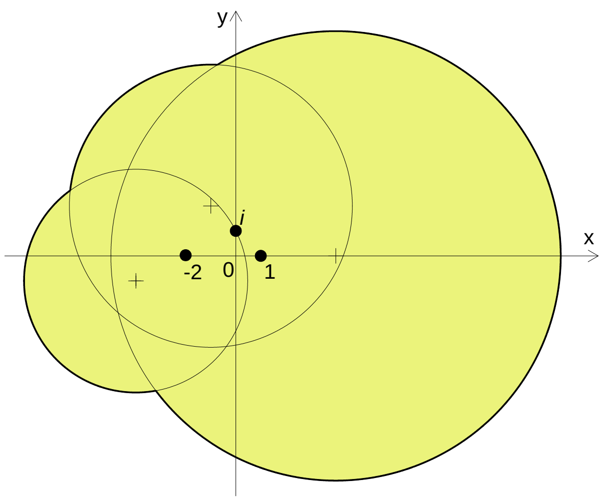
[3] Použili jsme jej již v důkazu Věty 4.

Při transformacích lze uvažovat speciální případ regulárních matic S. Budeme-li pracovat s maticemi S, které se liší od jednotkové matice pouze v jednom prvku na hlavní diagonále, kde mají vhodný nenulový prvek q, získáme transformace, které nemění prvky na diagonále původní matice a nemění tedy ani středy Geršgorinových kruhů. Mění se však poloměry všech kruhů (nový kruh příslušný i-tému řádku transformované matice bude mít poloměr rovný $1/q$ násobku poloměru původního kruhu příslušného k i-tému řádku původní matice).

Ukažme proměny kruhů při transformaci na matici

$$A = \begin{pmatrix} -4-i & -2-i & 2+i \\ -2+2i & -1+2i & 2-2i \\ -6 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Její vlastní čísla jsou $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ a $\lambda_3 = i$. Příslušné Geršgorinovy kruhy mají středy v bodech $a_{11} = -4-i$, $a_{22} = -1+2i$ a $a_{33} = 4$, poloměry kruhů jsou po řadě $r_1 = 2\sqrt{5}$, $r_2 = 4\sqrt{2}$ a $r_3 = 9$. Vlastní čísla matice A proto nalezneme v následující oblasti komplexní roviny:



Obr. 16: Geršgorinova množina matice A

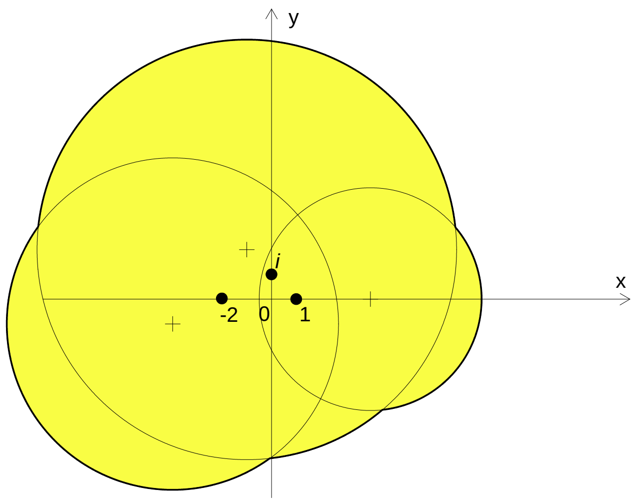
Uvažujme nejprve regulární matici

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{k níž je inverzní matice} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Vynásobíme matice S^{-1}, A a S, a tím získáme matici

$$B = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -4-i & -2-i & 4+2i \\ -2+2i & -1+2i & 4-4i \\ -3 & -3/2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Geršgorinovy kruhy příslušné matici B mají poloměry $r_1 = 3\sqrt{5}$, $r_2 = 6\sqrt{2}$ a $r_3 = 4,5$. Transformací $B = S^{-1}AS$ se tedy zmenší poloměr kruhu příslušného ke třetímu řádku matice A na polovinu a změní se současně i poloměry zbývajících dvou kruhů. Vznikne následující Geršgorinova množina:



Obr. 17: Geršgorinova množina matice $B = S^{-1}AS$

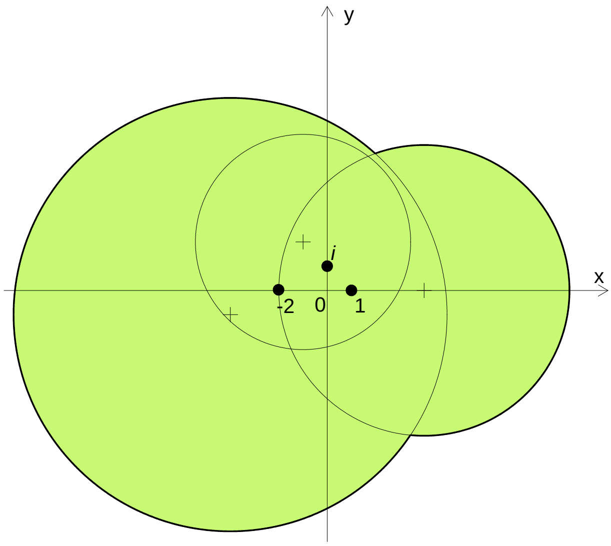
Proveďme dále transformaci $C = T^{-1}BT$, kde

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{a tedy} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nejprve vypočítáme matici

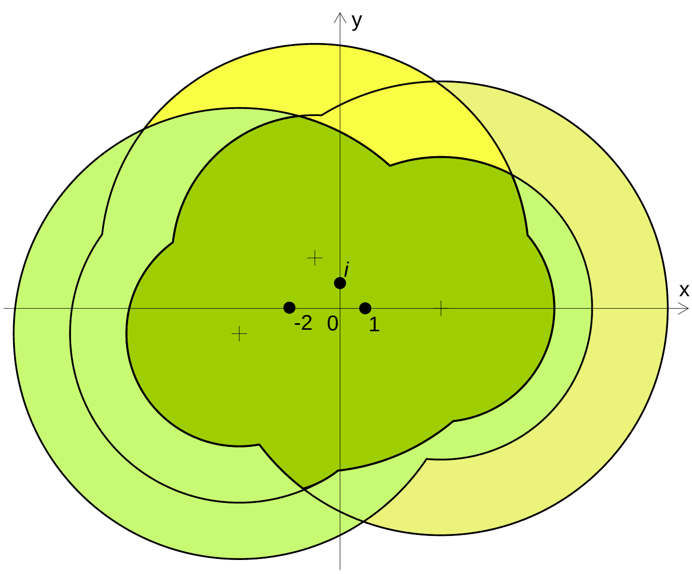
$$C = T^{-1}BT = \begin{pmatrix} -4-i & -4-2i & 4+2i \\ -1+i & -1+2i & 2-2i \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

a poloměry příslušných Geršgorinových kruhů: $r_1 = 4\sqrt{5}$, $r_2 = 3\sqrt{2}$ a $r_3 = 6$. Uvedenou transformací se poloměr kruhu příslušného k druhému řádku matice B zmenší na polovinu a opět se změní i poloměry zbývajících dvou kruhů. Nová Geršgorinova množina vypadá takto:



Obr. 18: Geršgorinova množina matice $C = T^{-1}BT = T^{-1}S^{-1}AST$

Vlastní čísla matice A (a tedy i matic B a C) leží v průniku tří uvedených množin:



Obr. 19: Průnik Geršgorinových množin matic A, B a C

Můžeme samozřejmě rezignovat na požadavek zachování středů kruhů a uvažovat zcela obecné podobné transformace. Tím se nám mnohdy podaří oblast komplexní roviny obsahující všechna vlastní čísla dané matic ještě více „zúžit“.

Na závěr části věnované vysokoškolským studentům se vraťme ještě k Lévyově-Desplanquesově větě. Nejenže je stěžejním teorémem pro odvození Geršgorinovy věty, ale značně urychlí řešení některých příkladů zadávaných v kurzech lineární algebry na vysokých školách. Pokud máme například vyřešit homogenní soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
9x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & - & x_5 & = & 0,\\
-2x_1 & + & 11x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & \sqrt{3}x_5 & = & 0,\\
 & & x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 0,\\
-\sqrt{5}x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 9x_4 & + & x_5 & = & 0,\\
3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & \sqrt{2}x_4 & - & 10x_5 & = & 0,
\end{array}$$

která na první pohled nevypadá „příliš pěkně“, začneme úlohu patrně počítat Gaussovou eliminační metodou. Pokud se však podíváme na soustavu pozorněji, všimneme si, že matice soustavy je diagonálně dominantní, a tedy regulární. Homogenní soustava má proto jediné řešení, a tím je triviální řešení (0, 0, 0, 0, 0). Soustava je tímto úsudkem vyřešena. V případě nehomogenní soustavy bychom takto alespoň zjistili, že má jediné řešení.

Obdobně lze „od pohledu“ vyřešit, zda například vektory $a = (1, 5, 0, -8)$, $b = (10, 1, -3, 2)$, $c = (2, -2, 7, 2)$ a $d = (0, 5, 0, -1)$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$. Pokud si představíme matici, jejíž řádky jsou tvořeny vektory b, d, c, a, tj. matici

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & -3 & 2\\ 0 & 5 & 0 & -1\\ 2 & -2 & 7 & 2\\ 1 & 5 & 0 & -8 \end{pmatrix},$$

usoudíme, že je diagonálně dominantní, tedy regulární, a proto jsou uvedené vektory lineárně nezávislé a tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$.

5 Cesty k problematice vlastních čísel

Vidíme, že i na střední škole se můžeme se studenty věnovat půvabné problematice vlastních čísel a jejich lokalizace v komplexní rovině. Musíme k ní však vhodně „prokličkovat“, abychom se vyhnuli řadě nových pojmů a studenty naopak od této disciplíny neodradili. Na vysokých školách na cestě k vlastním číslům poctivě zdoláme několik kopců např. v podobě *definice permutace*, která nás připraví na následný výstupu na vrchol nazvaný *definice obecného determinantu* a na dlouhou túru po hřebenu nazvaném *podobnost matic* s množstvím vyvýšenin typu *charakteristický polynom matice*, *spektrum matice* či *vlastní vektor matice*. Pokud vůbec ke *Geršgorinovým množinám* dorazíme, nemusíme být vyčerpáním schopni jednoduchost a eleganci Geršgorinovy věty ocenit. Na střední škole si však omezením na matice druhého a třetího řádu, představením křížového a Sarrusova pravidla, jednoduchou definicí vlastního čísla a uvedením Geršgorinovy věty přichystáme příjemný výlet (jdeme-li se schopnými turisty), během něhož si zopakujeme počítání s komplexními čísly, vyřešíme několik rovnic, uvědomíme si geometrickou interpretaci absolutní hodnoty čísla, procvičíme sjednocení a průnik množin a výsledky naší snahy můžeme graficky zaznamenat nenáročnými obrázky.

6 Geršgorinovy množiny – pouhé hraní?

Znázorňování Geršgorinových kruhů však není pouhým zábavným „malováním dle matematických pravidel". Má i své využití při řešení důležitých problémů. V některých praktických úlohách není nutné počítat vlastní čísla matic přesně, postačí vymezení oblasti, v níž všechna vlastní čísla leží.

Geršgorinovy množiny vhodně využila například významná algebraička Olga Taussky-Todd (1906–1995), když během druhé světové války pracovala v Anglii na Ministerstvu leteckého průmyslu ve skupině zvané *flutter group*, kterou vedl Robert Alexander Frazer (1891–1959). Použila je při výzkumu aerodynamických sil způsobujících vibrace trupu nadzvukových letounů, jež se při jisté rychlosti letadla stávají nestabilními a vedou k tzv. jevu *flutter*. Tato rychlost, nazývaná *flutter speed*, je jednou z podstatných charakteristik, která musí být známa ještě před konstrukcí letounu, neboť jev *flutter* může vést až ke zřícení letadla. Příkladem takové události může být katastrofa při letu stroje *Lockheed L-188 Electra* z Houstonu do Texasu dne 29. září 1959.[4] Při studiu jevu *flutter* ve zmíněné pracovní skupině bylo nutno vyřešit diferenciální rovnici, což vedlo k hledání vlastních čísel příslušné matice. Výpočty však byly velmi zdlouhavé, proto Olga Taussky-Todd aplikovala poznatky o Geršgorinových kruzích, o nichž věděla již od svých studií, k získání oblasti, v níž se všechna vlastní čísla nacházejí. Tyto informace stačily k vyřešení problému.

Olga Taussky-Todd byla první, kdo poprvé uveřejnil jasný a stručný důkaz Geršgorinovy věty. Stalo se tak v článku *A recurring theorem on determinants* [3] z roku 1949. A byla to právě ona, kdo tuto problematiku zpopularizoval v celosvětové matematické komunitě. Zájem o Geršgorinovy kruhy neutichá ani ve 3. tisíciletí, roku 2004 o nich Richard S. Varga publikoval monografii *Geršgorin and His Circles* [4].

Na závěr ještě poznamenejme, že název věty odkazuje na Semjona Aranoviče Geršgorina (1901–1933), který tento výsledek zveřejnil již roku 1931 v práci *Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix* [5]. Jeho tvrzení však nebylo zcela v pořádku.

[4] O problematice jevu *flutter* se můžeme dozvědět více z poměrně velkého množství článků a videí dostupných na internetu. Z knižní literatury jmenujme knihu *Elementary Matrices and Some Applications to Dynamic and Differential Equations* [2] z roku 1938, jejímž spoluautorem je zmíněný R. A. Frazer. V roce 1958 byla přeložena do češtiny.

