

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Tereza Bártlová

### Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec a jeho použití

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Studijní program: Matematika, matematika zaměřená na vzdělávání,  
kombinace matematika s deskriptivní geometrií

2010

Poděkování. Dr. Slavíkovi, protože neztrácel nadhled nad moji kreativitou a pravopisnými chybami... A tak si za svoji toleranci zaslouží alespoň poděkování.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 26. listopadu 2010

Tereza Bártlová

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Bernoulliho čísla a polynomy</b>	<b>7</b>
2.1	Bernoulliho čísla . . . . .	7
2.2	Bernoulliho polynomy . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec</b>	<b>31</b>
3.1	Leonhard Euler a Colin Maclaurin . . . . .	31
3.2	Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec . . . . .	33
3.3	Odhady zbytku v Eulerově-Maclaurinově sumačním vzorci . . . . .	37
3.4	Historické odvození sumačního vzorce . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Aplikace Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce</b>	<b>42</b>
4.1	Součet mocnin přirozených čísel . . . . .	42
4.2	Theodorova spirála . . . . .	45
4.3	Harmonická řada a Eulerova konstanta . . . . .	48
4.4	Úlohy související s výpočtem částečných součtů harmonické řady . . . . .	51
4.5	Stirlingův vzorec . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>60</b>
	<b>Literatura</b>	<b>61</b>

Název práce: Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec a jeho použití

Autor: Tereza Bártlová

Katedra (ústav): Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

e-mail vedoucího: Antonin.Slavik@mff.cuni.cz

Abstrakt: Text je věnován Eulerovu-Maclaurinovu sumačnímu vzorci, tj. vztahu mezi integrováním funkce a sčítáním funkčních hodnot. Studenti matematické analýzy mohou tuto práci využívat jako učební text. V sumačním vzorci se vyskytují Bernoulliho čísla a Bernoulliho polynomy, které jsou zde podrobně popsány a zmíněny některé jejich vlastnosti. Úvod je věnován historickému odvození Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce a podrobněji se zabývá i moderním odvození obecného tvaru. Součástí práce jsou také konkrétní příklady, k jejichž výpočtu se využívá Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce, tj. součet mocnin přirozených čísel, částečný součet harmonické řady a s ním související úlohy, Theodorova spirála nebo Stirlingův vzorec.

Klíčová slova: Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec, Bernoulliho čísla, Bernoulliho polynomy, Harmonická řada, Stirlingův vzorec

Title: Euler-Maclaurin summation formula and its applications

Author: Tereza Bártlová

Department: Název katedry či ústavu v angličtině

Supervisor: RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Supervisor's e-mail address: Antonin.Slavik@mff.cuni.cz

Abstract: The aim of this thesis is to explore the relation between integration and series summation with the help of the Euler-Maclaurin summation formula. The thesis is intended as a teaching text for calculus students. It starts with the description of the Bernoulli numbers and Bernoulli polynomials, which appear in summation formula. After giving the definitions of Bernoulli numbers and polynomials, we investigate some their properties. The thesis contains a proof of the summation formula and explains its consequences. It also briefly mentions the historical derivation of the formula. Part of the thesis is devoted to concrete examples demonstrating the applications of the summation formula, i. e. the sums of powers of the natural numbers, harmonic partial sums and related problems, the spiral of Theodorus, and the Stirling's formula.

Keywords: Euler-Maclaurin summation formula, Bernoulli numbers, Bernoulli polynomials, Harmonic series, Stirling's formula

# Kapitola 1

## Úvod

Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec zaujal už v první polovině 30. let 18. století takřka všechny matematiky a i dnes je často využíván v mnoha matematických oborech. Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec popisuje vztah mezi sčítáním funkčních hodnot nějaké funkce  $f$  a jejím integrálem:

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_0^n f(x) dx + \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^j B_j}{j!} \left( f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0) \right) + R_m ,$$

kde  $R_m = \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \int_0^n \tilde{B}_m(x) f^{(m)}(x) dx .$

Kouzlo Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce spočívá především v tom, že zachycuje jemné rozdíly mezi sumou a integrálem a umožňuje nám tak řešit poměrně složité příklady pouze jako jeho jednoduchou aplikaci.

Cílem práce je podat ucelený pohled na sumační vzorec od jeho teoretického objevení až k jeho praktickému využití.

Práce je rozdělena do tří částí, které na sebe navazují a dohromady poskytují celkový obraz o sumačním vzorci.

První část, nazvaná Bernoulliho čísla a Bernoulliho polynomy, představuje specifická čísla a polynomy, které se v Eulerově-Maclaurinově sumačním vzorci vyskytují. Ve stručnosti jsem se pokusila načrtnout jejich objevení Jacobem Bernoullim a poprvé se dotknu matematického problému: nalezení součtu mocnin přirozených čísel.

Druhá část, kterou jsem pojmenovala Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec, se zabývá historickým vznikem sumačního vzorce, jeho objeviteli a hlavními myšlenkami jejich roz-

dílných důkazů. Je nutno si tento vzorec formálně dokázat a osvojit si různé úpravy tohoto vzorce, lze tak počítat konkrétní příklady.

Poslední část je věnována počítání praktických příkladů.

Celá práce je pro snazší porozumění prokládána obrázky znázorňující geometrickou interpretaci daného problému.

Historické souvislosti jsem čerpala většinou z knih [3], [5], [7], [10], [11], [12], [13], [14], věty a definice jsem převzala převážně z knih [4], [5], [6].

# Kapitola 2

## Bernoulliho čísla a polynomy

### 2.1 Bernoulliho čísla

Jedny z prvních úvah o tom, jak sčítat některé konečné součty, pocházejí z dob Pythagora, tedy ze 6. století př. n. l. Pythagorovi se jako prvnímu podařilo najít vzorec

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} .$$

Významný rozvoj matematiky nastal ve starověkém Řecku. Ve 3. století př. n. l. se Archimedovi podařilo najít hodnotu součtu druhých mocnin  $n$  přirozených čísel

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

v souvislosti s určením obsahu parabolické úseče exhaustivní metodou.

Tím ale rozhodně snažení matematiků neskončilo. Každá další generace matematiků hledala klíč k nalezení součtu vyšších mocnin přirozených čísel.

V 17. století si P. Fermat spolu s B. Pascalem uvědomili obecné vztahy mezi binomickými koeficienty a součtem mocnin přirozených čísel. Významný objev v oblasti konečných součtů přinesl také Jacob Bernoulli ve své práci *Ars conjectandi*. Autor se sice odvolává na úvahy svých předchůdců, ale právě Bernoulliho práce to byla, od níž se odvíjí další vývoj v tomto směru. Jeho práce spadá především do oblasti pravděpodobnosti. Kromě výkladu základů kombinatoriky kniha obsahuje řešení problému nalezení součtů  $k$ -tých mocnin prvních  $n$  přirozených čísel. Tvrzení o Bernoulliho číslech a jejich vlastnosti zde byly zformulovány vůbec poprvé. (Pokud by měl čtenář zájem o dovědět se více o historii hledání částečných nebo nekonečných součtů řad, mohu doporučit článek [11].) Bernoulliho čísla hrají významnou roli např. při hledání vzorců pro

$$S_c(n) := \sum_{k=1}^n k^c .$$

Bernoulli zkoumal tento součet a ve své knize uvádí soupis vzorců až do exponentu deset:

$$\begin{aligned}
 S_1(n) &= \sum_{k=1}^n k^1 = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n , \\
 S_2(n) &= \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n , \\
 S_3(n) &= \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2 , \\
 S_4(n) &= \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{5} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{30} n , \\
 S_5(n) &= \sum_{k=1}^n k^5 = \frac{1}{6} n^6 + \frac{1}{2} n^5 + \frac{5}{12} n^4 - \frac{1}{12} n^2 , \\
 S_6(n) &= \sum_{k=1}^n k^6 = \frac{1}{7} n^7 + \frac{1}{2} n^6 + \frac{1}{2} n^5 - \frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{42} n , \\
 S_7(n) &= \sum_{k=1}^n k^7 = \frac{1}{8} n^8 + \frac{1}{2} n^7 + \frac{7}{12} n^6 - \frac{7}{24} n^4 + \frac{1}{12} n^2 , \\
 S_8(n) &= \sum_{k=1}^n k^8 = \frac{1}{9} n^9 + \frac{1}{2} n^8 + \frac{2}{3} n^7 - \frac{7}{15} n^5 + \frac{2}{9} n^3 - \frac{1}{30} n , \\
 S_9(n) &= \sum_{k=1}^n k^9 = \frac{1}{10} n^{10} + \frac{1}{2} n^9 + \frac{3}{4} n^8 - \frac{7}{10} n^6 + \frac{1}{2} n^4 - \frac{3}{20} n^2 , \\
 S_{10}(n) &= \sum_{k=1}^n k^{10} = \frac{1}{11} n^{11} + \frac{1}{2} n^{10} + \frac{5}{6} n^9 - \frac{1}{1} n^7 + \frac{1}{1} n^5 - \frac{1}{2} n^3 + \frac{5}{66} n .
 \end{aligned}$$

Povšimněme si blíže některých obecných zákonitostí, které platí mezi vzorečky.

Exponent mocniny postupně klesá po dvou, až dosáhne hodnoty 1 nebo 2, tedy mocniny  $n$  nebo  $n^2$ .

Vzorečky můžeme dokázat indukcí, ale pouze pokud známe jejich tvar.

Existuje vazba mezi koeficienty v jednotlivých řádcích: jejich součet je vždy roven 1.

Koeficient u nejvyšší mocniny se rovná převrácené hodnotě exponentu, tj. první člen má tvar  $\frac{1}{c+1} n^{c+1}$ .

Koeficient u druhé nejvyšší mocniny je vždy roven  $\frac{1}{2}$ .

Jak ale Bernoulli na tyto vzorečky vůbec přišel? Ukážeme si rekurentní vzoreček pro  $S_c(n)$ :

$$S_c(n) = 1^c + 2^c + 3^c + 4^c + \cdots + n^c, \quad n \in \mathbb{N}, \quad c \in \mathbb{N}_0 .$$



Nejprve si uvědomme, že známe vzorečky pro součet  $S_0(n)$  a  $S_1(n)$

$$S_0(n) = n, \quad S_1(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Rozvineme jednotlivé mocniny  $(i-1)^{c+1}$  pomocí binomické věty. Za  $i$  budeme postupně dosazovat přirozená čísla  $1, \dots, n$  a všechny rozvoje sečteme:

$$\begin{aligned} (1-1)^{c+1} &= \binom{c+1}{0} \cdot 1^{c+1} - \binom{c+1}{1} \cdot 1^c + \dots + (-1)^{c+1} \binom{c+1}{c+1} \cdot 1^0 \\ (2-1)^{c+1} &= \binom{c+1}{0} \cdot 2^{c+1} - \binom{c+1}{1} \cdot 2^c + \dots + (-1)^{c+1} \binom{c+1}{c+1} \cdot 2^0 \\ &\dots \\ (n-1)^{c+1} &= \binom{c+1}{0} \cdot n^{c+1} - \binom{c+1}{1} \cdot n^c + \dots + (-1)^{c+1} \binom{c+1}{c+1} \cdot n^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0^{c+1} + 1^{c+1} + \dots + (n-1)^{c+1} &= 1^{c+1} + \dots + n^{c+1} - \binom{c+1}{1} S_c(n) + \\ &\quad + \binom{c+1}{2} S_{c-1}(n) + \dots + (-1)^{c+1} \binom{c+1}{c+1} S_0(n). \end{aligned}$$

Z této rovnice pak dostáváme rekurentní vzorec

$$S_c(n) = \frac{1}{c+1} \left( n^{c+1} + \binom{c+1}{2} S_{c-1}(n) + \dots + (-1)^{c+1} \binom{c+1}{c+1} S_0(n) \right).$$

V obecném případě odvozování rekurentního vzorce pro  $S_c(n)$  jsme dostali po úpravě rovnost, obsahující pouze tento neznámý součet, ostatní součty s menšími  $c$  jsme určili v předcházejících krocích.

Dosadíme-li za  $c = 2, 3, \dots$ , dostáváme

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \frac{1}{3} \left( n^3 + \binom{3}{2} S_1(n) - \binom{3}{3} S_0(n) \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left( n^3 + \frac{3}{2} n(n+1) - n \right) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_3(n) &= \frac{1}{4} \left( n^4 \binom{4}{2} S_2(n) - \binom{4}{3} S_1(n) + \binom{4}{4} S_0(n) \right) = \\
&= \frac{1}{4} \left( n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n \right) = \\
&= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Bernoulli si všiml, že vzorec pro  $S_c(n)$  má následující tvar:

$$\begin{aligned}
S_c(n) &= \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{c}{2} B_2 n^{c-1} + \frac{c \cdot (c-1) \cdot (c-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} B_4 n^{c-3} + \\
&+ \frac{c \cdot (c-1) \cdot (c-2) \cdot (c-3) \cdot (c-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} B_6 n^{c-5} + \\
&+ \frac{c \cdot (c-1) \cdot (c-2) \cdot (c-3) \cdot (c-4) \cdot (c-5) \cdot (c-6)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} B_8 n^{c-7} + \dots,
\end{aligned}$$

kde  $B_i$  jsou jisté konstanty, které dnes nazýváme Bernoulliho čísla.

Dále si také všiml, že platí následující vztahy:

$$\begin{aligned}
B_0 + 2B_1 &= 0, \quad B_0 + 3B_1 + 3B_2 = 0, \quad \dots, \\
\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} B_k &= 0, \quad \text{pro } m \geq 2.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Tyto vztahy budeme dále považovat za definici Bernoulliho čísel. Jedná se vlastně o rekurentní vyjádření Bernoulliho čísel, i když trochu neobvykle napsané. Abychom mohli snadno spočítat Bernoulliho číslo  $B_k$  pro libovolné  $k \in \mathbb{N}_0$ , musíme si nejprve rovnice trochu upravit. Vzorec

$$\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} B_k = 0,$$

rozepíšeme a dostaneme

$$\binom{m}{0} B_0 + \binom{m}{1} B_1 + \binom{m}{2} B_2 + \dots + \binom{m}{m-1} B_{m-1} = 0.$$

Postupným upravováním předchozí rovnice vyjádříme  $B_{m-1}$  a dostaneme rekurentní vyjádření Bernoulliho čísel

$$mB_{m-1} = - \left( \binom{m}{0} B_0 + \binom{m}{1} B_1 + \dots + \binom{m}{m-2} B_{m-2} \right)$$

$$mB_{m-1} = - \sum_{k=0}^{m-2} \binom{m}{k} B_k$$

$$B_{m-1} = - \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-2} \binom{m}{k} B_k .$$

Aby byla Bernoulliho čísla rekurentním předpisem jednoznačně určena, je potřeba dodefinovat ještě  $B_0$

$$B_0 := 1 .$$

Využijeme-li tedy právě získaného rekurentního předpisu pro Bernoulliho čísla,

$$B_0 = 1, \quad B_{m-1} = - \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-2} \binom{m}{k} B_k,$$

můžeme pomocí něj spočítat libovolné Bernoulliho číslo  $B_m$ , kde  $m \in \mathbf{N}$ ,  $m \geq 1$ .

Abychom měli kontrolu, zda jsou naše výsledky správné, uvádím zde tabulku hodnot několika Bernoulliho čísel pro  $k = 0, 1, \dots, 29$ .

