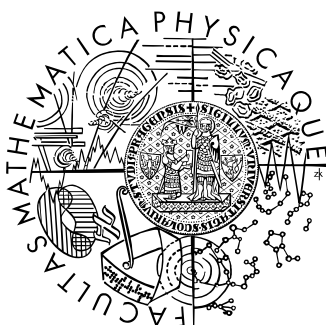


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Věra Šetmaňuková

Elipsa

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.

Studijní program: Matematika, učitelství matematiky v kombinaci s deskriptivní geometrií pro SŠ

2009

Ráda bych tímto poděkovala všem, kteří mě v mé práci podporovali a byli mi oporou. Největší díky ovšem patří paní RNDr. Janě Hromadové, Ph.D., jež byla vedoucí této bakalářské práce. Děkuji jí za cenné rady, za zapůjčení odborné literatury a za skvělou spolupráci. Za další zapůjčenou literaturu děkuji panu J. Hadovi. V neposlední řadě bych chtěla poděkovat také svému příteli za dobré zázemí a psychickou podporu. Děkuji.

Prohlašuji, že jsem svou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Aši dne 20.5.2009

Věra Šetmaňuková

OBSAH

Abstrakt	4
Úvod	5
KAPITOLA 1. : Definice a základní vlastnosti	6 - 12
1.1 Definice 1.1 – množinová definice	6
1.2 Analytické vyjádření – rovnice elipsy	8
1.2.1 Obecná rovnice	8
1.2.2 Parametrická vyjádření	10
1.3 Definice 1.2 – společná všem kuželosečkám	11
KAPITOLA 2. : Quételetova – Dandelinova věta	13 - 18
2.1 Elipsa jako řez rotační kuželové plochy	13
2.2 Elipsa jako řez rotační válcové plochy	16
KAPITOLA 3. : Tečna elipsy a ohniskové vlastnosti	19 - 23
3.1 Vzájemná poloha přímky a elipsy	19
3.2 Tečna elipsy	20
3.3 Normála elipsy	21
3.4 Ohniskové vlastnosti	22
KAPITOLA 4. : Konstrukce elipsy	24 - 44
4.1 Konstrukce vycházející z definice elipsy	24
4.1.1 Bodová konstrukce I	24
4.1.2 Zahradnická konstrukce	25
4.2 Kinematické vytvoření elipsy	25
4.2.1 Proužková konstrukce I	25
4.2.1.1 Rozdílová proužková konstrukce	26
4.2.2 Proužková konstrukce II	27
4.2.2.1 Součtová proužková konstrukce	27
4.3 Konstrukce využívající afinní vztah elipsy a kružnice	28
4.3.1 Obraz kružnice v osově afinitě	28
4.3.2 Trojúhelníková konstrukce	29
4.3.2.1 Dohledání normál – součtová konstrukce	31
4.3.2.2 Dohledání normál – rozdílová konstrukce	32
4.3.3 Normálová konstrukce I	33
4.3.4 Normálová konstrukce II	33
4.3.5 Bodová konstrukce II	34
4.4 Konstrukce pomocí sdružených průměrů elipsy	35
4.4.1 Sdružené průměry	35
4.4.2 Rytzova konstrukce	37
4.4.3 Frézierova konstrukce	39
4.4.4 Chaslesova konstrukce	41
4.4.5 Příčková konstrukce	42

4.5 Další konstrukce elipsy	43
4.5.1 Konstrukce elipsy ohýbáním papíru	43
KAPITOLA 5. : Elipsografy	45 - 47
5.1 Braunův elipsograf	45
5.2 Burstowův elipsograf	46
5.3 Bramerův elipsograf	46
5.4 Artobolevského elipsograf	47
KAPITOLA 6. : Aproximace elipsy kruhovými oblouky	48 - 50
6.1 Hyperoskulační kružnice	48
6.2 Čtyřobloukový ovál	49
6.3 Osmiobloukový ovál	49
Závěr	51
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	52
PŘÍLOHA :	
Sbírka příkladů	53 – 65

Abstrakt

Název práce: Elipsa

Autor: Věra Šetmaňuková

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.

e-mail vedoucího: Jana.Hromadova@mff.cuni.cz

Abstrakt

Tato práce je určena široké veřejnosti, zejména lidem se zájmem o geometrii. Lze ji ovšem použít i jako didaktickou pomůcku při výuce kuželoseček – jmenovitě elipsy – na středních školách. Jedná se o ucelený text shrnující definice, analytická vyjádření, věty, vlastnosti a konstrukce elipsy. Jednotlivé konstrukce jsou rozděleny do několika kategorií podle toho, z jakých vlastností nebo předpokladů vycházejí. Najdete zde jak notoricky známé konstrukce (Rytzova, trojúhelníková, zahradnická, ...), tak i několik méně známých až netypických konstrukcí (Frézierova, Chaslesova, konstrukce ohýbáním papíru,...). Navíc jako přílohu práce obsahuje sbírku příkladů různé obtížnosti (např. od narýsování elipsy dané vedlejší poloosou a bodem, až po důkaz funkce Artobolevského elipsografu). Výhodou je, že některé příklady mají vyhotovené řešení a je možné si je ihned zkontrolovat. Ve většině současných učebnic najdeme už jen útržky toho, co vytvořená bakalářská práce nabízí. Text je doplněn názornými obrázky a rysy, vytvořenými v aplikacích DesignCAD pro 2000, Rhinoceros a barevnými fotografiemi.

Klíčová slova: elipsa, normála a tečna elipsy, konstrukce elipsy, elipsograf

Title: The ellipse

Author: Věra Šetmaňuková

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.

Supervisor's e-mail address: Jana.Hromadova@mff.cuni.cz

Abstract

This work is meant for general public, especially for people with interest in geometry. It can be also used as didactic help by education of conics (ellipses) at secondary schools. It is a comprehensive text which includes definitions, theorems, analytical representations, properties and constructions of ellipses. These constructions are divided into separate categories according to their presumptions or their properties. You can find there both notorious constructions (Rytz's con., Triangular con., Horticultural con., ...) and several less known, may be untypical constructions (Frézier's con., Chasles's con., Bend Paper con.,...). In addition you can find a compilation of examples in addendum of this work. The examples have various difficultness (e.g. to delineate an ellipse, if you know its semimajor axis and one point; or to prove a functionality of Artobolevsky's ellipsograph). Its advantage is that some examples have executed their solutions, so it is possible to check them quickly. Today it is hard to find any textbook where every information is together like here. The text is supplemented with illustrative pictures made in DesignCAD pro 2000, Rhinoceros and digital photographs.

Keywords: ellipse, normal and tangent of ellipse, construction of ellipses, ellipsograph

Úvod

Bakalářská práce *Elipsa* si klade za hlavní cíl seznámit čtenáře s vlastnostmi a konstrukcemi elipsy. Je určena nejen studentům a učitelům, ale také příznivcům matematiky a geometrie, či široké veřejnosti, neboť nepředpokládá kromě znalostí středoškolské matematiky žádné speciální znalosti z oblasti deskriptivní geometrie a obecné geometrie. Vše potřebné je uvedeno v podobě definic, vět a tvrzení. Práce je sestavena jako učební text prohlubující a scelující znalosti o elipse, lze ji použít jako didaktickou pomůcku.

Práce je rozdělena do šesti kapitol. První z nich definuje a popisuje elipsu. Pro mnohé čtenáře může sloužit spíše jako připomenutí termínů, nejzákladnějších vlastností a analytických vyjádření elipsy.

Druhá kapitola je celá věnována Quételetově-Dandelinově větě a jejímu důkazu. Nahlížíme zde na elipsu jako na řez rotační kuželové, resp. válcové plochy a tím vysvětlujeme zařazení elipsy mezi kuželosečky.

Následující kapitola zavádí další pojmy, jakými jsou např. tečna, normála a evoluta elipsy. Vyzdvihuje velice důležité, tzv. ohniskové vlastnosti, díky kterým je elipsa významnou křivkou nejen v geometrii.

Kapitola čtvrtá je jádrem této bakalářské práce. Obsahuje souhrn mnoha různých konstrukcí elipsy. Konstrukce jsou rozděleny do několika kategorií (podkapitol) podle toho, z jakých vlastností nebo předpokladů vycházejí. Některé podkapitoly jsou doplněny o potřebné informace, věty či tvrzení, které je nutné pro dané konstrukce znát. Na tomto místě bych ráda poznamenala, že na začátku psaní této práce jsem netušila, že možností jak elipsu zkonstruovat bude tolik. Žádné práce shrnující konstrukce elipsy bohužel neznám, a proto mě udivilo číslo 16 - počet konstrukcí, které jsou uvedeny v této práci.

Pátá kapitola jistě osloví čtenáře – techniky, jelikož je to kapitola věnovaná elipsografům, což jsou přístroje vykreslující elipsy, a principům, na kterých jsou založeny. Uvedeny jsou jen ty nejznámější, základní, jakými jsou např. Braunův a Bramerův elipsograf.

Poslední kapitola uvádí aproximace elipsy kruhovými oblouky, s nimiž je možné elipsu dobře nahradit. Využití mají hlavně při „ručním“ rýsování, protože díky nim nemusíme mnohdy ani použít křivítko.

Všechny kapitoly jsou doplněny řadou přehledných obrázků, které byly vytvořeny v programu DesignCAD pro 2000 a nebo v aplikaci Rhinoceros.

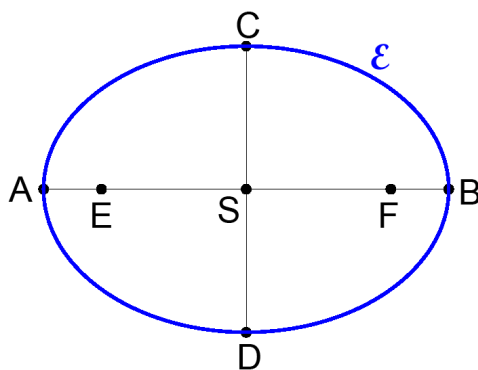
Přílohou bakalářské práce je sbírka úloh vztahujících se k řešení problematiky kolem elipsy. Úlohy jsou různého stupně obtížnosti a některé mají vyhotovený i výsledek, který se nachází na konci sbírky. Sbírkou v podstatě představuje pracovní listy, které je možné použít při výuce, v testech nebo jenom jako kontrolu pochopení látky vysvětlené v této práci.

Součástí bakalářské práce je i přiložené CD, na němž se nachází celá bakalářská práce v elektronické podobě. Dále jsou zde všechny obrázky vytvořené ve výše jmenovaných aplikacích.

KAPITOLA 1. : Definice a základní vlastnosti

Způsobů nadefinování elipsy je několik. V průběhu se seznámíme s těmi nejdůležitějšími definicemi, také si odvodíme vlastnosti elipsy a některé méně známé, přesto zajímavé a důležité věty.

Na **obrázku 1.1** je naryšovaná **elipsa**, které se budeme v následujících kapitolách věnovat, proto si ji pořádně prohlédněme!



Obrázek 1.1 - Elipsa

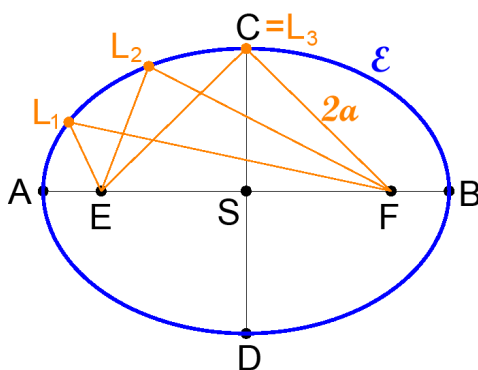
1.1 Definice 1.1 – množinová definice

Definice 1.1 (Obrázek 1.2): Necht' jsou dány dva pevné různé body E, F v rovině a konstanta $a > 0$, pro kterou platí $2a > |EF|$.

Elipsou $\mathcal{E}$ budeme rozumět množinu bodů, které mají konstantní součet vzdáleností od bodů E a F roven $2a$.

Tedy :
$$\mathcal{E} = \{L : |EL| + |FL| = 2a\}.$$

Body E, F nazýváme **ohniska** (někdy také **fokusy**) elipsy a vzdálenosti $|EL|, |FL|$ libovolného bodu elipsy od ohnisek jsou jeho **průvodiče**.



Obrázek 1.2 - Definice 1.1

Poznámka:

: Definice 1.1 představuje elipsu jako množinu definovanou pomocí vzdálenosti. Proto se tiše předpokládá, že se pohybujeme v Eukleidovské rovině E_2 .

Pro body A, B ležící na spojnici EF platí:

$$|AE| + |AF| = |BE| + |BF| = 2a$$

$$|AF| = |AE| + |EF| = |FB| + |EF|$$

$$2a = |AE| + |AF| = |AE| + |EF| + |FB| = |AB|$$

$$\Rightarrow a = |AS| = |SB|$$

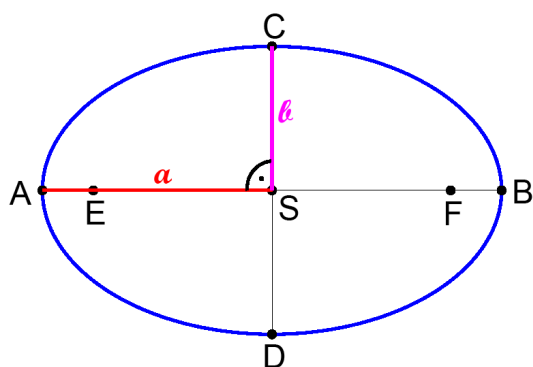
Z rovnosti vyplývá, že zvolenou konstantu a představuje délka úsečky AS nebo SB .

Přímku AB budeme nazývat **hlavní osou** elipsy. Elipsa je podle hlavní osy souměrná. Všimněme si, že je souměrná i podle přímky CD . Tu budeme nazývat **vedlejší osa** elipsy. Hlavní a vedlejší osy jsou navzájem kolmé.

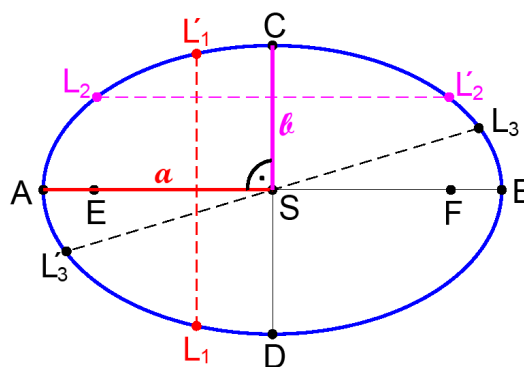
Konstantě a budeme říkat **délka hlavní poloosy**. Zavedeme si další konstantu $b = |CS| = |SD|$ tzv. **délku vedlejší poloosy**.

Body A, B, C, D jsou **vrcholy elipsy**, přičemž A, B nazýváme **hlavními vrcholy** a C, D **vedlejšími vrcholy**.

Hlavní a vedlejší osy se protínají v bodě S , který je středem souměrnosti elipsy, proto má název **střed elipsy**. (viz. **obrázek 1.3 a 1.4**).



Obrázek 1.3 – Hlavní a vedlejší osy elipsy



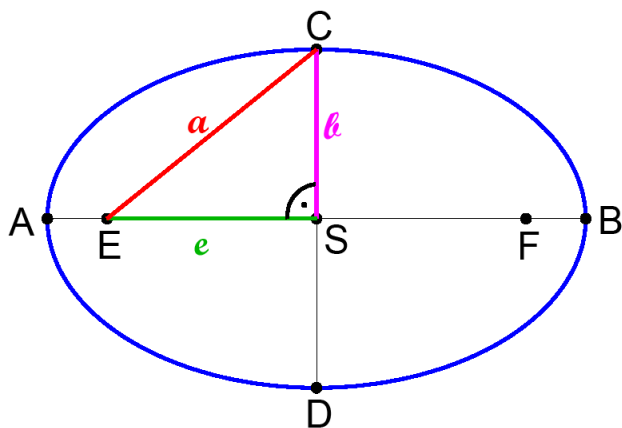
Obrázek 1.4 – Souměrnosti elipsy

Vrátíme se na chvíli k **obrázku 1.2**, ten popisoval elipsu jako množinu bodů s konstantním součtem vzdáleností od daných ohnisek E, F . Pokud jsme si za jeden libovolný bod elipsy zvolili bod $L_3 = C$ a víme, že elipsa je podle vedlejší osy CD souměrná, platí:

$$|EC| = |CF|$$

$$|EC| + |CF| = 2a \Rightarrow |EC| = |CF| = a$$

Jestliže tedy a - délku vedlejší poloosy vyznačíme právě jako úsečku EC , objeví se nám v elipse pravoúhlý trojúhelník ESC s přeponou EC délky a , jak je tomu na **obrázku 1.5**. Odvěsna CS má délku b . Délku druhé odvěsny ES označme e , je to tzv. **lineární** (délková) **excentricita** (výstřednost) elipsy. Můžeme ji vypočítat pomocí Pythagorovy věty:



$$e^2 = a^2 - b^2$$

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Excentricita elipsy je číslo, které určuje vzdálenost ohnisek od středu elipsy.

(Pozn.: Název pochází z latiny ex = mimo ; centrum = střed)

$$e = |ES| = |FS|$$

Obrázek 1.5 - Lineární excentricita

Tvar elipsy je tedy pevně zadán jednou z dvojic: a, b
 a, e
 b, e .

1.2 Analytické vyjádření - rovnice elipsy

1.2.1 Obecná rovnice

Budeme vycházet z **definice 1.1**, tedy elipsa $\mathcal{E} = \{L : |EL| + |FL| = 2a\}$, kde E, F jsou ohniska elipsy a a je velikost hlavní poloosy.

Nyní si vhodně zvolíme kartézskou soustavu souřadnic (dále jen KSS), a to tak, že střed elipsy S bude ležet v jejím počátku. Ohniska budou mít v KSS souřadnice: $E = [-e; 0]$, $F = [e; 0]$ a libovolný bod označíme $X = [x; y]$.

Úmluva: Nadále v textu budeme používat termín elipsa v **normální poloze** vzhledem ke zvolené KSS. Bude to poloha, kdy střed elipsy leží v počátku KSS a hlavní a vedlejší osy splývají s osami souřadnicovými.

Součet vzdáleností bodu X od ohnisek E, F vyjádříme analyticky a dále budeme rovnost upravovat:

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a$$

$$(x+e)^2 + (x-e)^2 + 2y^2 - 4a^2 = -2\sqrt{(x+e)^2 + y^2} \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 + e^2 - 2a^2 = -\sqrt{(x+e)^2 + y^2} \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

$$[(x^2 + e^2) + (y^2 - 2a^2)]^2 = [(x+e)^2 + y^2][(x-e)^2 + y^2]$$

$$(x^2 + e^2)^2 + 2(x^2 + e^2)(y^2 - 2a^2) + (y^2 - 2a^2)^2 =$$

$$= [(x^2 + e^2) + (y^2 + 2ex)][(x^2 + e^2) + (y^2 - 2ex)]$$

$$\begin{aligned}
2x^2y^2 + 2e^2y^2 - 4a^2x^2 - 4a^2e^2 + y^4 - 4a^2y^2 + 4a^4 &= 2y^2(x^2 + e^2) + y^4 - 4e^2x^2 \\
-a^2x^2 - a^2e^2 - a^2y^2 + a^4 &= -e^2x^2 \\
(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - e^2)
\end{aligned}$$

V poslední rovnici si vzpomeňme na rovnost : $e^2 = a^2 - b^2$,
z té lze jednoduše odvodit, že : $b^2 = a^2 - e^2$, a tak do poslední rovnice místo $a^2 - e^2$
můžeme psát b^2 :

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad / : a^2b^2$$

po této úpravě nám vyjde tzv. **obecná (klasická) rovnice elipsy**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Poznámky:

: $a \neq 0 \wedge b \neq 0$, ale to už je splněno díky **definici 1.1**, kde $a > 0$ a
 $E \neq F \Rightarrow e \neq 0 \Rightarrow b \neq 0$ a navíc platí $2a > |EF| = 2e$.

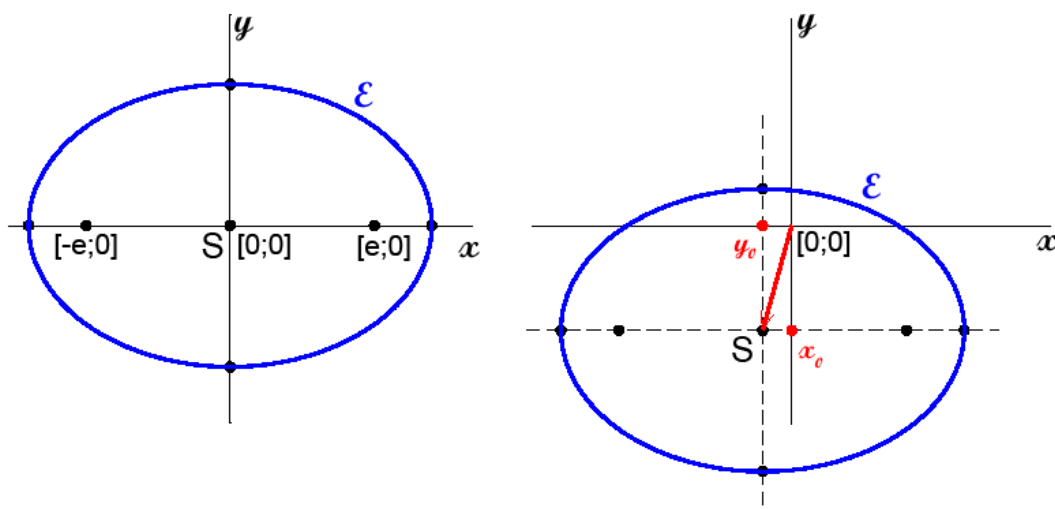
: Klasická rovnice elipsy, tak jak nám vyšla : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, je rovnicí elipsy, jež má svůj

střed S v počátku KSS. V mnohých případech se ale musí počítat s tím, že střed elipsy je
posunutý o x-ovou a y-ovou složku. Jinak řečeno, střed leží jinde než v počátku KSS.

Nechť má střed souřadnice $S = [x_0; y_0]$, potom má **obecná rovnice elipsy** tvar:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Situaci si můžete prohlédnout na **obrázku 1.6**.



Obrázek 1.6 - Elipsa v KSS se středem v počátku a v posunutí

: Připusťme nyní, že ohniska E, F splynou v jeden bod a pozastavme se nad tímto případem (i když definice elipsy to nepřipouští).

$E = F$ a tedy excentricita se bude rovnat nule, $e = 0 \Rightarrow e^2 = 0$.

Pokud se vrátíme zpátky k odvozování analytického vyjádření elipsy, vyšla nám skoro ke konci rovnost:

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$$

Nyní víme, že $e^2 = 0$ a zároveň $a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$, můžeme proto provést následující:

$$(a^2 - 0)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - 0)$$

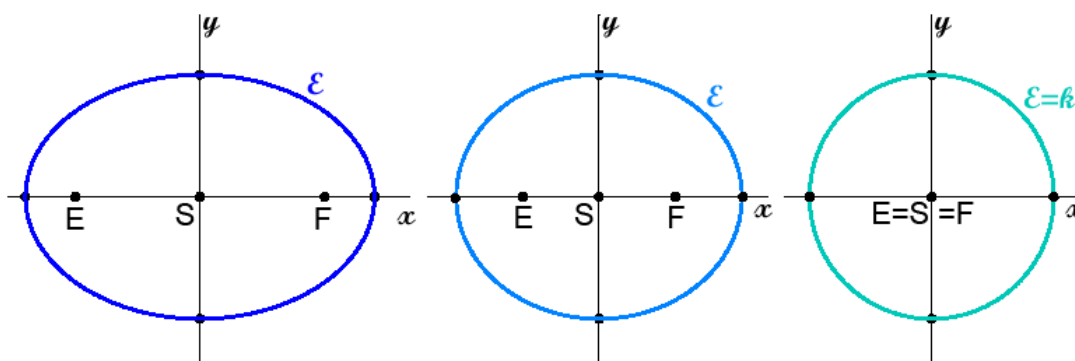
$$a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 / : a^2$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Poslední rovnice je rovnicí **kružnice** o poloměru a . Právě jsme dokázali, že limitním případem elipsy pro $e \rightarrow 0$ je kružnice, jejíž poloměr má délku hlavní poloosy a resp. i vedlejší poloosy b , protože zde platí: $b^2 = a^2 - e^2$

$$b^2 = a^2 \Rightarrow b = a.$$

Obrázek 1.7 názorně ukazuje, co se v tomto případě děje.