Literatura

[1] J. Bečvář, *Lineární algebra*, Matfyzpress, Praha, 2000, 2. vydání: 2002, 3. vydání: 2005, 4. vydání: 2010.

[2] R. A. Frazer, W. J. Duncan, A. R. Collar, *Elementary Matrices and Some Applications to Dynamic and Differential Equations*, Macmillan, London, 1938; český překlad (J. Hudec, J. Schmidtmayer, R. Novotný): *Základy maticového počtu. Jeho aplikace v dynamice a v diferenciálních rovnicích*, SNTL, Praha, 1958.

[3] O. Taussky-Todd, *A recurring theorem on determinants*, The American Mathematical Monthly 56 (1949), 672–676.

[4] R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004.

[5] S. Gerschgorin, *Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix*, Izvestija Akademii nauk SSSR 7 (1931), 749–754.

RNDr. Martina Štěpánová, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`stepanov@karlin.mff.cuni.cz`

NÁHODA KOLEM NÁS

Jakub Staněk

1 Úvod

Spousta jevů kolem nás má náhodný charakter, i když si to možná někteří z nás vůbec neuvědomují. Jaké bude zítra počasí, jak dlouho budeme cestou do práce čekat na autobus, zda potkáme v příštím týdnu spolužáka ze základní školy či zda budou mít ještě v pekárně náš oblíbený chléb, to jsou jen příklady jevů, které v sobě nesou prvky náhody.

Proto je teorie pravděpodobnosti živý obor, který má velkou řadu praktických aplikací. Na některé situace nám stačí použít jednoduché výpočty, které se vyučují na základní nebo střední škole (např. různé společenské hry), jiné případy (např. předpovědi počasí nebo vývoje cen na finančních trzích) už vyžadují práci se složitějšími modely.

V tomto článku se budeme okrajově zabývat dvěma tématy, na jejichž zvládnutí nám bude stačí středoškolská pravděpodobnost. V první části se budeme zabývat teorií rekordů, jelikož nejrůznější rekordy jsou společností velmi sledovány, avšak pravděpodobnostní základ rekordů už tak známý není. Ve druhé části se podíváme na hru poker, jelikož je to hra, jejíž obliba poslední dobou stoupá, a navíc úlohy o hazardních hrách lze označit za kolébku pravděpodobnosti.

2 Rekordy

Lidé jsou odpradávna fascinováni různými rekordy. Třeba záznamy o extrémních srážkách či teplotách lze nalézt již ve starých kronikách. V moderní době se však oblast, ve které se rekordy sledují a zaznamenávají, velmi rozšířila, a tak lze v současnosti najít záznamy o rekordech z téměř každé lidské činnosti. Kromě rekordů, které vznikají poměrně přirozeně, jako např. sportovní rekordy či rekordy v počasí, lze nalézt i řadu pokusů o rekordy, které působí docela kuriózně, např. soutěže v pojídání párků v rohlíku či sledování nejdelších nehtů na rukou. Na těchto příkladech je lidská posedlost rekordy vidět snad ještě výrazněji.

Podívejme se nyní na rekordy z matematického hlediska. Tato část článku přímo vychází z knihy Anděl (2000), kapitoly IV. Rekordy, ve které lze najít detaily k následujícím řádkům.

Nejprve si položme otázku: Kdy je nějaká hodnota rekordem? Odpověď je poměrně přirozená: Uvažujeme-li posloupnost $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reálných čísel, pak k-tý člen posloupnosti x_k (či k-tá hodnota) je rekordem, pokud

$$x_k > \max_{i=1,\ldots,k-1} x_i, \qquad \text{resp. } x_k < \min_{i=1,\ldots,k-1} x_i,$$

tedy je-li největší, resp. nejmenší z prvních k hodnot. Povšimněme si, že první hodnota je vždy rekordem.

Nyní předpokládejme, že hodnoty x_k jsou výsledkem nějakého náhodného pokusu či náhodného děje (lze je popsat pomocí náhodných veličin X_k, viz např. Anděl (2000)). Pak vyvstávají otázky typu:

- Jaká je pravděpodobnost p_k, že k-tá hodnota x_k bude rekordem?
- Kolik rekordů zaznamenáme, máme-li n pozorování?
- Dá se z počtu rekordů usuzovat, zda jsou hodnoty x_i realizací téhož pokusu či děje, neboli odborněji řečeno, zda je rozdělení náhodných veličin X_i, $i = 1, \ldots, n$ stejné?

Abychom mohli na první dvě otázky odpovědět bez použití složitějšího matematického aparátu, budeme předpokládat, že X_i jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny, jinými slovy x_i jsou realizacemi stejného náhodného pokusu či děje a žádná hodnota x_k není nijak ovlivněna hodnotami x_i pro $i \neq k$. Pak k-tá hodnota bude rekordem právě tehdy, když je největší (nejmenší) z prvních k hodnot, a jelikož největší (nejmenší) hodnota z prvních k hodnot může být na k místech a každá z těchto variant má stejnou pravděpodobnost, pak je pravděpodobnost, že je k-tá hodnota rekordem,

$$p_k = \frac{1}{k}.$$

Označme $y_k = 1$, je-li x_k rekordem, a $y_k = 0$ v opačném případě. Pak počet rekordů v posloupnosti $\{x_i\}_{i=1}^n$ je $\sum_{i=1}^n y_i$. Tedy střední (průměrný) počet rekordů je roven

$$\sum_{i=1}^{n} [1 \cdot P(y_i = 1) + 0 \cdot P(y_i = 0)] = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot P(y_i = 1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i},$$

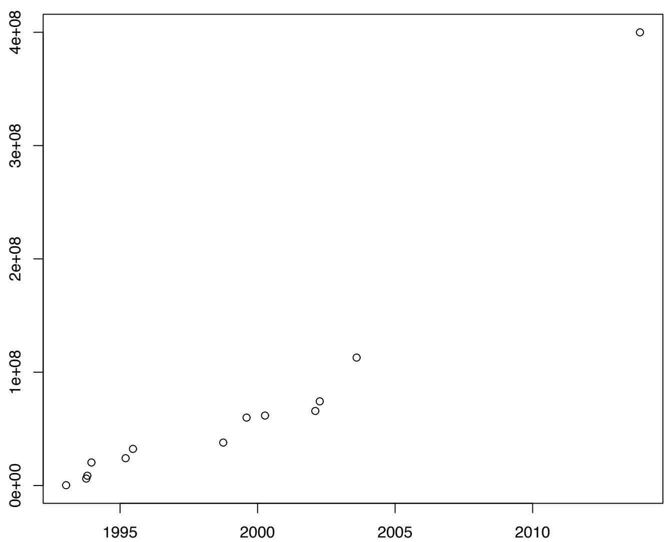
kde $P(y_i = 1)$ značí pravděpodobnost, že $y_i = 1$, tedy že i-tá hodnota je rekordem.

V následující tabulce jsou uvedené počty pokusů n, které průměrně potřebujeme k tomu, abychom dosáhli N rekordů:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	1	4	11	31	83	227	616	1674	4550	12 367

Z tabulky je vidět, jak rychle počet potřebných pokusů roste, přesto ale pro každé zvolené přirozené N existuje $n \in \mathbb{N}$, takové, že střední počet rekordů při n pokusech je větší než N. Toto plyne přímo z faktu, že harmonická řada $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ má nekonečný součet. Tedy zaznamenáváme-li například každý rok svého života maximální roční naměrenou teplotu v místě svého rodiště, pak zaznamenáme v průměru dva rekordy, než nastoupíme do základní školy, další rekord do konce povinné školní docházky, ale už jen jeden nebo dva další rekordy do konce našeho života. V případě, že se počet rekordů od vypočítané střední hodnoty podstatně liší, je třeba se zamyslet, zda jsou splněny předpoklady nezávislosti pokusů a zda se v jednotlivých pozorováních jedná o realizaci stejného pokusu. Tedy v případě počasí větší počet teplotních rekordů v jistém smyslu podporuje teorii postupného oteplování (i když ne nutně globálního).

Pojďme se nyní podívat na rekordní výhry v naší nejznámější číselné loterii Sportka. V následujícím grafu jsou uvedeny výše rekordních výher od 17. 1. 1993 do současnosti. Poznamenejme, že každý rok je provedeno přibližně sto tahů této loterijní hry, jen v první části sledovaného období (do dubna 1995, kdy probíhalo slosování jen jednou týdně) byl počet tahů v roce kolem padesáti. Podíváme-li se na data, zjistíme, že do roku 1995 proběhlo asi 100 tahů Sportky, tudíž bychom očekávali během této doby pět rekordů, šestý rekord bychom pak očekávali do konce roku 1995 a další do konce tisíciletí. V následující dekádě už by pak byl očekáván jen jeden rekord. Ačkoliv v prvním úseku rozložení rekordů poměrně dobře odpovídá našemu očekávání, pět rekordů v novém tisíciletí už je nad očekávání a stojí za to se zamyslet, zda jsou u jednotlivých tahů splněny podmínky nezávislosti a stejného rozdělení. Podíváme-li se do pravidel a historie Sportky, zjistíme, že v roce 1993 byl zaveden jackpot neboli kumulativní výhra, která se přelévá do následujícího slosování, pokud nepadla výhra v prvním pořadí. A právě zavedení jackpotu nám zruší nezávislost mezi jednotlivými výhrami. Navíc se ve sledovaném období měnila pravidla na rozdělování výher, takže jednotlivé tahy nemají ani stejné rozdělení. V roce 1998 byla zavedena mimořádná prémie a došlo k úpravě ceny sázky a přerozdělení výher, které umožnovalo generovat vyšší jackpoty než v minulosti. Další změny pak byly provedeny v roce 2003 a 2004 a následně v roce 2010, kdy byl zaveden superjackpot. Právě uvedené změny vysvětlují nesoulad mezi očekávaným vývojem počtu rekordů a skutečností.



Snad ještě výrazněji je vývoj rekordů vidět ve sportu. Asi nejsledovanější atletická disciplína – běh mužů na 100 m – zaznamenala běham třiceti letních olympiád 10 rekordů[1]. Ačkoliv i při zachování nezávislosti a stejného rozdělení pokusů lze takového výsledku dosáhnout, pravděpodobnost tohoto výsledku by byla tak malá, že je třeba uvažovat o jiném vysvětlení tohoto jevu. V tomto případě se nabízí jako vysvětlení fakt, ze výkonost vrcholových atletů se stále zvyšuje.

Více informací o teorii rekordů, například jaká je pravděpodobnost k rekordů či rozdělení doby čekání na další rekord, lze nalézt v knize Anděl (2000).

3 Poker

Poslední dobou u nás velmi stoupá popularita hry poker, a to konkrétně její varianty Texas Hold'em. Ačkoliv náhoda rozhoduje o výhře v této hře jen částečně a významnou roli hraje um hráčů rozpoznat, kdy mají karty složit a kdy pokračovat ve hře (což vede ke sporům, zda zařadit tuto hru mezi hry hazardní či nikoliv), je vliv náhody u této hry nepopiratelný. Pojďme se tedy na hru poker podívat z pohledu pravděpodobnosti.

Hra poker se hraje zpravidla s francouzskými kartami (52 listů – kříže, káry, srdce a piky). Cílem hry je vybudovat jednu z mnoha herních kombinací, které rozhodují o ztrátě či zisku. Výherní kombinace jsou následující (seřazené od nejnižší po nejvyšší výherní kombinaci):

- *High card* (karta nejvyšší hodnoty)
- *One pair* (dvojice karet stejné hodnoty)
- *Two pairs* (dva páry karet stejných hodnot)
- *Three of a kind* (trojice karet stejné hodnoty)
- *Straight* (pět karet v řadě v různých barvách)
- *Flush* (pět karet stejné barvy)
- *Full house* (dvojice a trojice karet stejných hodnot)
- *Poker* (čtveřice karet stejné hodnoty)
- *Straight flush* (čistá postupka – pět karet v řadě ve stejné barvě kromě postupky 10, J, Q, K, A)
- *Royal flush* (královská postupka – 10, J, Q, K, A v jedné barvě)

Jsou však tyto výherní kombinace seřazené postupně i podle pravděpodobnosti jejich padnutí? Jelikož je počet všech možností, jaké karty můžeme dostat, roven $\binom{52}{5}$ a jelikož pravděpodobnost jednotlivých kombinací počítáme pomocí klasické pravděpodobnosti, tj. počet příznivých karetních kombinací děleno počtem všech možných karetních kombinací (což je právě $\binom{52}{5}$), je pro nás podstatný jen počet různých karetních kombinací, které nám dávají sledovanou výherní kombinaci.

- *Royal flush.* Jelikož máme jen čtyři různé barvy karet a hodnoty karet jsou již předem určeny (10, J, Q, K, A), máme pouze 4 možnosti této kombinace.