$B_0 = 1$	$B_{10} = \frac{5}{66}$	$B_{20} = -\frac{174611}{330}$
$B_1 = -\frac{1}{2}$	$B_{11} = 0$	$B_{21} = 0$
$B_2 = \frac{1}{6}$	$B_{12} = -\frac{691}{2730}$	$B_{22} = \frac{854513}{138}$
$B_3 = 0$	$B_{13} = 0$	$B_{23} = 0$
$B_4 = -\frac{1}{30}$	$B_{14} = \frac{7}{6}$	$B_{24} = -\frac{236364091}{2730}$
$B_5 = 0$	$B_{15} = 0$	$B_{25} = 0$
$B_6 = \frac{1}{42}$	$B_{16} = -\frac{3617}{510}$	$B_{26} = \frac{8553103}{6}$
$B_7 = 0$	$B_{17} = 0$	$B_{27} = 0$
$B_8 = -\frac{1}{30}$	$B_{18} = \frac{43867}{798}$	$B_{28} = -\frac{23749461029}{870}$
$B_9 = 0$	$B_{19} = 0$	$B_{29} = 0$

Bernoulli sice neuměl obecnou součtovou formuli  $S_c(n)$  dokázat, nicméně dospěl ke vzorcům, které jsme prezentovali. My si vzorec pro  $S_c(n)$  odvodíme v kapitole 4.

Nyní se pokusíme lépe proniknout do vlastností Bernoulliho čísel. Budeme se snažit najít odpověď na otázku, kde se tato čísla vůbec berou? Kde všude se Bernoulliho čísla vyskytují? Především se ale budeme snažit najít další vztahy, které platí pro tato čísla.

Abychom lépe nahlédli do vlastností Bernoulliho čísel, použijeme základní Eulerovu myšlenku. Ukážeme, že se Bernoulliho čísla vyskytují v koeficientech rozvoje funkce  $V(u) = \frac{u}{e^u - 1}$  do Taylorovy řady.

**Lemma 2.1.1.** Pro všechna komplexní  $u \neq 0$  definujme

$$V(u) = \frac{u}{e^u - 1} \quad (2.2)$$

a položme  $V(0) = 1$ . Potom existuje číslo  $R > 0$  tak, že pro  $|u| < R$  platí

$$V(u) = 1 + B_1 u + \frac{B_2 u^2}{2!} + \frac{B_3 u^3}{3!} + \frac{B_4 u^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k u^k}{k!} . \quad (2.3)$$

*Důkaz.* Víme, že pro rozvoj exponenciály  $e^u$  do Taylorovy řady platí:

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots$$

Odečteme-li na obou stranách rovnice 1 a vydělíme  $u$ , dostaneme

$$\frac{1}{V(u)} = \frac{e^u - 1}{u} = 1 + \frac{u}{2!} + \frac{u^2}{3!} + \frac{u^3}{4!} + \dots ,$$

neboli

$$\frac{1}{V(u)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{(k+1)!} .$$

Funkce  $V$  je v okolí nuly diferencovatelná podle komplexní proměnné  $u$  (z definice derivace snadno spočteme, že  $V'(0) = -1/2$ ). To znamená, že tuto funkci můžeme rozvinout do mocninné řady

$$V(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k u^k}{k!}$$

s poloměrem konvergence  $R > 0$ . Nyní stačí dokázat, že  $A_k = B_k$  pro každé  $k$ . Pro  $|u| < R$  zřejmě platí

$$1 = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k u^k}{k!} \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{(k+1)!} \right) .$$

Připomeňme si vzorec pro násobení mocninných řad:

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n ,$$

kde  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} .$

V našem případě tedy platí

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n, \quad \text{kde } c_n = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k+1)!}.$$

Porovnáním koeficientů vidíme, že  $1 = c_0 = A_0$  a pro  $n \geq 1$  je

$$\begin{aligned} 0 = c_n &= \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} A_k = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} A_k. \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že pro  $n \geq 1$  platí

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} A_k = 0,$$

neboli pro  $n \geq 2$  máme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} A_k = 0.$$

To je však rovnice, pomocí které jsme definovali Bernoulliho čísla. Platí tedy  $A_k = B_k$  pro každé  $k$ .  $\square$

Odtud plyne, že Bernoulliho čísla jsou mj. koeficienty Maclaurinova rozvoje funkce  $\frac{u}{e^u-1}$ .

Z tabulky, ve které jsou uvedeny hodnoty Bernoulliho čísel, je vidět, že Bernoulliho čísla s lichými indexy kromě  $B_1$  jsou vesměs rovny 0. Pokusme se společně toto tvrzení dokázat.

**Věta 2.1.1.** *Pro každé  $k \geq 1$  platí*

$$B_{2k+1} = 0.$$

*Důkaz.* Pokud bychom k rovnici (2.2) přičetli zlomek  $\frac{u}{2}$  dostaneme funkci

$$\begin{aligned} V(u) + \frac{u}{2} &= \frac{u}{e^u - 1} + \frac{u}{2} = \frac{2u + u(e^u - 1)}{2(e^u - 1)} = \\ &= \frac{u}{2} \cdot \frac{e^u + 1}{e^u - 1} = \frac{u}{2} \cdot \frac{\frac{e^u + 1}{e^{u/2}}}{\frac{e^u - 1}{e^{u/2}}} = \frac{u}{2} \cdot \frac{e^{u/2} + e^{-u/2}}{e^{u/2} - e^{-u/2}}, \end{aligned}$$

což je sudá funkce proměnné  $u$ . Odtud také plyne, že  $B_3 = B_5 = B_7 = 0$ . □

**Věta 2.1.2.** *Pro Bernoulliho čísla platí následující rovnost:*

$$\frac{|B_{2k}|}{(2k)!} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n\pi)^{2k}}. \quad (2.4)$$

**Poznámka 2.1.1.** My si zde tento vzorec dokazovat nebudeme, pokud bude mít čtenář zájem, může najít důkaz této věty v knize [6].

Všimněme si ale jiného zajímavého důsledku, který z toho vzorce plyne. Vynásobíme-li tuto rovnost zlomkem  $\frac{(2\pi)^{2k}}{2}$ , získáme vzorec

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(2\pi)^{2k}}{2} \cdot \frac{|B_{2k}|}{(2k)!}.$$

Jako poslední vztah, který platí pro Bernoulliho čísla, si odvodíme horní a dolní odhad pro  $B_{2k}$ .

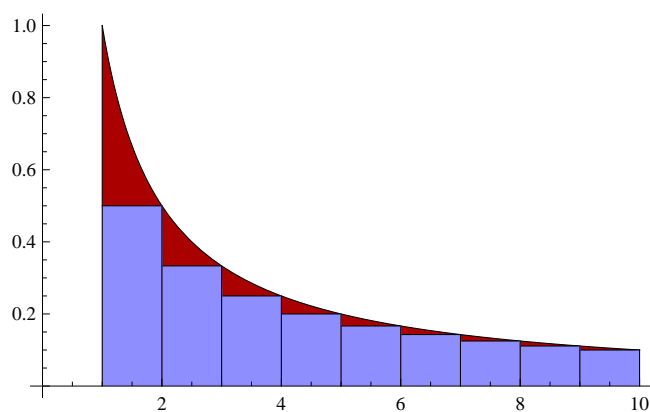
**Věta 2.1.3.** *Pro Bernoulliho čísla platí vztah:*

$$\frac{2}{(2\pi)^{2k}} < \frac{|B_{2k}|}{(2k)!} < \frac{4}{(2\pi)^{2k}}. \quad (2.5)$$

*Důkaz.* První nerovnost plyne ze vztahu

$$\frac{1}{(2\pi)^{2k}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n\pi)^{2k}} = \frac{1}{2} \frac{|B_{2k}|}{(2k)!}.$$

Prohlédněme si graf funkce  $f(x) = \frac{1}{(2\pi x)^{2k}}$ :



Z obrázku je vidět, že

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^{2k}} < \int_1^{\infty} \frac{dx}{(2\pi x)^{2k}}.$$

Odtud pak plyne:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{|B_{2k}|}{(2k)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n\pi)^{2k}} &< \frac{1}{(2\pi)^{2k}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{(2x\pi)^{2k}} = \left(1 + \frac{1}{2k-1}\right) \frac{1}{(2\pi)^{2k}} \leq \frac{2}{(2\pi)^{2k}}, \\ \frac{|B_{2k}|}{(2k)!} &< \frac{4}{(2\pi)^{2k}}. \end{aligned}$$

□

Postupně jsme společně prošli jednotlivými kroky procesu objevu Bernoulliho čísel a dověděli jsme se vlastnosti, které platí pro Bernoulliho čísla. Zbývá nám ukázat si, kde všude se můžeme s těmito čísly setkat. Bernoulliho čísla se objevují např. v rozvoji funkcí tangens a kotangens

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} 4^k (4^k - 1) x^{2k-1},$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B_{2k}}{2k!} 4^k x^{2k},$$

dále se Bernoulliho čísla vyskytují v rozvoji pro hyperbolický tangens a kotangens a v mnoha jiných situacích v analýze.

Než tuto kapitolu o Bernoulliho číslech zcela opustíme, ráda bych ještě zmínila, že označení „Bernoulliho čísla“ poprvé použil Abraham De Moivre ve své knize *Miscellanea Analytica*, která vyšla v roce 1730. Chtěl tím vyjádřit úctu Jacobu Bernoullimu, který tato čísla objevil před rokem 1695 ve vzorci pro součet  $S_m(n)$  stejným způsobem, který jsme si ukázali v předchozím textu. Kniha *Ars conjectandi*, ve které byl vzorec byl publikován, však vyšla až osm let po smrti Jacoba Bernoulliho viz článek [12].



## 2.2 Bernoulliho polynomy

Nyní si zavedeme předpis pro polynomy, ve kterém se opět objevují Bernoulliho čísla.

**Definice 2.2.1** (Bernoulliho polynomy). *Pro každé přirozené číslo  $m$  definujeme polynom  $B_m(x)$  předpisem*

$$B_m(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_k x^{m-k} . \quad (2.6)$$

*Tyto polynomy budeme nazývat Bernoulliho polynomy.*

Pojem Bernoulliho polynomy poprvé použil roku 1848 Joseph Ludwig Raabe. Tenkrát ovšem použil pro tyto polynomy trochu jiné označení, neboť se v minulosti nepoužívalo jednotné označení Bernoulliho polynomů (viz [12]), např. Jarník v knize [6] rozumí pod  $k$ -tým Bernoulliho polynomem funkci  $\varphi_k(x)$ . S odlišným označím Bernoulliho polynomů ovšem také souvisí v minulosti nejednotný předpis pro Bernoulliho čísla. V této souvislosti bych opět zmínila knihu [6], kde autor definuje  $k$ -té Bernoulliho číslo, pomocí Bernoulliho polynomů, předpisem:

$$(-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} = \varphi_{2k}(0) = \varphi_{2k}(1) .$$

V dnešní době se však ustálilo označení Bernoulliho polynomů a Bernoulliho čísel shodné s našimi definicemi.

Společně nyní prozkoumáme vlastnosti těchto polynomů a naznačíme si, v jakém tvaru budou vystupovat v Eulerově-Maclaurinově sumačním vzorci.

Z definice Bernoulliho polynomů je patrné, že se jedná o polynomy s racionálními koeficienty. Opět můžeme pomocí tohoto předpisu spočítat Bernoulliho polynomy  $B_m(x)$  pro libovolné  $m \in \mathbb{N}$ . Já zde uvádím hodnoty  $B_m(x)$  pro  $m = 0, 1, 2, \dots, 10$ .

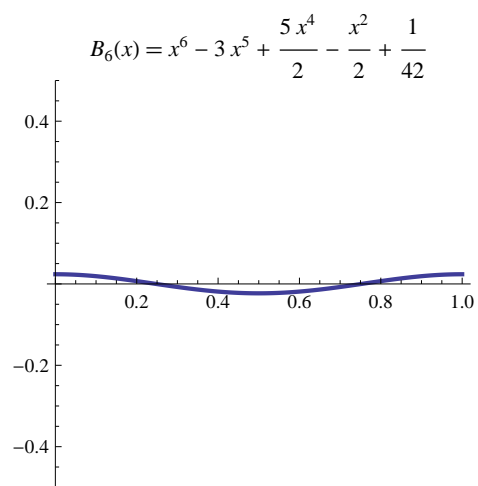
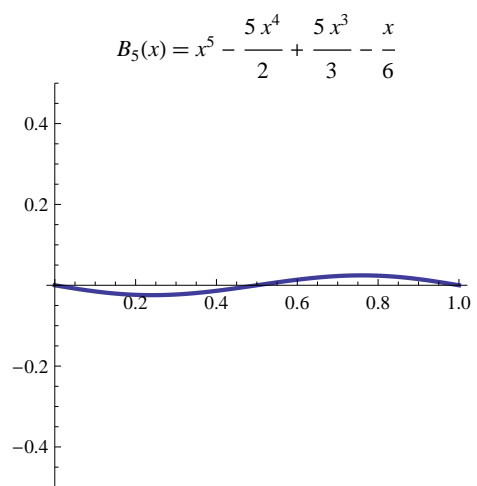
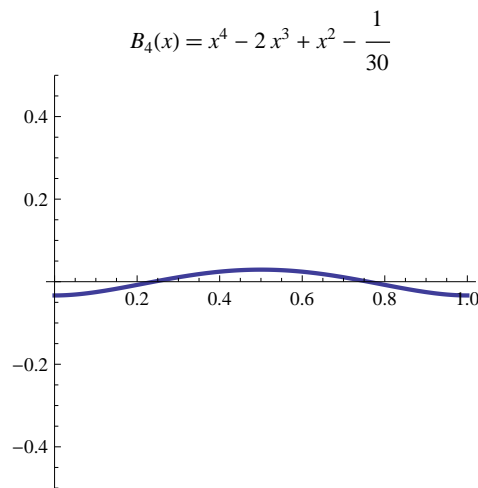
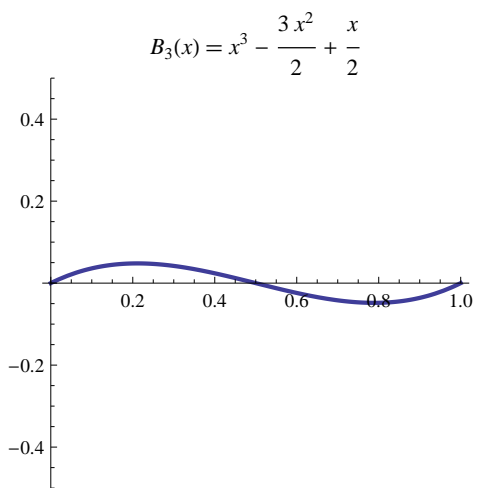
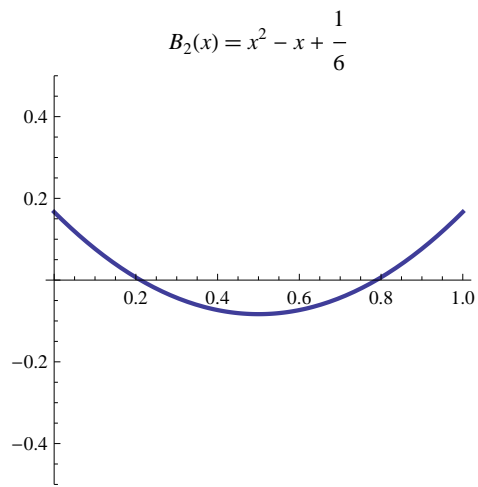
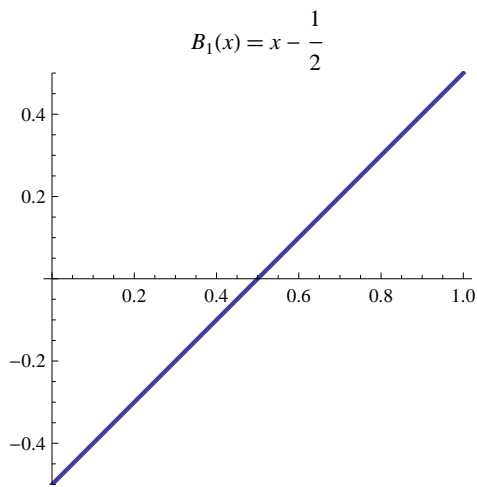
$$\begin{aligned}
B_0(x) &= 1 \\
B_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\
B_3(x) &= x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} \\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \\
B_5(x) &= x^5 - \frac{5x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \frac{x}{6} \\
B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{42} \\
B_7(x) &= x^7 - \frac{7x^6}{2} + \frac{7x^5}{2} - \frac{7x^3}{6} + \frac{x}{6} \\
B_8(x) &= x^8 - 4x^7 + \frac{14x^6}{3} - \frac{7x^4}{3} + \frac{2x^2}{3} - \frac{1}{30} \\
B_9(x) &= x^9 - \frac{9x^8}{2} + 6x^7 - \frac{21x^5}{5} + 2x^3 - \frac{3x}{10} \\
B_{10}(x) &= x^{10} - 5x^9 + \frac{15x^8}{2} - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3x^2}{2} + \frac{5}{66}
\end{aligned}$$

Pokud bychom chtěli zjistit hodnotu nějakého polynomu  $B_m(x)$  pro „veliké“  $m$  a nechtělo by se nám počítat koeficienty „v ruce“, můžeme využít např. program Mathematica, ve kterém je přímo zabudovaná speciální funkce pro výpočet Bernoulliho čísel a polynomů. Stačí v Mathematice zadat příkaz `BernoulliB[m, x]` a jako výsledek dostaneme Bernoulliho polynom v proměnné  $x$  pro konkrétní zvolené číslo  $m$ .