Obrázek 1.7 - Limitní obraz elipsy

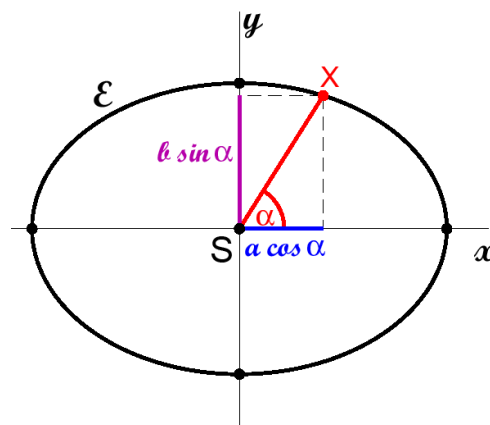
1.2.2 Parametrická vyjádření

Nejčastějším **parametrickým vyjádřením** elipsy v normální poloze je:

$$x(\alpha) = (a \cos \alpha, b \sin \alpha),$$

kde parametr $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$, někdy tzv. **excentrická anomálie**, udává úhel spojnice SX od osy x , kde bod X je libovolný bod ležící na elipse.

(viz. **obrázek 1.8**)



Obrázek 1.8 – Parametrizace elipsy

V dalším případě je elipsa popsána parametricky pomocí *racionálních funkcí* a jde tedy o **racionální parametrizaci**:

$$x(t) = \left(a \frac{1-t^2}{1+t^2}, b \frac{2t}{1+t^2} \right), \text{ kde parametr } t \in \mathbb{R}.$$

1.3 Definice 1.2 – společná všem kuželosečkám

Elipsa obecně patří mezi křivky nazývané **kuželosečky**. Podle názvu je zřejmé, že vznikne při řezu kužele rovinou. O tom si ale povíme více v dalších kapitolách.

Mezi regulární kuželosečky patří také parabola a hyperbola. Tyto tři křivky vykazují podobné vlastnosti, a to nejen společný původ (vznik řezem kužele).

Definice vychází ze společné vlastnosti kuželoseček. Budeme opět vyslovovat spíše množinovou definici založenou na poměru vzdáleností. (Protože hovoříme o vzdálenostech, pracujeme v Eukleidovské rovině.)

Definice 1.2 : *Nechť je v rovině dána přímka d a bod F , který na ní neleží. Kuželosečkou budeme rozumět množinu $k = \left\{ X : \frac{|XF|}{|X, d|} = \varepsilon \right\}$, kde ε je konstanta zvolená z intervalu $(0, +\infty)$.*

Poznámky:

: Dále platí: $|XF| : |X, d| = e : a = \varepsilon$. Číslo ε se nazývá **číselná excentricita (výstřednost)**.

: Pokud budeme konstantu ε volit pouze z intervalu $(0, 1)$, bude se jednat právě o **elipsu**.
To je zřejmé, neboť $a > e$.

: Pokud ε není z intervalu $(0, 1)$, nýbrž $\varepsilon = 1$, pak se jedná o **parabolu**.

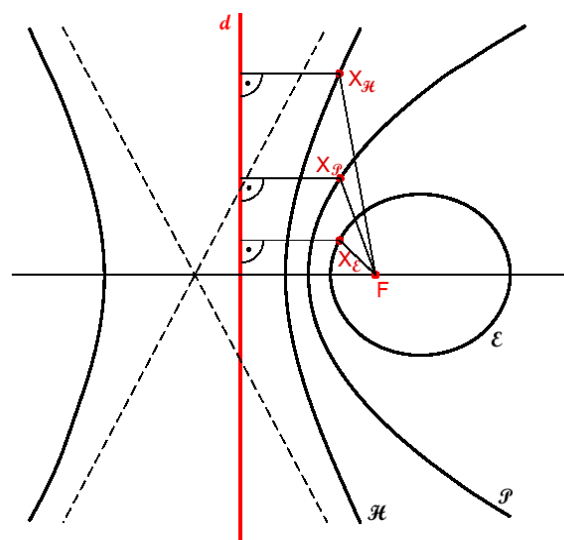
Pro $\varepsilon \in (1, +\infty)$ je definice určená **hyperbole**.

: Přímka d se nazývá **řídící přímka**, nebo též **direkční přímka**.

: Bod F je jedním z ohnisek elipsy.

K **definici 1.2** se vztahuje **obrázek 1.9**.

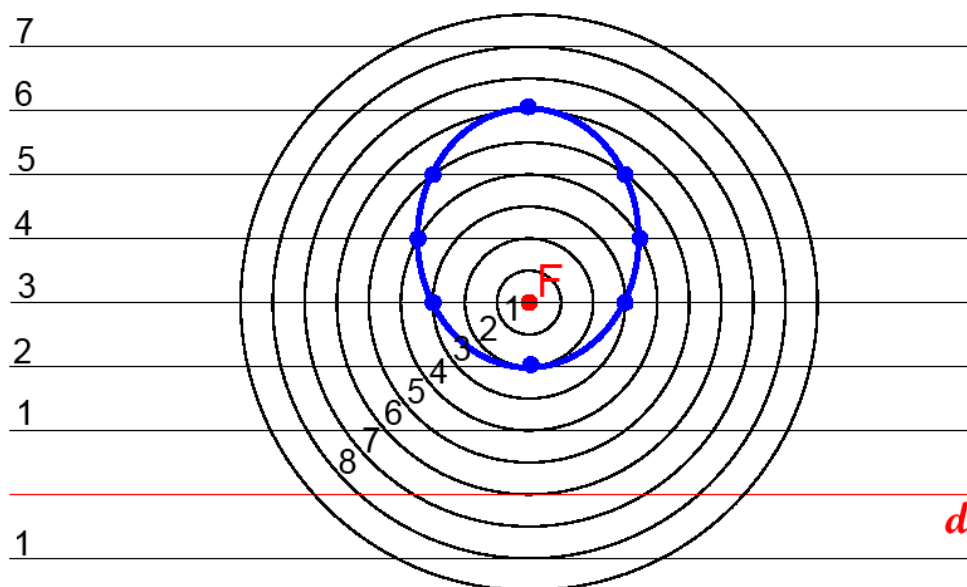
V dalším **obrázku** číslo **1.10** je znázornění konstrukce elipsy pomocí **definice 1.2**.



Obrázek 1.9 - Definice 1.2

Zvolili jsme zde bod F a řídící přímku d , číselnou výstřednost $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Tedy vzdálenost

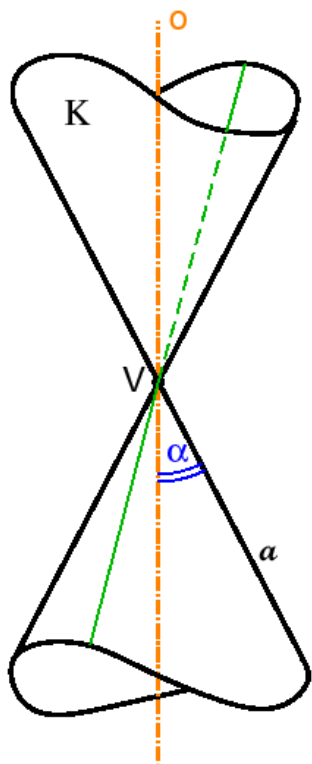
bodů elipsy od F a od d je v poměru 1:2. Pro snazší nalezení bodů elipsy je dobré vytvořit si několik soustředných kružnic se středem v F , jejichž poloměr roste o jednotku, a také si vytvořit svazek rovnoběžných přímek s přímkou d vzdálený od sebe vždy o dvojnásobek jednotky. (Abychom dodrželi poměr délek 1:2.) Jednotlivé přímky a kružnice jsou označeny postupně pořadovým číslem, tak jak se od F či od d vzdalují. Nakonec stačí jen dohledat průniky přímek a kružnic, které mají stejné označující číslo. Tyto průsečíky leží na elipse.



Obrázek 1.10 – Konstrukce elipsy pomocí definice 1.2

KAPITOLA 2.: Quételetova-Dandelinova věta

Jak již bylo zmíněno, elipsa je **kuželosečka**. Tento termín napovídá, že se jedná o křivku, kterou lze získat jako rovinný řez kuželové plochy.



Definujme tedy nejprve pojem **rotační kuželové plochy** (viz. **obrázek 2.1**):

Definice 2.1: Necht' je v eukleidovském prostoru E_3 dán pevný bod V , pevná přímka o procházející bodem V a úhel $\alpha = \angle(o, a)$, kde $a \neq o, a \perp o$ je libovolná přímka procházející bodem V .

Rotační kuželovou plochou $\kappa(V, o, \alpha)$ rozumíme množinu všech přímek procházejících bodem V (tzv. **povrchových přímek**, resp. **površek**), které svírají s přímkou o (tzv. **osou** kuželové plochy) úhel o velikosti α . Bod V se nazývá **vrchol** kuželové plochy. (čerpáno z Lávička, M. [7] str. 93)

Následující věta říká, kdy je průnikovou křivkou při rovinném řezu rotačního kuželu elipsa, resp. parabola či hyperbola.

Obrázek 2.1 - Kuželová plocha

2.1 Elipsa jako řez rotační kuželové plochy

Quételetova-Dandelinova věta 1 :

Řezem na rotační kuželové ploše rovinou, která není vrcholová, je **kuželosečka**, jejímiž ohnisky jsou dotykové body kulových ploch, které lze vepsat do kuželové plochy tak, že se dotýkají roviny řezu.

Jestliže rovina protíná všechny povrchové přímky kuželové plochy, je řezem **elipsa** (je-li rovina navíc kolmá k ose plochy, potom je řezem **kružnice** jakožto speciální případ elipsy – dotykové body vepsaných kulových ploch potom splývají);

je-li rovina řezu rovnoběžná právě s jednou površkou plochy, je řezem **parabola** (do kuželové plochy lze vepsat jedinou kulovou plochu splňující dané podmínky);

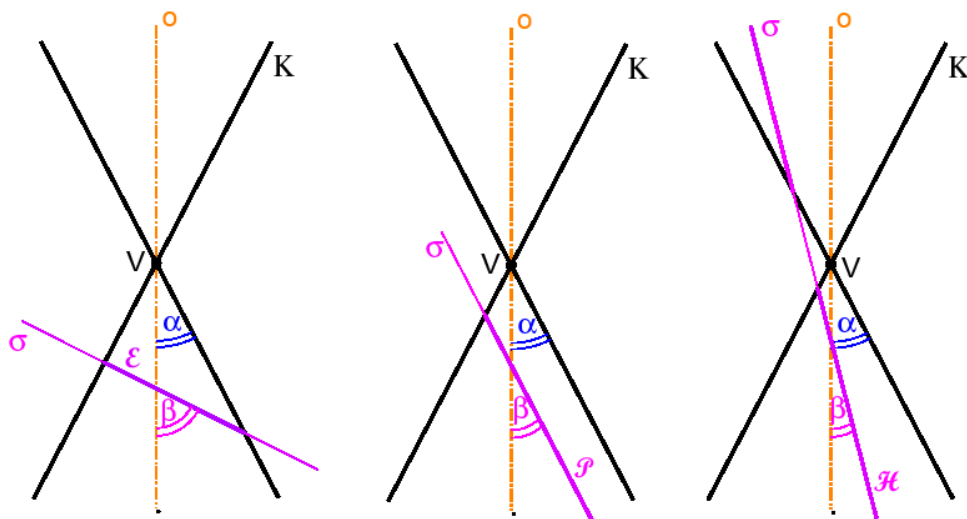
je-li rovina řezu rovnoběžná se dvěma površkami plochy, je řezem **hyperbola** a ony povrchové přímky udávají směry asymptot.

(citace z Lávička, M. [7] str. 95)

Poznámka:

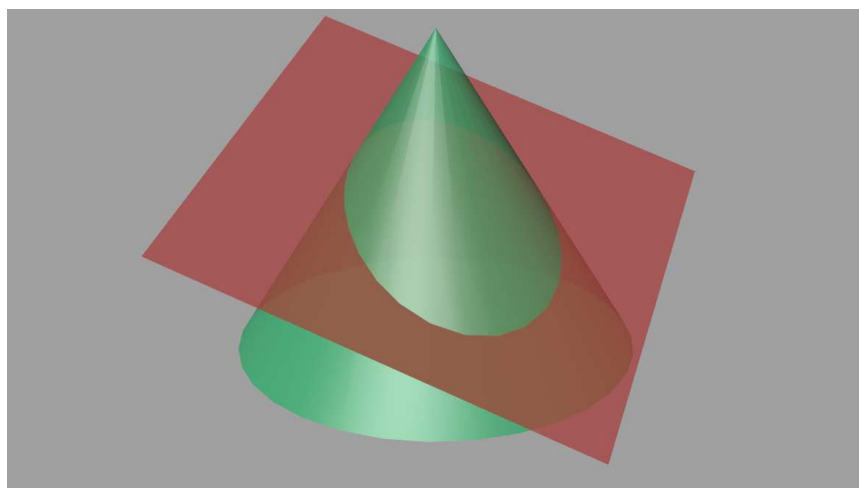
: Necht' rovina řezu σ , která není vrcholová, svírá úhel β s osou kuželové plochy o , pak pro průsečnou křivku k platí

- a) $\beta > \alpha \Leftrightarrow k$ je **elipsa** (příčemž pro $\beta = \frac{\pi}{2}$ je **kružnice**);
 b) $\beta = \alpha \Leftrightarrow k$ je **parabola**;
 c) $\beta < \alpha \Leftrightarrow k$ je **hyperbola**. (viz. **obrázek 2.2**)



Obrázek 2.2 - Řezy kuželové plochy

My se z celého znění Quételetovy-Dandelinovy věty 1 (dále jen Q-D věty 1) budeme věnovat pouze elipse. Případu, kdy „řezná“ rovina protíná všechny povrchové přímky kuželové plochy (viz. **obrázek 2.3**) a větu si pro tento případ názorně dokážeme.



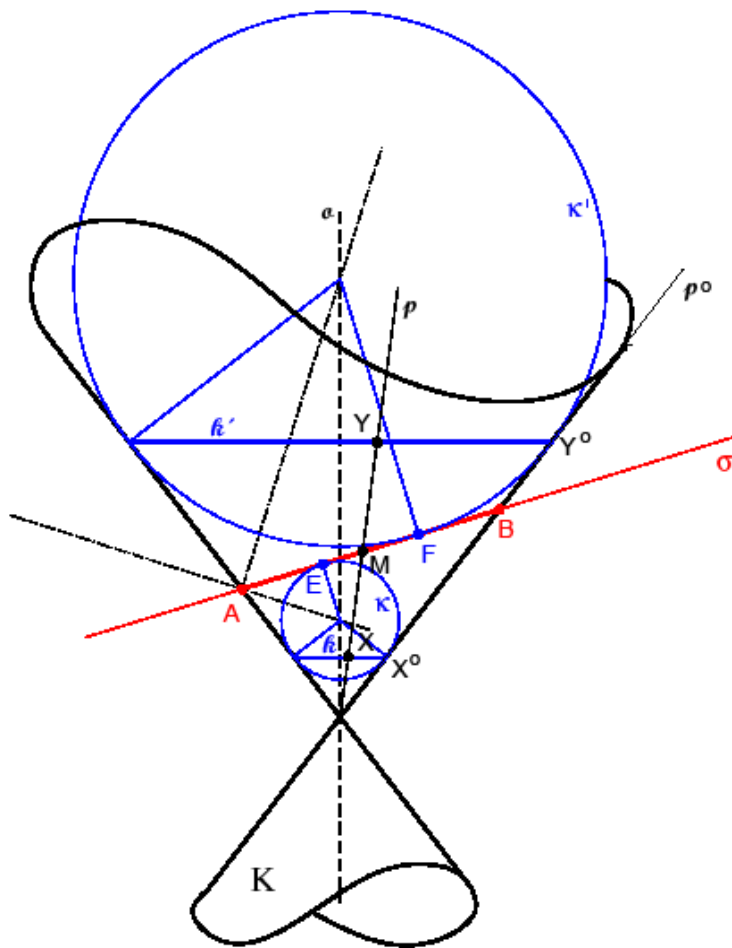
Obrázek 2.3 - Eliptický řez rot. kužele

Důkaz Q-D věty 1:

(K důkazu patří **obrázek 2.4**)

Nechť je dána kuželová plocha K a rovina σ je rovinou řezu, jež protíná všechny povrchové přímky K . Chceme-li dokázat, že průniková křivka je elipsa, musíme dokázat, že její body mají konstantní součet vzdáleností od dvou pevných bodů – ohnisek.

Budeme následovat větu a do kuželové plochy vepíšeme dvě sféry κ, κ' (dotýkající se jí podél kružnic k, k') tak, aby rovina σ byla jejich společná tečná rovina, body dotyku nazveme E, F .



Obrázek 2.4 - Důkaz Q-D věty 1

Zvolme nyní libovolně bod $M = K \cap \sigma$ (leží na elipse – to chceme dokázat) a p bude površka jím procházející, přičemž $X = p \cap k$, $Y = p \cap k'$.

Platí: $|ME| = |MX|$, protože ME i MX jsou tečny sféry κ , body E a X na ní leží, tudíž mají shodnou vzdálenost od bodu M .

Stejně tak platí: $|MF| = |MY|$.

Odtud $|ME| + |MF| = |MX| + |MY| = |XY|$.

Pokud si navíc površku p s úsečkou XY otočíme do polohy p^o (viz. **obrázek 2.4**), uvidíme její skutečnou velikost, tudíž velikost úsečky X^oY^o .

Dokázali jsme, že libovolný bod řezu má od bodů E, F konstantní vzdálenost $|X^oY^o|$.

Zbývá dokázat, že $|X^oY^o| = |AB| = 2a$.

Platí: $|Y^\circ B| = |BF|$ a

$|X^\circ B| = |BE|$, jelikož $Y^\circ B$ a BF jsou tečny sféry κ' z bodu B . Obdobně $X^\circ B$ a BE jsou tečny sféry κ .

Dále platí:

$$|AE| + |AF| = |BE| + |BF|$$

$$2|AE| + |EF| = 2|BF| + |EF| \Rightarrow |AE| = |BF|$$

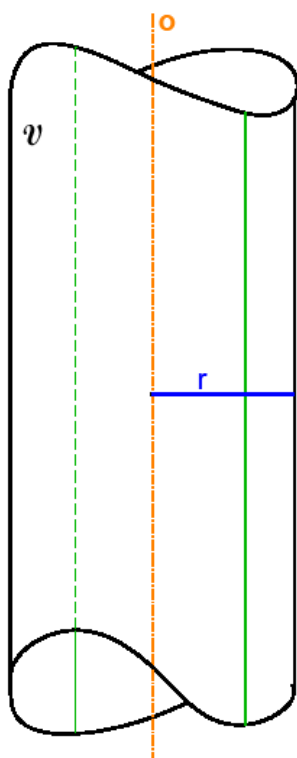
Odtud plyne následující:

$$|X^\circ Y^\circ| = |X^\circ B| + |Y^\circ B| = |BE| + |BF| = |BE| + |AE| = |AB| := 2a$$

To znamená, že každý bod řezu je bodem elipsy, jejíž ohniska jsou body E, F a hlavní poloosa je $a := \frac{|AB|}{2}$.

Snadno zjistíme, že obráceně každý bod elipsy je také bodem řezu a tím je věta dokázána.

2.2 Elipsa jako řez rotační válcové plochy



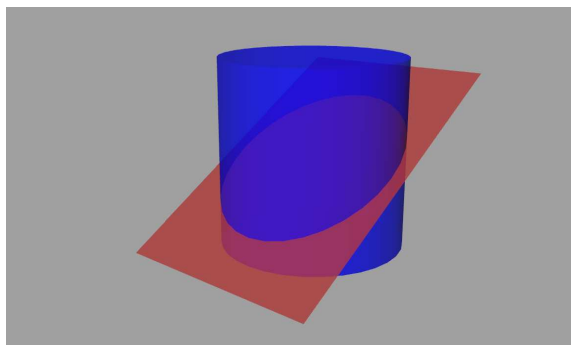
Definice 2.2 : Necht' je v eukleidovském prostoru E_3 dána pevná přímka O (tzv. **osa** rotační válcové plochy) a kladná konstanta r . **Rotační válcovou plochou** $\mathcal{V}$ budeme rozumět množinu všech přímek a (tzv. **površek**) rovnoběžných s osou O mající od osy O vzdálenost právě r . (viz. **obrázek 2.5**)

Poznámka :

: Na rotační válcovou plochu se lze dívat také jako na rotační kuželovou plochu, která má vrchol V „posunutý do nekonečna“, má nevlastní vrchol. Površky válcové plochy nemají společný vlastní bod, avšak mají společný směr – jsou navzájem rovnoběžné.

Že řezem rotační válcové plochy je kuželosečka a že se jmenovitě jedná o elipsu říká následující věta:

Obrázek 2.5 – Rotační válcová plocha



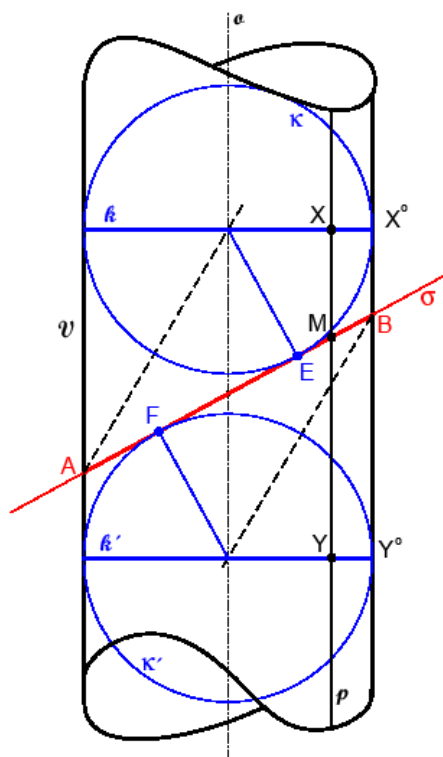
Obrázek 2.6 – Eliptický řez rot. válce

Quételetova-Dandelinova věta 2 (= Q-D věta 2):

Řezem rotační válcové plochy rovinou, která není rovnoběžná s osou O , je **elipsa**, jejímiž ohnisky jsou dotykové body kulových ploch, které lze vepsat do válcové plochy tak, že se dotýkají roviny řezu. Je-li rovina navíc kolmá k ose plochy, potom je řezem **kružnice** jakožto speciální případ elipsy – dotykové body vepsaných kulových ploch potom splývají.

Důkaz Q-D věty 2:

(K důkazu patří **obrázek 2.7**)



Obrázek 2.7 - Důkaz Q-D věty 2

Důkaz Q-D věty 2 bude skoro stejný jako jsme ho dělali v případě Q-D věty 1.

Opět musíme dokázat, že průniková křivka má od dvou pevných bodů (dotykových bodů sfér s rovinou řezu) konstantní součet vzdáleností, tedy že se jedná o elipsu.

Nechť je dána válcová plocha $\mathcal{V}$ a rovina σ je rovinou řezu, jež není rovnoběžná s osou O .

Nyní do válcové plochy vepíšeme dvě sféry κ, κ' (dotýkající se jí podél kružnic k, k') tak, aby rovina σ byla jejich společná tečná rovina, body dotyku nazveme E, F .

Zvolme libovolně bod $M = \mathcal{V} \cap \sigma$ (leží na elipse – to chceme dokázat) a p bude površka jím procházející, přičemž $X = p \cap k, Y = p \cap k'$.

Platí: $|ME| = |MX|$, protože ME i MX jsou tečny sféry κ , body E a X na ní leží, tudíž mají shodnou vzdálenost od bodu M .