[1] `http://www.timetoast.com/timelines/mens-100m-sprint-olympic-record-evolution`

- *Straight flush.* Postupka může začínat kartami A, 2, 3, ..., 9 (kartou 10 začíná *Royal flush*) a opět máme čtyři možnosti barev, proto máme $9 \cdot 4 = 36$ možností.
- *Poker.* Máme 13 možností (2, 3, ..., K, A) volby čtyř karet stejné hodnoty, poslední kartu volíme libovolně ze zbývajících 48 karet, tedy dostaneme $13 \cdot 48 = 624$ možností.
- *Full house.* Máme 13 možností hodnot karet pro trojici a zbývajích 12 možností pro volbu hodnot páru karet, tři karty určené hodnoty lze vybrat $\binom{4}{3}$ způsoby, dvě karty určené hodnoty $\binom{4}{2}$ způsoby, tedy dostaneme $13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} = 3744$ možností.
- *Flush.* Barvu lze vybrat čtyřmi způsoby a pět karet jedné barvy $\binom{13}{5}$ způsoby. Od tohoto počtu však musíme odečíst všechny čisté postupky (včetně královské postupky), jelikož to jsou vyšší výherní kombinace. Tedy počet možností je $4 \cdot \binom{13}{5} - 4 \cdot 10 = 5108$.
- *Straight.* Počátek postupky lze vybrat 10 způsoby (A, 2, ..., 10) a pro každou kartu v postupce máme čtyři možnosti volby barvy, musíme ale odečíst všechny čisté postupky. Počet možností je tedy $10 \cdot 4^5 - 10 \cdot 4 = 10\,200$.
- *Three of a kind.* Máme 13 možností hodnot karet pro trojici, trojici karet dané hodnoty lze vybrat $\binom{4}{3}$ způsoby a poslední dvě karty lze vybrat $\binom{48}{2}$ způsoby, je však třeba odečíst všechny kombinace *Full house.* Dostaneme tedy $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{48}{2} - 3744 = 54\,912$ možností.
- *Two pairs.* Hodnoty pro dva páry lze vybrat $\binom{13}{2}$ způsoby, dvě karty dané hodnoty $\binom{4}{2}$ způsoby a poslední kartu $52 - 8 = 44$ způsoby, proto je výsledný počet možností $\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot 44 = 123\,552$.
- *One pair.* Hodnotu pro pár lze vybrat 13 způsoby, hodnoty dalších tří karet $\binom{12}{3}$ způsoby, pár stejné barvy vybereme $\binom{4}{2}$ způsoby a pro další tři karty máme vždy čtyři možnosti volby barvy. Možností je tedy $13 \cdot \binom{12}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4^3 = 1\,098\,240$.
- *High card.* Máme $\binom{13}{5}$ možností, jak vybrat pět různých hodnot pěti karet a pro každou kartu čtyři možnosti volby barvy. Je ale třeba odečíst všechny postupky a všechny kombinace jedné barvy, tj. všechny možnosti *Royal flush*, *Straight flush*, *Flush* a *Straight.* Dostaneme tedy $\binom{13}{5} \cdot 4^5 - 4 - 36 - 5108 - 10\,200 = 1\,302\,540$ možností.

Výherní kombinace jsou tedy skutečně seřazeny podle pravděpodobnosti jejich získání. Otázka je, zda by mělo být pořadí výherních kombinací stejné v případě, že bychom se rozhodli hrát poker s mariášovými kartami. Stejným způsobem výpočtu, jaký jsme uvedli výše, dostaneme následují počty variant u jednotlivých výherních kombinací:

- *Royal flush* – 4 možnosti
- *Straight flush* – 12 možností
- *Poker* – 224 možností
- *Full house* – 1344 možností
- *Flush* – 208 možností

- *Straight* – 4080 možností
- *Three of a kind* – 10 752 možností
- *Two pairs* – 24 192 možností
- *One pair* – 107 520 možností
- *High card* – 53 040 možností

Vidíme, že oproti hře s francouzskými kartami došlo k přeřazení variant ve smyslu počtu kombinací, a tedy i ve smyslu pravděpodobnosti získání těchto kombinací. Nové řazení výherních variant (od nejvyšší) by tedy bylo *Royal flush*, *Straight flush*, *Flush*, *Poker*, *Full house*, *Straight*, *Three of a kind*, *Two pairs*, *High card* a *One pair*.

Literatura

[1] J. Anděl, *Matematika náhody*, Matfyzpress, Praha, 2000.

[2] http://www.sazka.cz

RNDr. Jakub Staněk, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
stanekj@karlin.mff.cuni.cz

GEOMETRICKÉ PROJEKCE S VYUŽITÍM 3D POČÍTAČOVÉHO MODELOVÁNÍ

Petra Surynková, Yulianna Tolkunova

Článek pojednává o realizovaných metodách inovace výuky deskriptivní geometrie na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Základní ideou modernizace výuky této klasické disciplíny je použití počítačového modelování a rozšíření deskriptivní geometrie o poznatky z počítačové grafiky a počítačové geometrie. Využití počítačového modelování předvedeme na příkladech typických úloh z deskriptivní geometrie, kterými jsou rovnoběžné a středové projekce. Zde se speciálně zaměříme na projekce ploch užívaných v geometrii a inženýrské praxi. V rámci zlepšování výuky deskriptivní geometrie neustále rozšiřujeme elektronické sbírky úloh a připravujeme nové studijní materiály. Do práce s počítačovými programy se v rámci svých bakalářských a diplomových prací úspěšně zapojují i naši studenti.

1 Úvod a motivace

Deskriptivní geometrie, jedna z klasických disciplín matematické vědy, se zabývá reprezentací trojrozměrných objektů pomocí dvojrozměrného obrazu. Typickou úlohou, kterou deskriptivní geometrie řeší, je projekce trojrozměrného objektu na rovinu a zpětná rekonstrukce trojrozměrného objektu z tohoto obrazu. Abychom uměli s projekcí správně pracovat, je nutné porozumět geometrickým principům, vlastnostem geometrických objektů v rovině i v prostoru a vztahům mezi nimi. V tomto širším pohledu se tedy deskriptivní geometrie zabývá také speciálními technicky významnými křivkami a plochami.

Mohlo by se zdát, že s nástupem moderních počítačových programů jsou metody deskriptivní geometrie přežitkem. V dnešní době je ve výrobních procesech, kde dříve měla deskriptivní geometrie své nenahraditelné místo, samozřejmostí práce s pokročilými grafickými softwary. Deskriptivní geometrie, jejíž součástí bylo vždy klasické rýsování a črtání, však ani přes tento fakt neztrácí na svém významu. I při použití grafických a modelovacích počítačových programů je potřeba metody deskriptivní geometrie ovládat, neboť i když se jedná o projekci, technický výkres nebo vymodelovanou prostorovou situaci, které jsou vytvořené na počítači, pro správnou interpretaci takového výstupu se bez znalosti geometrie neobejdeme. V oborech, ve kterých je správná vizualizace a názorné zobrazení prostoru a prostorových objektů rozhodující, má proto geometrie a speciálně i deskriptivní geometrie stále své místo.

Klasické rýsování a črtání není na první pohled v praxi užíváno, ovšem je zřejmé, že se na tyto postupy spoléháme ve fázi rozvíjení nápadů či prvotního hledání řešení geometrických problémů a to samozřejmě nejen v praxi, ale i ve výuce a při studiu geometrie.

Geometrie se všemi svými podobory je součástí mnoha moderních praktických aplikací a zasahuje tak do řady odvětví. Všeobecně patří geometrie mezi velmi náročné vědní oblasti vyžadující logické myšlení a současně její studium široce rozvíjí prostorovou představivost. Studium geometrie a speciálně deskriptivní geometrie představuje proto skutečnou výzvu pro výzkum i praxi.

V článku se věnujeme možným inovativním způsobům výuky deskriptivní geometrie založených především na využití počítačového 3D modelování a představujeme nově vznikající studijní materiály a webovou podporu deskriptivní geometrie. Využití modelovacích a grafických programů ve výuce geometrie rovněž zvyšuje zájem studentů o danou problematiku, což vyplývá z témat závěrečných prací. Rovněž zaznamenáváme úspěchy našich studentů v soutěžích SVOČ právě s geometrickými tématy zpracovanými s využitím počítačového modelování.

2 Výuka deskriptivní geometrie na MFF UK

Při výuce deskriptivní geometrie na Matematicko-fyzikální fakultě UK se snažíme o výraznější propojení s praxí (zejména v předmětech Deskriptivní geometrie III, Geometrické plochy, Plochy stavební praxe, Aplikace deskriptivní geometrie) a také o rozšíření deskriptivní geometrie o poznatky z počítačové grafiky a počítačové geometrie (předměty Počítačová geometrie I a II). Při používání modelovacího softwaru ve výuce deskriptivní geometrie se tato snaha ukazuje jako přirozený krok.

Pokud chceme sledovat trend, který je běžný v technické praxi, na niž chceme připravovat naše absolventy, je nezbytné přizpůsobit se moderní době. Ve výrobních procesech jsou v praxi při konstruování, navrhování či modelování nejrůznějších objektů dnes již běžně užívány moderní CAD (Computer Aided Design) systémy [1]. Podobný software lze použít ve výuce všech klasických geometrických témat i deskriptivní geometrie.

Deskriptivní geometrii tak můžeme chápat ve zcela novém světle. Pokud kromě klasického (a nezbytného) ručního rýsování a črtání zařazujeme do výuky také použití 3D počítačového modelování, může být deskriptivní geometrie chápána znovu jako moderní disciplína. Díky tomu, že naši studenti absolvují také počítačovou geometrii, je možné zdůrazňovat, na jakém principu takový grafický software funguje. Nejedná se tedy v žádném případě o pouhé užívání grafického softwaru, vždy je naším cílem dojít k hlubšímu porozumění pozadí daného programu. Výhodou je, že právě v rámci předmětů Počítačové geometrie I a II se studenti setkávají s geometrickými algoritmy a diferenciální geometrií křivek a ploch užívaných v počítačové grafice.

3D modelování a rýsování na počítači ve výuce deskriptivní geometrie

Ve výuce zmiňovaných předmětů na Matematicko-fyzikální fakultě využíváme pro tvorbu 3D modelů a modelování prostorových situací komerční 3D modelovací software Rhinoceros (NURBS modeling for Windows). Rhinoceros je levný a dostupný software obsahující množství profesionálních modelovacích nástrojů a funkcí a je v praxi běžně užíván. Program Rhinoceros využíváme rovněž k tvorbě rysů, tedy k rýsování v rovině. V žádném případě neopouštíme klasické ruční rýsování. Počítačovou tvorbu pokládáme za podpůrnou a moderní metodu rýsování.

Kromě programu Rhinoceros používáme ve výuce také dynamický software GeoGebra a to především k tvorbě rovinných konstrukcí případně k demonstraci platnosti geometrických zákonitostí. GeoGebra je uživatelsky velice příjemná a i úplný začátečník si její ovládání rychle osvojí. Navíc je GeoGebra běžně užívána ve výuce matematiky a geometrie na mnoha našich základních a středních školách.

Jak již bylo zdůrazněno, porozumění složitějším geometrickým úlohám bývá často velmi obtížné. K pochopení prostorové situace, vztahů mezi prostorovými objekty či k nalezení řešení rovinné nebo prostorové geometrické úlohy může napomoci právě počítačové 3D modelování nebo vhodný dynamický geometrický software.

Samozřejmě není nutné pracovat ve výuce právě se zmiňovanými grafickými programy. Na trhu existuje celá řada levných nebo dokonce volně dostupných programů pro geometrii a matematiku.

Rozšiřování sbírky příkladů, tvorba nových studijních materiálů a webová podpora pro deskriptivní geometrii na MFF UK

Počítačové programy neuplatňujeme pouze ve výuce, ale využíváme je také k tvorbě sbírek příkladů, nových studijních materiálů a k webové podpoře výuky deskriptivní geometrie. V letošním roce jsme (i díky projektu FRVŠ) výrazně rozšířili sbírku příkladů pro deskriptivní geometrii a započali jsme s tvorbou nových studijních materiálů, které se týkají různých geometrických témat.

Sbírky příkladů k předmětům Deskriptivní geometrie III, Plochy stavební praxe, Geometrické plochy a Aplikace deskriptivní geometrie jsou k dispozici v elektronické formě na stránkách `http://surynkova.info/MFF.php`. Příklady jsou rozděleny podle témat a seřazeny chronologicky do jednotlivých přednášek a cvičení. Sbírky příkladů již několik let neustále rozšiřujeme, případně přidáváme k některým příkladům i jejich řešení.

Za výrazné posílení výuky a studia deskriptivní geometrie považujeme tvorbu nových studijních materiálů a příkladů pro samostudium, které jsou k dispozici na stránkách `http://surynkova.info/topics.php`. Jedná se o popisy a návody k různým konstrukcím, počítačové modely, ukázky rysů a studentských prací apod. Jmenujme například konstrukce kuželoseček jako obrazů kružnice ve středové kolineaci či příklady konstrukcí kuželoseček z daných prvků pomocí středové kolineace.

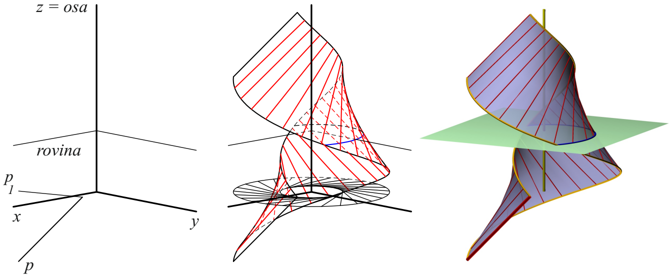
Webové stránky jsou neustále průběžně aktualizovány a jsou určeny nejen studentům naší fakulty, ale všem zájemcům o geometrii (některé odkazy jsou v anglickém jazyce).

3 Geometrické projekce

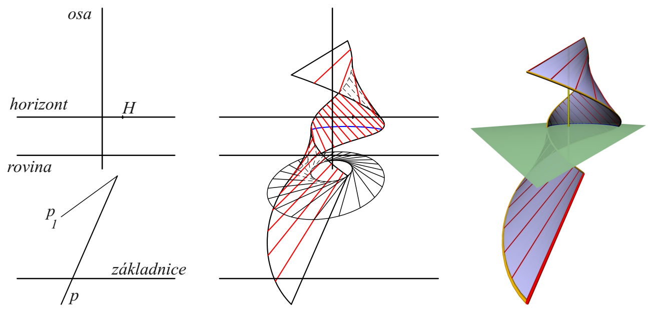
Využití počítačového modelování a rýsování na počítači předvedeme na příkladech klasických úloh z deskriptivní geometrie, kterými jsou rovnoběžné a středové projekce. Zaměříme se zde na projekce ploch užívaných v geometrii a v inženýrské praxi, které jsou na MFF UK vyučovány ve vyšších ročnících.