Pro větší názornost a snažší pochopení vlastností Bernoulliho polynomů je můžeme znázornit také graficky. K tomu využijeme již zmíněný program Mathematica. Jednotlivé grafy jsem vykreslila pomocí příkazu

```
Plot[BernoulliB[m, x], {x, 0, 1}],
```

kde jsem za  $m$  dosazovala postupně přirozená čísla 1, 2, ..., 6. Na následujících grafech si můžeme prohlédnout vlastnosti těchto funkcí na intervalu  $[0, 1]$ .



Bernoulliho polynomy

Pro Bernoulliho polynomy platí specifické vztahy, které tyto polynomy určují jednoznačně. V následujících větách se s těmito vlastnosti seznámíme a postupně si každou z nich dokážeme.

**Věta 2.2.1.** *Bernoulliho polynomy mají následující vlastnosti:*

a)

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad (2.7)$$

b)

$$B'_k(x) = kB_{k-1}(x) \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, \quad (2.8)$$

c)

$$B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(1) = 0 \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

d)

$$B_k(x) = (-1)^k B_k(1-x) \quad \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.10)$$

e)

$$B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.11)$$

f)

$$B_{2k}(0) = B_{2k}(1) \quad \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

*Důkaz.* a) Obě rovnice plynou přímo z definice Bernoulliho čísel:

$$B_0(x) = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} B_0 x^k = B_0 = 1,$$

$$B_1(x) = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} B_k x^{1-k} = \binom{1}{0} B_0 x + \binom{1}{1} B_1 x^0 = B_0 x + B_1 = x - \frac{1}{2}.$$

b) Vzorec z definice Bernoulliho polynomů zderivujeme podle proměnné  $x$  a výraz zjednodušíme:

$$\begin{aligned}
 B'_m(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} B_k (m-k) x^{m-k-1} = \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{m!}{k! (m-k-1)!} B_k x^{m-k-1} = \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} m \frac{(m-1)!}{k! (m-k-1)!} B_k x^{m-k-1} = \\
 &= m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} B_k x^{m-k-1} = m B_{m-1}(x) .
 \end{aligned}$$

c) Označme  $n = 2m + 1$ ,  $n$  je tedy přirozené číslo,  $n \geq 3$ .

Chceme dokázat, že  $B_n(0) = B_n(1) = 0$ . Z našeho označení je vidět, že budeme zkoumat Bernoulliho polynomy a Bernoulliho čísla  $B_n$  pro liché  $n$ .

Víme, že  $B_n$  pro lichá  $n \geq 3$  jsou všechna rovna nule. Dosazením  $x = 0$  do definice Bernoulliho polynomů dostaneme

$$B_n(0) = B_n = 0.$$

Druhá část rovnice, tj.  $B_n(1) = 0$ , plyne přímo z rovnice (2.1), neboť

$$B_n(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k + \binom{n}{n} B_n = 0 + B_n = 0 .$$

d) Rovnici (2.10) dokážeme matematickou indukcí.

Z definice je vidět, že platí pro  $k = 0, 1$ .

Předpokládejme, že platí pro  $k = 2m - 1$ . Jako indukční předpoklad použijeme rovnici:

$$B_{2m-1}(x) = -B_{2m-1}(1-x) .$$

Z této rovnice spočítáme primitivní funkce pomocí rovnice (2.8) a dostaneme

$$B_{2m}(x) = B_{2m}(1-x) + a ,$$

$$B_{2m+1}(x) = -B_{2m+1}(1-x) + ax + b .$$

Dosazením  $x = 0$  a  $x = 1$  do poslední rovnice vyplývá podle (2.9), že  $b = 0$ ,  $a = 0$ , takže rovnice (2.10) platí i pro  $k = 2m$ ,  $k = 2m + 1$ .

e) Z rovnice (2.10) vyplývá vztah

$$B_{2k+1}(x) = (-1)B_{2k+1}(1-x),$$

dosazením  $x = \frac{1}{2}$  dostaneme

$$B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Aby se obě strany rovnice navzájem rovnaly, musí být rovny 0.

f) Dosadíme-li  $x = 0$  do rovnice (2.10), dostaneme rovnici (2.12). □

Uvedené vztahy (2.7–2.12) ve skutečnosti určují Bernoulliho polynomy jednoznačně. Zájemcům o důkaz jednoznačnosti doporučuji knihu [6], ve které je tato problematika poměrně podrobně vysvětlena.

Nyní si ukážeme modifikaci věty 2.1.1 pro Bernoulliho polynomy.

**Věta 2.2.2.** *Existuje číslo  $R > 0$  takové, že platí*

$$\frac{u e^{xu}}{e^u - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} B_k(x), \quad (2.13)$$

pro všechna  $x$  a pro  $|u| < R$ .

*Důkaz.* Pro všechna reálná  $x$ ,  $u$  platí, že

$$e^{xu} = 1 + \frac{xu}{1!} + \frac{x^2u^2}{2!} + \frac{x^3u^3}{3!} + \frac{x^4u^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xu)^k}{k!}. \quad (2.14)$$

Obě mocninné řady (2.14) a (2.3) vynásobíme

$$\begin{aligned} \frac{u e^{xu}}{e^u - 1} &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k u^k}{k!} \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k u^k}{k!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n, \\ c_n &= \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k} = \frac{1}{n!} B_n(x) \end{aligned}$$

a obdržíme požadovanou rovnost

$$\frac{u e^{xu}}{e^u - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} B_n(x).$$

□

Již víme, že  $B_m(\frac{1}{2}) = 0$  pro liché  $m \geq 1$ . Prozkoumejme nyní, jaký vztah platí, je-li  $m$  sudé. V následující větě si dokážeme vztah, který platí pro  $B_m$ , kde  $m$  je libovolné přirozené číslo. Ve speciálním případě si pak můžeme ověřit, že pro liché  $m \geq 1$  dostaneme stejný výsledek jako ve větě 2.2.1.

**Věta 2.2.3.** *Pro Bernoulliho polynomy platí:*

$$B_k\left(\frac{1}{2}\right) = (2^{1-k} - 1)B_k. \quad (2.15)$$

*Důkaz.* Dosadíme-li do rovnice (2.13) za  $x = \frac{1}{2}$  dostaneme

$$\frac{u e^{u/2}}{e^u - 1} = \frac{u(e^{u/2} + 1)}{e^u - 1} - \frac{u}{e^u - 1} = 2 \cdot \frac{e^{\frac{u}{2}}}{e^{\frac{u}{2}} - 1} - \frac{u}{e^u - 1}.$$

Levou stranu rovnice upravíme podle rovnice (2.14) a pravou stranu podle rovnice (2.3) v mocninnou řadu

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} B_k\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \left(\frac{u}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k u^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k u^k}{k!} (2^{1-k} - 1). \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů obdržíme hledaný výsledek

$$\begin{aligned} \frac{B_k(\frac{1}{2})}{k!} &= \frac{B_k}{k!} (2^{1-k} - 1) \\ B_k\left(\frac{1}{2}\right) &= (2^{1-k} - 1)B_k. \end{aligned}$$

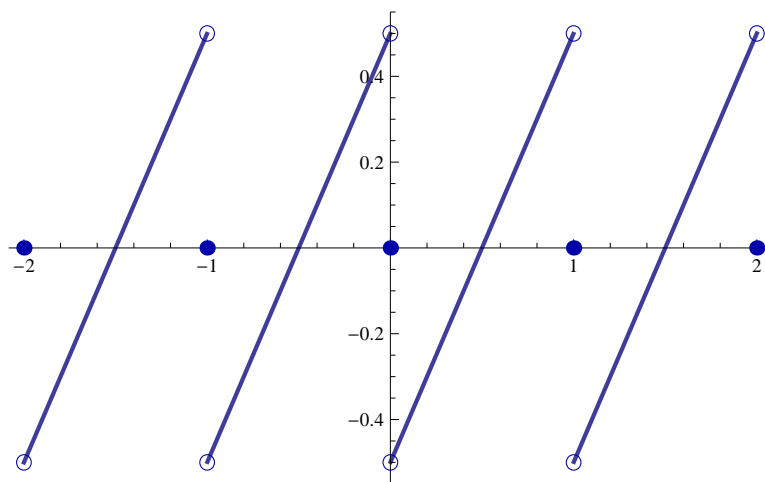
□

Společně jsme si zavedli Bernoulliho polynomy a definovali vztah mezi Bernoulliho čísly a Bernoulliho polynomy. Na závěr této kapitoly bych se zmínila ještě o praktickém uplatnění Bernoulliho čísel a polynomů. Pro nás bude především důležité, že se objevují v obecném tvaru již zmíněného Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce. V následující kapitole si objasníme souvislosti mezi Bernoulliho čísly a polynomy a Eulerovým-Maclaurinovým sumačním vzorcem. K tomu, abychom mohli použít Bernoulliho polynomy při hledání obecného tvaru Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce, budeme potřebovat funkce  $\tilde{B}_m$ , které se definují takto:

**Definice 2.2.2.** *Symbolem  $\tilde{B}_1$  budeme značit funkci, kterou dostaneme tak, že uvažujeme polynom  $\tilde{B}_1$  na intervalu  $(0, 1)$ , v krajních bodech tohoto intervalu jej dodefinujeme hodnotou 0, a poté rozšíříme definici této funkce na  $\mathbb{R}$  tak, aby byla periodická s periodou 1. Symbolem  $\tilde{B}_m$ , kde  $m \geq 2$  budeme značit funkci, kterou dostaneme tak, že uvažujeme polynom  $B_m$ ,  $m \geq 2$  na intervalu  $[0, 1]$  a periodicky jej rozšíříme na  $\mathbb{R}$ .*

Podle věty 2.2.1 platí pro Bernoulliho polynomy pro  $m \geq 2$  vztah  $B_m(0) = B_m(1)$ , takže  $\tilde{B}_m$  je spojitá na  $\mathbb{R}$ . Funkce  $\tilde{B}_1$  je nespojitá v celých číslech, proto je nutné dodefinovat ještě hodnotu pro polynom  $\tilde{B}_1$ :

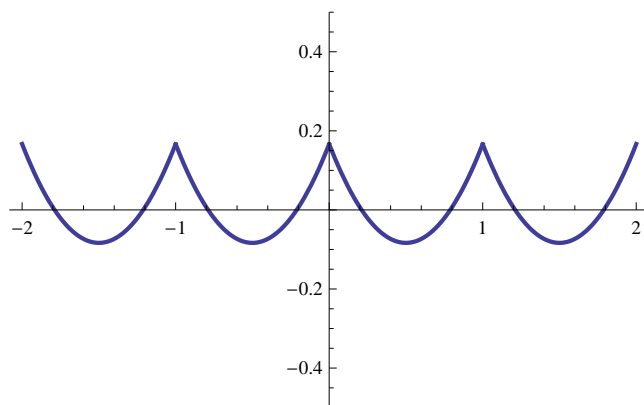
$$\tilde{B}_1(0) = \tilde{B}_1(1) = 0 .$$



Graf funkce  $\tilde{B}_1(x)$

Na následujícím grafu si můžeme prohlédnout  $\tilde{B}_2(x)$ . Je zde velmi názorně vidět, že základem je funkce definovaná Bernoulliho polynomem  $B_2(x)$  (stejná jako na obrázku Bernoulliho polynomů), ale periodicky prodloužená na celou reálnou osu.





Graf funkce  $\tilde{B}_2(x)$

Bernoulliho čísla a polynomy budeme v následujících kapitolách využívat především k počítání konkrétních příkladů pomocí Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce. K tomu ale budeme potřebovat znát odhady konkrétních Bernoulliho polynomů.

Pomocí následujících příkladů se společně pokusíme spočítat odhady Bernoulliho polynomů  $B_m$  pro prvních pár  $m \in \mathbb{N}$ . Chceme najít  $\sup_{x \in [0, 1]} |B_m(x)|$ .

**Příklad 2.2.1.** Vyšetříme průběh polynomu

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2} \quad \text{pro } 0 \leq x \leq 1$$

a najdeme globální minimum a maximum této funkce. Polynom  $B_1(x)$  má maximum  $B_1(x) = \frac{1}{2}$  v bodě  $x = 1$  a minimum  $B_1(x) = -\frac{1}{2}$  v bodě  $x = 0$ .

Přesnou hodnotu  $\sup |B_1(x)|$  získáme pomocí maxima absolutní hodnoty. Platí tedy

$$\sup |B_1(x)| = \frac{1}{2}, \quad \text{pro } 0 \leq x \leq 1.$$

Tato nerovnost nám dává hledaný odhad Bernoulliho polynomu  $B_1(x)$ .

**Příklad 2.2.2.** Stejným způsobem budeme postupovat i při hledání odhadu Bernoulliho polynomu  $B_2(x)$ . Vyšetříme průběh polynomu

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} \quad \text{pro } 0 \leq x \leq 1.$$

Nejprve určíme nulové body derivace:

$$\begin{aligned} B_2'(x) = 2x - 1 &= 0 \\ x &= \frac{1}{2} \\ B_2\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

V dalším kroku se zaměříme na hodnoty polynomu v krajních bodech intervalu

$$B_2(0) = \frac{1}{6}, \quad B_2(1) = \frac{1}{6}.$$

V souvislosti s předchozími výpočty určíme extrém, kterých polynom nabývá na intervalu  $[0, 1]$

$$\sup B_2(x) = \frac{1}{6}, \quad \text{pro } x = 0 \text{ a } 1,$$

$$\inf B_2(x) = -\frac{1}{12}, \quad \text{pro } x = \frac{1}{2}.$$

Na závěr určíme maximum absolutní hodnoty polynomu

$$\sup |B_2(x)| = \frac{1}{6}.$$

Zcela analogicky bychom postupovali při hledání horního odhadu Bernoulliho polynomu  $B_m(x)$  pro libovolné  $m \in \mathbb{N}$ .