Stejně tak platí: $|MF| = |MY|$.

Odtud $|ME| + |MF| = |MX| + |MY| = |XY|$.

(pozn.: Na **obrázku 2.7** je vidět skutečná velikost úsečky XY , proto ji už nemusíme otáčet.)

Dokázali jsme, že libovolný bod řezu má od bodů E, F konstantní vzdálenost $|XY|$.

Ještě je nutné dokázat, že $|XY| = |AB| = 2a$.

Nejprve si úsečku XY otočíme do pozice $X^{\circ}Y^{\circ}$. ($|XY| = |X^{\circ}Y^{\circ}|$)

Platí, že $|Y^{\circ}B| = |BF|$ a

$|X^{\circ}B| = |BE|$, jelikož $Y^{\circ}B$ a BF jsou tečny sféry κ' z bodu B .

Obdobně $X^{\circ}B$ a BE jsou tečny sféry κ .

Navíc $|AF| = |BE|$.

$$\Rightarrow |XY| = |X^{\circ}Y^{\circ}| = |X^{\circ}B| + |Y^{\circ}B| = |BE| + |BF| = |AF| + |BF| = |AB| := 2a$$

$\Rightarrow$ jedná se o elipsu s hlavní poloosou $a := \frac{|AB|}{2}$, kde body E, F jsou její ohniska.

Tedy platí, že každý bod řezu je bodem elipsy. Opět snadno zjistíme, že to platí i obráceně, každý bod elipsy je bodem řezu, tím je věta dokázána.

KAPITOLA 3.: Tečna elipsy a ohniskové vlastnosti

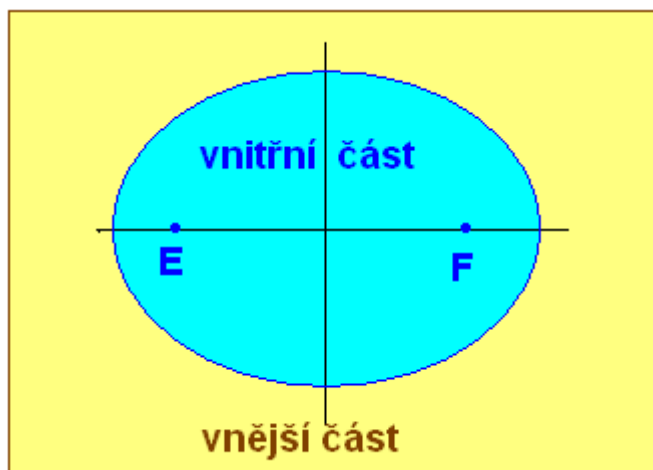
V této kapitole se budeme zabývat speciálními vlastnostmi elipsy a jejích ohnisek. Jsou to velice důležité a potřebné informace, které nám později budou sloužit jako indicie k různým konstrukcím této kuželosečky a její tečny.

3.1 Vzájemná poloha přímky a elipsy

Nejprve si ujasníme, co rozumíme pojmem **vnitřní**, resp. **vnější část** elipsy $\mathcal{E}$.

Vnitřní část elipsy budeme nazývat tu část, která obsahuje obě ohniska a jejíž „hraniční čára“ je právě daná elipsa (i elipsa je součástí vnitřní části). Pro takové body X platí: $|EX| + |FX| \leq 2a$, rovnost nastává v případě, kdy $X \in \mathcal{E}$.

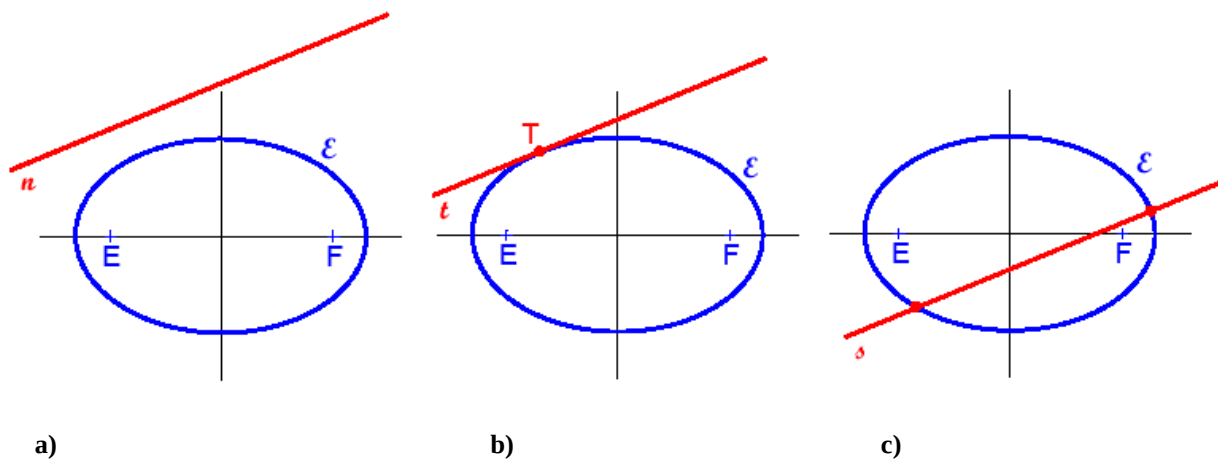
Vnější část elipsy rozumíme zbylou část roviny. Pro body X z vnější části platí, že součet průvodičů je větší než $2a$. (viz. **obrázek 3.1**)



Obrázek 3.1 - Vnitřní a vnější část elipsy

Nyní se můžeme podívat, jaké polohy přímky a elipsy mohou nastat.

Přímka může mít s elipsou tři různé vzájemné polohy, více na **obrázku 3.2**.



Obrázek 3.2 - Tři možné polohy přímky a elipsy: a) vnější přímka, b) tečna, c) sečna

Nemá-li přímka s elipsou žádný společný bod (což znamená, že všechny body přímky jsou vnějšími body elipsy), nazývá se **vnější přímka** (někdy také **nesečna**). To je případ na **obrázku 3.2 a**).

Přímka mající s elipsou právě jeden společný bod se nazývá **tečna elipsy** a jejich společný bod nazýváme **bodem dotyku**. (Vyobrazeno na **obrázku 3.2 b**).

Poslední situaci, jež může nastat, je tzv. **sečna**. (Na **obrázku 3.2 c**) nejvíce vpravo.) Tedy přímka, která má s elipsou dva společné průsečíky. Část přímky prochází vnitřní částí elipsy. (Speciálními sečnami jsou tzv. **průměry**, které procházejí středem elipsy – např. hlavní a vedlejší osa.)

3.2 Tečna elipsy

Zpravidla nás nejvíce bude zajímat **tečna** elipsy, proto si odvodíme i její rovnici.

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ t : cx + dy + e &= 0 \end{aligned} \quad (3.1),$$

o níž víme, že musí mít právě jedno řešení, protože elipsa s tečnou mají společný právě jeden bod – bod dotyku. Nechť je to bod $T = [x_0, y_0]$.

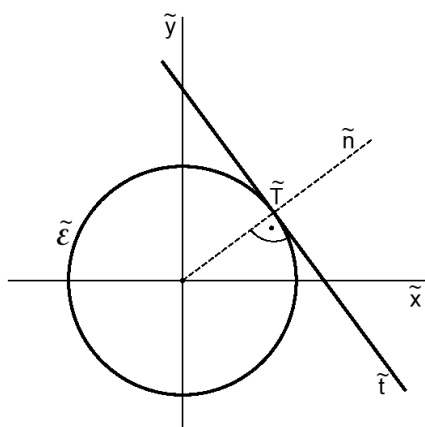
Řešit soustavu (3.1) by bylo poněkud složité, proto použijeme substituci: $\tilde{x} := \frac{x}{a}, \tilde{y} := \frac{y}{b}$.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}} : \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 &= 1 \\ \tilde{t} : a\tilde{c}\tilde{x} + b\tilde{d}\tilde{y} + e &= 0 \end{aligned} \quad (3.2).$$

Prakticky jsme provedli afinní transformaci, kde elipsa $\mathcal{E}$ přejde na kružnici $\tilde{\mathcal{E}}$, obrazem tečny t elipsy $\mathcal{E}$ bude tečna $\tilde{t}$ kružnice $\tilde{\mathcal{E}}$ a bod $\tilde{T} = \left[\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b} \right]$ je obraz bodu dotyku T .

Nyní budeme hledat rovnici tečny kružnice $\tilde{\mathcal{E}}$.

Pro kružnici platí, že její tečna v libovolném bodě je kolmá na přímkou procházející daným bodem a středem kružnice. Tedy platí $\tilde{t} \perp \tilde{n}$ a $\tilde{T} \in \tilde{n}$ - z **obrázku 3.3**.



$$\text{Rovnice přímky } \tilde{n} \text{ je } \frac{y_0}{b}\tilde{x} - \frac{x_0}{a}\tilde{y} = 0.$$

$$\text{Z kolmosti vyplývá: } \tilde{t} : \frac{x_0}{a}\tilde{x} + \frac{y_0}{b}\tilde{y} = 0.$$

$$\text{Tedy platí: } ac = \frac{x_0}{a} \Rightarrow c = \frac{x_0}{a^2} \text{ a}$$

$$bd = \frac{y_0}{b} \Rightarrow d = \frac{y_0}{b^2}.$$

Obrázek 3.3 - Tečna ke kružnici

Tím jsme dohledali koeficienty c, d v obecné rovnici tečny v soustavě (3.1). Máme rovnici ve tvaru: $t: \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + e = 0$. Zbývá dohledat koeficient e . Pomohou nám následující

$$\begin{aligned} \text{informace: } T = [x_0, y_0] \in \mathcal{E} &\Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \\ T \in t &\Rightarrow \underbrace{\frac{x_0}{a^2}x_0 + \frac{y_0}{b^2}y_0}_{=1} + e = 0 \\ &1 + e = 0 \\ &e = -1 \end{aligned}$$

a proto $t: \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - 1 = 0$. Ovšem obecný tvar rovnice tečny elipsy se uvádí v následujícím tvaru:

$$t: \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

Poznámka:

: Rovnice tečny je uvedena pro situaci, kdy má elipsa normální polohu v KSS. Ovšem jestliže střed elipsy neleží v počátku, ale má souřadnice $S = [x_s, y_s]$, potom má elipsa

analytické vyjádření: $\frac{(x - x_s)^2}{a^2} + \frac{(y - y_s)^2}{b^2} = 1$.

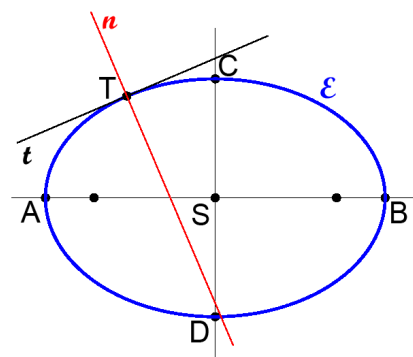
Rovnice její tečny v bodě $T = [x_0, y_0]$ je následující:

$$t: \frac{(x_0 - x_s)(x - x_s)}{a^2} + \frac{(y_0 - y_s)(y - y_s)}{b^2} = 1.$$

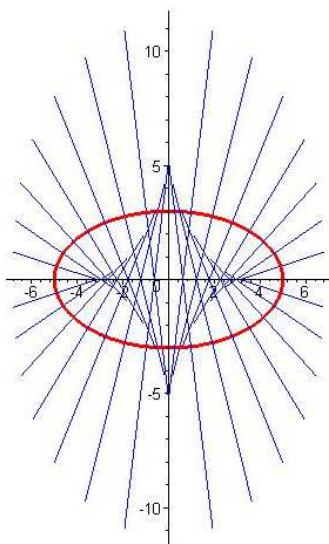
3.3 Normála elipsy

Zvláštními a významnými sečnami elipsy jsou ty, které jsou kolmé na tečny elipsy v příslušných bodech dotyku. Nazývají se **normály**. (Na **obrázku 3.4** označena písmenem n .) Význam normál spočívá v některých konstrukcích elipsy, kde se pomocí nich dohledají jednotlivé body elipsy.

Jak zkonstruovat normálu elipsy v daném bodě bude podrobně vysvětleno v **kapitole 4**.



Obrázek 3.4 – Tečna a normála elipsy v bodě T



Jako tečny obalují elipsu, tak obalová křivka normál elipsy se nazývá **evoluta elipsy**. (viz. **obrázek 3.5**) Je to množina všech středů křivosti dané elipsy. Tedy vrcholy evoluty jsou středy křivosti osculačních kružnic ve vrcholech elipsy. Pomocí trojúhelníkové konstrukce lze přesně dohledat nejen normálu, ale i střed křivosti v bodě – tedy bod evoluty. (více v **kapitole 4.3**)

Obrázek 3.5 – Evoluta elipsy

3.4 Ohniskové vlastnosti

Další vlastnosti elipsy odhalí následující **ohniskové věty**:

Bud' t^X tečna elipsy v jejím libovolném bodě X . Označme dále Q^E , resp. Q^F bod souměrně sdružený s ohniskem E , resp. F podle tečny t^X a $P^E = t^X \cap EQ^E$ (resp. $P^F = t^X \cap FQ^F$) paty kolmice spuštěné z ohniska E či F na tečnu t^X . Potom platí:

3.1) Tečna elipsy t^X v jejím libovolném bodě X pólí vnější úhel průvodičů EX a FX .

3.2) Bod Q^E (resp. Q^F) souměrně sdružený s příslušným ohniskem podle tečny t^X leží na kružnici $d^F(F, 2a)$ (resp. $d^E(E, 2a)$), která se nazývá **řídící kružnice** elipsy.

3.3) Paty kolmic P^E , resp. P^F spuštěných z ohniska E , resp. F na tečnu t^X leží na kružnici $u(S, a)$ - tzv. **vrcholové kružnice** elipsy.

Poznámky:

: K bodu **3.1)** – je zřejmé, že to samé platí také pro normálu elipsy n^X v bodě X .

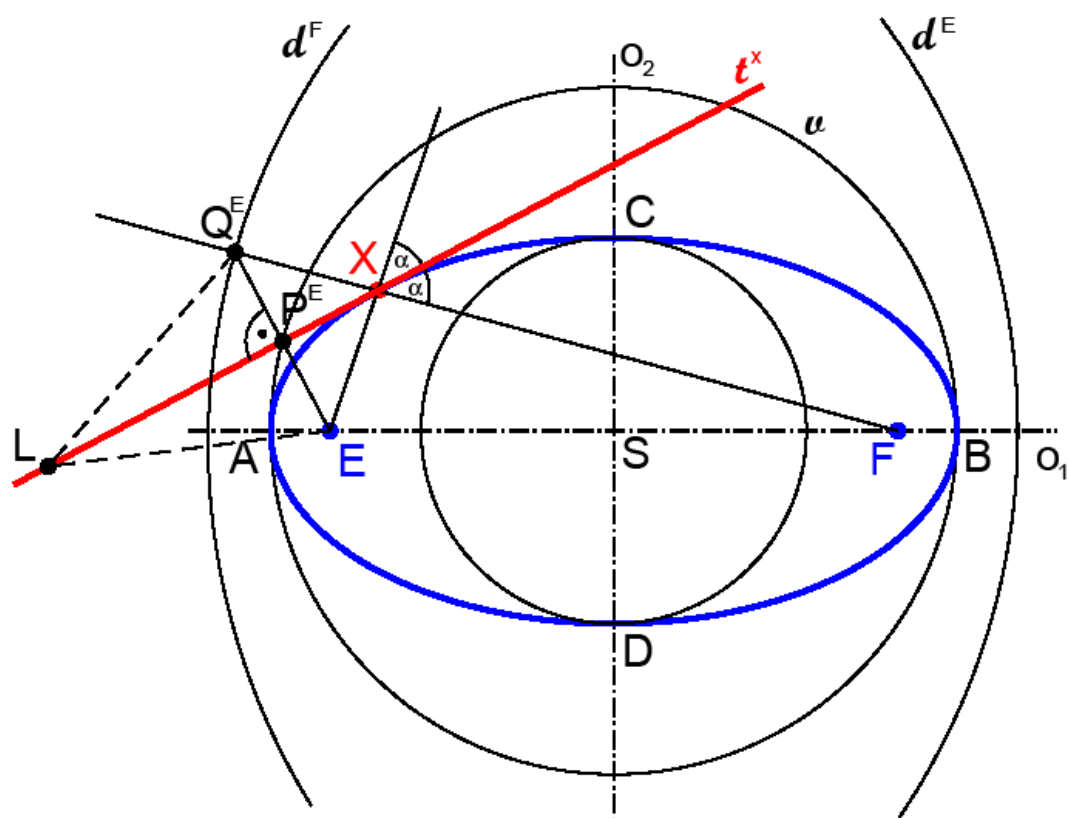
: K bodu **3.3)** – vrcholová kružnice elipsy je obrazem řídící kružnice d^E , resp. d^F ve stejnolehlosti se středem F , resp. E a koeficientem $\frac{1}{2}$.

: K těmto větám patří **obrázek 3.6**.

Na **obrázku 3.6** je navíc vyznačený bod L , což je libovolný bod tečny t^X tak, že $L \neq X$. Zde si můžeme ověřit, že takové body jsou vnějšími body elipsy. Platí:

$$|EX| + |FX| = |Q^E X| + |FX| = |Q^E F| = 2a \dots \text{bod } X \text{ leží na elipse}$$

$|LE| + |LF| = |LQ^E| + |LF| > |Q^E F| = 2a \dots$ podle trojúhelníkové nerovnosti, tedy L leží ve vnější části elipsy.



Obrázek 3.6 - Ohniskové vlastnosti

KAPITOLA 4.: Konstrukce elipsy

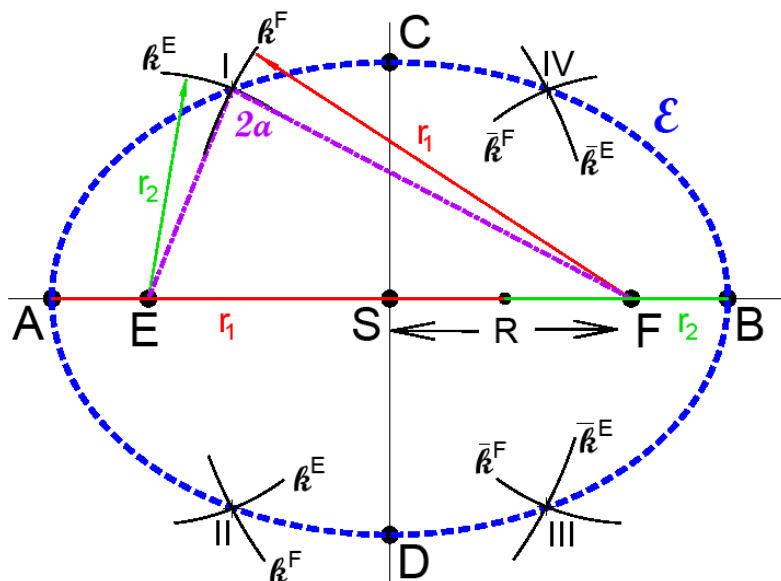
Kapitola 4 je souhrnem několika konstrukcí elipsy, které vycházejí z její definice nebo také z jejích ohniskových vlastností.

4.1 Konstrukce vycházející z definice elipsy

4.1.1 Bodová konstrukce I

Bezprostředně z definice vyplývá tzv. **bodová konstrukce elipsy (obrázek 4.1)**.

Nechť jsou dány dva různé body – ohniska E, F a délka hlavní poloosy a . Budeme hledat body, které mají konstantní součet vzdáleností rovný $2a$ od ohnisek E, F . Za tímto účelem si na přímce EF sestrojíme hlavní vrcholy A, B elipsy, přičemž $|AS| = |SB| = a$, kde S je střed úsečky EF . Dále budeme volit libovolně bod $R \in EF$, jenž nám úsečku AB rozdělí na dvě části o délkách $r_1 = |AR|$, $r_2 = |RB|$, ($r_1 + r_2 = 2a$). Sestrojíme kružnice



Obrázek 4.1 - Bodová konstrukce I

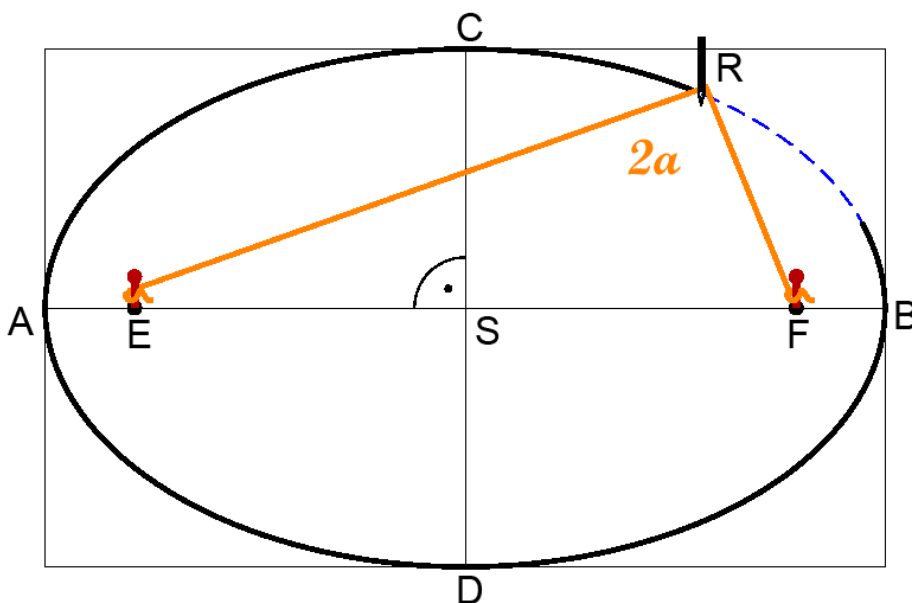
$k^E(E, r_2)$, $k^F(F, r_1)$ a $\bar{k}^E(E, r_1)$, $\bar{k}^F(F, r_2)$ opsané z ohnisek. Je zřejmé, že kružnice k^E, k^F (resp. $\bar{k}^E, \bar{k}^F$) se protínají v bodech elipsy ($k^E \cap k^F = \{I, II\}$, $\bar{k}^E \cap \bar{k}^F = \{III, IV\}$). Různou volbou bodu R získáme různé poloměry kružnic a tím i různé body elipsy.

Poznámka:

: Pokud bude elipsa zadána délkou hlavní a vedlejší poloosy, pak samozřejmě není problém si ohniska dohledat (viz. **1.1 Definice 1.1 – množinová definice**) a provést bodovou konstrukci.

4.1.2 Zahradnická konstrukce

Zahradnická konstrukce vychází z vlastnosti konstantního součtu délek od obou ohnisek stejně tak jako bodová konstrukce. Má ovšem mnohem praktičtější využití v běžném životě. Např. jestliže si na zahrádce chceme udělat záhon tvaru elipsy, potřebujeme pouze jeden provázek délky $2a$, 2 pevné body E, F (ohniska) - zapíchnuté kolíky a potom nějaké rydlo R , resp. křídu, propisku atd. (jako je tomu na **obrázku 4.2**).



Obrázek 4.2 - Zahradnická konstrukce

Oba konce provázku přivážeme na kolíky E a F . Rydlem pak pohybujeme po provázku a vykreslíme křivku (viz. **obrázek 4.2**). Důležité je, aby provázek byl pořád napnutý!