Ukažme si zadání a řešení typické úlohy z deskriptivní geometrie. Nechť je dána šroubová plocha tvořicí křivkou (zde speciálně úsečkou) a šroubovým pohybem (šroubový pohyb je zadán osou, smyslem a výškou závitu). Aby měla tato úloha smysl, předpokládáme, že tvořicí úsečka neleží na ose šroubového pohybu a není s ní ani rovnoběžná. Dále předpokládejme, že je dána libovolná rovina, která protíná šroubovou plochu vzniklou šroubováním tvořicí úsečky. Úkolem studentů je sestrojit (ručně nebo rýsováním na počítači) několik poloh šroubující se úsečky, zdánlivý obrys části plochy (například jednoho závitu) a řez části plochy zadanou rovinou – vše v daném promítání. Úlohu řešíme nejprve v rovnoběžném promítání a to v pravoúhlé axonometrii. Zadání úlohy, tj. osa šroubového pohybu, poloha tvořicí úsečky a rovina řezu v pravoúhlé axonometrii, je znázorněno na obrázku 1 vlevo. Na obrázku 1 uprostřed vidíme výsledek dané úlohy (již bez pomocných čar), přičemž se jedná o rys vytvořený na počítači. 3D modelovací software lze ale využít také k vymodelování prostorové situace, kterou můžeme vidět na obrázku 1 vpravo. Nutno podotknout, že při práci přímo se softwarem lze s prostorovým objektem hýbat, prostorovou situaci je možné různě natáčet, přibližovat či oddalovat. Díky tomu je možné lépe porozumět prostorovým vztahům a práce v rovině, tedy s výslednou projekcí, je tak snazším úkolem. Na obrázku 1 vpravo je přitom pohled na 3D model plochy nastavený tak, aby přesně odpovídal zadané rovnoběžné projekci.

Složitější situace nastává při řešení té samé úlohy ve středovém promítání. Na obrázku 2 vlevo je znázorněno opět zadání úlohy. Na obrázku 2 uprostřed můžeme vidět počítačový rys s řešením úlohy (opět bez pomocných čar) a na obrázku 2 vpravo počítačový 3D model. Opět je pohled na 3D model nastavený tak, aby přesně odpovídal zadanému středovému promítání. Zde se můžeme setkat s obtížemi již při zadávání úlohy. Obrazy prostorových objektů se v obecném středovém promítání mohou velmi výrazně zkreslovat, přičemž míra tohoto zkreslení se předem velmi těžko odhaduje. Pomoci nám může při tvorbě takového zadání úlohy samozřejmě zkušenost nebo opět 3D počítačové modelování. Po vymodelování prostorové situace v programu Rhinoceros je možné s objektem hýbat a nastavit tak pohled na prostorový objekt, který nám vyhovuje. Většina grafických softwarů podobných programu Rhinoceros umožňuje prostorovou situaci ve zvoleném pohledu promítnout do roviny, tj. vytvořit výslednou projekci (rovnoběžnou i středovou). Tuto funkci hojně využíváme právě k tvorbě zadávání podobných úloh a rovněž ke kontrole výsledné projekce prostorových objektů vytvořených buď ručně, nebo rýsováním na počítači v rovině.



Obr. 1: Šroubová plocha v pravoúhlé axonometrii:
zadání (vlevo), výsledek rovnoběžné projekce (uprostřed), 3D model (vpravo)



Obr. 2: Šroubová plocha ve středovém promítání:
zadání (vlevo), výsledek středové projekce (uprostřed), 3D model (vpravo)

4 Studentské práce

Využití počítačového modelování a rýsování na počítači ve výuce deskriptivní geometrie výrazně zvyšuje zájem studentů o danou problematiku a zajišťuje jejich aktivní zapojení do výuky. To vyplývá z reakcí studentů a také ze zájmu věnovat se geometrickým tématům v rámci semestrálních, bakalářských a diplomových prací. Uveďme příklad bakalářské práce *Geometrie stínu* [3] studentky Yulianny Tolkunové, která se v roce 2014 umístila na druhém místě na mezinárodní soutěži SVOČ v didaktice matematiky v kategorii bakalářských prací. Bakalářská práce *Geometrie stínu* se věnuje geometrickému osvětlení elementárních těles a metodám sestrojení jejich stínů v různých projekcích. Práce je zaměřena zejména na rovnoběžné osvětlení těles v rovnoběžných projekcích. Obsahuje přehled základních pojmů a vlastností geometrického osvětlení a je doplněna vlastními názornými ilustracemi, které vznikly s použitím modelovacích nástrojů v programu Rhinoceros. Součástí práce je sada řešených i neřešených příkladů, které mohou sloužit jako sbírka úloh pro studenty v hodinách deskriptivní geometrie.

5 Shrnutí a závěr

V článku jsme prezentovali realizované metody inovace výuky deskriptivní geometrie na Matematicko-fyzikální fakultě UK v Praze. Modernizace výuky je založena především na použití počítačového modelování a rýsování na počítači a také na rozšíření deskriptivní geometrie o poznatky z počítačové grafiky a počítačové geometrie. Počítačové modelování využíváme nejen při výuce, ale také při přípravě materiálů pro cvičení a přednášky a pro tvorbu sbírek příkladů a nových studijních materiálů publikovaných na webových stránkách [2].

Při výuce se nám osvědčuje, že studenti považují rýsování a modelování na počítači za vhodnou pomůcku a vnímají geometrii skutečně jako moderní disciplínu.

Inspiraci v našem přístupu při výuce geometrie snad naleznou i učitelé a studenti na nižších stupních vzdělávání.

Literatura

[1] G. Farin et al., *Handbook of Computer Aided Geometric Design*, Elsevier Science, 2002.

[2] P. Surynková, *Academic website Petra Surynková*, `http://www.surynkova.info`.

[3] Y. Tolkunova, *Geometrie stínu*, bakalářská práce, MFF UK, Praha, 2014.

RNDr. Petra Surynková, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
petra.surynkova@mff.cuni.cz

Bc. Yulianna Tolkunova
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
katapulta.yul@gmail.com

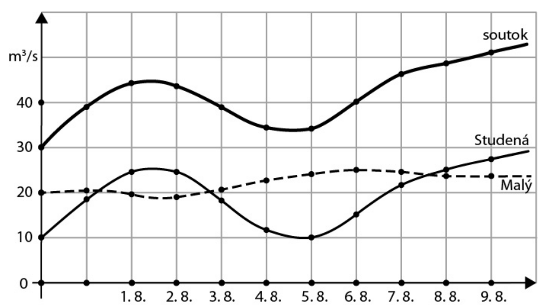
SČÍTÁNÍ KŘIVEK A PLOCH

Alena Šarounová

Mnozí lidé mají téměř posvátnou hrůzu z geometrie. Myslí si, že je to buď vcelku nepotřebná disciplína, nebo naopak cosi „normálním lidem“ nepřístupného. Ráda bych na jedné zajímavé geometrické metodě poukázala na neoprávněnost obou těchto krajních názorů. Tuším, že Seneca napsal zhruba toto: *O některé věci se nepokoušíme, protože se nám zdají příliš obtížné. Ale příliš obtížné se nám zdají, protože jsme se o ně nepokusili.* Pokusme se tedy celkem názorným způsobem rozšířit své představy o „sčítání“. Budeme sčítat křivky v rovině (některé případy dobře známe) a pak i plochy v prostoru (jako mnozí stavitelé, protože si to vynutila sama stavební praxe). Budeme se zabývat zejména grafickým řešením a občas přidáme pár námětů k zamyšlení, k zadání seminární práce atp. Při řešení úloh se mi zdá v tomto případě užitečnější „ruční práce“ studentů, protože při ní se každý musí důkladněji soustředit na jednotlivé kroky a má více času na „nápady“. (Vlastní hypotézy lze ověřit např. v GeoGebře, ale není to nutné.)

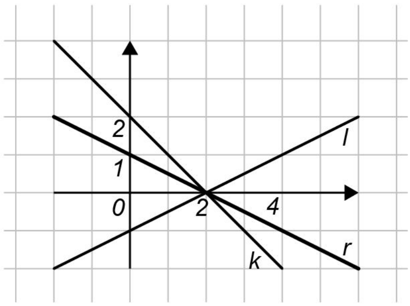
1 Sčítání křivek

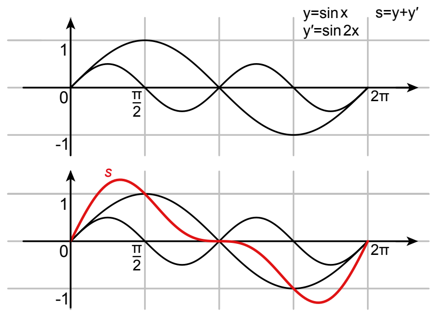
Se sčítáním křivek se žáci setkávají v podstatě už na základní škole, jakmile pracují s některými grafy z praxe. Na obr. 1 je graficky určen přibližný průtok vody, jsou-li známy křivky z vodoměrů obou toků před jejich soutokem. V tomto případě jinou metodu než prosté sčítání naměřených hodnot ve zvolených časových okamžicích použít nelze.



Obr. 1: Odhad průtoku vody z průběžných záznamů automatických vodoměrů nad soutokem dvou říček

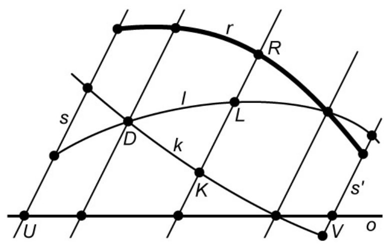
Součtem lineárních funkcí k, l na obr. 2 je funkce r, což lze snadno ověřit graficky nebo sestavením příslušných početních zadání. Součet částí grafů funkcí dvou sinusovek na obr. 3 je vyznačen červenou křivkou s.





Obr. 2 (vlevo): Grafy lineárních funkcí k, l, r
Obr. 3 (vpravo): Součtová křivka dvou sinusovek

Ve všech třech případech jednotlivé body součtové křivky s získáme součtem orientovaných úseček (na ZŠ) či vektorů s počátkem na ose x. Tento postup zobecníme na grafické sčítání křivek (obr. 4). (Za „křivku“ budeme považovat i lomenou čáru, experimentální křivky zapisovačů i grafy matematických funkcí.)

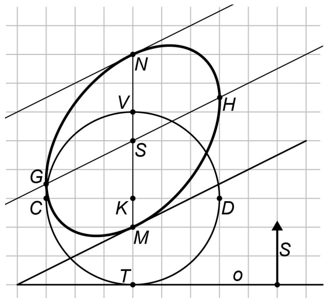


Obr. 4: Sčítání dvojice křivek k, l (vzhledem k ose o a směru s)

Je dána přímka o (osa sčítání), s ní různoběžná přímka s (směr sčítání) a křivky k, l, které budeme sčítat. Sčítat lze pouze na těch přímkách směru s, na nichž leží body obou zadaných křivek, zde tedy na přímkách rovinného pásu ohraničeného přímkami s, s'. Součtová křivka křivek k, l je souhrnem bodů součtu ležících na všech přímkách směru sčítání. V praxi po získání dostatečného počtu bodů jimi proložíme křivku, která se blíží té skutečné součtové křivce podobně jako graf funkce načrtnutý žáky pomocí tabulky s hodnotami funkce v několika bodech grafu ideálnímu.

Pokud známe početní vyjádření sčítaných křivek, určíme jejich součtovou křivku přesněji. Je-li jedna ze sčítaných křivek přímkou rovnoběžnou s osou, součtovou křivku získáme pouhým posunutím křivky v daném směru sčítání o daný vektor. Dále se budeme zabývat pouze přímkami, kružnicemi a elipsami. Dají nám zajímavé součtové křivky a lze zde k experimentům snadno použít GeoGebru.

Na obr. 5 je zadaná osa o, směr sčítání kolmý k ose, kružnice $k(K, KT)$ a přímka $l$procházející bodem M. Součtem bodů M, K je bod S. Stejně sestrojíme body M, H, N, G součtové křivky (a případně ještě některé další). Studenti mohou ověřit, že jimi získané body leží na elipse a ještě že obsah vnitřku této elipsy je roven obsahu kruhu $K(K, KT)$. (Kdo zná osovou afinitu, může nalézt afinní vztah mezi touto elipsou a kružnicí k. Směrem afinity je směr sčítání a lze nalézt dvě (!) různé osy afinity.)



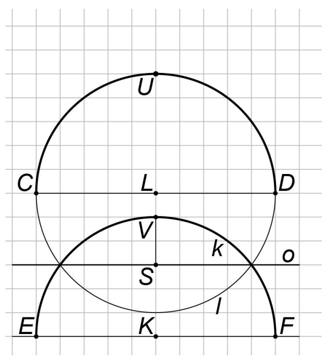
Obr. 5: Součtová křivka kružnice a přímky

2 Součtové křivky dvojice shodných kružnic

V matematických seminářích můžeme studovat součtové křivky dvojice shodných kružnic. Protože v těchto úlohách přímky směru sčítání protínají jednu či obě křivky i ve dvou různých bodech, dostáváme součtové křivky zajímavých vlastností. Můžeme tak studentům umožnit „objevování“ důležitosti pojmů: algebraická křivka, stupeň algebraické křivky, křivky vyššího (zde čtvrtého) stupně, rozpad křivky na dvě části, „dvojnásob počítaná úsečka“ …

I zde jsou zadání úloh podložena čtvercovou sítí. Usnadňuje to studentům orientaci v obrázcích a svým způsobem „napovídá“, jak konstruovat body součtových křivek. Popišme tři zajímavé úlohy.