Může se ale stát, že nezvládneme najít nulové body derivace, protože zderivovaný polynom bude vysokého stupně. V těchto případech je nejlepší, aby nám pomohl nějaký matematický program, který spočítá kořeny polynomu numericky a najde jejich přibližné hodnoty. Já jsem k výpočtu těchto odhadů opět použila program Mathematica, ve kterém jsem zadala příkaz

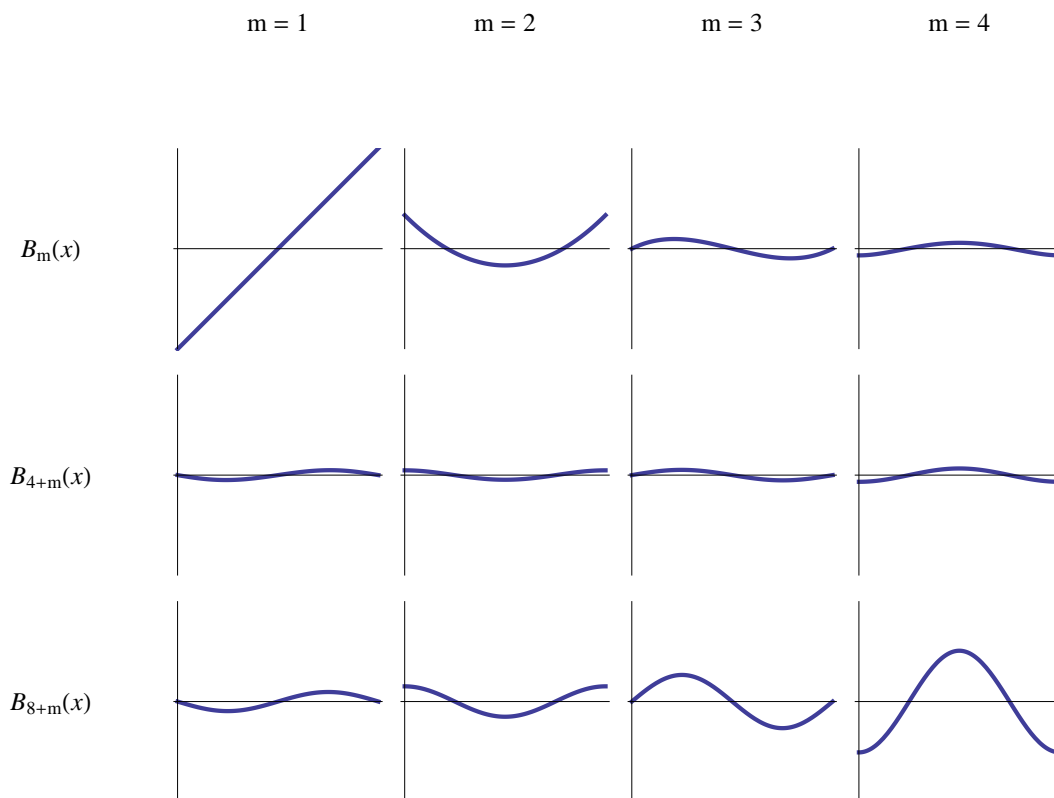
```
Maximize[{Abs[BernoulliB[j, x]], 0<=x<=1}, x],
```

kde jsem za  $j$  dosadila vždy konkrétní číslo. Všimněme si, že Mathematica zvládá mnoho hodnot vypočítat přesně, ostatní počítá numericky.

$$\begin{array}{ll}
\sup |B_1(x)| = \frac{1}{2} & \sup |B_{16}(x)| = \frac{3617}{510} \\
\sup |B_2(x)| = \frac{1}{6} & \sup |B_{17}(x)| \doteq 19.1885 \\
\sup |B_3(x)| = \frac{1}{12\sqrt{3}} & \sup |B_{18}(x)| = \frac{43867}{798} \\
\sup |B_4(x)| = \frac{1}{30} & \sup |B_{19}(x)| \doteq 166.229 \\
\sup |B_5(x)| \doteq 0.0244582 & \sup |B_{20}(x)| = \frac{174611}{330} \\
\sup |B_6(x)| = \frac{1}{42} & \sup |B_{21}(x)| \doteq 1768.47 \\
\sup |B_7(x)| \doteq 0.0260651 & \sup |B_{22}(x)| = \frac{854513}{138} \\
\sup |B_8(x)| = \frac{1}{30} & \sup |B_{23}(x)| \doteq 22666.7 \\
\sup |B_9(x)| \doteq 0.0475506 & \sup |B_{24}(x)| = \frac{236364091}{2730} \\
\sup |B_{10}(x)| = \frac{5}{66} & \sup |B_{25}(x)| \doteq 344492. \\
\sup |B_{11}(x)| \doteq 0.132497 & \sup |B_{26}(x)| = \frac{8553103}{6} \\
\sup |B_{12}(x)| = \frac{691}{2730} & \sup |B_{27}(x)| \doteq 6.12571 \times 10^6 \\
\sup |B_{13}(x)| \doteq 0.523566 & \sup |B_{28}(x)| = \frac{23749461029}{870} \\
\sup |B_{14}(x)| = \frac{7}{6} & \sup |B_{29}(x)| \doteq 1.25995 \times 10^8 \\
\sup |B_{15}(x)| \doteq 2.78504 & \sup |B_{30}(x)| = \frac{8615841276005}{14322}
\end{array}$$

Další maximální a minimální hodnoty Bernoulliho polynomů vypočítal Lehmer v roce 1940.

Vraťme se ještě na okamžik k vyšetřování průběhu polynomů  $B_m(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Na následujících grafech je zobrazeno  $B_m(x)$  pro prvních 12 hodnot  $m$ . Zaměříme se nyní na tyto grafy a budeme zkoumat chování polynomů  $B_m(x)$ .



Předpokládejme, že funkce  $B_{4k+1}$  je záporná na intervalu  $(0, \frac{1}{2})$  a kladná na intervalu  $(\frac{1}{2}, 1)$ . Pro  $k = 0$  tento předpoklad zřejmě platí.

Protože  $B'_{4k+2} = (4k+2)B_{4k+1}$ , je funkce  $B_{4k+2}$  klesající na intervalu  $(0, \frac{1}{2})$  a rostoucí na intervalu  $(\frac{1}{2}, 1)$ . Navíc z rovnice (2.10) víme, že

$$B_{4k+2}(1-x) = B_{4k+2}(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.16)$$

Dále platí

$$\int_0^1 B_{4k+2}(x) dx = \frac{B_{4k+3}(1) - B_{4k+3}(0)}{4k+3} = 0, \quad (2.17)$$

neboť podle rovnice (2.9) je  $B_{4k+3}(0) = B_{4k+3}(1)$ .

Tedy  $B_{4k+2}$  je spojitá nekonstantní funkce, která je symetrická kolem bodu  $x = \frac{1}{2}$  a jejíž integrál je roven 0.

Z toho plyne, že

$$\begin{aligned} B_{4k+2}(0) = B_{4k+2}(1) = \max B_{4k+2}(x) &> 0, \\ B_{4k+2}\left(\frac{1}{2}\right) &= \min B_{4k+2}(x) < 0. \end{aligned}$$

Odtud plynou vlastnosti polynomu  $B_{4k+3}$ . V počátečním bodě intervalu  $[0, \frac{1}{2}]$  je funkce nulová:

$$B_{4k+3}(0) = B_{4k+3} = 0,$$

dále je funkce rostoucí (neboť má kladnou derivaci), poté funkce začíná klesat a v bodě  $x = \frac{1}{2}$  je funkce nulová:

$$B_{4k+3}\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad (\text{podle rovnice (2.11)}).$$

Na intervalu  $[\frac{1}{2}, 1]$  se funkce chová opačně než na intervalu  $[0, \frac{1}{2}]$ , neboť podle rovnice (2.10) platí:

$$B_{4k+3}(1-x) = -B_{4k+3}(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

funkce je tedy středově souměrná kolem bodu  $x = \frac{1}{2}$ .

Opakováním předchozích úvah bychom analogicky dostali vlastnosti polynomu  $B_{4k+4}$  a  $B_{4k+5}$  a dostali bychom se zpět do výchozí situace.

Z předchozího rozboru vyplývá, že polynom  $B_{2m}$  je monotónní na intervalu  $[0, \frac{1}{2}]$  a na  $[\frac{1}{2}, 1]$ . Navíc platí, že  $B_{2m}(0) = B_{2m}(1)$  podle rovnice (2.12), takže  $|B_{2m}(x)|$  musí nabývat maximální hodnoty buď v bodě  $x = 0$  nebo v bodě  $x = \frac{1}{2}$ .

Platí  $|B_{2m}(0)| = |B_{2m}|$  a podle vztahu (2.15) je

$$\left| B_{2m}\left(\frac{1}{2}\right) \right| = |2^{1-2m} - 1| \cdot |B_{2m}| \leq |B_{2m}|,$$

tudíž

$$\sup |B_{2m}(x)| = |B_{2m}|, \quad \text{pro } x \in [0, 1]. \quad (2.18)$$

Náš výsledek si můžeme ověřit v tabulce odhadů Bernoulliho polynomů, ve které je vidět,

že maximum absolutní hodnoty Bernoulliho polynomů  $B_{2m}(x)$  se rovná absolutní hodnotě sudých Bernoulliho čísel.

V této kapitole jsme si ukázali vlastnosti Bernoulliho čísel, stejně tak jak s nimi pracoval Bernoulli a definovali Bernoulliho polynomy.

Bernoulliho čísla hrají významnou roli při hledání různých součtových vzorců a v mnoha jiných situacích v analýze. Velmi málo čísel je tak významných a má tak široké uplatnění jako Bernoulliho čísla.

# Kapitola 3

## Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec

### 3.1 Leonhard Euler a Colin Maclaurin

Zasněme se na chvíli a přesuňme se ve svých myšlenkách hluboko do minulosti. Nacházíme se v roce 1730 na půdě petrohradské akademie v malé tmavé místnosti, která připomíná kabinet. Přímo před námi sedí za stolem muž, je celý shrbený a horlivě něco píše. Na první pohled je zřejmé, že je tak zabraný do své práce, že vůbec nevnímá okolní svět. Jediným jeho světem pro něj v tuto chvíli je ten, který se mu rodí pod rukama na papíře. Přístupme tedy blíž, abychom zjistili, co je to za podivína.

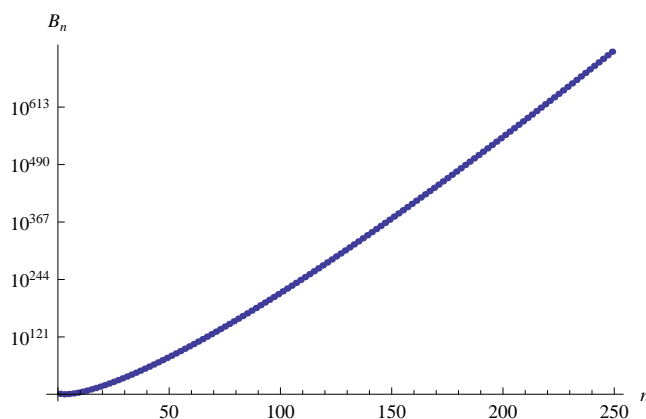
Leonhard Euler byl tím záhadným mladým mužem. Euler se tehdy snažil pokořit basilejský problém, tedy určit přesnou hodnotu součtu převrácených druhých mocnin. Byl přesvědčený, že platí

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6},$$

ale chtěl správnost výsledku ověřit ještě numericky. Pokoušel se tedy sčítat částečné součty a dokázat, že se blíží k  $\frac{\pi^2}{6}$ . Nicméně přesné výpočty byly velmi náročné, protože řada konvergovala velmi pomalu. Pokračoval tedy ve své práci a dlouhou dobu se snažil přijít na nějaký obecný předpis, kterým by bylo možné řadu numericky přesně spočítat. V roce 1735 se mu to podařilo. Euler objevil sumační vzorec, pomocí kterého vyjádřil součet převrácených druhých mocnin na prvních dvacet desetinných míst. Přišel se zcela novou metodou, pomocí které potvrdil výše uvedený výsledek.

O dvacet let později vydal knihu nazvanou *Institutiones Calculi Differentialis*, kde se zaměřuje právě na vztahy mezi diferenciálním počtem a nekonečnými řadami. Zcela jednoduchou výkladovou formou seznámil čtenáře se svými dosavadními objevy a výsledky. Zmíním se pouze o dvou kapitolách, které autor věnoval sumačnímu vzorci, jeho nesčetným aplikacím, ale také Bernoulliho číslům.

Euler ve své knize odvodil několik vlastností Bernoulliho čísel a ukázal, že rostou supergeometricky, což si můžeme názorně prohlédnout na následujícím grafu. Aby byl obrázek názorný, zvolila jsem na ose  $y$  logaritmické měřítko. Kdyby Bernoulliho čísla rostla geometricky, pak by grafem posloupnosti čísel byla přímka. Z obrázku je ale vidět, že graf posloupnosti Bernoulliho čísel tvoří křivku, která roste daleko rychleji než přímka. O takové posloupnosti čísel pak můžeme tvrdit, že roste supergeometricky.



Euler pomocí svého sumačního vzorce dokázal správnost Bernoulliho vztahu pro součet mocnin přirozených čísel, který jsme uvedli v kapitole 2

$$1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \dots + n^m .$$

Celou jednu kapitolu zmíněné knihy věnoval Euler vlastnostem sumačního vzorce. Zkoumal odvození sumačního vzorce a s úspěchem pomocí něj spočítal mnoho významných příkladů. Použil sumační vzorec pro výpočet částečných součtů harmonické řady

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

a s ní spojené Eulerovy konstanty  $\gamma$ . Sečetl hodnoty převrácených mocnin přirozených čísel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \dots + \frac{1}{n^{2k}} ,$$

nalezl přibližnou hodnotu čísla  $\pi$ . Našel numerické aproximace pro hodnoty

$$\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 + \dots + \ln n = \ln n! ,$$

které vedly na aproximaci faktoriálů velkých čísel a také na aproximace kombinačních čísel.

Zhruba ve stejné době na universitě v Edinburghu objevil sumační vzorec zcela nezávisle na Leonhardu Eulerovi také Colin Maclaurin. Oba matematici odvodili sumační vzorec v podstatě stejným způsobem, ale i přesto že jsou pozorování obou mužů velmi podobná, jsou na



sobě navzájem nezávislá. Maclaurinův přístup je o trochu více geometrický, než Eulerův. Colin Maclaurin své výsledky publikoval roku 1742 v knize *A Treatise of Fluxions*. Maclaurin se ve své práci odvolával na geometrické metody starověkých Řeků a na Archimédovu metodu. Odvodil zde sumační vzorec a použil ho k výpočtu některých matematických problémů, např. součtu mocnin přirozených čísel, nebo k odvození Stirlingovy formule pro výpočet faktoriálu.

Z tohoto důvodu by bylo nespravedlivé připisovat prvenství pouze jednomu z nich. Řada autorů matematických publikací označuje sumační vzorec jako Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec. Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec byl a stále je mocným nástrojem pro porovnání konečné sumy  $\sum_{k=1}^n f(x)$  a integrálu  $\int_1^n f(x) dx$ . Proto se také nejčastěji sumační vzorec používá pro numerické výpočty konečných součtů řad, resp. částečných součtů nekonečných řad. V programu Mathematica je dokonce tento vzorec zabudovaný jako jedna z metod pro numerické sčítání řad.

## 3.2 Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec

V předešlé kapitole jsme se dověděli, kým byl sumační vzorec objeven a nastínili jsme si jeho uplatnění. Abychom mohli vzorec používat při počítání konkrétních příkladů, musíme si tento vzorec nejprve dokázat a ověřit jeho platnost.

**Věta 3.2.1.** *Nechť  $a, b$  jsou celá čísla a  $m$  je přirozené číslo. Navíc předpokládáme, že funkce  $f$  má v intervalu  $[a-1, b]$  spojitě derivace až do řádu  $m$ . Pak platí*

$$\sum_{k=a}^b f(k) = \int_{a-1}^b f(x) dx + \frac{1}{2} \left( f(b) - f(a-1) \right) + \sum_{j=2}^m \frac{(-1)^j B_j}{j!} \left( f^{(j-1)}(b) - f^{(j-1)}(a-1) \right) + R_m, \quad (3.1)$$

$$\text{kde } R_m = \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \int_{a-1}^b \tilde{B}_m(x) f^{(m)}(x) dx. \quad (3.2)$$

*Důkaz.* Počítejme integrál  $\int_0^1 f(x) dx$  metodou per partes, přičemž využijeme toho, že  $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$  a  $B_1'(x) = 1$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 B_1'(x)f(x) dx = \\ &= \left[ B_1(x)f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 B_1(x)f'(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( f(1) + f(0) \right) - \int_0^1 B_1(x)f'(x) dx . \end{aligned}$$

Výslednou rovnici můžeme upravovat ještě dál. Uvážíme-li, že  $B_1(x) = \frac{1}{2}B_2'(x)$  podle rovnice (2.8) a  $B_2(0) = B_2(1) = B_2$ , můžeme integrovat znovu metodou per partes a upravit do tvaru

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \frac{1}{2} \left( f(1) + f(0) \right) - \frac{1}{2!} \left[ B_2(x)f'(x) \right]_0^1 + \frac{1}{2!} \int_0^1 B_2(x)f''(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( f(1) + f(0) \right) - \frac{B_2}{2!} (f'(1) - f'(0)) + \frac{1}{2!} \int_0^1 B_2(x)f''(x) dx \end{aligned}$$

Tímto způsobem bychom mohli postupně integrovat per partes v dalších krocích. Předpokládejme, že po  $(m - 1)$ -ním kroku jsme dostali

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \frac{1}{2} \left( f(1) + f(0) \right) - \sum_{j=2}^{m-1} \frac{(-1)^j B_j}{j!} \left( f^{(j-1)}(1) - f^{(j-1)}(0) \right) - \\ &\quad - \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int_0^1 B_{m-1}(x)f^{(m-1)}(x) dx \end{aligned} \quad (3.3)$$

(pro  $m = 3$  tvrzení platí). Nyní dokážeme, že vzorec platí také pro  $m + 1$ .