Poznámka:

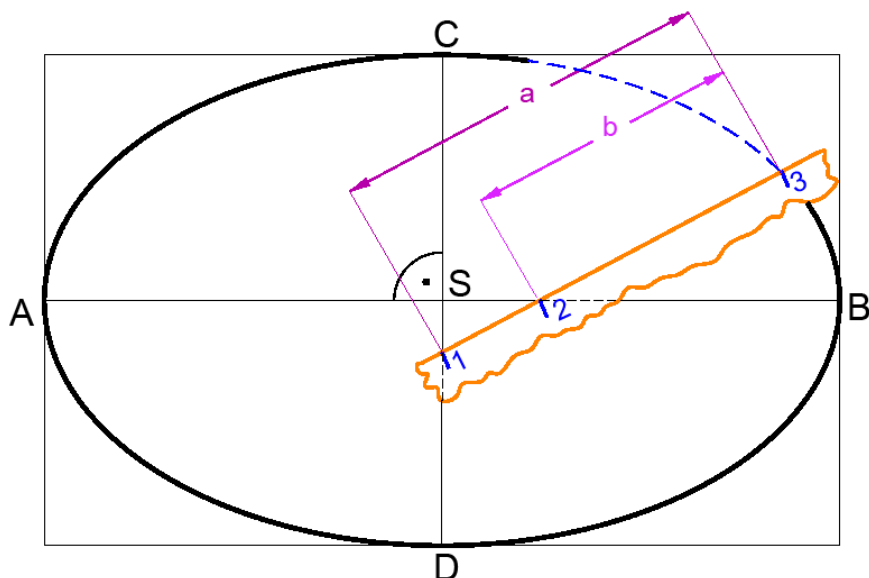
: Konstrukce je do jisté míry amatérská a ne zcela přesná, její výhodou ale je jednoduchost.

4.2 Kinematické vytvoření elipsy

Kinematické vytvoření křivky znamená, že je křivka vykreslena určitým pohybem. Takového pohybové vytvoření bývá podkladem např. pro přístroje sloužící k rýsování křivek.

4.2.1 Proužková konstrukce I.

Na proužek papíru si přeneseme délku hlavní poloosy a , vznikne tak úsečka $\overline{13}$, a velikost vedlejší poloosy $b = |\overline{23}|$, jako na **obrázku 4.3** (body 1, 2, 3 leží na přímce). Proužkem pohybujeme tak, aby bod 1 zůstal na vedlejší poloose, bod 2 na hlavní poloose. Bod 3 určuje jednotlivé body křivky. Tedy, pohybujeme-li správně proužkem, bod 3 vykreslí elipsu.



Obrázek 4.3 - Proužková konstrukce I.

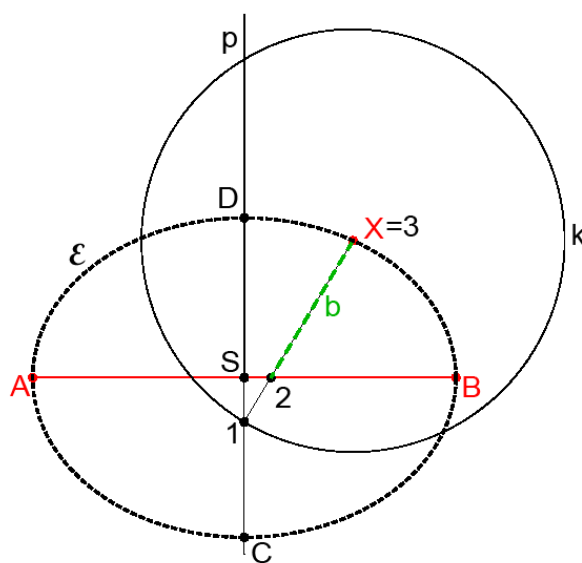
4.2.1.1 Rozdílová proužková konstrukce

Máme-li sestavit elipsu, která je zadána pouze hlavní osou AB a jedním bodem X , lze lehce dohledat délku vedlejší poloosy pomocí proužkové konstrukce I. a tím elipsu úplně dourčit.

Najdeme střed S úsečky AB ($|AS| = |BS| = a$) a vztyčíme v něm kolmici p na AB . Vedlejší vrcholy, které hledáme, budou s přímkou p incidentní. Bod X představuje bod 3 z proužkové konstrukce I. Pokud bychom měli papírek, přenesli bychom na něj velikost $a = |13|$ a pokračovali podle uvedené konstrukce.

Jestliže ale papírek používat nechceme, budeme postupovat následujícím způsobem (podle **obrázku 4.4**).

Sestrojíme kružnici $k(X, a)$ a najdeme její průsečík 1 s přímkou p tak, aby úsečka 13 protla úsečku AB . Bod 2 je průsečíkem 13 a AB . Tím jsme našli velikost vedlejší poloosy $b = |23|$ a elipsu jsme dourčili. Tato konstrukce se často nazývá **rozdílová proužková konstrukce**, i když, jak jsme se přesvědčili, proužek papíru vůbec nepotřebujeme.



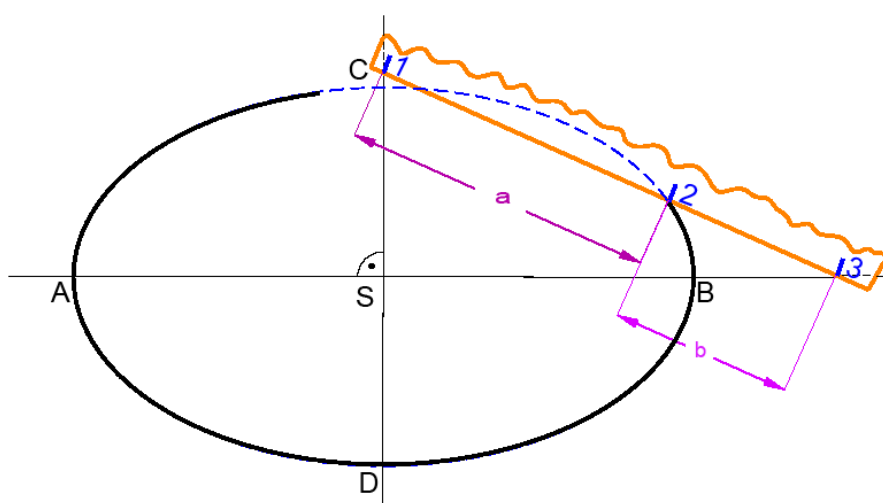
Obrázek 4.4 – Rozdílová proužková konstrukce elipsy

Poznámka:

: V názvu je zřejmě slovo **rozdílová**, jelikož velikost vedlejší poloosy je rovna rozdílu: $b = |13| - |12|$.

4.2.2 Proužková konstrukce II.

Proužkovou konstrukci je možné provést ještě jedním způsobem. Opět si na proužek papíru přeneseme délku hlavní poloosy a , vznikne tak úsečka $\overline{12}$. Velikost vedlejší poloosy je $b = |23|$, jako na **obrázku 4.5**. Body 1, 2, 3 jsou kolineární. Proužkem pohybujeme tak, aby bod 1 zůstal na vedlejší ose, bod 3 na hlavní ose. Pak bod 2 určuje jednotlivé body křivky. Tedy, pohybujeme-li správně proužkem, bod 2 vykreslí elipsu.



Obrázek 4.5 - Proužková konstrukce II.

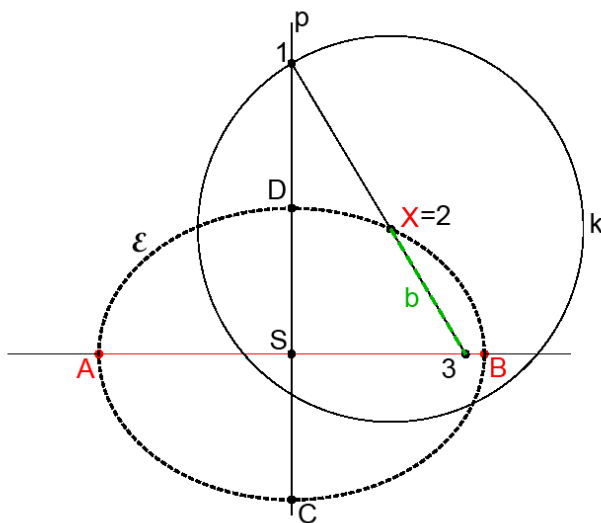
4.2.2.1 Součtová proužková konstrukce

Naskytá se znovu otázka, jak sestavit elipsu, která je zadána pouze hlavní osou AB a jedním bodem X . Vedlejší vrcholy nyní dohledáme pomocí proužkové konstrukce II., čímž bude elipsa dourčena.

Najdeme střed S úsečky AB ($|AS| = |BS| = a$) a vztyčíme v něm kolmici p na AB . Vedlejší vrcholy, které hledáme, budou ležet na přímce p . Bod X představuje bod 2 z proužkové konstrukce II. Pokud bychom situaci řešili pomocí papírku, přenesli bychom na něj velikost $a = |12|$. Pak bychom bod 2 na papírku přiložili přesně na bod X a bod 1 nastavili tak, že bude ležet na p - vedlejší ose, přičemž bod 3 by byl průnikem přímek $\overline{12}$ a AB . Délka $|23|$ by byla velikostí vedlejší poloosy.

Přesnější je ovšem postup bez použití papírku, tzv. **součtová proužková konstrukce elipsy** (viz. **obrázek 4.6**). Sestrojíme kružnici $k(X = 2, a)$ a najdeme její průsečík 1 s přímkou p

tak, aby úsečka $\overline{12}$ neprotla úsečku AB . Bod 3 je průsečíkem přímek $\overline{12}$ a AB . Tím jsme zjistili velikost vedlejší poloosy $b = |\overline{23}|$ a elipsu jsme dourčili.



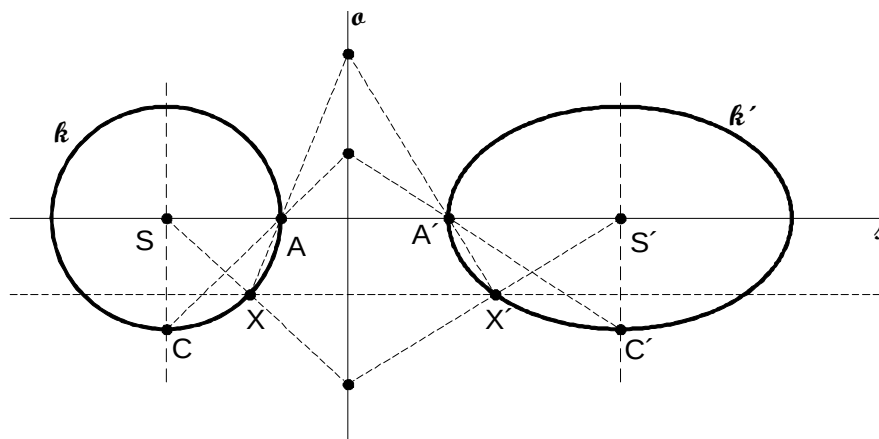
Obrázek 4.6 – Součtová proužková konstrukce elipsy

4.3 Konstrukce využívající afinní vztah elipsy a kružnice

4.3.1 Obraz kružnice v osově afinitě

Rovnoběžným průmětem kružnice k v rovině ρ do roviny ρ' je v obecném případě elipsa. Speciálně se může kružnice promítnout do kružnice nebo do úsečky, ale tento případ nyní uvažovat nebudeme. Daná kružnice k a její rovnoběžný průmět - elipsa $k' = \mathcal{E}$ - si odpovídají v **osové afinitě** mezi rovinami obou křivek, rovinami ρ a ρ' . Pokud si celou situaci rovnoběžně promítneme do libovolné roviny π , získáme **osovou afinitu v rovině π** .

Osová afinita v rovině je nejčastěji dána **směrem s** , **osou o** a dvojicí odpovídajících si bodů A, A' . Je-li směr s kolmý k ose o , nazývá se taková afinita **pravoúhlá**, jestliže $s \parallel o$, jedná se o tzv. **afinní elaci**. Odpovídající si body leží na přímkách, které jsou rovnoběžné se směrem s dané afinity, odpovídající si přímky se protínají na ose o afinity v tzv. **samodružných bodech**.



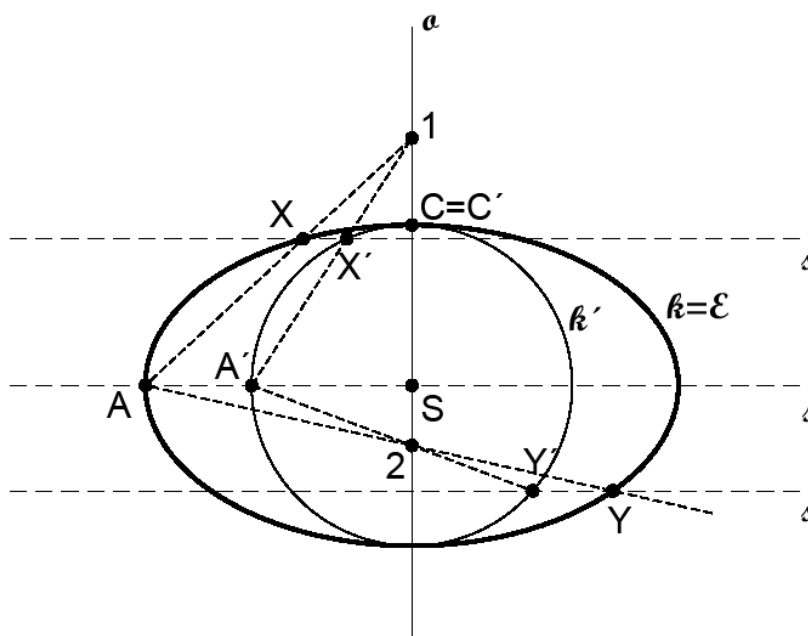
Obrázek 4.7 - Afinní obraz kružnice

Příklad pravoúhlé afinity mezi kružnicí a elipsou je na **obrázku 4.7**. Na základě tohoto afinního vztahu mezi kružnicí a elipsou lze odvodit některé užitečné konstrukce elipsy.

4.3.2 Trojúhelníková konstrukce

Trojúhelníková konstrukce je jedna z nejpřesnějších konstrukcí bodů elipsy. Využívá se zde **pravoúhlá osová afinita** mezi kružnicí a elipsou. Podívejme se nejprve na dvě speciální možnosti zadání osové afinity, které konstrukci přiblíží :

1) (Obrázek 4.8) Necht' osa afinity o je totožná s vedlejší osou elipsy $\mathcal{E}$ a pro směr platí: $s \perp o$. Budeme-li hledat obraz kružnice $k'(S, |SA'|)$, jímž je elipsa $k = \mathcal{E}$ se středem S , musí být afinita dourčena obrazem jednoho bodu kružnice k' , který nesmí ležet na ose o . Tedy jedním bodem, jenž leží na hledané elipse. Necht' je to dvojice : $A' \rightarrow A$.



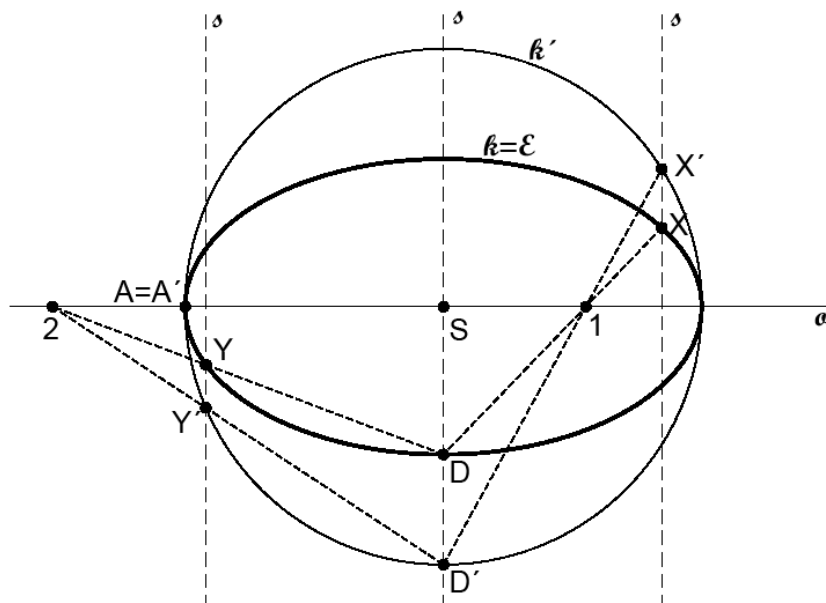
Obrázek 4.8 - Speciální zadání afinity mezi elipsou a kružnicí 1.

Vedlejší vrcholy elipsy jsou samodružné body, jelikož jsou incidentní s osou o . Její další body dohledáme snadno. Zvolíme si libovolný bod $X' \in k'$ a najdeme jeho obraz X , který bude průsečíkem přímky rovnoběžné se směrem s a procházející bodem X' a přímky $1A$, kde $1 = A'X' \cap o$. Takto lze dohledat všechny ostatní body elipsy.

2) (Obrázek 4.9) Necht' osa afinity o je totožná s hlavní osou elipsy $\mathcal{E}$ a pro směr platí: $s \perp o$. Necht' je afinita dodefinována dvojicí vzor a obraz : $D' \rightarrow D$.

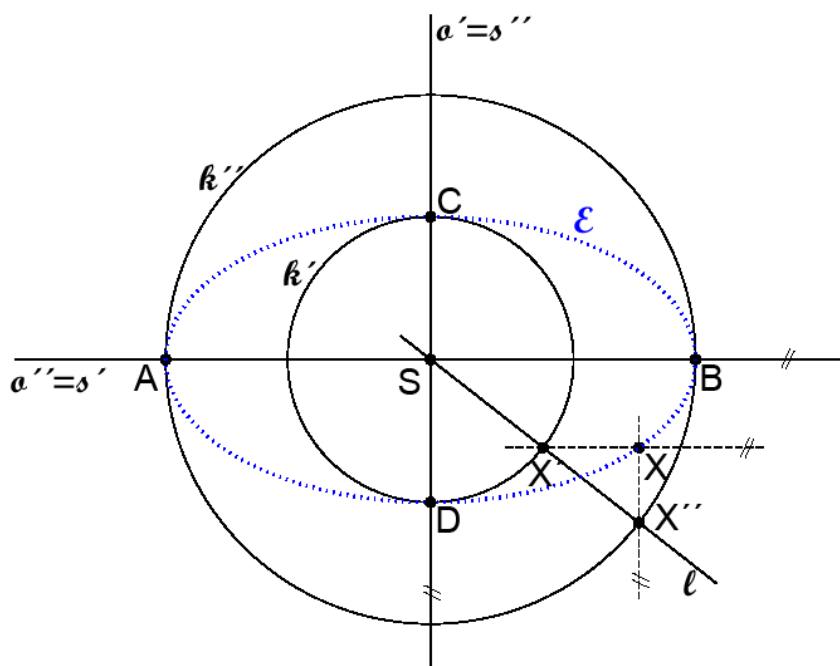
Opět hledáme obraz kružnice $k'(S, |SD'|)$, tedy elipsu $k = \mathcal{E}$ (se středem S).

V tomto případě jsou hlavní vrcholy elipsy samodružné body. Další body elipsy dohledáme úplně stejně jako v prvním případě (více na **obrázku 4.9**).



Obrázek 4.9 - Speciální zadání afinity mezi elipsou a kružnicí 2.

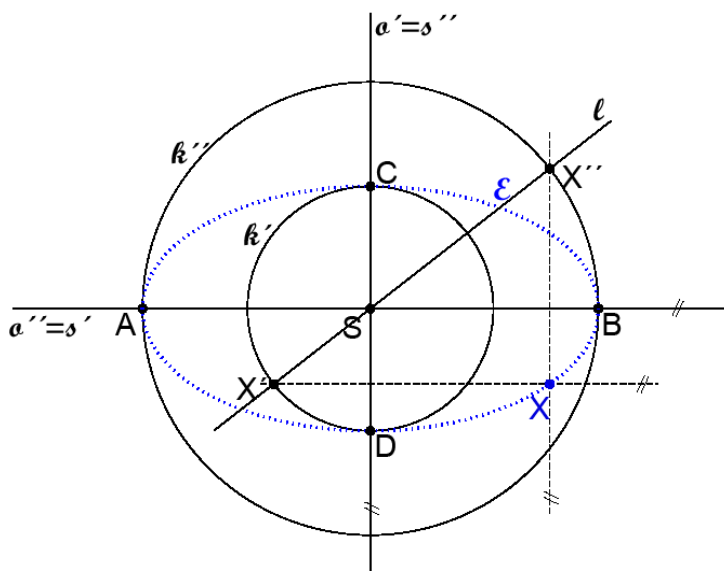
Pokud využijeme vlastností obou zadaných afinit a spojíme je, získáme tzv. **trojúhelníkovou konstrukci elipsy**, která je na **obrázku 4.10**, resp. **4.11**.



Obrázek 4.10 - Trojúhelníková konstrukce elipsy I

Nechť je elipsa $\mathcal{E}$ zadána svými hlavními a vedlejšími vrcholy A, B, C, D . Známe tím tedy $a = |AS| = |BS|$, $b = |CS| = |DS|$, kde S je střed elipsy. Sestrojíme kružnice $k' = (S, b)$ a $k'' = (S, a)$. Narýsujeme libovolnou přímku ℓ procházející středem S . Ta protne každou kružnici ve dvou bodech. Zvolme jednu dvojici bodů $\ell \cap k' = X'$, $\ell \cap k'' = X''$ takovou,

že X', X'' leží ve stejném kvadrantu určeném osami elipsy (viz. **obrázek 4.10**), resp. takovou dvojici bodů X', X'' , že každý z nich leží v jiném kvadrantu (viz. **obrázek 4.11**). Nyní si uvědomme, že kružnice k' se při pravouhlé osové afinitě s osou $a' = CD$ ($s' \perp a'$) zobrazí na elipsu $\mathcal{E}$ a kružnice k'' se zobrazí na tutéž elipsu při pravouhlé osové afinitě určené osou $a'' = AB$ a směrem $s'' \perp a''$. Tedy obraz X bodu X' budeme hledat na přímce rovnoběžné s přímkou AB a zároveň bod X bude obraz bodu X'' , tudíž bude ležet na rovnoběžce s přímkou CD . Různou volbou přímky ℓ , získáme různé body elipsy.



Obrázek 4.11 – Trojúhelníková konstrukce elipsy II

Poznámka:

: Konstrukce se nazývá trojúhelníková z prostého důvodu, jelikož při získávání bodů elipsy nám v rysu vznikají trojúhelníky. Zde např.: trojúhelník $XX'X''$.

4.3.2.1 Dohledání normál – součtová konstrukce

Na základě trojúhelníkové konstrukce lze snadno dohledat také normály v nalezených bodech elipsy. Znamé jsou dvě metody. Pomocí první, tzv. **součtové konstrukce** budou dohledány nejen normály, ale také body evoluty elipsy. Celá situace je na **obrázku 4.12**.

Nechť máme pomocí **trojúhelníkové konstrukce I** bod elipsy X . (Tzn., že již máme narýsované kružnice k', k'' a zvolenou přímku $\ell \ni X$.) Sestrojíme kružnici k^3 se středem v bodě S a poloměrem rovným součtu délek hlavní a vedlejší poloosy ($r = a + b$). Označme X^3 bod, který je průnikem přímky ℓ a kružnice k^3 a který leží ve stejném kvadrantu jako bod X . Spojnice XX^3 je hledaná **normála** n k elipse $\mathcal{E}$ v bodě X .

Poznámka:

: Známe-li normálu n v bodě X , potom pro **tečnu** t k elipse $\mathcal{E}$ v tomto bodě platí: $X \in t, t \perp n$.

The diagram illustrates the construction of the center \$S\$ of a circle passing through points \$A, B, C, D, E, X, Y, Z\$. It features three concentric circles: a large red circle labeled \$k^3\$, a medium black circle labeled \$k''\$, and a small blue dotted circle labeled \$k'\$. A horizontal line \$\alpha'' = \delta''\$ passes through point \$C\$ on \$k''\$ and point \$E\$ on \$k'\$. A vertical line \$\alpha' = \delta'\$ passes through point \$A\$ on \$k''\$ and point \$X\$ on \$k'\$. Two other lines, \$t\$ and \$l\$, intersect at point \$Z\$ on \$k'\$. Line \$n\$ is tangent to \$k^3\$ at point \$X^3\$. The center \$S\$ is located at the intersection of the perpendicular bisectors of segments \$AB\$ and \$CD\$. Various other points like \$Y, X, X', D, B\$ are also marked on the circles or lines.