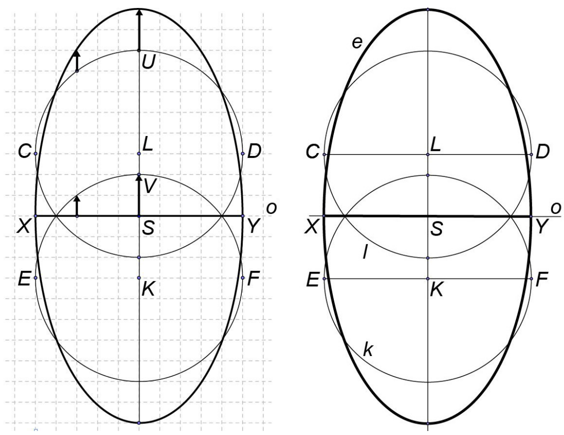
První úlohou je sestrojení součtové křivky dvou polokružnic (viz obr. 6). (Zde ještě odpadá problém dvou průsečíků křivky s přímkami směru sčítání. Doporučuji zvětšený obrázek vytisknout a zadat studentům k ručnímu vyhledávání bodů součtové křivky.)



Obr. 6: Sestrojte součtovou křivku kružnicových oblouků CUD a EVF pro osu o a směr sčítání UV.

Výslednou křivkou je v tomto případě polovina elipsy se středem S. (Opět je možné „ověření“ na PC: Použijeme tlačítko „kuželosečka zadaná pěti body“ a zadáme body, které jsou sestrojeny co nejpřesněji. Programem nakreslená kuželosečka bude (s jistou mírou nepřesnosti „ruční práce“) procházet i ostatními už sestrojenými body. Zajímavá by jistě byla i debata o tom, nakolik jde či nejde o „důkaz“ z pohledu matematika či praktika – ale takové diskusi se zde věnovat nebudeme.) Zvolíme-li vhodnou kartézskou soustavu souřadnic s počátkem v bodě S, snadno získáme její rovnici.

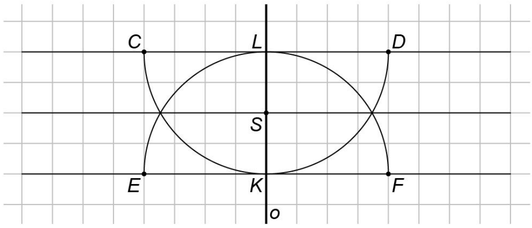
Druhá úloha je rozšířením úlohy první. Budeme hledat součtovou křivku celých kružnic se středy K, L z předchozího obrázku. Vyhledávání jednotlivých bodů této křivky je naznačeno ve čtvercové síti na obr. 7. Jistě není překvapením dokreslení druhé části elipsy z předchozí úlohy. Přibyla zde ale ještě úsečka XY. Její krajní body jsou součty dvojic bodů E, C a D, F souměrných podle osy o. Na úsečce XY ale leží i součtové body oblouku CUD a oblouku k němu osově souměrnému – a stejně tak body zbývajících oblouků protínajících osu o.



Obr. 7: Konstrukce bodů součtové křivky dvou kružnic
a výsledná součtová křivka

V pravé části obrázku je uvedeno čisté řešení úlohy se zvýrazněním součtové křivky. V tomto případě se součtová křivka rozpadla na elipsu e a úsečku XY, kterou je třeba označit jako dvojnásobnou (podobně jako „dvojnásobný kořen rovnice“), protože každý její vnitřní bod je součtem dvou různých dvojic bodů. (Připomeňme: Kuželosečky jsou křivky druhého stupně. Sčítáme zde dvě kružnice – tedy dvě křivky druhého stupně – a získáváme křivku složenou z elipsy a dvojnásob počítané úsečky – tedy křivku složenou ze dvou křivek druhého stupně. Výsledná součtová křivka je algebraická křivka čtvrtého stupně.)

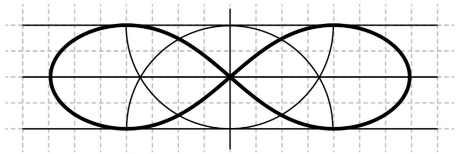
I ve třetí úloze vyjdeme ze dvou shodných navzájem se protínajících polokružnic se středy K, L (obr. 8). Osou sčítání je středná KL, směr sčítání je k ose kolmý. Je zřejmé, že body součtové křivky leží pouze na přímkách CD, EF a v rovinném pásu jimi omezeném.



Obr. 8: Zadání úlohy: Sestrojte součtovou křivku dvojice polokružnic se středy K, L pro osu KL a směr EF.

(Zde můžeme upozornit na obecné pravidlo: Je-li celé zadání rovinné geometrické úlohy souměrné podle osy, bude podle ní souměrný i „výsledek“ – tedy její řešení. Naše zadání je osově souměrné podle dvou navzájem kolmých os, je tedy i středově souměrné podle středu S. Myslím, že je třeba na to žáky upozorňovat při každé příležitosti. Může to ovlivnit jejich „strategii řešení“, pokud se nejprve zamyslí a pak teprve „řeší“ zadaný úkol.)

Součtová křivka má tvar osmičky („součtová lemniskáta“). Její vrcholy snadno určíme pomocí čtvercové sítě. Každá další přímka rovinného pásu omezeného přímkami CD, EF (s výjimkou přímky procházející bodem S) však protíná každou z polokružnic ve dvou bodech. Máme zde tedy čtyři různé dvojice bodů ke sčítání a získáme čtyři body součtové křivky. Na obr. 9 je pro kontrolu tato lemniskáta nakreslena počítačem. (Myslím, že by nebylo vhodné studentům tento tvar prozrazovat předem. Těmito úlohami chceme podnítit „hledání“ a případně tvorbu „hypotéz“ – detektivka, jejíž konec známe předem, není už zajímavá.)



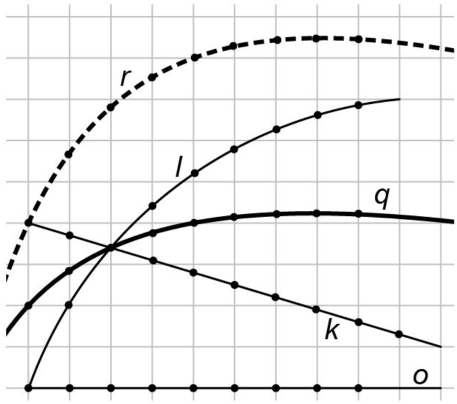
Obr. 9: Součtová křivka dvou kružnic

Tvar součtové křivky dvou protínajících se shodných polokružnic se při zachování osy a směru sčítání mění v závislosti na poměru vzdálenosti jejich středů a velikosti poloměrů. Vždy však dostaneme „součtovou lemniskátu“, algebraickou křivku čtvrtého stupně.

(Závěr tohoto odstavce můžeme korunovat vyslovením věty, která shrnuje naše „objevy“: Součtem dvou rovinných algebraických křivek stupňů p, q je součtová algebraická křivka stupně pq. Je třeba dodat, že to platí jen v případě, že taková součtová křivka pro příslušné konkrétní zadání skutečně existuje.)

3 Poloviční součty a praktická uplatnění

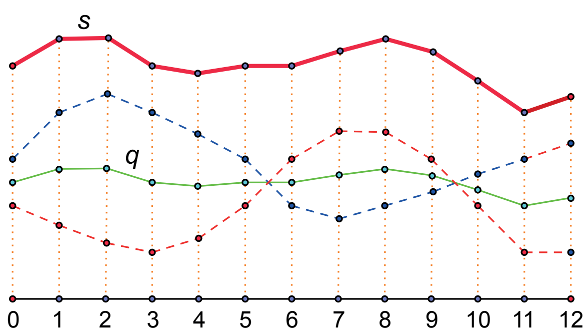
Kromě výše popsaného typu sčítání křivek se používá i tzv. „poloviční součet křivek“. Na jednotlivých přímkách sčítání hledáme středy úseček omezených průsečíky přímek se sčítanými křivkami. Na obr. 10 je zadaná osa sčítání – přímka o – a dvojice křivek k, l. Směr sčítání je kolmý k ose. Součtem křivek k, l je křivka r. Obrázek je doplněn křivkou polovičního součtu křivek k, l.



Obr. 10: Křivka q jako poloviční součet křivek k, l

Z obrázku je patrno, jak křivka q přišla ke svému názvu. Pokud bychom považovali křivku r za graf funkce $y = r(x)$, byla by křivka q grafem funkce $y = \frac{1}{2} \cdot r(x)$. Křivka q je jakýmsi „aritmetickým průměrem křivek k, l“. K její konstrukci osu o nepotřebujeme.

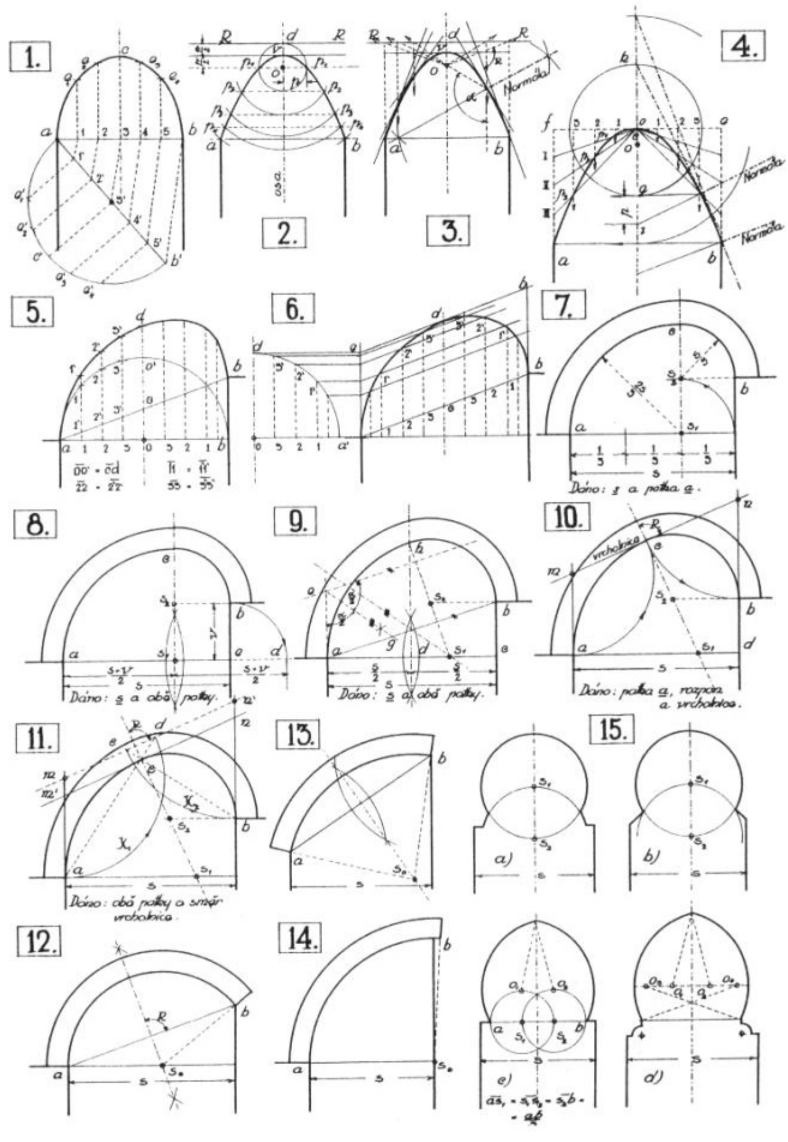
V praxi lze tyto součty užít v mnoha situacích. Na obr. 11 je přehledná grafická úprava získaných dat (např. výsledky sběru odpadního papíru dvěma třídami ZŠ, měsíční tržby atp.) zakreslenými červenými a modrými body. Lomené čáry jimi proložené jsou našimi zadanými křivkami. Lomená čára s je součtovou křivkou a čára q křivkou polovičního součtu výchozích údajů (tedy znázorňují celkový sběr ročníku i průměr na třídu).



Obr. 11: Aritmetické průměry a součty dat získaných z praxe

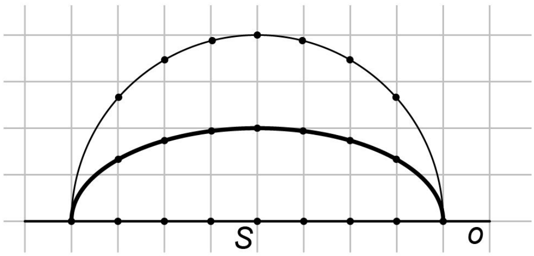
(Pokud budeme kreslit v GeoGebře, je nejrychlejší získat nejprve body křivky polovičního součtu bez použití osy sčítání – tedy užitím tlačítka „střed úsečky“. Pak užijeme tlačítko „středová souměrnost“ a hledáme body středově souměrné k bodům osy sčítání podle bodů křivky polovičního součtu. Zkuste si najít např. poloviční součet u součtových křivek kružnic z předchozího odstavce.)

Starší knihy určené stavbařům bývaly vybaveny mnoha názornými obrázky, ve kterých se stavební mistři vyznali lépe a rychleji než v textových partiích popisujících stavební konstrukce a postupy. Jeden takový list je uveden na obr. 12. Jsou tu návodné obrázky ke konstrukci různých oblouků. Dvou z nich si všimneme podrobněji.