Spočítejme integrál  $\int_0^1 B_{m-1}(x)f^{(m-1)}(x) dx$  pomocí metody per partes. Podle rovnice (2.8) víme, že  $B_{m-1}(x) = \frac{1}{m}B_m'(x)$ . Využijeme také toho, že pro každé  $m \geq 2$  je

$$B_m(0) = B_m(1) = B_m ,$$

přičemž rovnost  $B_m(0) = B_m(1)$  plyne z věty 2.2.1 a rovnost  $B_m(0) = B_m$  vyplývá z definice Bernoulliho polynomů.

$$\begin{aligned} \int_0^1 B_{m-1}(x)f^{(m-1)}(x) dx &= \frac{1}{m} \left[ B_m(x)f^{(m-1)}(x) \right]_0^1 - \frac{1}{m} \int_0^1 B_m(x)f^{(m)}(x) dx = \\ &= \frac{B_m}{m} \left( f^{(m-1)}(1) - f^{(m-1)}(0) \right) - \frac{1}{m} \int_0^1 B_m(x)f^{(m)}(x) dx . \end{aligned}$$

Získaný výsledek dosadíme do rovnice (3.3) a rovnici upravíme

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x) dx &= \frac{1}{2} \left( f(1) + f(0) \right) - \sum_{j=2}^{m-1} \frac{(-1)^j B_j}{j!} \left( f^{(j-1)}(1) - f^{(j-1)}(0) \right) - \\
&- \frac{(-1)^m B_m}{m!} \left( f^{(m-1)}(1) - f^{(m-1)}(0) \right) - \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^1 B_m(x) f^{(m)}(x) dx = \\
&= \frac{1}{2} \left( f(1) + f(0) \right) - \sum_{j=2}^m \frac{(-1)^j B_j}{j!} \left( f^{(j-1)}(1) - f^{(j-1)}(0) \right) - \\
&\quad - \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^1 B_m(x) f^{(m)}(x) dx .
\end{aligned}$$

Dokázali jsme tedy, že pro každé  $m \in \mathbb{N}$  platí

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x) dx &= \frac{1}{2} \left( f(1) + f(0) \right) - \sum_{j=2}^m \frac{(-1)^j B_j}{j!} \left( f^{(j-1)}(1) - f^{(j-1)}(0) \right) - \\
&- \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \int_0^1 B_m(x) f^{(m)}(x) dx .
\end{aligned}$$

Z poslední rovnice vyjádříme  $\frac{1}{2}(f(1) + f(0))$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left( f(1) + f(0) \right) &= \int_0^1 f(x) dx + \sum_{j=2}^m \frac{(-1)^j B_j}{j!} \left( f^{(j-1)}(1) - f^{(j-1)}(0) \right) + \\
&+ \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \int_0^1 B_m(x) f^{(m)}(x) dx . \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Zvolme  $k \in \mathbb{Z}$  a definujme funkci  $g(x) = f(x + k)$ . Pak platí

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left( f(k+1) + f(k) \right) &= \frac{1}{2} \left( g(1) + g(0) \right) = \int_0^1 g(x) dx + \\
&+ \sum_{j=2}^m \frac{(-1)^j B_j}{j!} \left( g^{(j-1)}(1) - g^{(j-1)}(0) \right) + \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \int_0^1 B_m(x) g^{(m)}(x) dx = \\
&= \int_k^{k+1} f(x) dx + \sum_{j=2}^m \frac{(-1)^j B_j}{j!} \left( f^{(j-1)}(k+1) - f^{(j-1)}(k) \right) + \\
&\quad + \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \int_k^{k+1} \tilde{B}_m(x) f^{(m)}(x) dx
\end{aligned}$$

kde funkci  $\tilde{B}_m$  jsme definovali v kapitole 2.

Dokázali jsme, že pro každé  $k \in \mathbb{Z}$  platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( f(k+1) + f(k) \right) &= \int_k^{k+1} f(x) \, dx + \sum_{j=2}^m \frac{(-1)^j B_j}{j!} \left( f^{(j-1)}(k+1) - f^{(j-1)}(k) \right) + \\ &+ \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \int_k^{k+1} \tilde{B}_m(x) f^{(m)}(x) \, dx . \end{aligned}$$

Sečtením těchto vztahů pro  $k = a-1, \dots, b-1$  dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( f(b) + f(a-1) \right) + f(a) + f(a+1) + \dots + f(b-1) &= \int_{a-1}^b f(x) \, dx + \\ + \sum_{j=2}^m \frac{(-1)^j B_j}{j!} \left( f^{(j-1)}(b) - f^{(j-1)}(a-1) \right) &+ \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \int_{a-1}^b \tilde{B}_m(x) f^{(m)}(x) \, dx . \end{aligned}$$

Důkaz dokončíme tak, k oběma stranám rovnice přičteme výraz  $\left( \frac{1}{2}f(b) - \frac{1}{2}f(a-1) \right)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=a}^b f(k) &= \int_{a-1}^b f(x) \, dx + \frac{1}{2} \left( f(b) - f(a-1) \right) + \\ &+ \sum_{j=2}^m \frac{(-1)^j B_j}{j!} \left( f^{(j-1)}(b) - f^{(j-1)}(a-1) \right) + R_m , \\ \text{kde } R_m &= \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \int_{a-1}^b \tilde{B}_m(x) f^{(m)}(x) \, dx . \end{aligned}$$

□

Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec má několik dalších modifikací, které jsou speciálními případy vzorce uvedeného v předchozí větě. My si jednu upravenou verzi sumačního vzorce ukážeme v následujícím důsledku, neboť ji budeme v dalších kapitolách využívat při počítat konkrétních příkladů.

**Důsledek 3.2.1.** *Nechť  $m, n$  jsou přirozená čísla. Předpokládejme, že funkce  $f$  má v intervalu  $[0, n]$  spojitě derivace až do  $m$ -tého řádu. Pak platí*

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_0^n f(x) \, dx + \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^j B_j}{j!} \left( f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0) \right) + R_m , \quad (3.5)$$

kde zbytek  $R_m$  je dán rovnicí

$$R_m = \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \int_0^n \tilde{B}_m(x) f^{(m)}(x) dx . \quad (3.6)$$

*Důkaz.* Rovnice (3.5) a (3.6) plynou přímo z věty 3.2.1 dosazením  $a = 1$  a  $b = n$ .  $\square$

V této kapitole jsme si ukázali korektní důkaz Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce a odvodili jsme si jeden z jeho důsledků. Než začneme počítat další příklady, zaměříme se na zbytek  $R_m$  v Eulerově-Maclaurinově sumačním vzorci.

### 3.3 Odhady zbytku v Eulerově-Maclaurinově sumačním vzorci

Hodnotu zbytku zpravidla nemůžeme určit zcela přesně. Jediný požadavek, který na zbytek  $R_m$  máme, je, aby byl malý. Právě zbytek vyjadřuje jemný rozdíl v porovnání sumy a integrálu. My si ukážeme způsob, pomocí kterého odhadneme hodnotu zbytku.

V následujících výpočtech budeme hledat horní odhady zbytků  $R_m$ . K odhadování hodnot zbytků využijeme odhady Bernoulliho polynomů, které jsme si ukázali v kapitole 2.2. Dále také využijeme toho, že pro každou riemannovsky integrovatelnou funkci  $h$  na intervalu  $[a, b]$  platí  $\left| \int_a^b h(x) dx \right| \leq \int_a^b |h(x)| dx$ . Pomocí tohoto tvrzení dostaneme odhad

$$\begin{aligned} |R_m| &= \left| \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \int_a^b \tilde{B}_m(x) f^{(m)}(x) dx \right| \leq \frac{1}{m!} \int_a^b |\tilde{B}_m(x) f^{(m)}(x)| dx \leq \\ &\leq \frac{1}{m!} \sup |\tilde{B}_m(x)| \int_a^b |f^{(m)}(x)| dx . \end{aligned} \quad (3.7)$$

**Příklad 3.3.1.** Naším cílem v tuto chvíli je odhadnout zbytek  $R_1$ .

Vyjdeme ze skutečnosti, že známe horní odhad Bernoulliho polynomu  $B_1$

$$|\tilde{B}_1(x)| \leq \frac{1}{2} .$$

Dosadíme  $m = 1$  do vztahu (3.7), obdržíme odhad

$$|R_1| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |f'(x)| dx .$$

**Příklad 3.3.2.** Stejným způsobem budeme postupovat i při odhadu zbytku  $R_2$ . Použijeme odhad z kapitoly 2

$$|\tilde{B}_2(x)| \leq \frac{1}{6}$$

a stejně jako v předchozím příkladě odhadneme zbytek pomocí nerovnosti

$$|R_2| \leq \frac{1}{12} \int_a^b |f''(x)| dx .$$

Předchozími výpočty jsme si ukázali, že platí

$$|R_1| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |f'(x)| dx, \quad |R_2| \leq \frac{1}{12} \int_a^b |f''(x)| dx. \quad (3.8)$$

Analogicky bychom dostali odhad pro zbytek  $R_m$ , kde  $m$  je libovolné přirozené číslo.

**Poznámka 3.3.1.** Pro  $m = 2k$  platí podle rovnice (2.18), že  $\sup |\tilde{B}_{2k}(x)| = |B_{2k}|$  a tedy podle věty 2.1.3 platí:

$$|R_{2k}| \leq \frac{B_{2k}}{(2k)!} \int_a^b |f^{(n)}(x)| dx \leq \frac{4}{(2\pi)^{2k}} \int_a^b |f^{(n)}(x)| dx .$$

## 3.4 Historické odvození sumačního vzorce

V této části si ukážeme původní Eulerův postup, kterým dospěl k sumačnímu vzorci. Projdeme si společně Eulerovy úvahy a poukážeme na některé nedostatky v jeho důkazu. Ačkoliv je Eulerův důkaz z dnešního hlediska nekorektní, je i přesto poučný. Na konci kapitoly se znímíme jak se od sebe liší Eulerův a Maclaurinův důkaz sumačního vzorce.

Nejprve budeme uvažovat součty

$$\begin{aligned} S &= F(1) + F(2) + F(3) + F(4) + \cdots + F(n) , \\ s &= F(0) + F(1) + F(2) + F(3) + \cdots + F(n-1) , \end{aligned}$$

přičemž  $F$  je libovolná primitivní funkce k funkci  $f$ .

Vypočítáme rozdíl mezi  $S - s$  pomocí Taylorovy řady

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0)F'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}F''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}F'''(x_0) + \cdots ,$$

přičemž dosadíme za  $x = k - 1$ ,  $x_0 = k$ :

$$F(k-1) = F(k) - F'(k) + \frac{1}{2!}F''(k) - \frac{1}{3!}F'''(k) + \dots,$$

$$F(k) - F(k-1) = \frac{F'(k)}{1!} - \frac{F''(k)}{2!} + \frac{F'''(k)}{3!} - \dots.$$

Odtud pak vyplývá, že rozdíl  $S - s$  můžeme vyjádřit ve tvaru

$$F(n) - F(0) = \sum_{k=1}^n F'(k) - \frac{1}{2!} \sum_{k=1}^n F''(k) + \frac{1}{3!} \sum_{k=1}^n F^{(3)}(k) - \frac{1}{4!} \sum_{k=1}^n F^{(4)}(k) + \dots.$$

Nyní využijeme toho, že  $F' = f$

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2!} \sum_{k=1}^n f'(k) - \frac{1}{3!} \sum_{k=1}^n f''(k) + \frac{1}{4!} \sum_{k=1}^n f^{(3)}(k) - \dots \quad (3.9)$$

V druhém kroku budeme chtít postupně odstanit sumy  $\sum_{k=1}^n f'(k)$ ,  $\sum_{k=1}^n f''(k)$ ,  $\sum_{k=1}^n f'''(k)$  na pravé straně rovnice a nahradit je  $f'$ ,  $f''$ ,  $f'''$ . Rovnice (3.9) platí pro libovolnou funkci, nejen pro funkci  $f$ . Můžeme tedy místo  $f$  psát  $f'$ ,  $f''$  atd. Tím dostaneme následující rovnice.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f'(k) &= f(n) - f(0) + \frac{1}{2!} \sum_{k=1}^n f''(k) - \frac{1}{3!} \sum_{k=1}^n f^{(3)}(k) + \frac{1}{4!} \sum_{k=1}^n f^{(4)}(k) - \dots \\ \sum_{k=1}^n f''(k) &= f'(n) - f'(0) + \frac{1}{2!} \sum_{k=1}^n f^{(3)}(k) - \frac{1}{3!} \sum_{k=1}^n f^{(4)}(k) + \frac{1}{4!} \sum_{k=1}^n f^{(5)}(k) - \dots \\ \sum_{k=1}^n f^{(3)}(k) &= f''(n) - f''(0) + \frac{1}{2!} \sum_{k=1}^n f^{(4)}(k) - \frac{1}{3!} \sum_{k=1}^n f^{(5)}(k) + \frac{1}{4!} \sum_{k=1}^n f^{(6)}(k) - \dots \end{aligned}$$

Pomocí těchto vztahů upravíme rovnici (3.9):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(k) &= \int_0^n f(x) dx - \alpha \left( f(n) - f(0) \right) + \beta \left( f'(n) - f'(0) \right) - \\ &\quad - \gamma \left( f''(n) - f''(0) \right) + \delta \left( f'''(n) - f'''(0) \right) - \dots, \quad (3.10) \end{aligned}$$

kde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ , ... jsou jistá čísla. V následujícím postupu ukážeme, jak se dají spočítat.