Poznámka:

4.3.2.2 Dohledání normál – rozdílová konstrukce

32

Nechť máme pomocí **trojúhelníkové konstrukce II** sestrojen bod X elipsy $\mathcal{E}$. Narýsujeme kružnici k^4 se středem v bodě S a poloměrem rovným rozdílu délek hlavní a vedlejší poloosy ($r = a - b$), proto se tato metoda nazývá **rozdílová konstrukce**. Označme X^4 bod, který je průnikem přímky ℓ a kružnice k^4 a který leží ve stejném kvadrantu jako bod X'' . Spojnice XX^4 je hledaná **normála** n k elipse $\mathcal{E}$ v bodě X .

Poznámky:

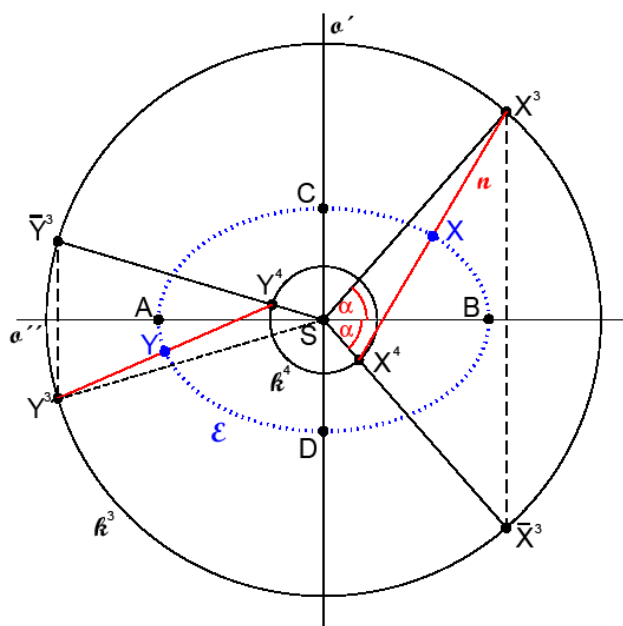
: Stejně jako v předchozí situaci i zde lze jednoduše dohledat **tečnu** t k elipse $\mathcal{E}$ v bodě X , $X \in t, t \perp n$.

: Obecně se trojúhelníková konstrukce II a rozdílová konstrukce normály používají mnohem méně často než trojúhelníková konstrukce I a součtová konstrukce normály.

4.3.3 Normálová konstrukce I

Jedná-li se o sestrojení řady bodů na elipse $\mathcal{E}$ a jejích normál, je-li elipsa zadána hlavní a vedlejší poloosou (dvojicí a, b), potom můžeme využít speciální **normálové konstrukce I**. Ta je založena na spojení rozdílové a součtové konstrukce (dohledání normál pomocí trojúhelníkové kon.).

Představme si nyní obě konstrukce najednou. Pohybem přímky (normály) X^3X^4 tak, aby bod X^3 opisoval kružnici k^3 o poloměru $a + b$, druhý bod X^4 kružnici k^4 o poloměru $a - b$, a úhel X^3SX^4 aby byl osami elipsy půlen,



Obrázek 4.14 – Normálová konstrukce I bodů elipsy

dostáváme elipsu $\mathcal{E}$ jako trajektorii středu X úsečky X^3X^4 . To dává následující konstrukci jednotlivých bodů elipsy $\mathcal{E}$ a jejích normál (viz. **obrázek 4.14**).

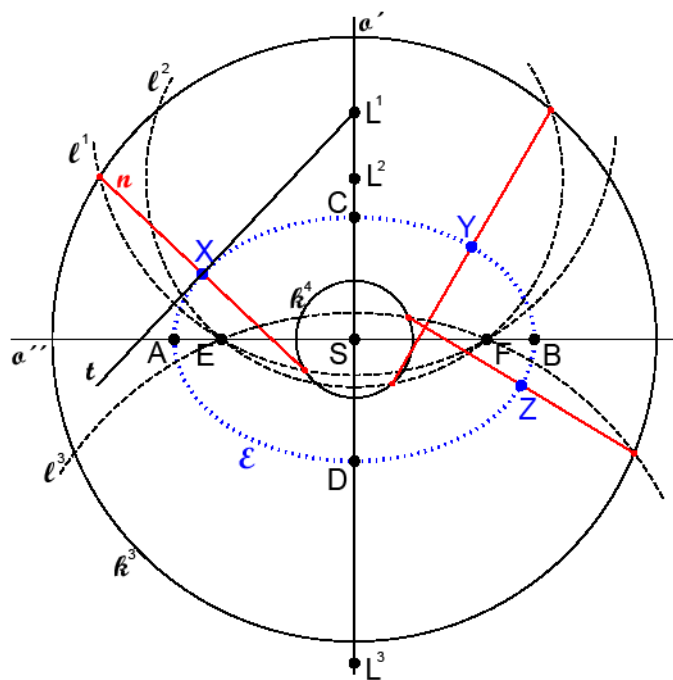
Zvolíme na k^3 několik bodů, např. X^3, Y^3 . Najdeme k nim body $\bar{X}^3, \bar{Y}^3$ souměrně položené vzhledem k hlavní ose elipsy. Dále protněme poloměry $S\bar{X}^3, S\bar{Y}^3$ kružnic k^4 v bodech X^4, Y^4 . Potom jsou spojnice X^3X^4, Y^3Y^4 **normálami** elipsy a středy X, Y úseček X^3X^4, Y^3Y^4 body žádané elipsy. (čerpáno z Sobotka, J. [9] str. 236 a 237)

4.3.4 Normálová konstrukce II

Pohodlněji lze **normálovou konstrukci I** upravit takto (**obrázek 4.15**):

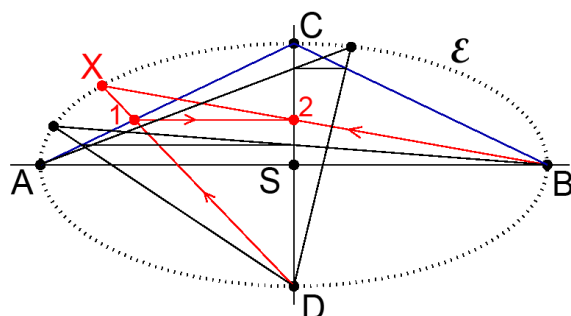
Sestrojíme-li kružnice např. ℓ^1, ℓ^2, ℓ^3 procházející ohnisky E, F elipsy $\mathcal{E}$ a protněme-li

každou z nich kružnicemi k^3, k^4 , pak ty spojnice průsečných bodů, které nejsou s hlavní osou elipsy rovnoběžné a zároveň neprocházejí středem S , jsou **normálami** elipsy. Průměry kružnic ℓ^1, ℓ^2, ℓ^3 kolmé na nalezené normály jsou **tečnami** elipsy a paty X, Y, Z těchto průměrů jsou body dotyku, tedy body elipsy $\mathcal{E}$.
(čerpáno z Sobotka, J. [9] str. 237)

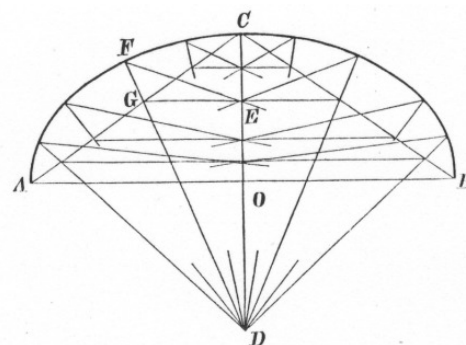


Obrázek 4.15 – Normálová konstrukce II bodů elipsy

4.3.5 Bodová konstrukce II



Obrázek 4.16 – a) Bodová konstrukce II



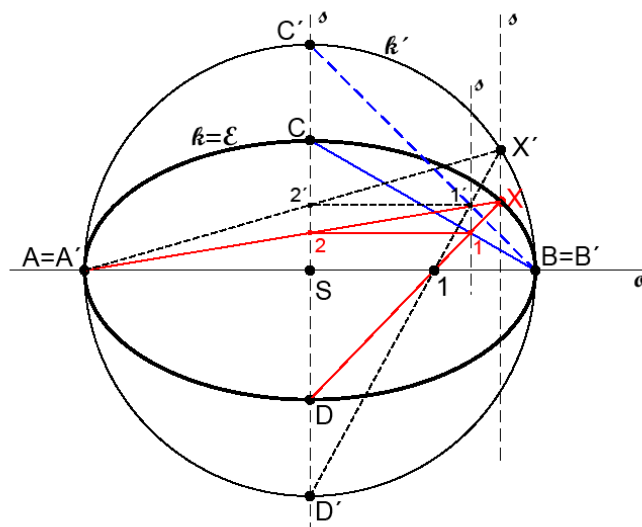
b) obr. z Breymann, G. A. [1]

Další způsob jak sestavit jednotlivé body elipsy, pokud jsou dány délky hlavní a vedlejší poloosy, je tzv. **bodová konstrukce II**. Právem je zařazena do této kapitoly, protože důkaz její funkčnosti vychází opět z afinního vztahu mezi kružnicí a elipsou. Její největší výhodou je fakt, že na celou konstrukci – sestavení bodů - nepotřebujeme kružítko. Začneme samotným postupem a poté si ozřejmíme její důkaz.

Postup je vyznačen na **obrázku 4.16**. Dány jsou velikosti hlavní a vedlejší poloosy. Sestrojíme vrcholy A, B, C, D elipsy $\mathcal{E}$. Pro dohledání dalších bodů budeme potřebovat spojnice hlavních a vedlejších vrcholů. Hledejme např. body elipsy, které leží v kvadrantu, jenž je incidentní se spojnici AC . Nejprve zvolíme na úsečce AC libovolný bod 1, jím vedeme přímkou $1D$ (spojnici s druhým vedlejším vrcholem) a také rovnoběžku s hlavní osou. Průnik této rovnoběžky a vedlejší osy označíme 2. Bodem 2 a druhým hlavním vrcholem B proložíme přímkou $2B$. Průnik přímek $1D$ a $2B$ je hledaný bod X elipsy $\mathcal{E}$.
(čerpáno z Breymann [1] str. 157 a 158)

Náznak důkazu: Kružnice k' na **obrázku 4.17** je afinním obrazem hledané elipsy $\mathcal{E}$. Příslušná afinita je dána osou $a = AB$ a směrem $s \perp a$. Jestliže bodová konstrukce II bude platit pro kružnici k' , pak bude platit i pro elipsu díky afinnímu vztahu. Pomocí metod analytické geometrie bychom snadno dokázali, že takto sestrojený bod X' leží na kružnici k' a tedy konstrukce pro bod X platí.

Obrázek 4.17 – Důkaz bodové konstrukce II



4.4 Konstrukce pomocí sdružených průměrů elipsy

4.4.1 Sdružené průměry

V následujících konstrukcích budeme používat pojem průměr a sdružený průměr elipsy, proto si oba termíny nadefinujeme a naučíme se je vyhledat.

Definice 4.1 : *Průměrem elipsy budeme rozumět každou přímku procházející jejím středem S .*

Poznámky:

: Pozor, průměr není úsečka, jak to bývá chápáno u kružnice, ale jedná se o celou přímku. Ovšem někdy, hovoří-li se o délce průměru, myslí se tím samozřejmě jen délka, jež leží ve vnitřní části elipsy – tzv. **omezený průměr**.

: V *projektivní geometrii* se průměr kuželosečky zavádí jako vlastní přímka, jejíž pól vzhledem k dané kuželosečce (elipse) je nevlastní bod.

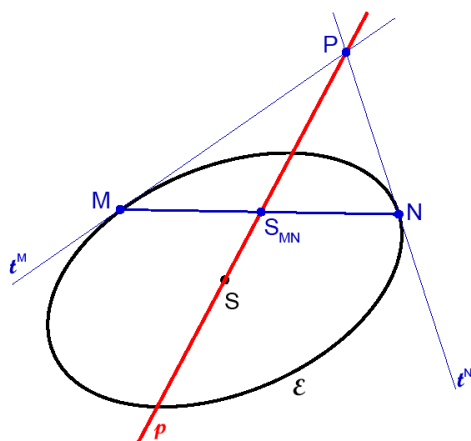
To, že pro středové kuželosečky (elipsa, hyperbola) je jím každá přímka procházející středem kuželosečky, se bere jako věta, jež se dokáže právě pomocí „projektivní definice“.

Pro **průměr** elipsy platí následující tvrzení, která doplňují **obrázky 4.18, 4.19, 4.20**:

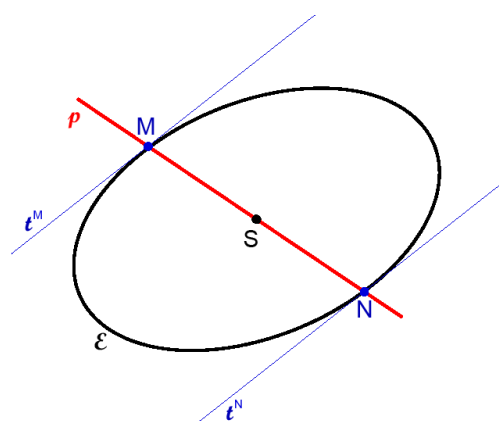
Tvrzení 4.1: *Spojnice průsečíku dvou tečen elipsy se středem úsečky, jejíž krajními body jsou body dotyku těchto tečen s danou elipsou, je průměr elipsy.*

Tvrzení 4.2: *Spojnice bodů dotyku dvou rovnoběžných tečen elipsy je jejím průměrem.*

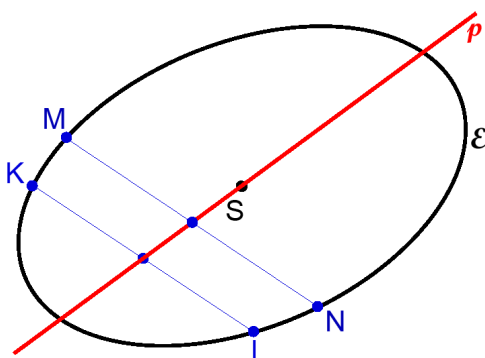
Tvrzení 4.3: *Spojnice středů rovnoběžných tětiv elipsy je jejím průměrem, kde tětivou rozumíme úsečku, jejíž krajní body jsou body dané elipsy.*



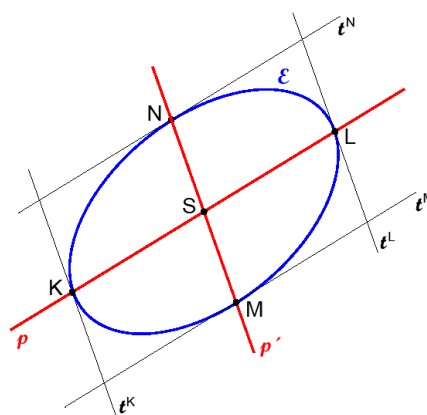
Obrázek 4.18 - Tvzení 4.1



Obrázek 4.19 - Tvzení 4.2



Obrázek 4.20 - Tvzení 4.3



Obrázek 4.21 - Sdružené průměry elipsy

Definice 4.2 : Dva **průměry** se nazývají **sdružené**, jsou-li tečny v krajních bodech jednoho průměru rovnoběžné s druhým průměrem a naopak.
(Obrázek 4.21)

Poznámky:

: Sdruženost průměrů se rovnoběžným promítáním a tedy i osovou afinitou zachovává.

: U kružnice jsou každé dva sdružené průměry navzájem kolmé. Zato u elipsy, která není kružnicí, existuje právě jedna dvojice sdružených a současně kolmých průměrů – hlavní a vedlejší osa.

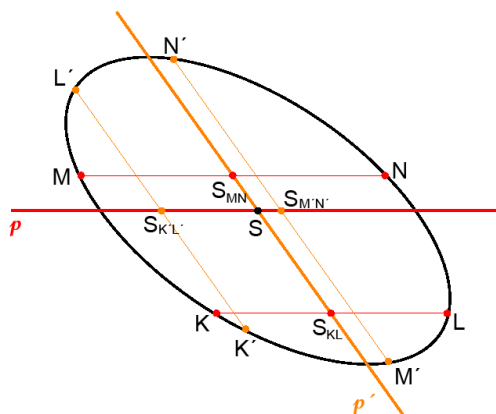
Pro **sdružené průměry** platí tvrzení s příslušnými **obrázky 4.22, 4.23, 4.24, 4.25:**

Tvrzení 4.4: Každý ze dvou sdružených průměrů elipsy pólí její tětivy rovnoběžné s druhým průměrem.

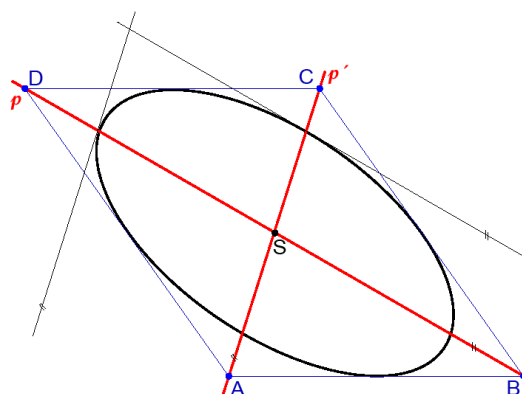
Tvrzení 4.5: Úhlopříčky rovnoběžníka elipse opsaného jsou její sdružené průměry.

Tvrzení 4.6: Střední příčky rovnoběžníka elipse vepsaného jsou její sdružené průměry.

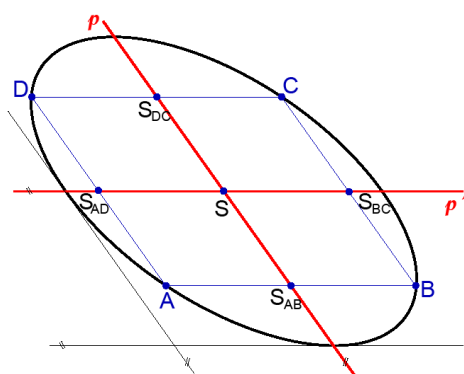
Tvrzení 4.7: Spojnice libovolného bodu elipsy s krajními body libovolného průměru jsou rovnoběžné se sdruženými průměry této elipsy.



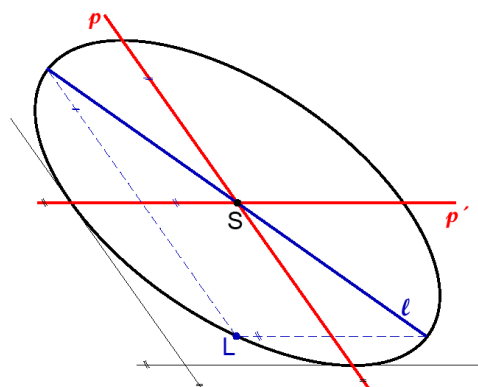
Obrázek 4.22 – Tvzení 4.4



Obrázek 4.23 – Tvzení 4.5



Obrázek 4.24 – Tvzení 4.6



Obrázek 4.25 – Tvzení 4.7

(Informace o sdružených průměrech byly čerpány z webových stránek [11].)

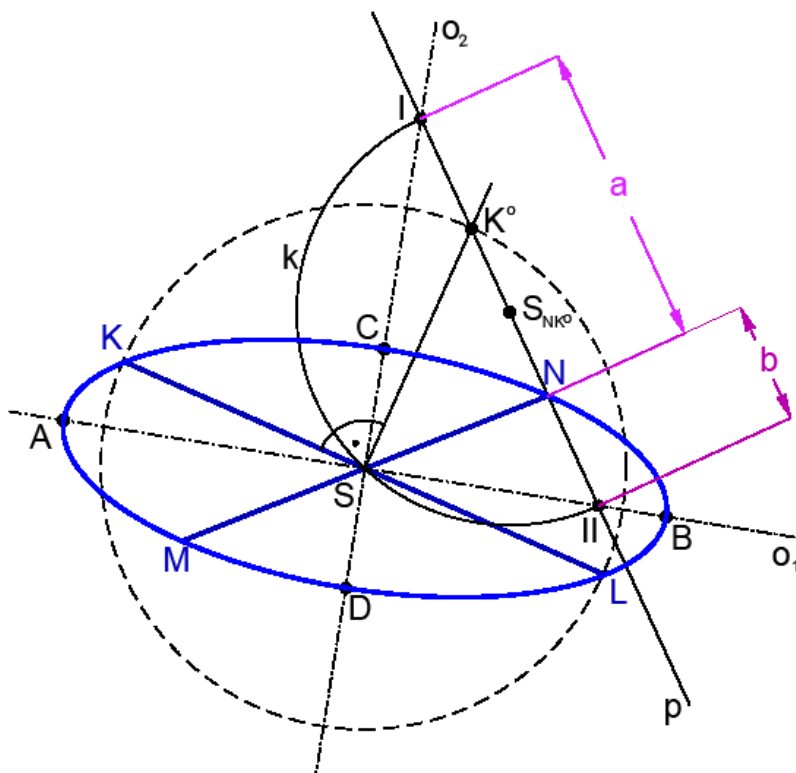
4.4.2 Rytzova konstrukce

Rytzova konstrukce se používá v případech, kdy známe dvojici sdružených omezených průměrů elipsy a potřebujeme dohledat hlavní a vedlejší poloosy.

Je to velice často používaná, „standardní“ konstrukce, a proto by bylo dobré nejen ji znát, ale také ji umět dokázat. Sám autor, švýcarský matematik a učitel **D. Rytz** (1801 - 1868), sice konstrukci vymyslel, ale důkaz k ní již nedoložil. Konstrukce byla dokázána později, a to **Leopoldem Mossbrugerm** Rytzovým kolegou. Konstrukce je z roku 1845.

Nechť jsou dány sdružené omezené průměry KL a MN (ke konstrukci patří **obrázek 4.26**). Jejich průnik, označme ho S , je středem elipsy. Zvolíme jeden z koncových bodů průměrů, nechť je to K , otočíme ho okolo středu S o 90° . Vzniklým otočeným bodem K° vedeme přímku p , která též prochází bodem N - koncovým bodem průměru sdruženého. Dále najdeme střed S_{NK° úsečky NK° a sestrojíme kružnici $k(S_{NK^\circ}, |SS_{NK^\circ}|)$, která protne přímku p ve dvou bodech I a II . Jsou to body, jimiž prochází osy elipsy. Velikost hlavní a

vedlejší poloosy nalezneme na přímce p , platí: $|IN| = a, |NII| = b$. Stačí už jen vynést vzdálenosti a, b ve správném pořadí na osy o_1, o_2 .



Obrázek 4.26 - Rytzova konstrukce

Nyní nastává doba, kdy se dozvíme, proč se postupuje zrovna takto. Konstrukci ozřejmí následující důkaz (**Obrázek 4.27**):

Nechť je dána elipsa svými hlavními a vedlejšími vrcholy A, B, C, D . Sestrojme kružnice $k' = (S, b)$ a $k'' = (S, a)$, kde S je střed elipsy. Jak je nám již známo z kapitoly 4.3, je daná elipsa afinním obrazem kružnice k' a také k'' . (Jde o speciální případ pravoúhlých osových afinít s osami totožnými s osami elipsy.)

Zvolíme dva navzájem kolmé poloměry SK'', SN'' kružnice k'' . V kolmé afinitě jim odpovídají sdružené poloměry SK, SN .

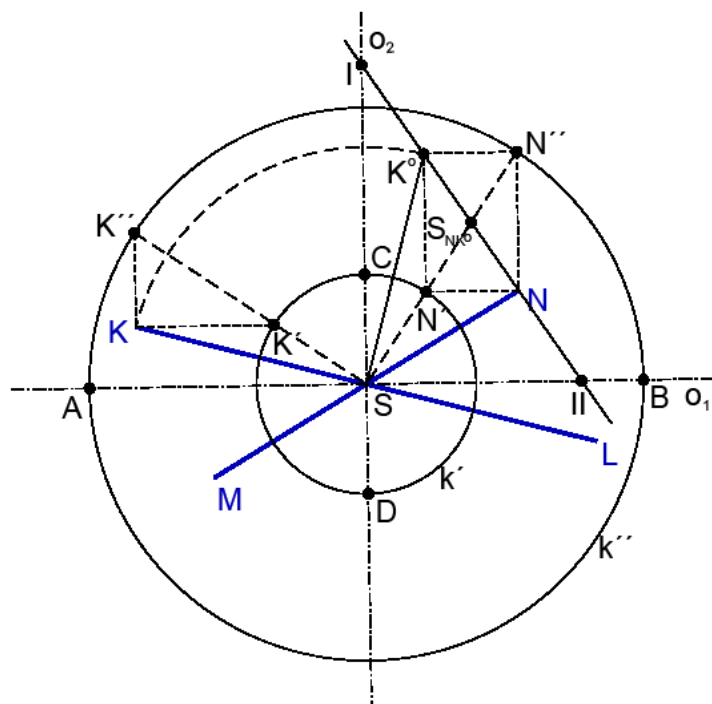
Označíme-li K', N' průsečíky obou kolmých průměrů s kružnicí k' , pak je $\Delta N''NN' \cong \Delta K''KK'$, neboť $N''N' = K''K' \wedge N''N' \perp K''K' \wedge NN' \perp K''K$.