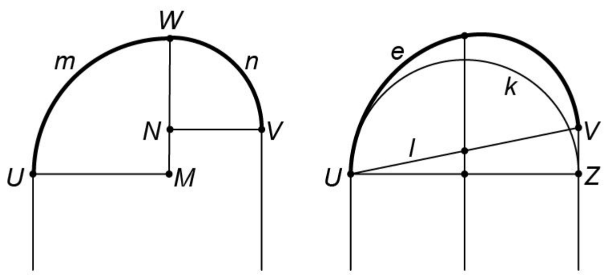
Obr. 12: Geometrie klenebních oblouků – ukázka kreslených návodů

Ve stavebnictví byla a je stále velmi důležitou křivkou kružnice. Její velkou předností (kromě řady jiných) je velmi jednoduchá a přesná konstrukce. Už předhelénistické kultury kružnice využívaly k rozvrhování staveb i ztvárňování stavebních prvků. Kruhové oblouky (správně kružnicové oblouky) známe ze staveb antických, římských, románských – i současných. Renesance začíná a baroko velmi často uplatňuje oblouky snížené, tvořené buď polovinou elipsy či kombinací několika oblouků kružnice apod. Na obr. 13 je znázorněn další stavebně používaný postup konstrukce poloviny elipsy (snížený eliptický oblouk) jako polovičního součtu polokružnice a jejího průměru.



Obr. 13: Konstrukce eliptického oblouku

Na obr. 12 si můžeme všimnout ještě návodu ke konstrukcím tzv. kobylí hlavy – stoupajícího oblouku, který podpírá schodiště. Na obr. 14 jsou uvedeny dva takové postupy. Oblouk vlevo je tvořen dvěma oblouky kružnic s různými poloměry, oblouk e je součtovou křivkou polokružnice k a úsečky UV pro osu UZ a směr sčítání VZ. (Délka úsečky VZ vychází ze stoupání schodiště, které oblouk podpírá.)



Obr. 14: Návody ke konstrukcím stoupajícího oblouku kobylí hlavy

4 Pěkné pohledy na stereometrii

Mnoho podnětů ke studiu různých geometrických křivek a ploch přichází z technické praxe. Strojnictví má velký podíl na rozvoji kinematické geometrie, gotická architektura na přímkové a šroubové plochy atd. Protože jsme se zabývali součtovými křivkami, jsme dostatečně vybaveni k tomu, abychom se poučeně podívali na některé ze stavebních ploch, jejichž části nás v rozličných tvarech architektury obklopují. Vím, že většina učitelů neprošla kurzem deskriptivní geometrie. Všichni se však celý život učíme „dívat se a vidět“. Lidé, kteří se nesetkali s naší „moderní“ kulturou, často nechápou, že můžeme na našich obrázcích vidět něco prostorového (a my zase nechápeme mnoho jejich dovedností, které jsou nám už díky civilizaci nedostupné). Náš způsob vidění je v podstatě už od dětství formován grafickými výtvory, kterými je (zejména „díky“ reklamě) naše životní prostředí téměř zahlceno. Pracujeme s mapami, symboly, „čteme“ loga na výrobcích, kreslené návody, jak sestavit nábytek, tvoříme a luštíme různá schémata. Měli bychom tedy jistě i „vidět“ pěkné prostorové tvary zakreslené v rysech našich bývalých posluchačů, současnými geometrickými programy či okem fotoaparátu.

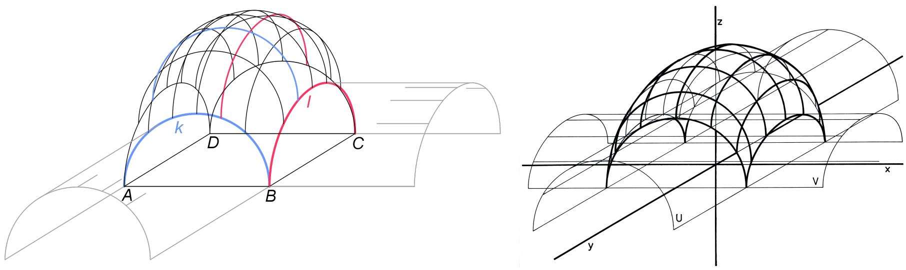
Ve stavební praxi se velmi často pracuje s různými typy lešení. Některé podpůrné konstrukce se mohou užívat opakovaně. Můžeme z prken sestrojit například šablonu pro zaklenutí oblouku. Po stavebním dohotovení tohoto oblouku šablonu o kousek posuneme a můžeme zdít další „pruh“ (např. při budování valené klenby). Takovým připraveným šablonám se říká ramenáty. Části jejich okraje hrají roli naší křivky (či plochy) a spolu se způsobem jejich postupného posouvání tak určují výsledný tvar stavební plochy. Při stavbě kopule by takovým ramenátem mohla být šablona tvaru čtvrtkruhu a jejím pohybem rotace kolem osy budoucí kopule.

Ramenáty zpravidla „modelují“ rovinnou křivku. Pokud je postupně posouváme (ve smyslu translace v geometrii), získáme tak plochu, na níž leží celá řada křivek „téměř shodných“ s křivkou ramenátu. (Tak to platí v praxi. Teoreticky každým bodem takové plochy prochází křivka shodná s určenou tvořící křivkou. Jsou to plochy translační.) Bude-li ramenát rotovat, získáme plochy rotační. Ramenátem při výrobě hrnečků na hrnčířském kruhu může být šablona poledníku vystřižená z plechu, ale i ruka řemeslníka. Bude-li pohyb ramenátu řízen šroubovicemi, získáme plochy šroubové. Na následujících obrázcích jde většinou o pohyb kružnice, který je řízen nějakou další plochou. Popis je složitý, ale na obrázcích poznáme mnoho situací známých z našeho okolí.

5 Součtové plochy kreslené počítačem

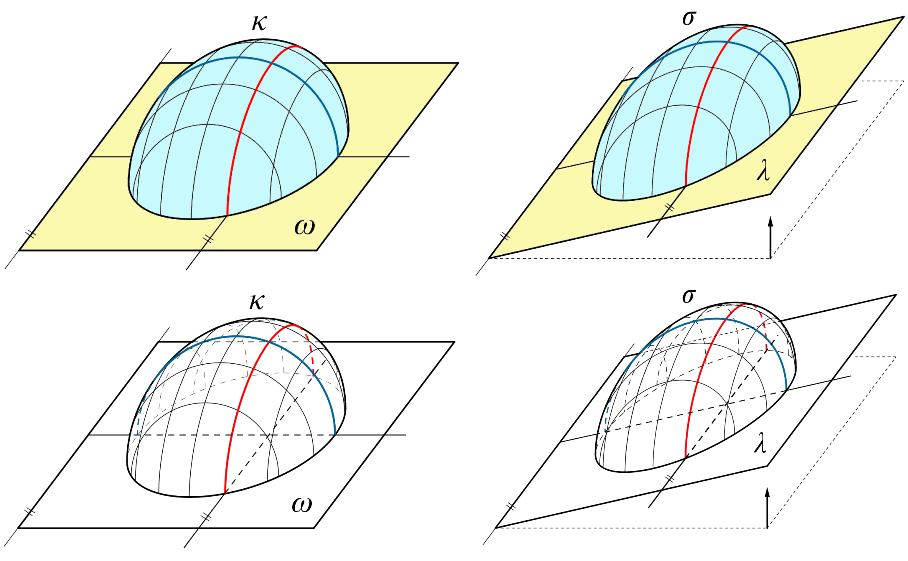
Nejprve se zaměříme na zaklenutí křížení dvou stejně širokých i vysokých chodeb zaklenutých valenou klenbou. Opomineme svislé stěny a soustředíme se na horní poloviny válcových ploch, jejichž vodorovné osy se protínají kolmo (obr. 15). Klenba nad čtvercem $ABCD$ je tvořena posunem modré polokružnice k ve svislé rovině svým koncovým bodem B po červené kružnici l. Jedna z dalších vyznačených poloh modré polokružnice je rovněž vyznačena modře. Stejně tak lze ale říci, že tutéž klenbu získáme posouváním červené kružnice l tak, aby se bod B posouval po kružnici k. Jde tedy o plochu translační. V literatuře je popsána jako plocha Tilšerova.

Tato plocha vznikne i jako plocha součtová. Sčítají se části obou válcových ploch. Rovinou sčítání je rovina čtverce $ABCD$ a směr sčítání je k ní kolmý. Ve svislých rovinách procházejících přímkami AB nebo BC či v rovinách s nimi rovnoběžnými a protínajícími čtverec $ABCD$ leží vždy polokružnice jedné a přímka druhé válcové plochy. Jejich součtem (v příslušné svislé rovině! – to už umíme) je polokružnice plochy klenby. Porovnáním obou obrázků si uvědomíme, že na obrázku vlevo chybí (záměrně) obrysová křivka. Naše oči většinou iniciativně doplňují v dostatečně zaplněných obrázcích i to, co tam není. Až při pečlivější prohlídce zpozorujeme, že „obrys“ plochy je poněkud kostrbatý a zřejmě není něco v pořádku, protože „ta plocha je určitě oblá, hladká ...“



Obr. 15: Tilšerova plocha nad čtvercem $ABCD$: vlevo jednotlivé polokružnice plochy, vpravo klasický rys s vyznačenými polokružnicemi a obrysovou křivkou plochy

Na následujícím obrázku jde o „prostorovou obdobu“ kobylí hlavy. Jestliže jsme deformovali polokružnici součtem s přímkou na polovinu elipsy, budeme tentokrát deformovat polovinu kulové plochy součtem s rovinou (obr. 16). Polovina kulové plochy κ leží na vodorovné rovině ω, která bude rovinou sčítání. To je výchozí situace (levá část obrázku).



Obr. 16: Sčítáním poloviny kulové plochy a šikmé roviny získáme polovinu obecného elipsoidu

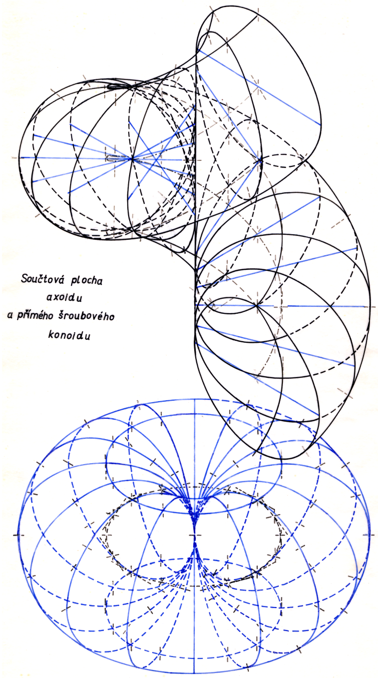
Součtem roviny λ s částí kulové plochy je plocha σ – část nerotačního elipsoidu. Jednotlivé vyznačené křivky (červená, modrá i další poloviny elips) jsou součtovými křivkami polokružnic a přímek ve zvolených svislých rovinách. Na tomto obrázku máte možnost porovnat dva různé způsoby úpravy – verzi s vybranými barevnými čarami a dále verzi „obarvené plochy“. Barvy mohou být užitečným pomocníkem a velmi přispět k názornosti obrázků. Je však třeba používat je pouze tam, kde to má smysl (tj. užívat je, ale nezneužívat). Také by vždy měly být jemné, aby nepřehlušovaly svou výrazností podstatu obrázku a nenamáhaly zbytečně oko. I barevné ladění může přispět k většímu zájmu čtenářů o geometrický text. (Neměli bychom opomínat estetickou stránku práce – o tom by nám mohli mnohé říci třeba výtvarníci. Konec konců – právě v hodinách výtvarné výchovy by se studenti mohli dozvědět o mnohých aplikacích geometrie v umění. Procvičovali by tím i „naši látku“ – a ani by nemuseli tušit, že „jde o skrytou geometrii“.)

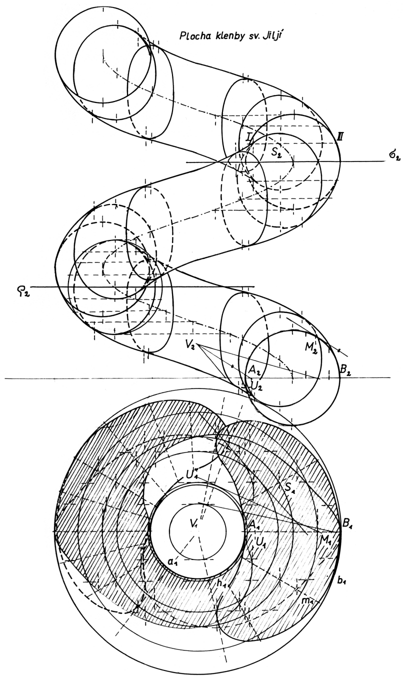
6 Staré studentské rysy

Již téměř 50 let staré jsou mnohé rysy z diplomových prací uložených na naší katedře. Jsou tvořené ještě „po staru – ručně“, ale stále stojí za povšimnutí. Nejprve popišme tři rysy zabývající se plochami vytvořenými šroubovým pohybem kružnice. Pro jednoduchost volíme kružnice ležící v rovině osy šroubového pohybu (tento pohyb lze nahradit představou točitého schodiště, jehož hrany naznačují výšku „povytažení“ kružnic (součty kružnice a vodorovné přímky). Rovinou sčítání je vždy vodorovná rovina – půdorysna, směr sčítání je kolmý k rovině sčítání a plochy, které budeme sčítat, jsou anuloid, axoid či plocha kulová (reprezentují vždy všechny kružnice, jichž se sčítání týká) a přímý šroubový konoid (v praxi jednotlivé hrany schodů) se společnými osami.