Jestliže ve vztahu (3.10) postupně nahradíme funkci  $f$  jejími derivacemi  $f'$ ,  $f''$ ,  $f'''$  atd., získáme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(k) &= \int_0^n f(x) dx - \alpha \left( f(n) - f(0) \right) + \beta \left( f'(n) - f'(0) \right) - \dots \\ - \frac{1}{2!} \sum_{k=1}^n f'(k) &= - \frac{1}{2!} \left( f(n) - f(0) \right) + \frac{\alpha}{2!} \left( f'(n) - f'(0) \right) - \dots \\ \frac{1}{3!} \sum_{k=1}^n f''(k) &= + \frac{1}{3!} \left( f'(n) - f'(0) \right) - \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Uvědomme si, že součet levých stran rovnic je roven integrálu  $\int_0^n f(x) dx$  podle rovnice (3.9). Rovnice tedy sečteme a po úpravě dostaneme

$$0 = \left( -\alpha - \frac{1}{2} \right) (f(n) - f(0)) + \left( \beta + \frac{\alpha}{2!} + \frac{1}{3!} \right) (f'(n) - f'(0)) + \dots,$$

odkud plynou vztahy pro hledané koeficienty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta, \dots$

$$\alpha + \frac{1}{2!} = 0, \quad \beta + \frac{\alpha}{2!} + \frac{1}{3!} = 0 \quad \gamma + \frac{\beta}{2!} + \frac{\alpha}{3!} + \frac{1}{4!} = 0, \dots \quad (3.11)$$

Připomeňme si, jaký vztah platí mezi Bernoulliho čísly.

$$B_0 = 1, \quad 2B_1 + B_0 = 0, \quad 3B_2 + 3B_1 + B_0 = 0, \quad \dots, \quad \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} B_k = 0 \quad (3.12)$$

Porovnáním vztahů (3.11) a (3.12) můžeme zjistit, že

$$\alpha = \frac{B_1}{1!}, \quad \beta = \frac{B_2}{2!}, \quad \gamma = \frac{B_3}{3!}, \quad \delta = \frac{B_4}{4!}, \dots$$

Nyní známe jednotlivé koeficienty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta, \dots$ , vrátíme se tedy zpět k naší rovnici (3.11) a koeficienty do ní dosadíme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(k) &= \int_0^n f(x) dx - \frac{B_1}{1!} \left( f(n) - f(0) \right) + \frac{B_2}{2!} \left( f'(n) - f'(0) \right) - \\ &\quad - \frac{B_3}{3!} \left( f''(n) - f''(0) \right) + \frac{B_4}{4!} \left( f^{(3)}(n) - f^{(3)}(0) \right) - \dots \end{aligned}$$



Z předchozí kapitoly víme, že Bernoulliho čísla  $B_k$  pro  $k \geq 2$  liché jsou všechna rovna nule. Z toho plyne, že derivace sudého řádu funkce  $f$  vypadnou a v rovnici zůstanou pouze derivace lichého řádu funkce  $f$ , které mají za koeficienty nenulová Bernoulliho čísla.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(k) &= \int_0^n f(x) dx - \frac{B_1}{1!} \left( f(n) - f(0) \right) + \frac{B_2}{2!} \left( f'(n) - f'(0) \right) + \\ &+ \frac{B_4}{4!} \left( f^{(3)}(n) - f^{(3)}(0) \right) - \dots \end{aligned}$$

Získaný sumační vzorec můžeme zapsat zkráceně ve tvaru

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2} \left( f(n) - f(0) \right) + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{B_{2j}}{(2j)!} \left( f^{(2j-1)}(n) - f^{(2j-1)}(0) \right).$$

Všimněme si, že Euler pracoval s nekonečným součtem na pravé straně rovnosti. Tato Eulerova úvaha byla však chybná, protože řada může být divergentní. Proto také dnešní tvar Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorec obsahuje pouze konečné součty.

Z provedeného důkazu je vidět, že Euler postupoval při dokazování sumačního vzorce čistě analyticky. Maclaurin se naopak ve svém důkazu opíral především o geometrické souvislosti a velmi často se odvolával na obrázek znázorňující danou situaci. Obě odvození sumačního vzorce, jak podle Maclaurina tak podle Eulera, využívají rozvoje do Taylorovy řady. Zásadní odlišnost obou důkazů je v použití matematické notace – Euler používal matematický zápis, který odpovídá leibnizovské notaci, kterou dnes běžně používáme. Zatímco Maclaurin používal newtonovskou notaci, tzn. „fluxe“ (tj. derivace) a „fluenty“ (tj. primitivní funkce k fluxi). Oba dva objevitelé sumačního vzorce využívali ve svých důkazech Bernoulliho čísla a polynomy, avšak ani jeden neurčil v sumačním vzorci tvar zbytku. Termín „zbytek“ (a jeho přesný tvar) poprvé zavedl až S. D. Poisson viz [12].

# Kapitola 4

## Aplikace Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce

### 4.1 Součet mocnin přirozených čísel

První příklad, který si v této kapitole ukážeme, bude slavný výsledek v oblasti konečných součtů. Na začátku kapitoly o Bernoulliho číslech jsme se zabývali součtem  $\sum_{k=1}^n k^c$ , který zkoumal Bernoulli. Ukázali jsme si, jakým způsobem Bernoulli postupoval a k jakým objevným výsledkům ve své práci došel. Nyní ovšem známe daleko mocnější nástroj, jakým je Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec.

Budeme tedy opět zkoumat součet

$$S_m(n) = \sum_{k=1}^n k^m,$$

ale tentokrát budeme postupovat jako před mnoha lety Euler a pokusíme se pomocí Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce a Bernoulliho čísel sečíst hodnoty mocnin přirozených čísel. Nakonec uvidíme, že Euler nejen, že potvrdil Bernoulliho výsledky, ale také se mu pomocí sumačního vzorce podařilo najít důkaz.

Zkoumejme, stejně jako Euler, funkci  $f(x) = x^{m-1}$ .

Derivace této funkce jsou:

$$f^{(j)}(x) = (m-1)(m-2) \cdots (m-j)x^{m-1-j}, \quad j \in \{1, \dots, m-1\},$$

všechny derivace vyšších řádů jsou nulové.

Na funkci  $f(x)$  aplikujeme Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec (3.5).

$$S_{m-1}(n) = \sum_{k=1}^n f(k) = \int_0^n f(x) dx + \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^j B_j}{j!} \left( f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0) \right) + R_m.$$

Uvážíme-li, že derivace vyšších řádů jsou nulové, pak ze vztahu  $f^{(m)}(x) = 0$  vyplývá, že je i zbytek nulový, tedy  $R_m = 0$ .

Zaměříme-li se na sumu  $\sum_{j=1}^m \frac{(-1)^j B_j}{j!} f^{(j-1)}(0)$ , platí, že  $f^{(j-1)}(0) = 0$  pro  $j = 1, \dots, m-1$ , ale  $f^{(m-1)}(0) = (m-1)!$ .

Využijeme-li tyto úvahy, můžeme rovnici dále upravit a dostaneme

$$\begin{aligned} S_{m-1}(n) &= \sum_{k=1}^n k^{m-1} = \\ &= \int_0^n x^{m-1} dx + \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^j B_j}{j!} f^{(j-1)}(n) - \frac{(-1)^m B_m}{m!} (m-1)! = \\ &= \frac{n^m}{m} + \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^j B_j}{j!} (m-1)(m-2) \cdots (m-j+1) n^{m-j} - \frac{(-1)^m B_m}{m} = \\ &= \frac{1}{m} \left( n^m + \sum_{j=1}^m (-1)^j B_j \frac{m(m-1) \cdots (m-j+1)}{j!} n^{m-j} - (-1)^m B_m \right) = \\ &= \frac{1}{m} \left( n^m + \sum_{j=1}^m (-1)^j B_j \binom{m}{j} n^{m-j} - (-1)^m B_m \right) = \\ &= \frac{1}{m} \left( \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j B_j \binom{m}{j} n^{m-j} \right). \end{aligned}$$

Nakonec nahradíme  $m$  za  $m+1$  a dostaneme vzorec pro součet  $S_m(n)$  vyjádřený pomocí Bernoulliho čísel:

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m (-1)^j B_j \binom{m+1}{j} n^{m+1-j}. \quad (4.1)$$

Nyní se pokusíme vyjádřit součet  $S_m(n)$  ale tentokrát pomocí Bernoulliho polynomů. Začneme tím, že si vyjádříme součet  $S_m(n)$  pomocí součtu  $S_m(n-1)$ ,

$$S_m(n) = S_m(n-1) - n^m.$$

Z předchozí rovnice si vyjádříme součet  $S_m(n-1)$  a budeme ho dále upravovat, součet  $S_m(n)$  rozepíšeme podle rovnosti (4.1)

$$\begin{aligned} S_m(n-1) &= S_m(n) - n^m = \\ &= \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m (-1)^j B_j \binom{m+1}{j} n^{m+1-j} - n^m . \end{aligned}$$

V dalším kroku ze sumy vypíšeme první dva členy. Druhý člen, který je roven výrazu  $(-B_1 \binom{m+1}{1} n^m)$ , se budeme snažit dále upravit tak, aby měl kladné znaménko. Zároveň si také můžeme všimnout, že v sumě můžeme vynechat člen  $(-1)^j$ , neboť člen  $(-1)^j$  je kladný pro  $j$  sudé a záporný pro  $j$  liché. Uvážíme-li, že Bernoulliho čísla  $B_j$  jsou rovna nule pro liché  $j \geq 3$ , můžeme tedy člen  $(-1)^j$  ve zlomku vynechat, aniž by se změnil výsledek sumy.

$$\begin{aligned} S_m(n-1) &= \frac{1}{m+1} \left( n^{m+1} - B_1 \binom{m+1}{1} n^m + \sum_{j=2}^m B_j \binom{m+1}{j} n^{m+1-j} \right) - n^m = \\ &= \frac{1}{m+1} \left( n^{m+1} + \frac{1}{2}(m+1)n^m + \sum_{j=2}^m B_j \binom{m+1}{j} n^{m+1-j} \right) - n^m = \\ &= \frac{1}{m+1} \left( n^{m+1} - \frac{1}{2}(m+1)n^m + \sum_{j=2}^m B_j \binom{m+1}{j} n^{m+1-j} \right) = \\ &= \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m B_j \binom{m+1}{j} n^{m+1-j} = \\ &= \frac{1}{m+1} \left( \sum_{j=0}^{m+1} B_j \binom{m+1}{j} n^{m+1-j} - B_{m+1} \right) = \end{aligned}$$

Vzpomeňme si, že vztahem  $\sum_{j=0}^m B_j \binom{m}{j} x^{m-j} = B_m(x)$  v rovnici (2.6) jsme definovali Bernoulliho polynomy. Rovnici tedy můžeme dále upravit do tvaru:

$$S_m(n-1) = \frac{1}{m+1} (B_{m+1}(n) - B_{m+1}(0)) .$$

Nahradíme-li  $n$  za  $n+1$  dostaneme přesnou hodnotu součtu  $S_m(n)$  vyjádřenou pomocí Bernoulliho polynomů.

$$S_m(n) = \sum_{k=0}^n k^m = \frac{1}{m+1} (B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}(0)) . \quad (4.2)$$

Z našeho výpočtu je vidět, že pokud použijeme Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec na sumu  $\sum_{k=0}^n k^m$ , dostaneme jednoduchý výsledek.

Pokud bychom si chtěli výsledky ověřit pro konkrétní hodnoty čísla  $m$ , položili bychom postupně  $m = 0, 1, 2, \dots$  v rovnici (4.1) nebo v rovnici (4.2). Tím bychom dostali vzorce, které jsem uvedla na začátku kapitoly 2. Tímto způsobem bychom si mohli ověřit platnost Bernoulliho výsledku pomocí Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce.

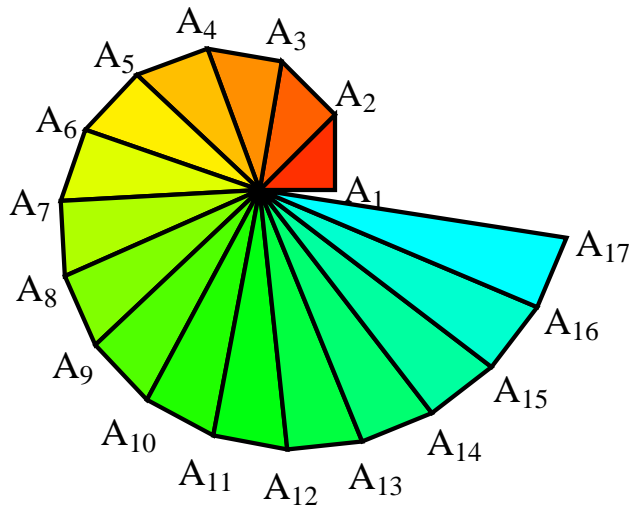
Než tento příklad zcela opustíme ráda bych ještě poznamenala, že úloha o součtu mocnin celých čísel má i hlubší dopad. V počátečním období rozvoje diferenciálního a integrálního počtu se tento problém objevil u P. Fermata v roce 1635 při přibližném výpočtu plochy pod grafem mocninné funkce  $x^m$ . V jazyce dnešní matematiky se jedná o výpočet riemannovských integrálních součtů příslušných k integrálu  $\int_0^a x^m dx$  viz [12].

## 4.2 Theodorova spirála

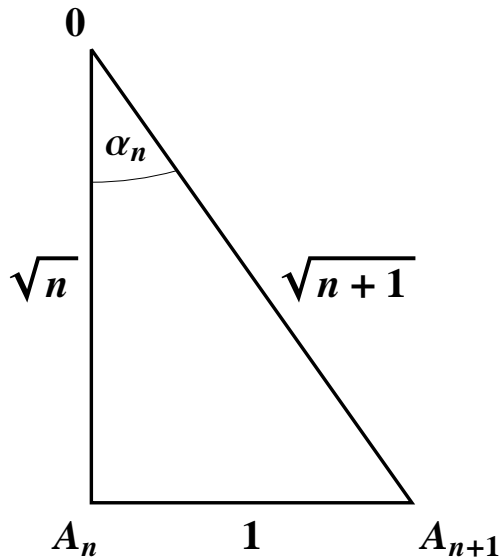
Spočítáme si nyní úlohu, kterou jsem převzala z knihy [5]. V této knize je úloha součástí cvičení. My však tuto úlohu spočítáme, abychom viděli, že pomocí Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce je její řešení poměrně snadné. V této úloze budeme zkoumat počet rotací v tzv. Theodorově spirále. Než ale začneme se samotným výpočtem příkladu, řekneme si, po kom je tento útvar pojmenovaný a popíšeme si vlastnosti Theodorovy spirály.

Theodorova spirála je pojmenována podle Theodora z Kyrény, který žil přibližně v letech 470-390 př. n. l.

Theodorova spirála je útvar složený z pravoúhlých trojúhelníků o stranách délky 1,  $\sqrt{n}$  a  $\sqrt{n+1}$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ . Tato spirála vzniká rotací trojúhelníků kolem počátku soustavy souřadnic, přičemž sousední trojúhelníky mají vždy společnou právě jednu stranu. Theodorova spirála se po sedmnáctém trojúhelníku vrátí zpět do prvního kvadrantu a začíná počátek soustavy souřadnic obíhat znovu. Theodorus proto svou spirálu po jednom celém oběhu ukončil (jako je tomu na obrázku), my se ale v našem výpočtu nebudeme omezovat pouze na 17 trojúhelníků, ale budeme chtít vědět, kolik rotací udělá 1 miliarda takových trojúhelníků?



Podívejme se blíže na trojúhelník  $0A_nA_{n+1}$ , kde 0 je počátek soustavy souřadnic.



$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\alpha_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Chceme-li zjistit, kolikrát spirála oběhne bod 0, potřebujeme sečíst

$$S = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{1\,000\,000\,000} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{k}}. \quad (4.3)$$

Tuto sumu rozdělíme na dvě části

$$S_1 = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{17} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{k}},$$

$$S_2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=18}^{1\,000\,000\,000} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

První sumu spočteme přímo:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{17} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{k}} \in (1,01; 1,02),$$

tj. prvních sedmnáct trojúhelníků oběhne jednou kolem počátku. Po oběhnutí se ale sedmnáctý trojúhelník nevrátí úplně přesně do počátečního bodu, nýbrž přesáhne ještě malý kousek přes první trojúhelník.

Druhou sumu odhadneme pomocí Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce, kde dosadíme funkci  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}$  do rovnice (3.5). Všimněme si, že výpočet je velmi krátký, protože můžeme použít už zbytek  $R_1$ .

$$S_2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=18}^{1\,000\,000\,000} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{17}^{1\,000\,000\,000} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}} dx + R_1 \right).$$

Primitivní funkce k funkci  $f$  je

$$F(x) = \sqrt{x} + x \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}} - \operatorname{arctg} \sqrt{x},$$

(můžeme ji spočítat např. metodou per partes).