Otočíme-li $\Delta K''KK'$ okolo středu S o 90° , bod K'' splyne s bodem N'' , bod K' s bodem N' a bod K přejde do bodu K^o a zároveň bude čtvrtým vrcholem obdélníka $N'NN''K^o$.

Označme I a II průsečíky jeho úhlopříčky NK^o s vedlejší a hlavní osou. Z rovnoběžnosti $N'N \parallel K^oN'' \parallel SB \wedge N''N \parallel K^oN' \parallel CS$ vyplývá rovnost úseček:

$$SN' = NII = K^o I = b$$

$$SN'' = K^o II = NI = a.$$



Poznámka:

: Vzhledem k důkazu jsme mohli Rytzovu konstrukci zařadit do kapitoly 4.3 **Konstrukce využívající afinní vztah elipsy a kružnice**, ale podle mého názoru je zde silnějším aspektem to, že vycházíme ze sdružených průměrů elipsy.

Obrázek 4.27 -Důkaz Rytzovy konstrukce

4.4.3 Frézierova konstrukce

A. D. Frézier (1682 - 1773) byl bezpochyby nejpozoruhodnější vědec 18. století. Působil ve francouzském městě Savoie, ale původem pocházel za Skotska, jeho originální jméno bylo Frazer. Mnozí ho považují za zakladatele deskriptivní geometrie. (čerpáno z webových stránek [12])

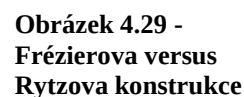
Frézierova konstrukce je o více jak sto let starší než Rytzova konstrukce, pochází z roku 1737. Z našeho pohledu ovšem bude jen jakýmsi zvláštním provedením konstrukce Rytzovy.

Nechť jsou dány sdružené omezené průměry KL a MN (ke konstrukci patří **obrázek 4.28**). Jejich průnik označme S , je to zároveň střed hledané elipsy. Z koncového bodu N kratšího průměru spustíme kolmici n na úsečku SL , na které najdeme bod D' , přičemž platí: $|ND'| = |SL| = |SK|$. Sestrojíme střed $S_{SD'}$ úsečky SD' . Tím jsme získali bod, který je totožný se středem S_{NK^0} z Rytzovy konstrukce. Dále tedy budeme postupovat úplně stejně jako u Rytzovy konstrukce. Sestrojíme kružnici $k(S_{SD'}, |SS_{SD'}|)$ a přímku $p = \overline{NS_{SD'}}$, jejich průnikovými body I, II procházejí osy o_1, o_2 elipsy. Délku hlavní a vedlejší poloosy odečteme na přímce p : $|IN| = a$ a $|NII| = b$.



Stačí dokázat, že střed $S_{SD'}$ z Frézierovy konstrukce je totožný ze středem S_{NK^o} z konstrukce Rytzovy. Pokud obě konstrukce narýsujeme dohromady, vznikne nám rys, jenž je na **obrázku 4.29**. Na obrázku vznikl čtyřúhelník $SND'K^o$ a jestli dokážeme, že se jedná o rovnoběžník, dokážeme zároveň, že středy $S_{SD'}$ a S_{NK^o} splývají.

Zřejmě úsečky SK^o a ND' jsou rovnoběžné, protože obě mají kolmý směr na úsečku KL .
 Také platí, že jsou stejně dlouhé ($|ND'| = |SK| = |SK^o|$). Z těchto dvou vlastností už přímo
 plyne rovnoběžnost a shodnost délek úseček SN a K^oD' , platí tedy: $S_{SD'} = S_{NK^o}$.





4.4.4 Chaslesova konstrukce

Chaslesova konstrukce je přibližně ze stejné doby jako Rytzova (je z roku 1837), ovšem používá se hlavně, jde-li nám o ohniska elipsy, dané párem sdružených průměrů.

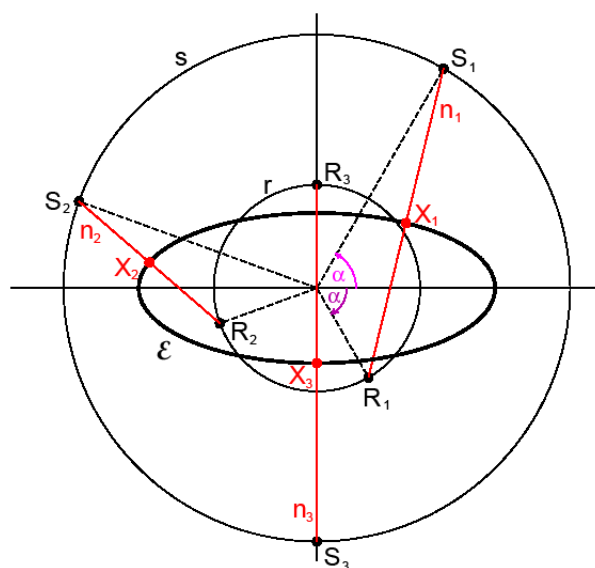
Jejím autorem je francouzský matematik **Michel Chasles** (1793 - 1880), který se především věnoval algebře a projektivní geometrii. (čerpáno z webových stránek [13])

Obrázek 4.30 – M.Chasles

Chaslesova konstrukce vyplývá ze vztahů popsaných ve **tvrzení 4.8** (obrázek 4.31).

Tvrzení 4.8: Pohybují-li se dva body S a R po dvou soustředných kružnicích s, r stejnými úhlovými rychlostmi, ale opačných směrů, jsou jejich spojnice $n \equiv SR$ normálami téže elipsy, jejíž body půlí vzdálenosti bodů S, R a jejíž hlavní poloosa se rovná polovičnímu součtu a vedlejší polovičnímu rozdílu poloměrů obou kružnic.

(citováno z Kadeřávek, F. [4] str. 76)



Obrázek 4.31 – Tvrzení 4.8

Postup je následující (obrázek 4.32):

Mějme dány sdružené průměry KL, MN , jejich průsečík $\bar{S}$. Koncovým bodem N kratšího průměru vedeme přímku n kolmou na průměr KL . Jelikož tečna v bodě N je rovnoběžná s průměrem KL , je n normála elipsy v bodě N (viz. **definice 4.2**). Na přímce n sestrojíme body $1, 2 \in n$ tak, že platí: $|1N| = |2N| = |K\bar{S}|$. (Tedy podle **tvrzení 4.8**: $1 \equiv S$ a $2 \equiv R$.)

Osy o_1, o_2 spojnic $1\bar{S} = p_1$ a $2\bar{S} = p_2$ představují osy elipsy. Známe poloměry kružnic s, r z **tvrzení 4.8** ($|1\bar{S}|, |2\bar{S}|$), nyní bude nutné dohledat: $(|1\bar{S}| + |2\bar{S}|):2 = a$ a $(|1\bar{S}| - |2\bar{S}|):2 = b$. Sestrojme body 3, 5 jako průsečíky přímky p_1 a kružnice $\ell(\bar{S}, |2\bar{S}|)$. Bod 4 je středem úsečky 13 a bod 6 je středem úsečky 51. Délky hlavní a vedlejší poloosy představují tyto úsečky na přímce p_1 : $a = |41| = |34|$

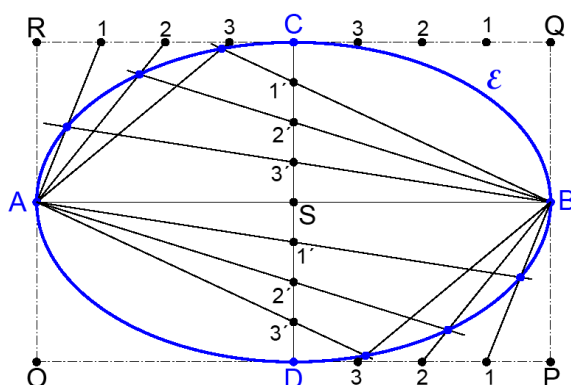
$$b = |61| = |56| = |\bar{S}4|.$$

Např. body čtvrtkružnice AC dostaneme jako průsečíky polopřímek $A1 \cap B1', A2 \cap B2', \dots$, kde pro body $1, 1', 2, 2', \dots$ platí: $\frac{|R1|}{|C1|} = \frac{|S1'|}{|C1'|}, \frac{|R2|}{|C2|} = \frac{|S2'|}{|C2'|}, \dots$

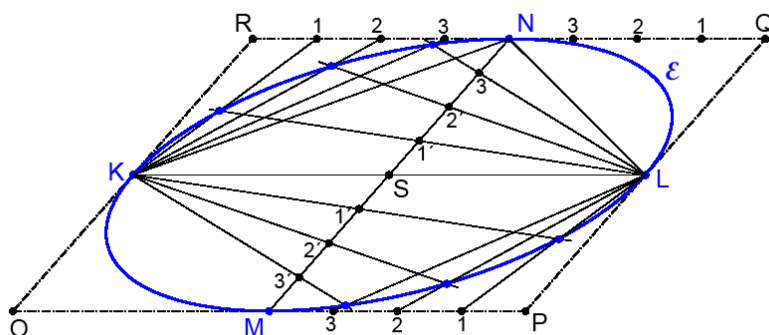
Obdobně bychom hledali body kružnice k v dalších kvadrantech.

Poznámka:

: Čtverec $OPQR$ na **obrázku 4.33** je kružnici k opsaný. Pokud bychom na něj aplikovali nějakou z afinních transformací, jednodušeji řečeno nějakým způsobem ho zdeformovali (např. natáhli nebo zbortili), stane se rovnoběžníkem $OPQR$ opsaným elipse! Více na **obrázcích 4.34 a 4.35**.



Obrázek 4.34 – Příčková kon. elipsy, zadány jsou hl. a ved. vrcholy



Obrázek 4.35 – Příčková kon. elipsy, zadány jsou sdružené průměry

4.5 Další konstrukce elipsy

4.5.1 Konstrukce elipsy ohýbáním papíru

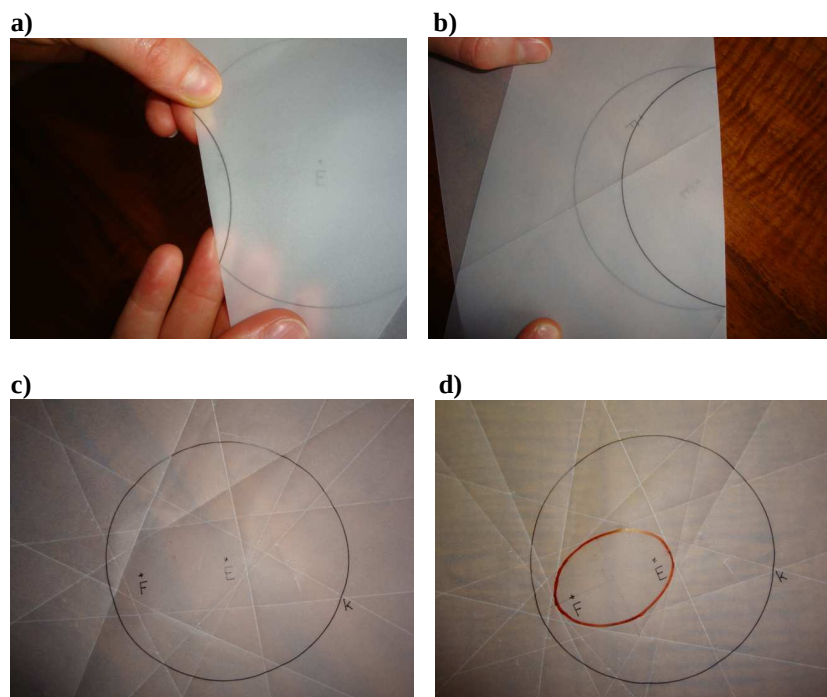
Jedna z netypických konstrukcí je určitě **konstrukce elipsy ohýbáním papíru**. Pokud známe hodnotu excentricity e a hlavní poloosy a , můžeme ji použít.

Na papír, nejlépe tzv. „pauzák“, narýsujeme kružnici k se středem v libovolně zvoleném bodě E a poloměrem $2a$. Druhý bod F zvolme tak, že platí: $|EF| = 2e$. Nyní

budeme ohýbat papír tak, aby vždy ohnutá část kružnice k procházela bodem F . Přesně jak je tomu na **obrázku 4.36 a), b)**.

Každý ohyb je v podstatě tečnou elipsy. Dostáváme tedy množinu tečen, které žádanou elipsu obalují (viz. **obrázek 4.36 c), d)**).

Pro sestrojení elipsy si jistě tuto konstrukci volit nebudeme. Má ovšem jiný účel, a to didaktický. Je krásným příkladem pro žáky, jelikož demonstruje funkci ohniskových vlastností elipsy, konkrétně se jedná o **větu 3.1**. Kružnice k představuje **řídící kružnici** opsanou z ohniska E . Je tedy množinou všech bodů souměrně sdružených s druhým ohniskem F podle tečen elipsy – ohybů papíru.

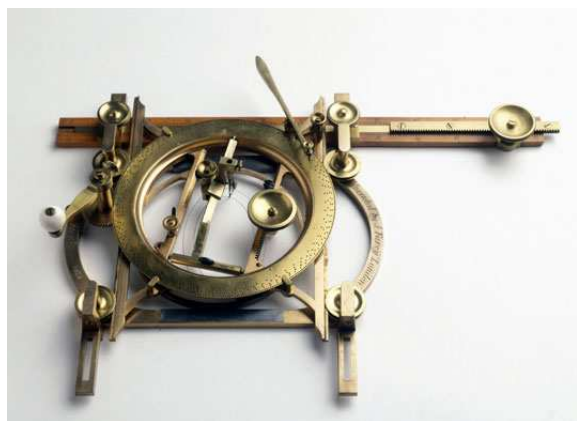


Obrázek 4.36 – Konstrukce ohýbáním papíru

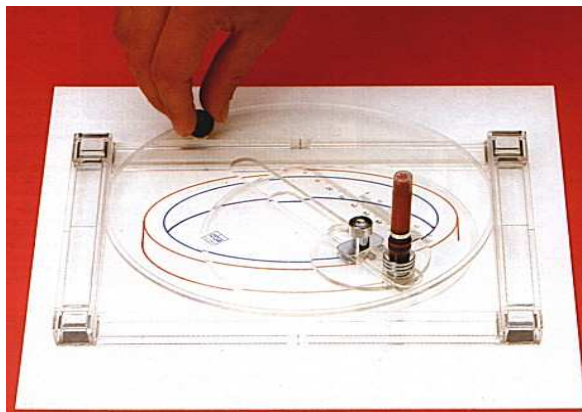
KAPITOLA 5.: Elipsografy

Tak jako na rýsování kružnic používáme kružítko, na rýsování elips lidé vynalezli speciální přístroje zvané **elipsografy**. Existuje několik druhů elipsografů fungujících na rozličných principech. Tato kapitola má za úkol přiblížit alespoň nějaké z nich.

Pro představu, jak některé elipsografy vypadají, jsou zde k dispozici **obrázky 5.1 a 5.2**.



Obrázek 5.1 - Elipsograf 1



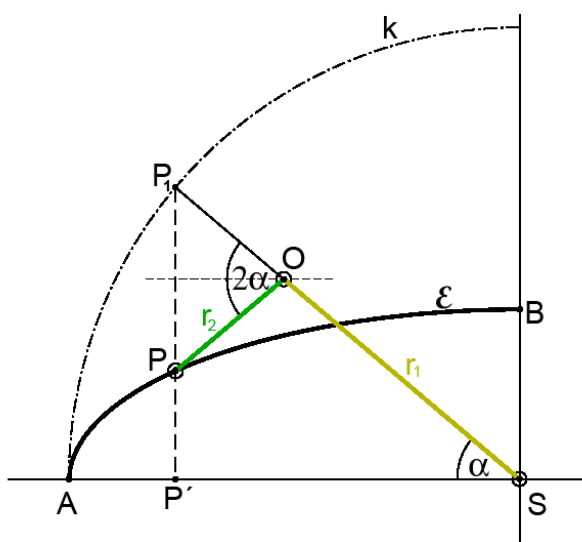
Obrázek 5.2 - Elipsograf 2

5.1 Braunův elipsograf

Braunův elipsograf je založen na afinitě kružnice s elipsou (více o afinním vztahu je v kapitole 4.3). Na **obrázku 5.3** je vyznačen jeho princip.

Okolo středu S se otáčí rameno SO o délce r_1 a okolo bodu O se otáčí rameno $|OP| = r_2$ a sice tak, opíše-li rameno SO od počáteční polohy $|AS| = r_1 + r_2$ úhel α , otočí se rameno OP o úhel 2α ve smyslu opačném. Tento převod rotací se uskutečňuje různě, buď ozubenými koly, nebo řetízkem atd. Bod P přitom opíše elipsu $\mathcal{E}$ afinní s kružnicí $k(S, r_1 + r_2)$, přičemž osa afinity je SA , směr $P_1P \perp SA$. Délky r_1 a r_2 lze měnit, tím dostaneme různé elipsy o poloosách $r_1 + r_2, r_1 - r_2$.

(citováno z Kadeřávek, F. [4] str. 76, 77)

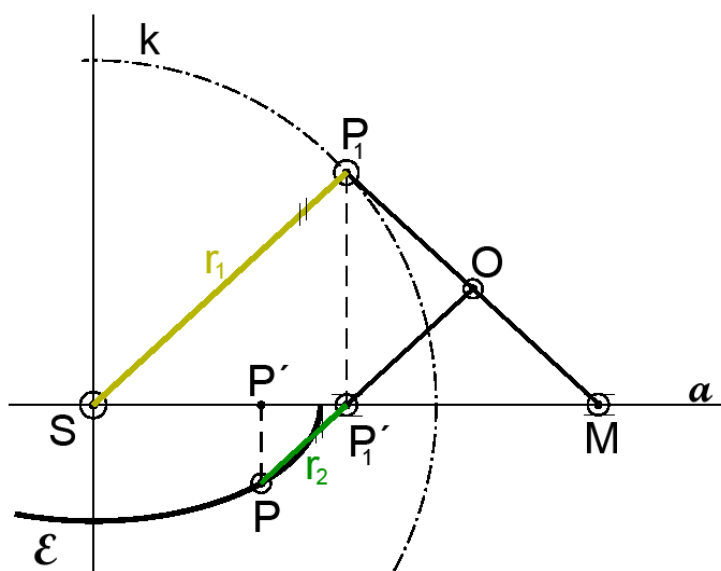


Obrázek 5.3 – Princip Braunova elipsografu

5.2 Burstowův elipsograf

Princip **Burstowova elipsografu**, vyznačen na **obrázku 5.4**, je také založen na afinitě. Rameno $|SP_1| = r_1$ se otáčí kolem středu S a druhé rameno $|P_1'P| = r_2$ kolem kolmého průmětu P_1' bodu P_1 na průměr a a to tak, že stále zůstává $PP_1' \parallel SP_1$. Aby bod P_1' byl v patě kolmice PP_1' , je zde vsunuta příčka P_1M otáčivá kolem P_1 , jejíž druhý konec se posouvá po a , a dále je zde pomocné rameno $|OP_1'| = \frac{1}{2}|P_1M|$ otáčivé okolo půlčího bodu O příčky P_1M , jehož koncový bod P_1' se též posouvá po a . Bod P opiše pak elipsu $\mathcal{E}$. Je-li totiž P' patou kolmice $PP' \perp a$, pak $\frac{|PP'|}{|P_1P_1'|} = \frac{r_2}{r_1}$, $\frac{|P'P_1'|}{|SP_1'|} = \frac{r_2}{r_1}$,

z poslední úměry potom plyne $\frac{|SP_1'| - |P'P_1'|}{|SP_1'|} = \frac{|SP'|}{|SP_1'|} = \frac{r_1 - r_2}{r_1}$.

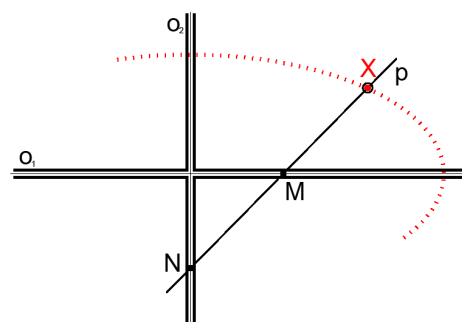


Body křivky $\mathcal{E}$ vznikají tím, že úsečky SP_1' krátíme v poměru $(r_1 - r_2):r_1$ a kolmice P_1P_1' v poměru $r_2:r_1$. Tedy $\mathcal{E}$ je elipsa o poloosách $r_1 - r_2$ a r_2 . Změnou délek r_1 , r_2 dostáváme různé elipsy. (citováno z Kadeřávek, F. [4] str. 77)

Obrázek 5.4 - Princip Burstowova elipsografu

5.3 Bramerův elipsograf

Bramerův elipsograf je velice jednoduchý přístroj. Je založený na principu proužkové konstrukce elipsy. Sestává se ze dvou navzájem kolmých kolejnicek O_1, O_2 , které představují osy elipsy. Po nich se



Obrázek 5.5 – Princip Bramerova elipsografu

Po nich se pohybují svorky (body) M, N upevněné na pohyblivé tyči p (viz. **obrázek 5.5**). Na tyči je také upevněn písíčí hrot X , přičemž platí následující: $a = |NX|$, $b = |MX|$, $a - b = |MN|$.

Pohybujeme-li tyčí p , hrot X opisuje elipsu o výše uvedených velikostech hlavní a vedlejší poloosy.

Na tyči p je možné měnit délku $|MN|$ a podobně i polohu písíčího hrotu X , čímž dostáváme elipsy různých tvarů a velikostí.
(čerpáno z Kadeřávek, F. [4])

5.4 Artobolevského elipsograf

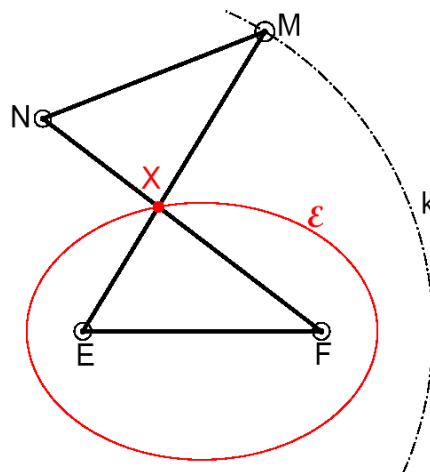
Elipsografů existuje spousta, my si ukážeme ještě princip jednoho, a to **Artobolevského elipsografu**.

Na **obrázku 5.6** jsou dány dva pevné body E, F a dva body M, N pohyblivé, přičemž platí $|EM| = |FN|$, $|EF| = |MN|$. Délky úseček EF, MN, EM, FN jsou pevné, jedná se o spojená otáčivá ramena. Pokud budeme pohybovat bodem M (resp. bodem N) a budou platit předchozí podmínky, potom se bod $X = EM \cap FN$ pohybuje po elipse, jejíž ohniska jsou E, F a jejíž délka hlavní osy je rovna $|EM|$.

(čerpáno z Horák, S. [2] str. 13 a z webových stránek [14])

Poznámka:

: Ramena EM a FN jsou průvodiče dané elipsy.