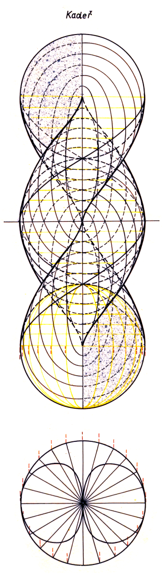
Na obr. 17 je znázorněna součtová plocha axoidu (který vznikne rotací kružnice podle své tečny – je příbuzný anuloidu, ale nemá otvor) a konoidu, který je na ryse znázorněn modrými úsečkami kolmo protínajícími osu. (Foto modelu této plochy viz na obr. 21.) Tento obrázek je vytvořen v pravoúhlé axonometrii a blíží se našemu pohledu šikmo z výšky na dané objekty. Je celkem názorný (ale není to druh perspektivy). Sousední obr. 18 je proveden v klasickém Mongeově promítání. Jde o půdorys a nárys plochy svatého Jiljí (hojně využívanou v baroku). K jejímu vytvoření je využit anuloid a opět náš šroubový konoid nebo šroubovice udávající vysunutí středu kružnic podél svislé osy. Vyšrafované plochy dole v půdorysu jsou dva částečně se překrývající obrazy řezů plochy sv. Jiljí dvěma vodorovnými rovinami, které se v nárysu jeví jako vodorovné přímky. Pro laiky je tento způsob zobrazení méně příjemný, ale technikům a geometrům podává rychle více informací než jiné způsoby zobrazování.

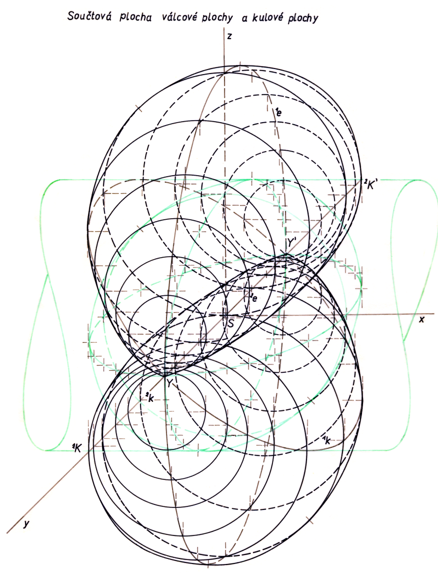
Dekorativní plochou je tzv. kadeř, vytvořená jako součtová plocha plochy kulové a přímého šroubového konoidu. Lépe si její vytvoření představíme jako postupné šroubování kružnice, jejíž průměr je osou šroubového pohybu. (Foto reálného modelu je mnohem názornější – viz obr. 21.)





Obr. 17 (vlevo): Součtová plocha axoidu s přímým šroubovým konoidem
Obr. 18 (vpravo): Plocha svatého Jiljí





Obr. 19 (vlevo): Plocha kadeře – technický výkres
Obr. 20 (vpravo): Součtová plocha plochy kulové a válcové

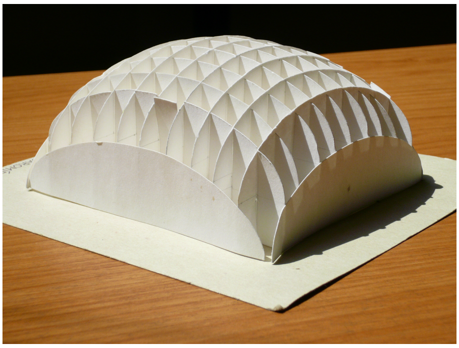
Posledním ukázkovým rysem je součtová plocha na obr. 20. Vznikla součtem válcové plochy s kulovou plochou, která je jí vepsána. Výsledkem je plocha zdánlivě „přeštípnutá“ na dvě shodné části. Každou z těchto částí můžeme v představě vytvořit postupným zavěšováním kružnic kulové plochy na úsečku YY'. Myslím, že po tomto slovním návodu – co na obrázku hledat – se ve spleti čar rychleji zorientujeme. (A připomeneme-li si princip pana Cavalieriho, můžeme snadno dokázat, že objem prostoru uzavřeného v každé z těchto dvou částí je roven objemu koule, jejíž povrch jsme při sčítání použili. Zajímavé – že?)

7 Fotografie modelů ploch

Pro porovnání vlastních představ o plochách uvedených v tomto článku přidávám aspoň tři fotografie modelů ploch (rovněž studentské práce). Na obr. 21 je fotografie plochy kadeře a součtové plochy axoidu s přímým šroubovým konoidem. Na obou modelech vidíme řadu různých poloh kružnic, které obě tyto plochy vytvořily. Výchozí axoid ani plochu kulovou však modely neukazují. (Mohli bychom je získat „shrnutím“ všech kružnic každého z modelu svisle dolů podél osy, aby se dotkly podložky modelu – tedy roviny sčítání. Porovnejte fotografie se studentskými rysy.)

Obr. 21: Model plochy kadeře a součtové plochy axoidu se šroubovým konoidem

Poslední fotografie představuje stavebně používanější variantu k Tilšerově ploše z obr. 15. Místo polokružnic se zde posouvají poloviny elips, takže plochu lze definovat jako součtovou plochu dvou eliptických válcových ploch. Její výhodou je menší výška. Výhodou konkrétního papírového modelu je jeho snadná konstrukce a vyhovující pevnost. O častém užívání právě tohoto kousku svědčí jeho značná opotřebovanost (i oblíbené knížky jsou odřené více než ty nečtené).



Obr. 22: Elipticko-eliptická translační plocha

8 Závěr

Můj příspěvek je více obrázkový než teoretický. Teorie také nebyla jeho cílem. Chtěla jsem obrátit vaši pozornost k některým zajímavým nebo praktickým stránkám geometrie, k jednoduchým postupům se zajímavými výsledky, k analogiím, které mohou být objevovány postupně při řešení jednoduchých úkolů. Některé náměty práce jsou zcela nenáročné, jiné už předpokládají určité předchozí znalosti, všechny však mohou obohatit představy našich studentů o geometrii (a snad i světě kolem nás). Setkají-li se v budoucnu s teoretickými geometrickými partiemi, mohli by jim snad lépe porozumět. A pochopit, že geometrie je nejen užitečná, ale i krásná.

9 Poznámky

V publikaci [1] najdete celou řadu vhodných motivací, četné ilustrace důležitosti celkem jednoduché geometrie pro praxi i náměty k zadání samostatné práce (referáty, modely, ...).

V diplomové práci Růženy Štíchové vám doporučuji zejména kapitolu *Geometrie kleneb*, která je vhodná i pro seminární práce na SŠ. Mnoho zajímavých poznatků zde uvedených může potěšit každého, kdo má zájem o architekturu, bez ohledu na studium deskriptivní geometrie.

Na stránkách Katedry didaktiky matematiky MFF UK vřele doporučuji ještě dvě vystavené práce: *Plochy stavební praxe* (bakalářská práce) Petry Surynkové z roku 2006 (rozvinutelné plochy – možnost tvorby modelů) a *Klínové plochy* (diplomová práce) Jany Veckové z roku 2003. Obě jsou bohatě ilustrovány pomocí různých aplikací geometrických programů (můžete porovnat názornost jimi vytvořených obrázků), fotografiemi atd.

Část obrázků v mém textu je převzata z článku [3], který je právě v tisku. Celkem jsme se na obrázcích podíleli tři: kolegyně RNDr. Jana Hromadová, Ph.D. (PC-stereoobrázky a úpravy obrázků pro tisk), Jakub Šaroun (úpravy obrázků pro tisk) a já. Staré rysy a vyfotografované modely jsou majetkem Katedry didaktiky matematiky. Svým spolupracovníkům srdečně děkuji.

Literatura

[1] A. Čenský, *Okenní a dveřní otvory. Tradice z pohledu dneška*, Grada Publishing, Praha, 2005.

[2] R. Štíchová, *Geometrie v architektuře Santiniho-Aichla*, diplomová práce, MFF UK, Praha, 2008.

[3] A. Šarounová, *Sčítání křivek*, Učitel matematiky, 2014 (v tisku).

PhDr. Alena Šarounová, CSc.
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
sarounov@karlin.mff.cuni.cz

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA – JEDNA Z CEST K MATEMATICE

Leo Boček

Před dvěma lety jsme slavili 150 let od založení Jednoty českých matematiků a fyziků, jedné z nejstarších vědeckých společností Evropy. Jejím hlavním posláním a úkolem je nejen podpora matematiky a fyziky jako vědy, ale i péče o výuku těchto předmětů na základních, středních i vysokých školách. Patří sem i péče o talentované žáky uvedených oborů. Zvláště v době mezi oběma světovými válkami plnila Jednota českých matematiků a fyziků tyto své úkoly velmi účinně, měla své vlastní nakladatelství a tiskárnu a vedle učebnic vydávala i další literaturu pro zájemce o matematiku a fyziku. Jednota vydávala také Časopis pro pěstování matematiky a fyziky a v Příloze tohoto časopisu, později v Rozhledech matematicko-přírodovědních, přinášela pro středoškolské studenty různé matematické, ale i fyzikální úlohy, a také úlohy z deskriptivní geometrie. Rovněž na tuto tradici navázala Matematická olympiáda, první předmětová olympiáda na našich školách. Vznikla v roce 1951 z iniciativy profesora Eduarda Čecha, který se vedle své vědecké práce v diferenciální geometrii a topologii hodně zabýval i otázkami výuky matematiky, včetně psaní učebnic pro střední školy. Dalšími pracovníky při zrodu MO byli slovenský matematik profesor Jur Hronec a profesor František Kahuda, učitel matematiky a fyziky v Brně, pozdější ministr školství a mimo jiné i předseda Jednoty v letech 1956–69. Československá MO se mohla opřít jednak o výše zmíněnou tradici vypisování úloh, ale také o zkušenosti kolegů v Polsku a v Sovětském svazu, kde se MO konala už v dříve. U nás proběhl první ročník MO ve školním roce 1951–52 ve dvou kategoriích, kategorie A byla určena pro poslední dva ročníky středních škol, kategorie B pro první a druhé ročníky. Hlavním vyhlašovatelem soutěže MO bylo Ministerstvo školství, věd a umění, odborně zajišťoval soutěž Ústřední matematický ústav, dnes Matematický ústav AV ČR, a samozřejmě Jednota čsl. matematiků a fyziků. Dnes soutěží v kategorii A studenti posledních dvou ročníků středních škol, v kategorii B studenti druhých ročníků, v kategorii C studenti prvních ročníků, a vždy také studenti odpovídajících ročníků gymnázií. Pro žáky základních škol a žáky nižších ročníků víceletých gymnázií jsou určeny kategorie Z5 až Z9. Poznamenejme, že žák může soutěžit i v kategorii, která je určena pro žáky vyšší třídy než je třída, kterou právě studuje.

Hlavními cíli Matematické olympiády byly při jejím vyhlášení a jsou jimi v podstatě i dnes:

1) zvýšit úroveň výuky matematiky,
2) získat větší zájem mládeže o studium technických oborů.

Domnívám se, že ten první cíl plní MO velmi dobře. Spolu s MO vzniklo velké množství různých matematických korespondenčních seminářů, konají se matematická soustředění úspěšných řešitelů úloh MO, vyšlo přes 60 svazků edice

Škola mladých matematiků, takže matematické znalosti dnešních účastníků MO jsou nesrovnatelně vyšší, než tomu bylo v prvních letech soutěže. Tenkrát bylo k dispozici pouze několik svazků edice Brána k vědění a edice Cesta k vědění. Je ovšem třeba konstatovat, že i úlohy MO byly podstatně snadněji řešitelné než je tomu dnes. Ilustroval bych to pouze na jednom příkladě. V 2. ročníku MO dokazovali studenti v kategorii B nerovnost: *Pro libovolná kladná čísla a, b, c platí, že součet čísel a/b, b/c, c/a je aspoň 3. Dokažte.* Zkuste si nejdříve nerovnost dokázat sami. Vzorové řešení je tak trochu umělé. Protože jsou daná čísla cyklicky uspořádaná, bude třeba vždy při klasickém postupu rozdělit řešení na dva případy. Dnešní studenti by pouze uvedli, že dokazovaná nerovnost plyne okamžitě z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

Studenti, kteří se dnes zajímají o matematiku a řeší úlohy MO, mají velmi slušné znalosti a zkušenosti s řešením matematických úloh, znají a dovedou přitom použít znalosti Cauchyovy nerovnosti pro skalární součin, Ptolemaiovy nerovnosti pro konvexní čtyřúhelník, dovedou určit extrémy funkce pomocí diferenciálního počtu. Je pravda, že jde jen o malou část studentů, neměli bychom to brát jako důkaz všeobecné vyšší úrovně výuky matematiky. Ale je to pozitivní výsledek, na kterém má svůj podíl i MO.

Pokud se týká druhého cíle MO – získat studenty větší měrou pro studium technických oborů, tak výsledek je někdy spíše opačný. Například Juraj Bosák z Bratislavy přiznal v jednom rozhovoru, že chtěl původně studovat na vysoké škole technické, matematika se mu zdála být vědou příliš abstraktní. Při řešení úloh MO poznal krásu matematiky a po jejím úspěšném studiu pracoval v Matematickém ústavu Slovenské akademie věd a dosáhl významných výsledků třeba v teorii grafů. A podobných případů bychom mohli uvést více. Na druhé straně nutno uvést, že ti úspěšní řešitelé úloh MO, kteří šli studovat vysokou školu technickou, byli úspěšní i tam, rozhodně zvládli velmi dobře studium matematiky v prvních ročnících studia na technice.