Platí tedy

$$\int_{17}^{1\,000\,000\,000} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = F(1\,000\,000\,000) - F(17) \in (63\,237,14; 63\,237,15).$$

Zbytek  $R_1$  odhadneme pomocí vztahu (3.7). Využijeme také toho, že  $f$  je klesající, a tedy  $f' < 0$ .

$$\begin{aligned} |R_1| &= \left| \int_{17}^{1\,000\,000\,000} \tilde{B}_1(x) f'(x) dx \right| \leq \sup |\tilde{B}_1(x)| \int_{17}^{1\,000\,000\,000} |f'(x)| dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{17}^{1\,000\,000\,000} (-f'(x)) dx = \frac{1}{2} \left( f(17) - f(1\,000\,000\,000) \right) < 0,12 \end{aligned}$$

Odtud dostáváme odhady pro součet  $S_2$ :

$$S_2 < \frac{1}{2\pi}(63\,237,15 + 0,12) < 10\,064,52 ,$$
$$S_2 > \frac{1}{2\pi}(63\,237,14 - 0,12) > 10\,064,49 .$$

Tedy

$$S = S_1 + S_2 > 1,01 + 10\,064,49 = 10\,065,5 ,$$
$$S = S_1 + S_2 < 1,02 + 10\,064,52 = 10\,065,54 .$$

Odtud plyne odpověď na naši otázku. 1 miliarda trojúhelníků splňující zadané podmínky vykoná 10 065 rotací kolem počátku soustavy souřadnic.

Na závěr věnujme ještě znovu pozornost rovnici (4.3). Zamysleme se nad tím, zda bylo nutné v našem výpočtu rozdělit součet  $S$  na dva součty  $S_1$  a  $S_2$  a Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec aplikovat teprve až na součet  $S_2$ . Ano, bylo to nezbytné, neboť kdybychom sumační vzorec použili přímo na součet  $S$ , vyšlo by nám:

$$|R_1| \leq \frac{1}{2}(f(0) - f(1\,000\,000\,000)) .$$

Protože je  $f(0) = \frac{\pi}{2}$ , dostali bychom příliš velký odhad pro zbytek.

Odtud plyne, že Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec je často neefektivní pro součty od 1. Proto budeme i v některých následujících příkladech aplikovat Eulerův-Maclaurinův sumační vzorec na součty od  $i = k + 1$  do  $n$ .

### 4.3 Harmonická řada a Eulerova konstanta

Nyní si ukážeme, jak můžeme pomocí Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce sečíst částečné součty harmonické řady a vypočítat Eulerovu konstantu. Harmonická řada má široké uplatnění v několika oblastech matematiky. Výpočet mnoha příkladů z teorie pravděpodobnosti, statistiky nebo analýzy vede právě na částečné součty harmonické řady. Naučíme se s velkou přesností počítat harmonická čísla a vysvětlíme si, jak můžeme přesně určit na kolik desetinných míst je náš výpočet přesný.

Nejprve si definujme částečný součet harmonické řady, který označíme symbolem  $H_n$ . Budeme chtít tedy vyšetřovat součet

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} .$$



K tomu, abychom úspěšně zvládli aproximovat částečné součty harmonické řady, budeme potřebovat určit přibližnou hodnotu Eulerovy konstanty, kterou označíme řeckým písmenem  $\gamma$ . Než však začneme tuto konstantu vyčíslovat, ukážeme si její geometrickou interpretaci.

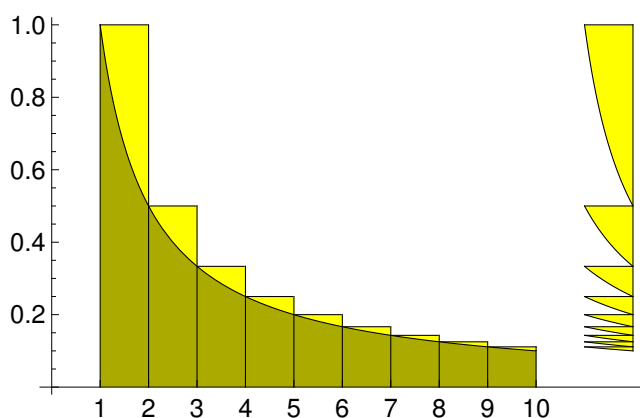
Definujme pro  $n \in \mathbb{N}$  číslo  $d_n$  jako rozdíl mezi sumou a integrálem

$$d_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln(n+1).$$

Prohlédneme-li si následující obrázek, zjistíme, že  $d_n$  je součet obsahů prvních  $n$  křivočarých trojúhelníků nad grafem funkce  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Pokud bychom přesunuli všechny části, které jsou nad grafem funkce  $f(x)$  na pravou stranu od grafu, vyplnili bychom jimi část obdélníku o výšce 1 a šířce 1 jako na obrázku. Protože funkce  $f(x)$  je klesající, posunuté části se navzájem nepřekrývají. Porovnáme-li tyto části, dostaneme nerovnost  $0 < d_n < d_{n+1} < 1$ . Tudíž posloupnost  $\{d_n\}$  je rostoucí a shora omezená, má tedy limitu

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( H_n - \ln(n+1) \right),$$

kde číslo  $\gamma$  se nazývá Eulerova konstanta. Geometricky tedy  $\gamma$  reprezentuje součet všech křivočarých trojúhelníků nad intervalem  $[1, \infty)$ .



Vzorec, pomocí kterého jsme Eulerovu konstantu definovali, můžeme dále upravit a získáme vztah

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( H_n - \ln(n+1) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_{n-1} - \ln n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( H_{n-1} - \ln n + \frac{1}{n} \right)$$

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln n) , \quad (4.4)$$

který můžeme chápat jako ekvivalentní definici k naší definici Eulerovy konstanty. V mnohé matematické literatuře se Eulerova konstanta definuje právě pomocí tohoto předpisu.

To znamená, že pro velká  $n$  můžeme částečný součet harmonické řady aproximovat takto:

$$H_n \doteq \ln n + \gamma . \quad (4.5)$$

Přesnější aproximaci (včetně odhadu chyby) získáme pomocí Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce.

Nyní si ukážeme, jak můžeme pomocí Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce sečíst částečné součty harmonické řady a vypočítat Eulerovu konstantu.

Derivace funkce  $f(x) = \frac{1}{x}$  jsou:  $f^{(i)}(x) = (-1)^i \frac{i!}{x^{i+1}}$  .

Funkci  $f(x)$  dosadíme do rovnice (3.1), přičemž položíme  $a = k + 1$  a  $b = n$ :

$$H_n - H_k = \sum_{i=k+1}^n f(i) = \int_k^n \frac{1}{x} dx + \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^{j-1} B_j}{j} \left( \frac{1}{n^j} - \frac{1}{k^j} \right) + R_m ,$$

$$\text{kde } R_m = - \int_k^n \frac{\tilde{B}_m(x)}{x^{m+1}} dx . \quad (4.6)$$

Definujme číslo  $\gamma_k$  předpisem

$$\gamma_k = H_k - \ln k$$

a přepišme rovnici (4.6) do tvaru

$$\gamma_n - \gamma_k = \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^j B_j}{j} \left( \frac{1}{n^j} - \frac{1}{k^j} \right) + R_m .$$

Pro  $n \rightarrow \infty$  dostaneme

$$\gamma - \gamma_k = \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^j B_j}{j} \cdot \left( - \frac{1}{k^j} \right) - \int_k^\infty \frac{\tilde{B}_m(x)}{x^{m+1}} dx .$$

Odtud můžeme napsat obecné vyjádření pro aproximaci harmonického čísla  $H_k$ :

$$H_k = \ln k + \gamma + \sum_{j=1}^m \frac{(-1)^j B_j}{j} \cdot \frac{1}{k^j} + \varepsilon ,$$

kde

$$|\varepsilon| = \left| \int_k^\infty \frac{\tilde{B}_m(x)}{x^{m+1}} dx \right| \leq \sup |\tilde{B}_m(x)| \int_k^\infty \frac{dx}{x^{m+1}} = \sup |\tilde{B}_m(x)| \frac{1}{mk^m}.$$

K tomu, abychom co možná nejpřesněji vyčíslili Eulerovu konstantu  $\gamma$  stačí, abychom si z předchozí rovnice vyjádřili konstantu  $\gamma$  a položili např.  $k = 10$  a  $m = 9$  (tak jako Euler) a získáme

$$\begin{aligned} \gamma \doteq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10} - \ln(10) - \frac{1}{2 \cdot 10} + \frac{1}{12 \cdot 10^2} - \frac{1}{12 \cdot 10^5} + \\ + \frac{1}{252 \cdot 10^6} - \frac{1}{24 \cdot 10^9} \doteq 0,57721566490153286 \dots \end{aligned}$$

Zároveň také vidíme, s jakou přesností jsme určili hodnotu  $\gamma$

$$|\varepsilon| \leq \sup |\tilde{B}_9(x)| \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^9} \doteq 5,2834 \cdot 10^{-12},$$

tj. s přesností na 11 desetinných míst.

Eulerovu konstantu  $\gamma$  s přesností na 1 271 desetinných míst vypočítal Knuth.

Ačkoliv Eulerova konstanta hraje velkou roli v matematické analýze, některé její vlastnosti nejsou dodnes zcela prozkoumané. Stále nevíme, zda se jedná o racionální nebo iracionální číslo.

## 4.4 Úlohy související s výpočtem částečných součtů harmonické řady

Pomocí následujících úloh si ukážeme, že s harmonickou řadou se můžeme setkat i v běžném životě, ne jenom v matematických kurzech. Předvedeme si dvě úlohy „ze života“, jejichž výpočet vede právě na určování částečných součtů harmonické řady.

### Příklad 4.4.1. Úloha o frontě

Tento příklad jsem převzala z knihy [15]. Vezijme se nyní do role prodavačky, která stojí za pultem a dívá se na frontu lidí, kteří stojí před ní. Ráda by věděla, jak je fronta dlouhá, ale jediný způsob, jak může délku fronty odhadnout, je, že spočítá počet osob, kterým

„vykukují hlavy“. Podaří se jí však díky tomu délku fronty odhadnout?

Zformulujme si přesněji úlohu, kterou budeme chtít vyřešit:  $n$  osob různé výšky stojí v řadě za sebou. Díváme-li se na frontu zepředu, jaká je střední hodnota počtu osob, které vidíme? Předpokládejme, že pořadí osob ve frontě je náhodné. Osoba je vidět, pokud je vyšší než všechny před ní.

Pro  $i = 1, \dots, n$  definujme náhodnou veličinu

$$X_i = \begin{cases} 0 & i\text{-tá osoba není vidět,} \\ 1 & i\text{-tá osoba je vidět.} \end{cases}$$

Odtud vyplývá, že

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n ,$$

je počet osob, které jsou vidět.

Platí, že střední hodnota počtu osob, které jsou vidět, je dána součtem jednotlivých středních hodnot:

$$EX = EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n , \quad (4.7)$$

přičemž pro střední hodnotu náhodné veličiny  $X_i$  platí

$$EX_i = P(X_i = 1) = \frac{1}{i} ,$$

tedy  $i$ -tá osoba je vidět, pokud je vyšší než předchozích  $(i - 1)$  osob. Tento jev nastane s pravděpodobností  $\frac{1}{i}$ .

Dosadíme-li tento vztah zpět do rovnice (4.7), zjistíme, že střední hodnotu počtu osob, které jsou vidět ve frontě tvořené  $n$  osobami, získáme tak, že spočítáme částečný součet harmonické řady  $H_n$ .

$$EX = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = H_n .$$

Pomocí tohoto obecného předpisu už bude snadné zjistit např. jak dlouhá musí být fronta, abychom viděli alespoň 10 osob. Chceme tedy spočítat jak velké musí být  $n$ , aby  $EX \geq 10$ ?

Hledáme  $n$  takové, aby  $H_n \geq 10$ . Využijeme rovnice (4.5), pomocí které jsme si aproximovali částečné součty harmonické řady a vyjádříme si z této rovnice  $n$ :

$$n \doteq e^{H_n - \gamma} ,$$

do rovnice dosadíme  $H_n \geq 10$  a dostaneme

$$n \geq e^{10 - \gamma} \doteq 12\,367 .$$

Budeme-li mít frontu, ve které bude stát 12 367 osob, pak paní prodavačka uvidí v průměru jen 10 osob.

Vraťme se ale ještě na chvíli k předchozímu výpočtu. V rovnici (4.5) jsme částečné součty harmonické řady aproximovali pomocí logaritmu a Eulerovy konstanty  $\gamma$ . Je důležité uvědomit si, jak podstatnou roli v našem výpočtu hraje Eulerova konstanta. Kdybychom totiž harmonickou řadu aproximovali pouze pomocí logaritmu

$$H_n \doteq \ln n ,$$

dostali bychom chybný výsledek, totiž

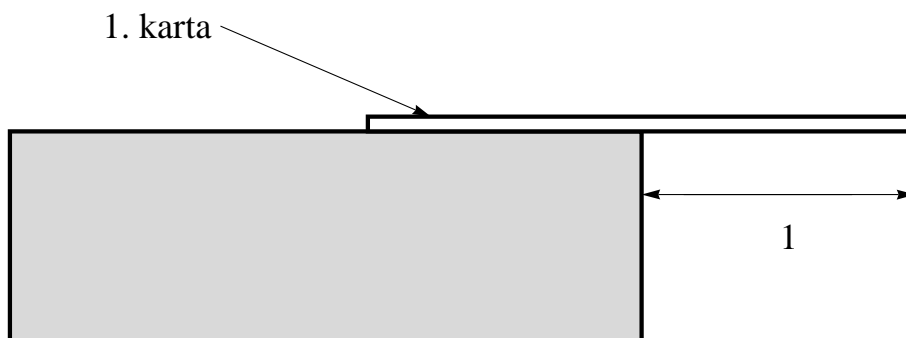
$$n = e^{10} = 22\,027 .$$

#### **Příklad 4.4.2.** *Úloha o kartách*

Následující úloha je z knihy [4]. Představme si následující karetní trik: mějme  $n$  karet a stůl. Naším cílem je vytvořit co nejdělsí karetní převis přes okraj stolu, aniž by tento převis spadl.

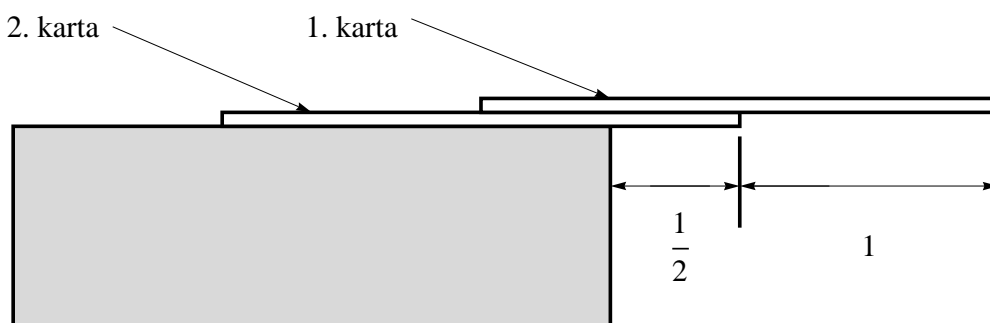
Pro usnadnění výpočtu můžeme předpokládat, že každá karta má délku 2 jednotky.

Zkusme si představit, jak bychom takový karetní převis vytvořili, kdybychom měli k dispozici pouze jednu kartu. Abychom zaručili, že karta ze stolu nespadne, je nutné, aby těžiště karty leželo právě nad okrajem stolu. Jelikož se těžiště nachází přesně ve středu karty, vytvoříme karetní přesah přes okraj stolu, který bude dlouhý polovinu délky karty, tedy jednu jednotku délky, stejně jako je tomu na následujícím obrázku.