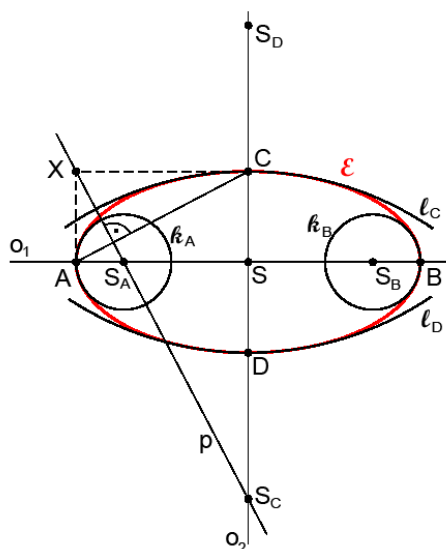


Obrázek 5.6 – Princip Artobolevského elipsografu

KAPITOLA 6.: Aproximace elipsy kruhovými oblouky

Při rýsování elipsy obvykle u sebe nemáme elipsograf, který by křivku vykreslil, ale používáme snadněji dostupná křivítka. Vyrýsování elipsy pomocí křivítek dělá mnohým žákům problémy. Výsledky se na první pohled nedají považovat za hladké křivky, kterými ovšem elipsy jsou. Proto je zde tato kapitola, která mnohé usnadní. Naučíme se, jak lze elipsu aproximovat kruhovými oblouky, neboli, jak lze pomocí kruhových oblouků do značné míry elipsu napodobit.

6.1 Hyperoskulační kružnice



Obrázek 6.1 – Hyperoskulační kružnice

Při dokreslení elipsy se nejčastěji používají **oskulační kružnice** ve vrcholech A, B, C, D .

Definice 6.1: Kružnici, která prochází daným bodem elipsy a má s touto křivkou styk nejméně druhého řádu, budeme nazývat **oskulační kružnice (kružnice křivosti)**.

Poloměr oskulační kružnice se nazývá (**první**) **poloměr křivosti**. Střed oskulační kružnice, tzv. **střed křivosti**, leží na normále elipsy v daném bodě.

Poznámky:

: Styk elipsy a oskulační kružnice druhého řádu (v **definici 6.1**) znamená, že oskulační kružnice má v bodě dotyku s elipsou shodnou první a druhou derivaci. Jednodušeji řečeno, oskulační kružnice v okolí bodu dotyku elipsu dobře aproximuje.

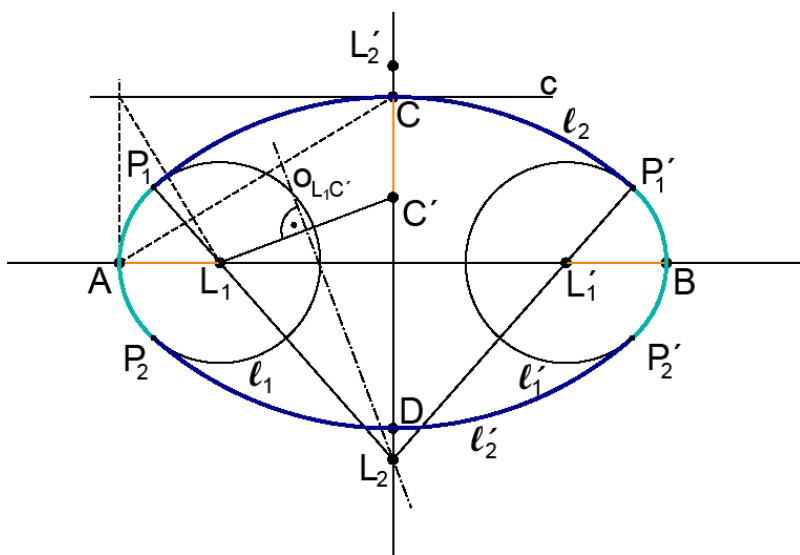
: Ve vrcholech elipsy mají oskulační kružnice s elipsou styk řádu vyššího než dva. Takové kružnice se pak označují jako **hyperoskulační kružnice** elipsy v daném bodě.

Najít středy hyperoskulačních kružnic není nijak složité (viz. **obrázek 6.1**). Necht' A, B, C, D jsou vrcholy elipsy a S je její střed. Doplníme-li trojúhelník tvořený body A, S, C bodem X na obdélník a spustíme-li z bodu X kolmici na úsečku AC , středy S_A, S_C hyperoskulačních kružnic získáme jako průsečíky kolmice s osami o_1, o_2 elipsy. Kružnice k_A se středem S_A a poloměrem $|AS_A|$ aproximuje elipsu v oblasti kolem hlavního vrcholu A (resp. $k_B(S_B, |BS_B|)$ aproximuje elipsu ve vrcholu B). Obdobně kružnice $l_C(S_C, |CS_C|)$ (resp. $l_D(S_D, |DS_D|)$) je oskulační kružnicí ve vedlejším vrcholu C (resp. D).

Je patrné, že při takové situaci na sebe jednotlivé hyperoskulační kružnice nenavazují. Aproximují jen konkrétní části elipsy. Chybějící části elipsy bychom museli křivítkem dokreslit.

6.2 Čtyřobloukový ovál

Výhodně lze elipsu nahradit křivkou, jež je složena z kružnicových oblouků několika kružnic o různých poloměrech, taková křivka se nazývá **ovál**. Zároveň musí platit, že v bodě napojení jednotlivých kružnicových oblouků mají oba oblouky společnou tečnu (jejich středy a bod napojení musí být kolineární). Toto napojení se nazývá **hladké**.



Obrázek 6.2 – Čyřobloukový ovál

Na **obrázku 6.2** je znázorněn tzv. **čtyřobloukový ovál**. Při nahrazování elipsy tímto oválem obvykle sestrojíme kružnici o poloměru menším než je velikost vedlejší poloosy se středem na hlavní ose a procházející bodem A (resp. B). Za tuto kružnici obvykle volíme oskulační kružnici $\ell_1(L_1, |AL_1|)$ (resp. $\ell'_1(L'_1, |BL'_1|)$) (viz. **obrázek 6.2**). Střed druhého kružnicového oblouku, jehož tečna ve vrcholu C je přímka $c \parallel AB$ a jenž se dotýká kružnice ℓ_1 (resp. ℓ'_1), nalezneme následujícím způsobem: Najdeme bod C' , který leží na vedlejší poloose elipsy a $|CC'| = |AL_1|$. Potom sestrojíme osu $o_{L_1C'}$ úsečky L_1C' . Střed L_2 oblouku ℓ_2 je průsečík osy $o_{L_1C'}$ a vedlejší osy elipsy. Symetricky podle hlavní osy elipsy můžeme dohledat střed L'_2 oblouku ℓ'_2 . Body napojení P_1, P_2, P'_1, P'_2 jsou kolinéární se středy stýkajících se oblouků (např. P_1, L_1, L_2 leží na jedné přímce).

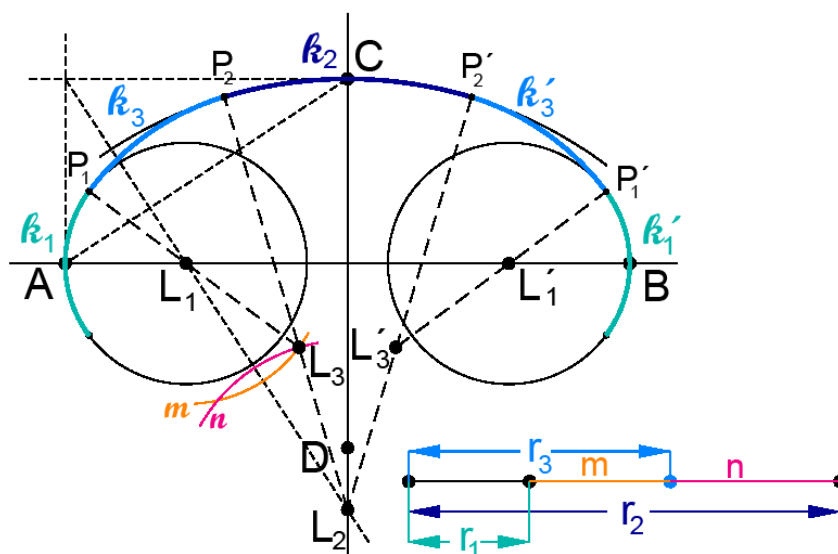
(částečně čerpáno z Urban, A. [10] str. 42)

6.3 Osmiobloukový ovál

Osmiobloukový ovál elipsu nahrazuje lépe než výše zmíněný čtyřobloukový ovál. Budeme celkem potřebovat tři různé kružnice, z jejich osmi oblouků pak sestavíme hledaný ovál.

Při nahrazování elipsy osmiobloukovým oválem volíme za dvě z daných aproximačních kružnic (celkem čtyři oblouky) oskulační kružnice o poloměrech r_1, r_2 v hlavních a

vedlejších vrcholech A, B, C, D . Na **obrázku 6.3** to jsou oblouky k_1, k_2, k_1' . K sestrojení oválu potřebujeme ještě najít třetí kružnici, jejíž čtyři oblouky (na **obrázku 6.3** jsou vyobrazené jen oblouky k_3, k_3') doplní oblouky oskulačních kružnic. Její poloměr r_3 můžeme volit z intervalu (r_1, r_2) libovolně. Konstrukce jednoho ze středů oblouku této kružnice je na **obrázku 6.3**. Necht' tedy L_1 je středem k_1 a L_2 středem k_2 . Střed L_3 hledaného oblouku k_3 je průsečíkem, jenž je blíže k vedlejší ose, kružnic $m(L_1, r_2 - r_1)$ a $n(L_2, r_2 - r_3)$. Opět platí, že bod napojení P_1 je kolineární s body L_1, L_3 a P_2 leží na přímce $L_2 L_3$.



Obrázek 6.3 – Osmiobloukový ovál

(Informace o osmiobloukovém oválu byly čerpány z Urban, A. [10] str. 42 a 43.)

Závěr

V geometrické sféře existují stovky rozličných tvarů. Mezi ty rovinné patří právě elipsa. Není ani kulatá, ani hranatá, ani kosá. Je hladká a spojitá. Dle mého názoru je to krásná a sympatická křivka. Kdo ji dobře neznal, doufám, že se s ní díky této práci blíže seznámil a našel i své stanovisko k ní.

Mnohdy, když nás něco zajímá nebo když sami nevíme a snažíme se najít odpovědi, pátráme a pátráme. Také jsem pátrala a snažila se nalézt potřebné informace, které jsou spojeny s hlavním tématem – elipsou. Sestavila jsem a pokusila se zkompletovat vlastnosti a konstrukce elipsy.

Jak jsem již výše zmínila, elipsu považuji za sympatickou křivku, co to v podstatě znamená, necht' si každý domyslí sám. Díky těmto sympatiím práce pro mě byla koníčkem. Doufám, že to čtenář pozná a ocení a že po přečtení této práce bude obohacen o další vědomosti, které snad někdy využije.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] **Breymann, G. A.:** Allgemeine Baukonstruktionslehre mit besonderer Beziehung auf das Hochbauwesen. J. M. Gerhard's Verlag, Leipzig, 1903.
- [2] **Horák, S.:** Elipsa; Nakladatelství československé akademie věd, Praha 1953
- [3] **Horák, S.:** Sbírka řešených úloh z deskriptivní geometrie II.díl; Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1966
- [4] **Kadeřávek, F. - Klíma, J. – Kounovský, J.:** Deskriptivní geometrie I ; nákladem a tiskem Jednoty československých matematiků a fysiků, Praha 1929
- [5] **Kalal, J.:** Sbírka úloh z deskriptivní geometrie; nákladem Jednoty československých matematiků a fysiků, Praha 1912
- [6] **Klíma, J. – Ingrid, V.:** Deskriptivní geometrie pro VI. a VII. třídu reálků; Druhé, přehlédnuté vydání; nákladem Jednoty československých matematiků a fysiků, tiskem knihtiskárny „Prometheus“, Praha 1947
- [7] **Lávička, M.:** KMA/G1 Geometrie 1, Pomocný učební text; Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň 2008 – v elektronické podobě :
http://home.zcu.cz/~lavicka/subjects/G1/texty/G1_texty.pdf
- [8] **Menšík, M.:** Deskriptivní geometrie, I. díl, 22. svazek Polytechnické knihnice, II. řad; Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1962
- [9] **Sobotka, J.:** Deskriptivní geometrie promítání paralelního; nákladem Jednoty českých matematiků a české matice technické, Praha 1906
- [10] **Urban, A.:** Deskriptivní geometrie I, 3., nezměněné vydání; SNTL – Nakladatelství technické literatury, Alfa, vydavatelstvo technickém a ekonomickém literatury, r. 1982

webové stránky:

- [11] http://math.muni.cz/~xhalfaro/diplomka/kap_a3/kap_a3.html
- [12] www.electricscotland.com/canada/fraser/french_connections.htm
- [13] <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Chasles.html>
- [14] www.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/problems/ArtobolevskyEllipsograph.html

PŘÍLOHA

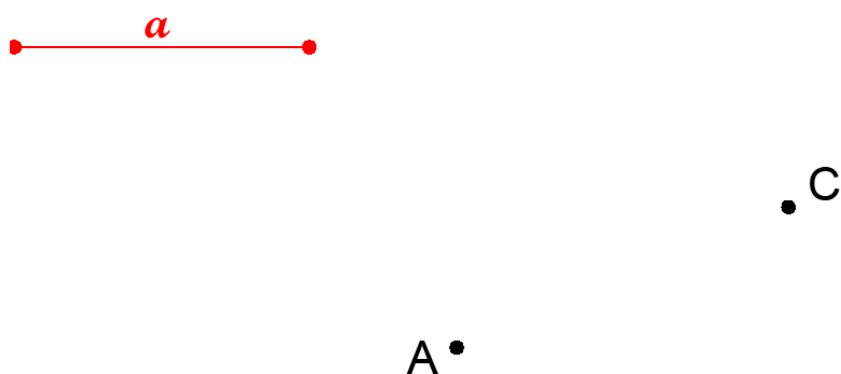
Sbírka úloh

Sbírka obsahuje 16 příkladů na téma problematiky kolem elipsy. Může sloužit jako kontrolní pomůcka, zda čtenář či student látku popsanou v bakalářské práci pochopil. Některé příklady lze využít také jako zadání testu přímo ve školách, kde byly probrány vlastnosti elipsy. Úlohy nejsou nutně spojeny s touto bakalářskou prací a jejím obsahem, mohou tedy být využity samostatně.

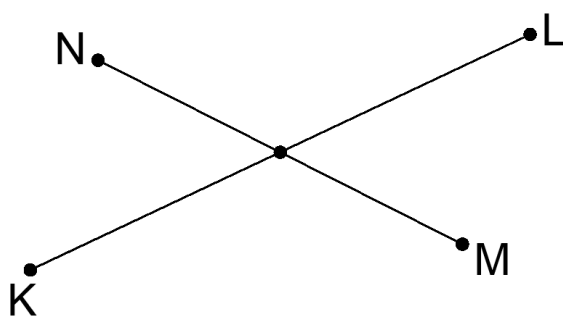
Sbírka je sestavena z různě obtížných úloh. Některé příklady mají vypracovaný výsledek, ty jsou označeny symbolem (*) . Jejich řešení naleznete na konci této sbírky.

Příklad 1. (*)

Sestrojte elipsu $\mathcal{E}$, jež je dána jedním hlavním vrcholem A , jedním vedlejším vrcholem C a délkou hlavní poloosy a .

**Příklad 2.**

Sestrojte osy elipsy, jsou-li dány její sdružené průměry KL, MN .



Příklad 3.

Narýsujte elipsu, je-li dáno $a = 7$ (délka hl. poloosy) a $e = 4$ (velikost excentricity).

Příklad 4. (*)

Najděte a omezte hlavní osu elipsy $\mathcal{E}$, jsou-li dány oba vedlejší vrcholy C, D a bod $M \in \mathcal{E}$.

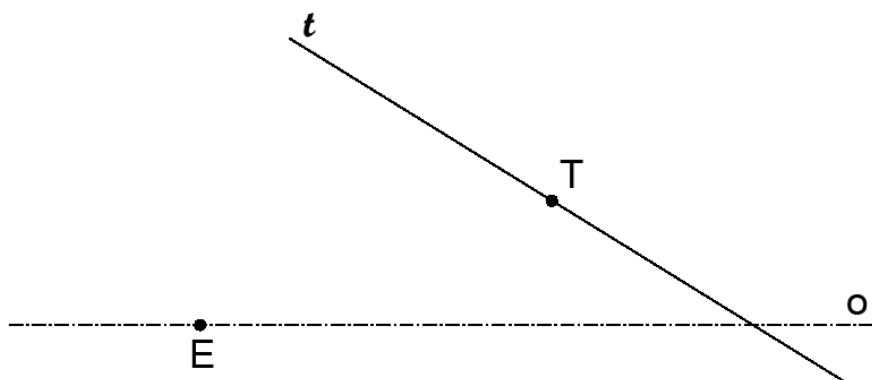
C •

• M

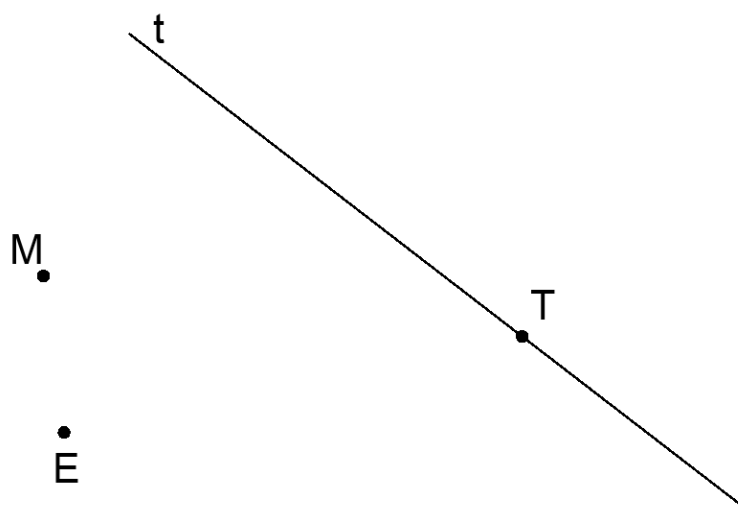
•
D

Příklad 5. (*)

Sestrojte elipsu $\mathcal{E}$, je-li dána hlavní osa o_1 , ohnisko $E \in o_1$ a tečnu t s bodem dotyku T .

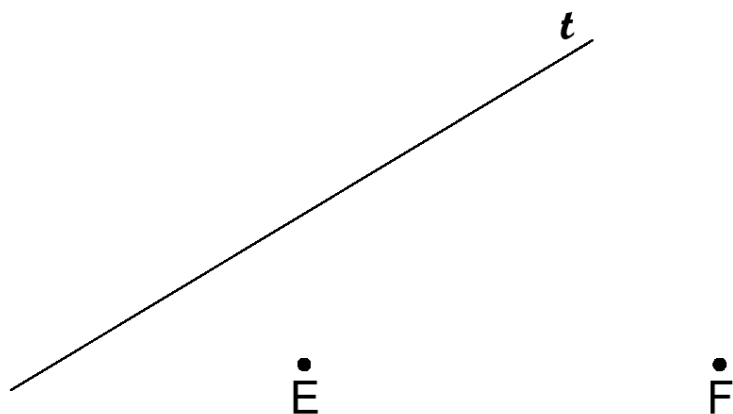
**Příklad 6. (*)**

Dourčete elipsu $\mathcal{E}$ (tj. najděte její hlavní a vedlejší vrcholy), pokud je dáno následující: ohnisko E , bod $M \in \mathcal{E}$ a tečna t s bodem dotyku T .

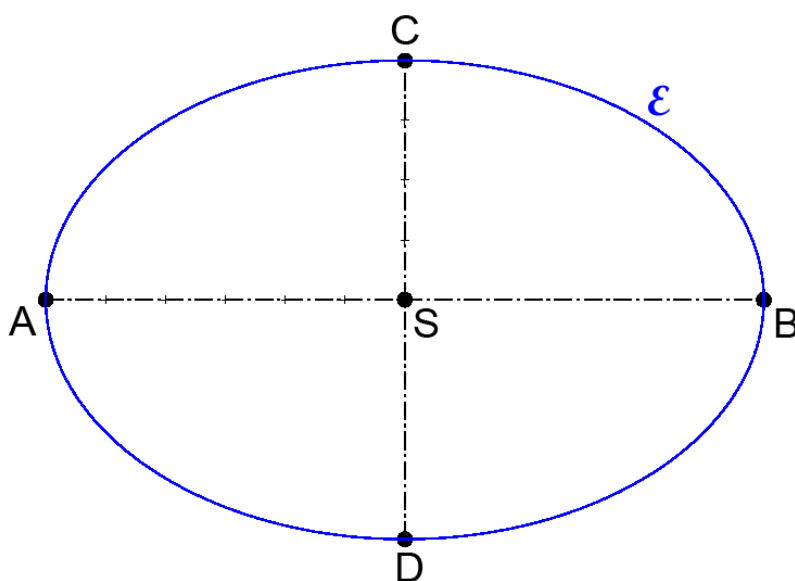


Příklad 7. (*)

Sestrojte elipsu $\mathcal{E}$, jestliže jsou dána obě její ohniska E, F a tečna t .

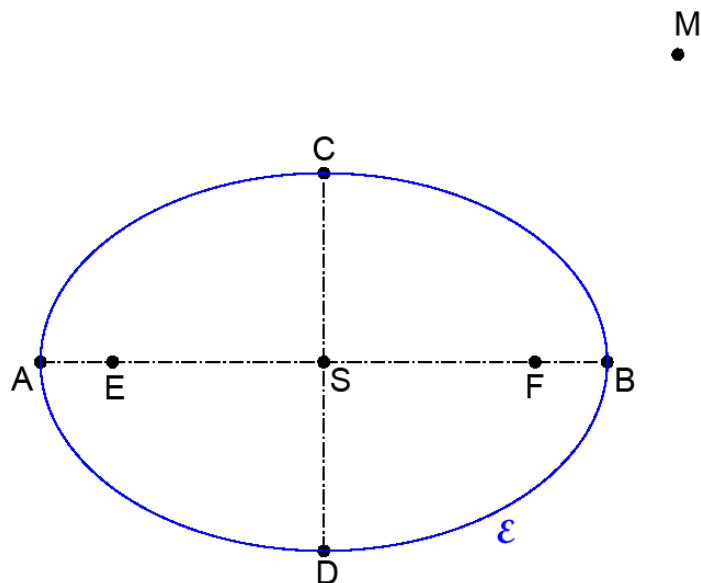
**Příklad 8.**

Na elipse $\mathcal{E}$, pro níž platí : $a = 6, b = 4$, najděte všechny možné body, jejichž jeden průvodič má délku 2. Dále v těchto bodech sestrojte tečny k elipse $\mathcal{E}$.

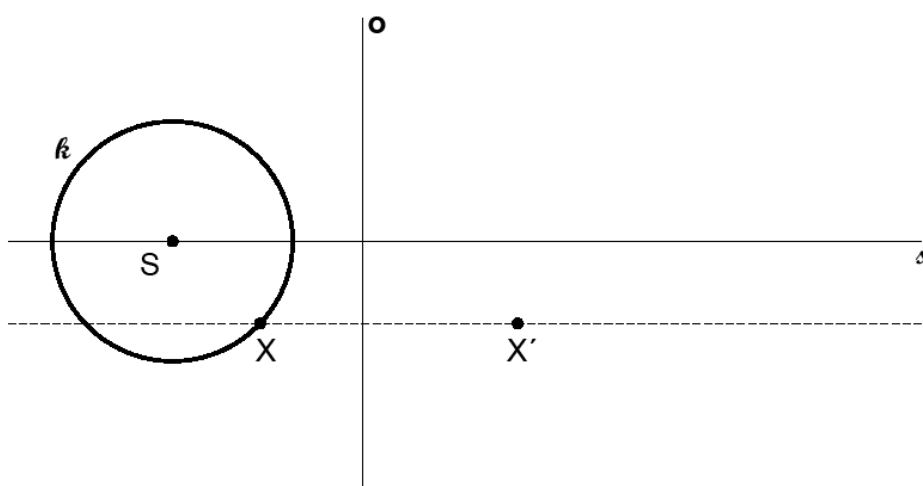


Příklad 9. (*)

Sestrojte tečnu t z bodu M k dané elipse $\mathcal{E}$.