Myslím, že můžeme s plnou vážností vyslovit tvrzení, že Matematická olympiáda je dobrou a hodně významnou cestou k matematice. Není to matematické tvrzení v pravém slova smyslu, takže ani důkaz nemůže být matematicky precizní. Jen si ukážeme, jak mnoho matematiků bylo v době svého středoškolského studia úspěšnými soutěžícími v MO. Není třeba jít daleko a začneme „nahoře“. Děkanem Matematicko-fyzikální fakulty UK je dnes profesor Jan Kratochvíl. A student pardubického gymnázia Jan Kratochvíl patřil mezi vítěze celostátního kola MO v letech 1975, 1976 i 1977, tedy v 24.–26. ročníku MO. Přes zdravotní indispozici nechtěl tenkrát vzdát ani účast v celostátním kole dalšího ročníku, které se konalo v Jihlavě. Přivezl ho tam autem jeho profesor matematiky, mimochodem dnešní předseda JČMF doktor Josef Kubát, a Jan Kratochvíl se na tomto klání umístil na 1.–3. místě. V zájmu objektivity je nutno zde uvést vyjádření profesora Kratochvíla, že jeho zájem o matematiku byl už na střední škole tak hluboký, že by byl studoval matematiku i kdyby nebyl tak úspěšným v MO nebo kdyby MO vůbec neexistovala. Podobně profesor Jiří Anděl uvedl, že úspěch v MO bral pouze jako potvrzení toho, že jeho rozhodnutí studovat matematiku bylo správné. Profesor Ivan Netuka (vítěz 11. ročníku MO a pozdější děkan MFF) hodnotil MO významněji, když prohlásil, že MO byla pro něho rozhodujícím činitelem při výběru dalšího studia po střední škole. Ocenil také, že účastníci MO jsou zpravidla i úspěšnými studenty na vysoké škole.

Dalším příkladem je dnešní proděkan MFF UK profesor Jan Trlifaj. Byl třikrát úspěšným řešitelem úloh celostátního kola MO, a to v 21.–23. ročníku. S ohledem na složení účastníků této konference, musíme připomenout i docenta Jaroslava Šedivého, propagátora modernizace výuky matematiky, autora celé řady učebnic matematiky a organizátora mnoha matematických konferencí. Patřil mezi vítěze hned 2. ročníku MO v roce 1953, kde v celostátním kole řešil mimo jiné tuto úlohu: *Dokažte, že pro každé celé nezáporné číslo n je číslo $2^{12n+8} - 3^{6n+2}$ dělitelné číslem* 13. Zatímco jeho kolega Jan Hejcman (pozdější pracovník katedry matematické analýzy) použil matematickou indukci, Jaroušek Šedivý k danému výrazu přičetl a odečetl číslo $2^8 \cdot 3^{6n}$ a po úpravě stačilo stačilo použít známé pravidlo, že $a - b$ dělí $a^k - b^k$, kde k je přirozené.

A tak bychom mohli vzít jména dalších současných matematiků na fakultě a skoro ve všech případech najdeme stejná jména mezi řešiteli úloh MO. Není ani třeba se omezit na starší pracovníky fakulty. Jako příklad můžeme vzít doktora Libora Barto, pracovníka katedry algebry, který získal nedávno cenu Nadace K. Janečka a byl vítězem 46. a 47. ročníku MO.

Rozhodně neplatí uvedené jen o MFF. Podobně bychom mohli uvádět matematiky z Matematického ústavu Akademie věd, např. profesora Pavla Pudláka, který získal loni jako jediný v ČR prestižní grant od Evropské rady pro výzkum (ERC), ale už v 19. ročníku MO patřil mezi vítěze. Není možné zde uvést všechny matematiky na katedrách matematiky českých vysokých škol a jejich úspěchy v MO. A týká se to i vysokých škol technického zaměření.

Je pravda, že málo velmi úspěšných řešitelů úloh MO v celostátním, dnes ústředním kole MO, se po studiu věnuje pedagogické práci na střední škole. Mnozí však působí na fakultách připravujících budoucí učitele matematiky. Tady bych jmenoval například profesora Jiřího Cihláře z Univerzity J. E. Purkyně v Ústí nad Labem, na které pracuje také doktor Jan Spěvák, vítěz 45. ročníku MO. Na Pedagogické fakultě UK Praha učí profesor Ladislav Kvasz, doktor Antonín Jančařík a profesor Milan Hejný. I jejich jména najdete v ročenkách MO mezi úspěšnými soutěžícími. Stejně to platí o jménech Jaromír Vosmanský, Otto Reimer (oba působili na Masarykově univerzitě v Brně) nebo Karel Mačák (TU Liberec).

Všimli jste si, že jsme zde neuvedli žádnou studentku úspěšnou v MO a její dnešní působiště? Ne, že by nebyly. Ale dívky mění obyčejně své příjmení a tak je těžké hledání, které matematičky byly také úspěšnými účastnicemi v MO.

Jak asi víte, od roku 1959 se konají z iniciativy rumunských kolegů Mezinárodní matematické olympiády (MMO). To, co jsme uvedli o vítězích naší MO, platí dvojnásobně o studentech, kteří se probojovali až na MMO. Kolega H. Sewerin z Německa se snažil zjistit, jak se uplatnili v matematice úspěšní účastníci MMO. Je přirozené, že většina působí na akademických postech a už po málo letech po ukončení vysokoškolského studia publikují vědecké práce, jak je možno zjistit v databázích Mathematical Reviews, Zentralblatt Mathematik nebo v Referativním žurnálu. Ve své knize jmenuje zvláště maďarské matematiky László Lovásze a Josefa Pelikána (byl organizátorem MMO v Maďarsku v roce 1983), Marcina E. Kuczmu z Polska a další. Z čsl. účastníků prvních MMO se pozitivně vyjadřuje o Bohuslavu Divišovi, který bohužel velmi mladý zemřel v USA, nebo o Davidu Preissovi, který působí dnes ve Velké Británii.

Když pražský výbor MO pořádal soustředění úspěšných řešitelů MO, přivedla jedna maminka k odjezdu účastníků svého syna, tehdy ještě žáka základní školy, který se chtěl soustředění také zúčastnit. Vzhledem k tomu, že někdo účast odřekl, bylo mu vyhověno. Žák se jmenoval Jan Nekovář, byl pětkrát úspěšným řešitelem celostátního kola MO a třikrát reprezentoval úspěšně Československo na MMO. Byl by asi reprezentoval čtyřikrát, ale v roce 1980 se zcela výjimečně MMO nekonala. Dnes je Jan Nekovář profesorem na Université Paris, v roce 2004 přednášel na MFF v rámci tzv. Jarníkovských přednášek. I další velmi úspěšný československý reprezentant na MMO Igor Kříž, dnes profesor na Michiganské univerzitě v USA, měl u nás Jarníkovskou přednášku a nedávno vydal v angličtině spolu s profesorem Alešem Pultrem z MFF UK rozsáhlou knihu zaměřenou na matematickou analýzu. Udržuje tak dobré kontakty se svou Alma Mater a rodnou zemí.

Jak shrnout uvedené výsledky? Můžeme a musíme konstatovat, že úspěšní řešitelé úloh MO zůstávají většinou matematice věrní a po studiu matematiky (nebo i fyziky) se stávají pracovníky jak na vysokých školách, tak v různých výzkumných ústavech naší republiky, někdy i na prestižních institucích zahraničních. Jsou samozřejmě vyjímky, kdy úspěšný soutěžící v MO šel studovat lékařství. Na druhé straně ne každý matematik byl účastníkem MO. Ale průnik uvažovaných dvou množin osob je velký. Někteří účastníci MO pracují v matematice, jen dočasně se věnovali vyššímu poslání, např. profesor Petr Vopěnka byl několik let ministrem školství, mládeže a tělovýchovy, profesor Milan Hejný náměstkem ministra školství.

Nemohu se zde nezmínit o faktu, že Matematická olympiáda zůstala v naši zemi institucí federální. Úlohy jednotlivých ročníků připravujeme společně se slovenskými kolegy, velkou zásluhu má na tom docent Jaromír Šimša, dnešní předseda Ústřední komise MO, který založil společnou českou a slovenskou úlohovou komisi MO pro kategorie A, B, C a podobně pracuje i společná komise pro výběr úloh pro kategorie Z.

Matematická olympiáda by se nemohla konat bez obětavé práce mnoha učitelů základních a středních škol. Úlohy připravují výše uvedené úlohové komise, i v nich pracuje řada učitelů, ale oprava úloh prvních kol soutěže je už výlučně prací učitelů na školách. A odměnou je jim téměř vždy jen radost z úspěchů jejich žáků v dalších kolech MO.

Pro zajímavost a srovnání uvedeme ještě výsledky Československa, České republiky a Slovenské republiky na posledních Mezinárodních matematických olympiádách. Jde ovšem o neoficiální pořadí zemí podle součtu bodů členů družstva. Oficiálně jde o soutěž jednotlivců.

Rok	**Místo konání**	**Pořadí čsl. družstva**	**Počet zemí**
1982	Maďarsko	7	30
1983	Francie	8	32
1984	Československo	13	34
1985	Finsko	12	38
1986	Polsko	9	37
1987	Kuba	9	42
1988	Austrálie	14	28
1989	Spolková rep. Německo	6	50
1990	Čínská lidová republika	8	54
1991	Švédsko	11	56
1992	Rusko	13	56

Rok	**Místo konání**	**Pořadí ČR**	**Pořadí SR**	**Počet zemí**
1993	Turecko	10	12	69
1994	Hong-Kong	21	22	69
1995	Kanada	17	21	73
1996	Indie	28	17	75
1997	Argentina	18	36	82
1998	Tajwan	15	33	76
1999	Rumunsko	49	21	81
2000	Korea	42	18	82
2001	USA	45	48	83
2002	Velká Británie	28	25	84
2003	Japonsko	34	35	82
2004	Řecko	34	31	85
2005	Mexiko	16	20	91
2006	Slovinsko	48	18	90
2007	Vietnam	40	37	93
2008	Španělsko	39	46	97
2009	Německo	40	53	104
2010	Kazachstán	48	39	96
2011	Nizozemsko	39	34	101
2012	Argentina	47	44	100
2013	Kolumbie	37	34	97
2014	Jihoafrická republika	32	34	101

Na závěr uvádíme, které země se umístily na prvních pěti místech na posledních MMO.

<table>
<tr><th>Rok</th><th>1. místo</th><th>2. místo</th><th>3. místo</th><th>4. místo</th><th>5. místo</th></tr>
<tr><td>1997</td><td>ČLR</td><td>Maďarsko</td><td>Írán</td><td colspan="2">Rusko + USA</td></tr>
<tr><td>1998</td><td>Írán</td><td>Bulharsko</td><td colspan="2">Maďarsko + USA</td><td>Tajwan</td></tr>
<tr><td>1999</td><td colspan="2">ČLR + Rusko</td><td>Vietnam</td><td>Rumunsko</td><td>Bulharsko</td></tr>
<tr><td>2000</td><td>ČLR</td><td>Rusko</td><td>USA</td><td>Korea</td><td>Bulharsko</td></tr>
<tr><td>2001</td><td>ČLR</td><td colspan="2">Rusko + USA</td><td colspan="2">Bulharsko + Korea</td></tr>
<tr><td>2002</td><td>ČLR</td><td>Rusko</td><td>USA</td><td>Bulharsko</td><td>Vietnam</td></tr>
<tr><td>2003</td><td>Bulharsko</td><td>ČLR</td><td>USA</td><td>Vietnam</td><td>Rusko</td></tr>
<tr><td>2004</td><td>ČLR</td><td>USA</td><td>Rusko</td><td>Vietnam</td><td>Bulharsko</td></tr>
<tr><td>2005</td><td>ČLR</td><td>USA</td><td>Rusko</td><td>Írán</td><td>Korea</td></tr>
<tr><td>2006</td><td>ČLR</td><td>Rusko</td><td>Korea</td><td>Německo</td><td>USA</td></tr>
<tr><td>2007</td><td>Rusko</td><td>ČLR</td><td colspan="2">Vietnam + Korea</td><td>USA</td></tr>
<tr><td>2008</td><td>ČLR</td><td>Rusko</td><td>USA</td><td>Korea</td><td>Írán</td></tr>
<tr><td>2009</td><td>ČLR</td><td>Japonsko</td><td>Rusko</td><td>Korea</td><td>KLDR</td></tr>
<tr><td>2010</td><td>ČLR</td><td>Rusko</td><td>USA</td><td>Korea</td><td>Kazachstán</td></tr>
<tr><td>2011</td><td>ČLR</td><td>USA</td><td>Singapur</td><td>Rusko</td><td>Thajsko</td></tr>
<tr><td>2012</td><td>Korea</td><td>ČLR</td><td>USA</td><td>Rusko</td><td>Kanada</td></tr>
<tr><td>2013</td><td>ČLR</td><td>Korea</td><td>USA</td><td>Rusko</td><td>KLDR</td></tr>
<tr><td>2014</td><td>ČLR</td><td>USA</td><td>Tajwan</td><td>Rusko</td><td>Japonsko</td></tr>
</table>

Literatura

[1] H. Sewerin, *Mathematische Schüllerwettbewerbe*, Manz Verlag, München, 1982.

[2] Ročenky matematické olympiády, SPN Praha, JČMF Praha, UP Olomouc.

doc. RNDr. Leo Boček, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
bocek@karlin.mff.cuni.cz

Katedra matematiky PřF UJEP
České mládeže 8
400 96 Ústí nad Labem

CESTY K MATEMATICE
Sborník konference

Praha, 25. a 26. září 2014

Antonín Slavík (ed.)

Vydal
MATFYZPRESS
vydavatelství
Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 466. publikaci

Vydání první
Praha 2014

ISBN 978-80-7378-272-6