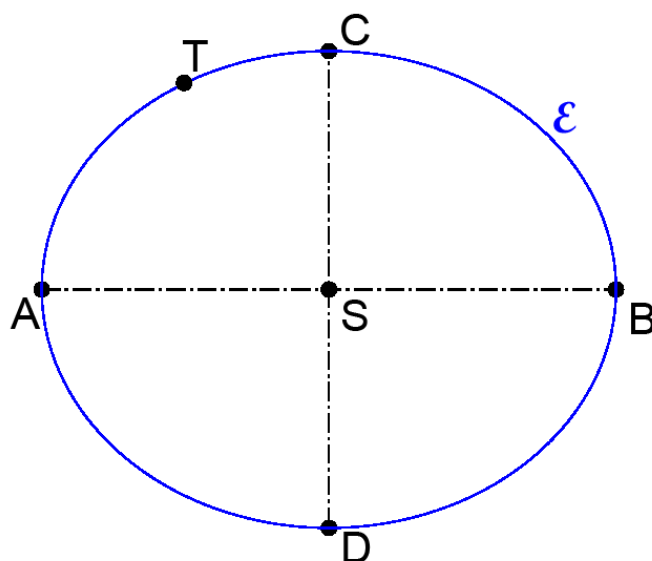
**Příklad 10.**

Sestrojte obraz kružnice k v osové afinitě dané osou o , směrem $s \perp o$ a dvojicí odpovídajících si bodů $X \rightarrow X'$.

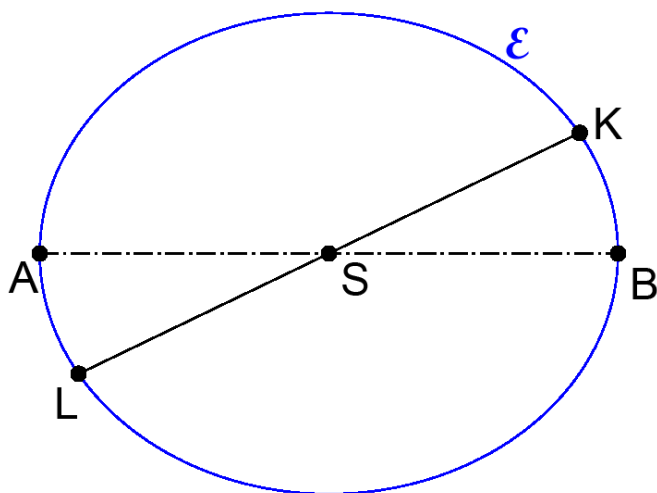


Příklad 11.

Pomocí trojúhelníkové konstrukce sestrojte k elipse $\mathcal{E}$ zadané hlavními a vedlejšími vrcholy A, B, C, D tečnu t v bodě $T \in \mathcal{E}$ a také najděte bod E evoluty elipsy, který leží na normále n elipsy $\mathcal{E}$ v bodě T .

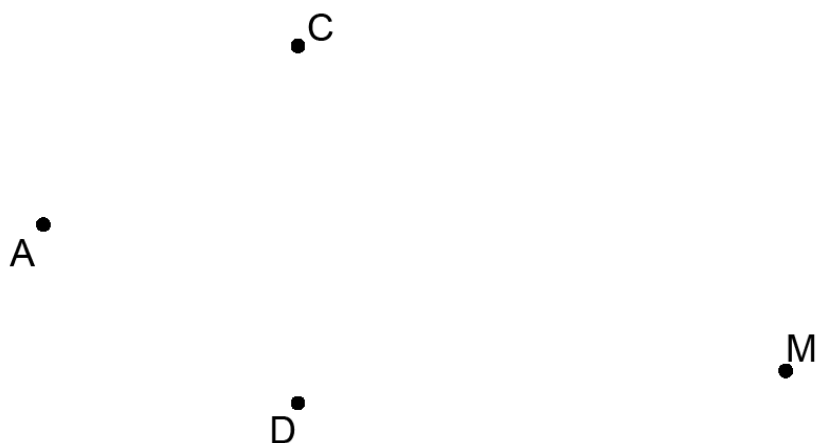
**Příklad 12.**

Najděte průměr MN elipsy $\mathcal{E}$, který je sdružený se zadaným průměrem KL , znáte-li oba hlavní vrcholy A, B elipsy $\mathcal{E}$.

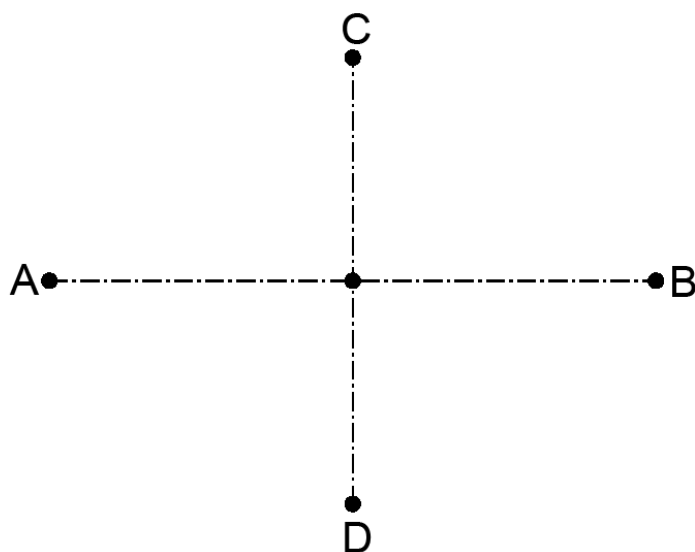


Příklad 13. (*)

Pomocí vhodně zvolené osově afinity sestrojte tečny t_1, t_2 z bodu M k elipse $\mathcal{E}$, která je dána hlavním vrcholem A a vedlejšími vrcholy C, D .

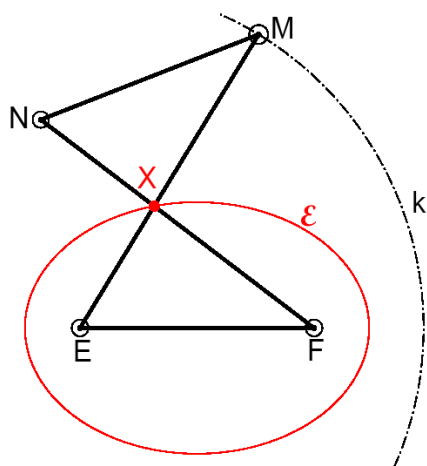
**Příklad 14.**

Elipsu zadanou hlavními a vedlejšími vrcholy A, B, C, D nahrad'te vhodným osmiobloukovým oválem.

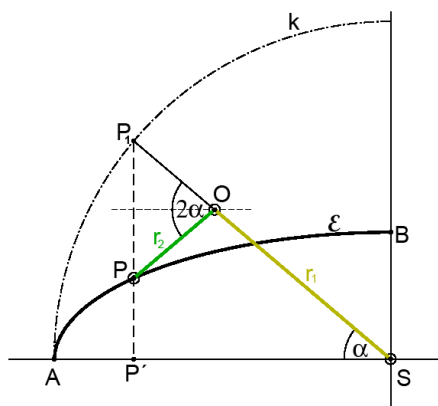


Příklad 15. (*)

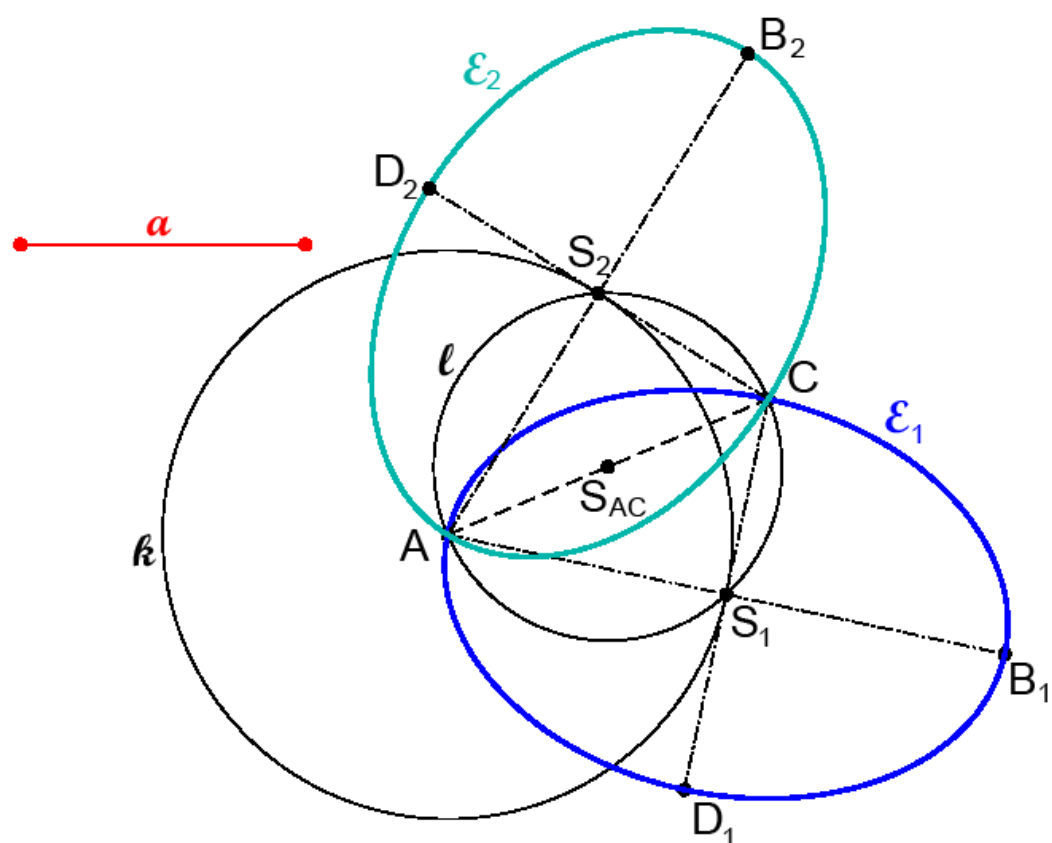
Dokažte, že Artobolevského elipsograf opravdu kreslí elipsu. Na obrázku je připomenut jeho princip. (Platí: $|EM| = |FN|$, $|EF| = |MN|$).

**Příklad 16.**

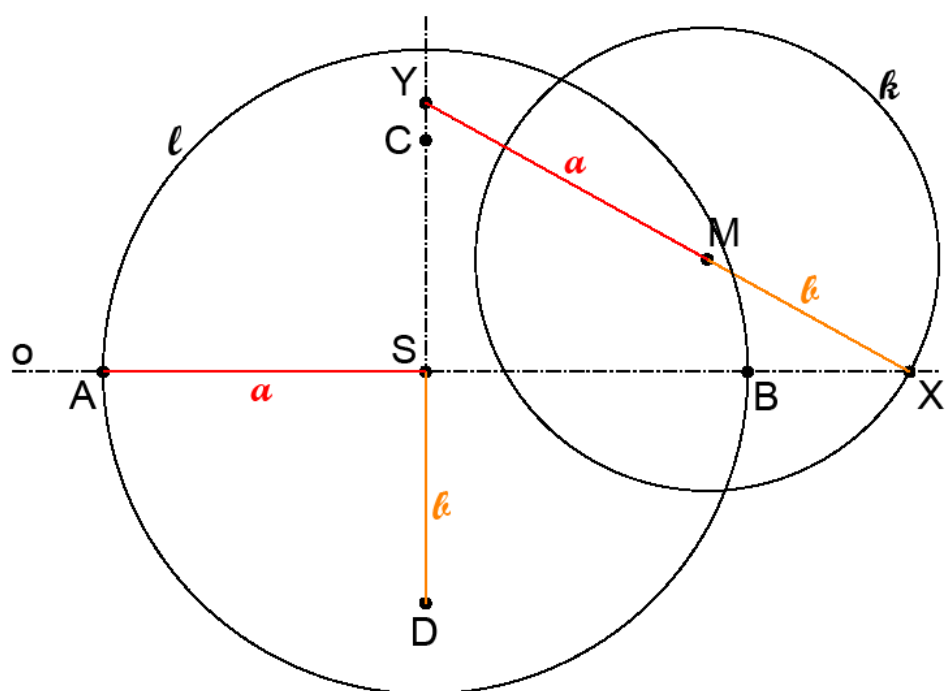
Zkuste dokázat, že Braunův elipsograf opravdu rýsuje elipsu. (Princip je nakreslen na obrázku. Platí: $|AS| = r_1 + r_2$.)



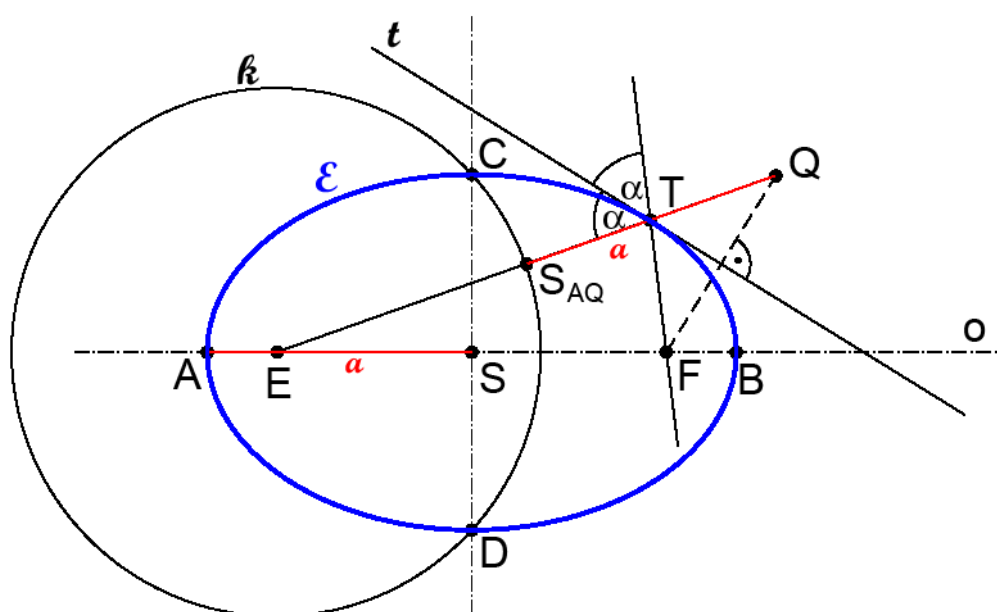
řešení příkladu 1.



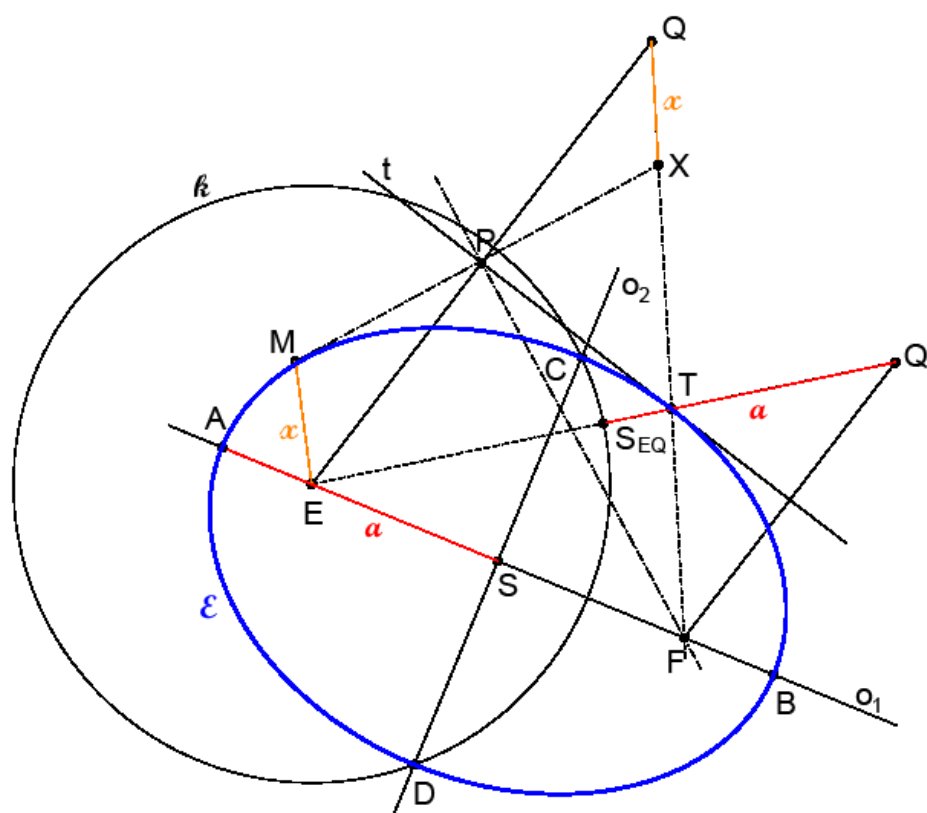
řešení příkladu 4.



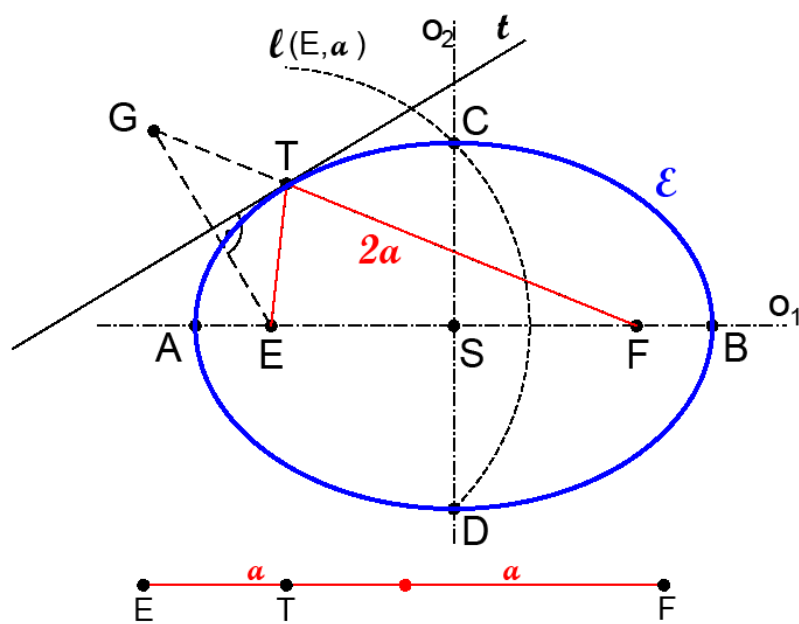
řešení příkladu 5.



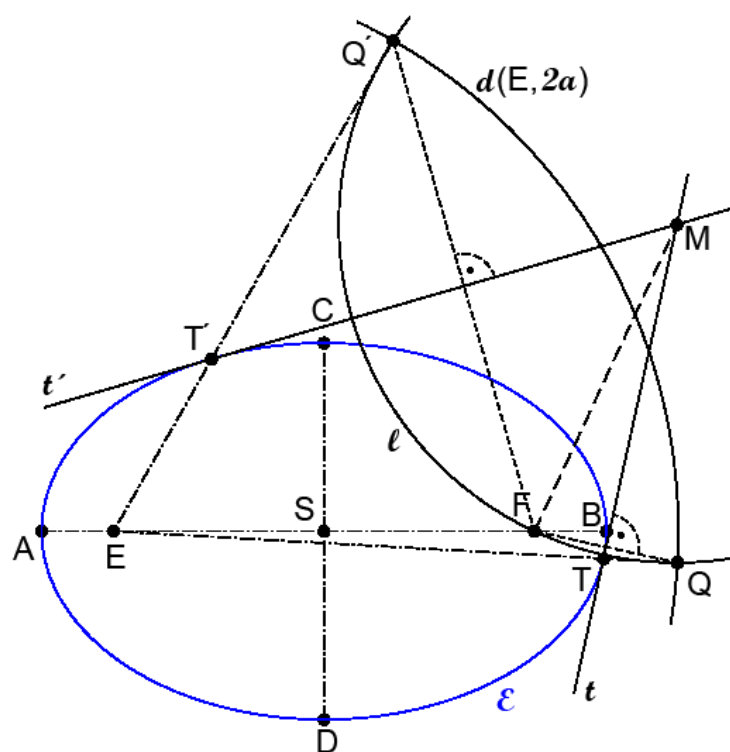
řešení příkladu 6.



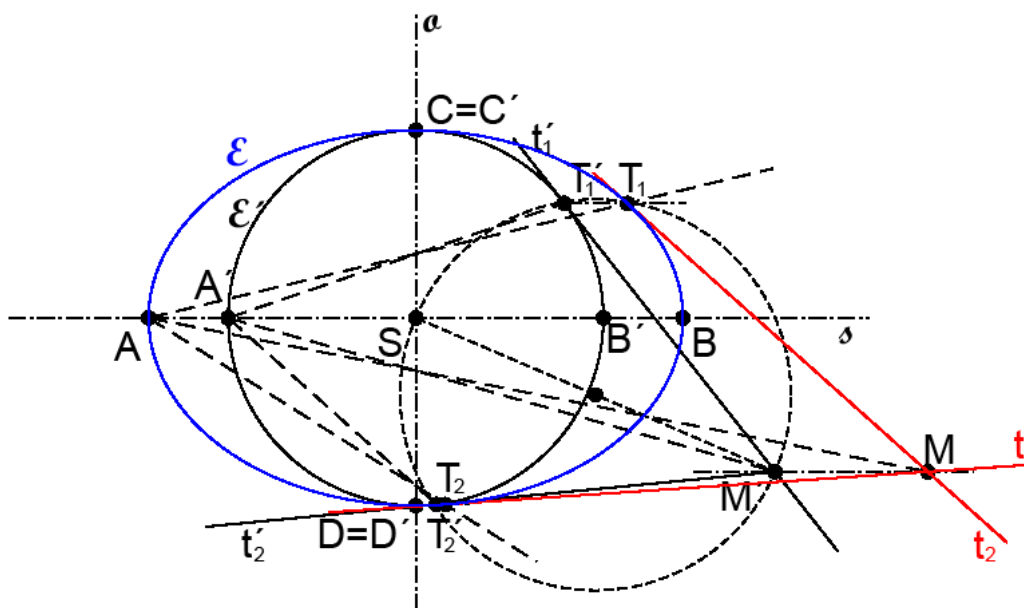
řešení příkladu 7.



řešení příkladu 9.

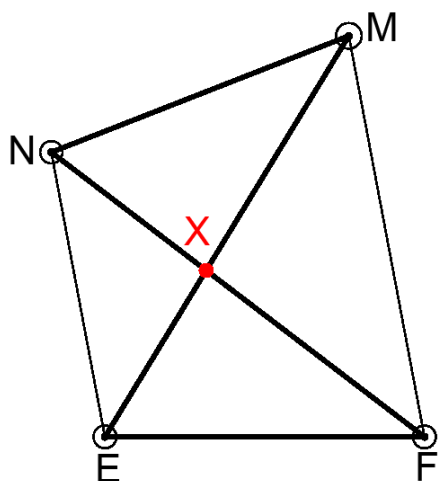


řešení příkladu 13.



řešení příkladu 15.

Doplníme-li si do obrázku úsečky EN , FM , snadno zjistíme, že trojúhelníky $\triangle EMN$ a



$\triangle NFE$ jsou shodné podle věty sss. Platí totiž:

$|EM| = |NF|$, $|EN| = |NE|$, $|MN| = |FE|$. Díky této skutečnosti dále platí: $|\angle ENF| = |\angle MEN| \Rightarrow |\angle ENX| = |\angle XEN|$, tedy že je $\triangle EXN$

rovnoramenný ($|NX| = |EX|$). Důsledkem toho

zároveň platí: $|FX| = |MX|$. Díky těmto rovnostem

můžeme psát: $|EX| + |FX| = |EX| + |MX| = |EM|$,

což je rovnost, která říká, že bod X má konstantní

součet vzdáleností rovný délce $|EM|$ od dvou

pevných bodů E, F . Neboli, že bod X se

pohybuje po elipse, jejíž ohniska jsou body E, F a

jejíž délka hlavní poloosy je $\frac{|EM|}{2}$.