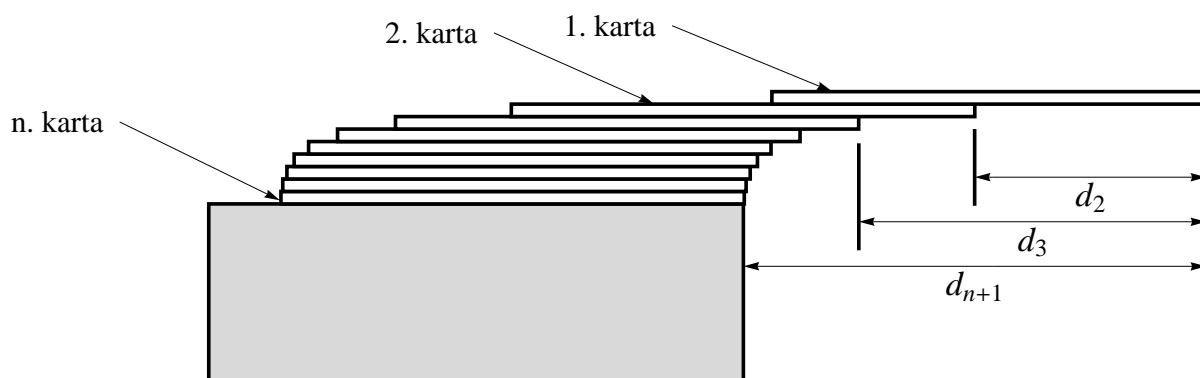
*karetní převis vytvořený pomocí jedné karty*

Vytvořit karetní převis pomocí dvou karet také není těžké. Z předchozí situace již víme, že 1. (nejvyšší) karta bude nad spodní kartou tvořit převis dlouhý polovinu délky karty. Musíme si tedy uvědomit, jaké vlastnosti platí pro 2. (spodní) kartu. Maximální převis pomocí dvou karet vytvoříme tak, že těžiště 1. karty bude ležet těsně nad okrajem 2. karty a zároveň společné těžiště obou karet bude ležet těsně nad okrajem stolu. Společné těžiště obou karet se nachází ve středu jejich společné části. Odtud plyne, že maximální délka převisu je  $1 + \frac{1}{2}$ .



*karetní převis vytvořený pomocí dvou karet*

Tímto způsobem bychom mohli postupovat dále. Obecně tedy posunujeme karty tak, že těžiště vrchních  $k$  karet leží těsně nad okrajem  $(k + 1)$ -ní karty.



*karetní převis vytvořený pomocí n karet*

Pokusíme se nyní tuto podmínku vyjádřit algebraicky. Označme jako  $d_k$  vzdálenost pravého okraje nejvyšší karty od pravého okraje  $k$ -té karty. Zřejmě platí:

$$d_1 = 0 .$$

Chceme nyní vypočítat vzdálenost  $d_{k+1}$  pravého okraje  $(k+1)$ -ní karty, což je totéž jako vzdálenost těžiště prvních  $k$  karet:

$$d_{k+1} = \frac{(d_1 + 1) + (d_2 + 1) + \cdots + (d_k + 1)}{k}, \quad \text{pro } 1 < k \leq n .$$

Tento vztah můžeme přepsat do tvaru:

$$kd_{k+1} = k + d_1 + \cdots + d_{k-1} + d_k, \quad k \geq 0 ,$$

napišeme-li  $k-1$  místo  $k$ , dostaneme

$$(k-1)d_k = k-1 + d_1 + \cdots + d_{k-1}, \quad k \geq 1 .$$

Nyní od sebe oba vztahy odečteme

$$kd_{k+1} - (k-1)d_k = 1 + d_k, \quad k \geq 1 ,$$

a po úpravě této rovnice získáme rovnost

$$d_{k+1} = d_k + \frac{1}{k} . \tag{4.8}$$

Odtud snadno vidíme, že

$$d_{k+1} = H_k .$$

Jestliže položíme  $k = n$ , dostaneme

$$d_{n+1} = H_n , \tag{4.9}$$

což je délka maximálního karetního převisu vytvořeného pomocí  $n$  karet.

Prohlédněme si pozorně obrázek, na kterém je znázorněn karetní převis vytvořený pomocí  $n$  karet. Všimněme si, že nepotřebujeme mnoho karet k tomu, abychom vytvořili karetní převis, jehož nejvyšší karta nebude už vůbec ležet nad plochou stolu. Pokusme se nyní společně odpovědět na následující otázku: „Kolik karet je potřeba k tomu, abychom vytvořili karetní převis delší než je délka karty, tedy 2 jednotky délky?“

$$\begin{aligned} H_1 &= \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = 1 \\ H_2 &= \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ H_3 &= \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \\ H_4 &= \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} \end{aligned}$$

Z našich výpočtů vyplývá, že první harmonické číslo, které je větší než 2 je  $H_4 = \frac{25}{12} \doteq 2,08$ , takže nám stačí 4 karty k tomu, aby 4. karta již vůbec neležela nad plochou stolu.

Teoreticky můžeme spočítat maximální hodnotu karetního převisu pro libovolný počet karet. Zkusme nyní spočítat maximální hodnotu karetního převisu např. pro 52 karet. Nejprve si spočítáme harmonické číslo  $H_{52}$ ,

$$H_{52} \doteq 4,54 .$$

Protože délka karty je 2 jednotky, délka převisu je 2,27 násobek délky karty.

V úloze o frontě jsme spočítali, že nejmenší  $n$  takové, aby částečný součet harmonické řady  $H_n$  byl větší než 10, je 12 367. Odtud tedy můžeme vyvodit, že potřebujeme alespoň 12 367 k tomu, abychom vytvořili karetní převis, jehož délka bude alespoň pětinasobkem délky karty.

Někoho by mohlo překvapit, že můžeme vytvořit karetní převis, který bude dosahovat délky až 1 metr, nebo ještě víc. Nezapomeňme ale, že jsme spočítali maximální délku karetního převisu, což v praxi znamená, že převis může dosáhnout teoreticky (matematicky, nikoli však fyzikálně-technicky) pro dostatečně velký počet karet libovolně velké hodnoty.

## 4.5 Stirlingův vzorec

Stirlingův vzorec nazývaný také Stirlingova formule je nejznámější aproximací faktoriálu pro vysoké hodnoty argumentu. V praxi se Stirlingův vzorec používá především k výpočtu limit, ve kterých se objevuje faktoriál, využití má ale také ve statistické fyzice nebo v teoretické informatice.

V této kapitole zdefinujeme Stirlingův vzorec, určíme Stirlingovu konstantu a porovnáme přesnost Stirlingova vzorce s hodnotou faktoriálu. Nakonec díky Eulerovu-Maclaurinovu sumačnímu vzorci dokážeme platnost Stirlingova výsledku.

Naším cílem bude spočítat součet

$$\sum_{i=2}^k f(i) = \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 + \dots + \ln k = \ln k! ,$$

Chceme tedy získat přibližný tvar pro faktoriál  $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$ .



**Věta 4.5.1** (Stirling 1730). *Nechť  $k$  je libovolné přirozené číslo nebo nula. Pak pro  $k!$  platí*

$$k! = \frac{\sqrt{2\pi k} k^k}{e^k} \cdot \exp \left( \frac{1}{12k} - \frac{1}{360k^3} + \frac{1}{1260k^5} - \frac{1}{1680k^7} + R_9 \right), \quad (4.10)$$

kde  $|R_9| \leq 0.00006605/k^8$ . Pro  $k \rightarrow \infty$  tedy dostáváme

$$k! \approx \frac{\sqrt{2\pi k} k^k}{e^k}. \quad (4.11)$$

Než začneme Stirlingův vzorec formálně dokazovat, budeme si nejprve demonstrovat jeho přesnost. Z následující tabulky je vidět, že numerické hodnoty rovnic (4.10) a (4.11) pro  $k = 10$  a  $k = 100$  jsou srovnatelné s  $k!$ . Přičemž **Stirling 0** získáme tak, že dosadíme konkrétní hodnotu  $k$  do rovnice (4.11), **Stirling 1, 2, 3** získáme z rovnice (4.10) tak, že uvažujeme exponenciálu s jedním, dvěma a třemi členy. Tyto výsledky jsou vygenerované programem Mathematica.

$k = 10$ :    **Stirling 0** = 3598695.61874103592162317593280  
               **Stirling 1** = 3628810.05142693352994116531675  
               **Stirling 2** = 3628799.97141301292538591223941  
               **Stirling 3** = 3628800.00021301281279077612862  
                $k!$  = 3628800.000000000000000000000000

$k = 100$ :    **Stirling 0** = 93248476.2526934324776475612718  $\times 10^{150}$   
               **Stirling 1** = 93326215.7031762340989619195146  $\times 10^{150}$   
               **Stirling 2** = 93326215.4439367463946383356624  $\times 10^{150}$   
               **Stirling 3** = 93326215.4439441532371338864918  $\times 10^{150}$   
                $k!$  = 93326215.4439441516816992388563  $\times 10^{150}$

*Důkaz.* Uvažujme funkci  $f(x) = \ln x$ . Pro tuto funkci platí

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x,$$

$$\frac{d^i}{dx^i}(\ln x) = (-1)^{i-1} \frac{(i-1)!}{x^i}.$$

Funkci  $f(x)$  dosadíme do Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce (3.1), přičemž jako

sumační meze zvolíme  $a = k + 1$  až  $b = n$

$$\begin{aligned} \sum_{i=k+1}^n \ln i &= \ln n! - \ln k! = \\ &= n \ln n - n - (k \ln k - k) + \frac{1}{2}(\ln n - \ln k) + \\ &+ \sum_{j=2}^m \frac{B_j}{j(j-1)} \left( \frac{1}{n^{j-1}} - \frac{1}{k^{j-1}} \right) + R_m, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\text{kde } R_m = \frac{1}{m} \int_k^n \frac{\tilde{B}_m(x)}{x^m} dx .$$

Všimněme si, že členy  $\ln k!$ ,  $k \ln k$ ,  $k$ ,  $\frac{1}{2} \ln k$  divergují pro  $k \rightarrow \infty$ . Označme

$$\sigma_k = \ln k! + k - \left( k + \frac{1}{2} \right) \ln k .$$

Dosadíme-li tuto rovnost zpět do rovnice (4.12), získáme

$$\sigma_n - \sigma_k = \sum_{j=2}^m \frac{B_j}{j(j-1)} \left( \frac{1}{n^{j-1}} - \frac{1}{k^{j-1}} \right) + R_m .$$

Pro dostatečně velké hodnoty  $n$ ,  $k$  je pravá strana rovnice libovolně malá, takže posloupnost  $\sigma_n$  je Cauchyovská a má limitu  $\sigma$ . Hodnota  $\sigma$  se nazývá tzv. Stirlingova konstanta. Předpokládejme tedy, že  $n \rightarrow \infty$  a získáme

$$\sigma - \sigma_k = \sum_{j=2}^m \frac{B_j}{j(j-1)} \cdot \left( -\frac{1}{k^{j-1}} \right) + \frac{1}{m} \int_k^\infty \frac{\tilde{B}_m(x)}{x^m} dx .$$

Odtud můžeme odvodit obecný předpis pro částečný součet logaritmů přirozených čísel

$$\ln k! = \left( k + \frac{1}{2} \right) \ln k - k + \sigma + \sum_{j=2}^m \frac{B_j}{j(j-1)} \cdot \frac{1}{k^{j-1}} - \frac{1}{m} \int_k^\infty \frac{\tilde{B}_m(x)}{x^m} dx .$$

V konkrétním případě, dosadíme-li např.  $m = 9$ , dostaneme

$$\ln k! = k \ln k - k + \frac{1}{2} \ln k + \sigma + \frac{1}{12k} - \frac{1}{360k^3} + \frac{1}{1260k^5} - \frac{1}{1680k^7} + R_9 ,$$

kde  $|R_9| \leq 0.00006605/k^8$ .

Použitím exponenciální funkce dostaneme

$$k! = D_k \frac{\sqrt{k} k^k}{e^k}, \quad \text{kde } D_k = e^\sigma \cdot \exp \left( \frac{1}{12k} - \frac{1}{360k^3} + \frac{1}{1260k^5} - \frac{1}{1680k^7} + R_9 \right). \quad (4.13)$$

Tento vztah potvrzuje platnost rovností (4.10) a tedy (4.11), stačí ještě dokázat, že limita  $D_k$  ( $D = e^\sigma$ ) je skutečně rovna  $\sqrt{2\pi}$ . K výpočtu této limity využijeme podmínku z rovnosti (4.13)

$$\begin{aligned} \frac{D_k \cdot D_k}{D_{2k}} &= \frac{k! \cdot k! \cdot (2k)^{2k} \cdot \sqrt{2}}{k^{2k} \cdot \sqrt{k} \cdot (2k)!} = \\ &= \frac{k! \cdot 2^k \cdot k! \cdot 2^k}{(2k)!} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}} = \\ &= \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k)(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k)}{(2k)!} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}} = \\ &= \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}}, \end{aligned}$$

Tato rovnice připomíná Wallisův vzorec.

Rovnici umocníme a upravíme

$$\left( \frac{D_k \cdot D_k}{D_{2k}} \right)^2 = \frac{(2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots 2k \cdot 2k)}{\underbrace{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdots (2k-1)(2k-1)(2k+1)}_{\rightarrow \frac{\pi}{2}}} \cdot \frac{2(2k+1)}{\underbrace{k}_{\rightarrow 4}},$$

vidíme, že pro  $k \rightarrow \infty$  se pravá strana rovnice blíží k  $2\pi$ , tedy  $D = e^\sigma = \sqrt{2\pi}$ . □

Dokázali jsme tedy, že Stirlingovy vzorce (4.10) a (4.11) platí. Rozvineme-li ve vzorci (4.10) exponenciálu do Taylorovy řady, dostaneme

$$\begin{aligned} k! = \sqrt{2\pi k} \left( \frac{k}{e} \right)^k &\left( 1 + \frac{1}{12k} + \frac{1}{288k^2} - \frac{139}{51\,840k^3} - \frac{571}{2\,488\,320k^4} + \frac{163\,879}{209\,018\,880k^5} + \right. \\ &\left. + \frac{5\,246\,819}{75\,246\,796\,800k^6} - \frac{534\,703\,531}{902\,961\,561\,600k^7} + \cdots \right), \end{aligned}$$

což je tvar, se kterým se často setkáme v literatuře.

Výsledek můžeme také získat s využitím softwaru Mathematica pomocí příkazu:

```
s = Normal[Series[Exp[x], x, 0, 7]]
Expand[s /. x -> (1/(12 k) - 1/(360 k^3) + 1/(1260 k^5) - 1/(1680 k^7))]
```

# Kapitola 5

## Závěr

Je škoda, že v omezeném rámci bakalářské práce nelze do detailu popsat historické matematické klima, které předcházelo objevu sumačního vzorce. Bylo by také zajímavé pomocí Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce spočítat například konstantu  $\pi$ , určit gamma funkci nebo zkoumat další důsledky, které ze sumačního vzorce plynou. Pokud budou čtenáři chtít, mohou nahlédnout ještě do knih [8] a [2], kde najdou další příklady, které lze pomocí Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce efektivně vyřešit.

Práce nabízí celkový přehled o vlastnostech sumačního vzorce, jak jeho historický objev, tak jeho moderní aplikace. Důraz je kladen především na hlavní myšlenky, na kterých je sumační vzorec založen a na praktické výpočty. V této souvislosti bych ráda na úplný závěr parafrázovala slova Matyáše Lercha, který říká, že čím je pravidlo obecnější, tím méně dává pro praxi (viz článek [12]).

# Literatura

- [1] Apostol T. M.: *An Elementary View of Euler's summation formula*, The American Mathematical Monthly, vol. 106 (1999), 409–418.
- [2] Borwein J., Bailey D., Girgensohn R.: *Experimentation in Mathematics*, A K Peters, (2004).
- [3] Grabiner J.: *Was Newton's Calculus a Dead End? The Continental Influence of MacLaurin's Treatise of Fluxions*, The American Mathematical Monthly, vol. 104 (1997), 393–410.
- [4] Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O.: *Concrete Mathematics*, Addison Wesley, (1990).
- [5] Hairer E., Wanner G.: *Analysis by Its History*, Springer, (2008).
- [6] Jarník V.: *Integrální počet II*, Academia, Praha, (1984).
- [7] Kline M.: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, (1990).
- [8] Knopp K.: *Theory and Application of Infinite Series*, Hafner, New York, (1951).
- [9] Knuth D. E.: *The Art of Computer Programming Vol. 1 (Fundamental Algorithms)*, Addison Wesley Longman, (1997).
- [10] Mills S.: *The Independent Derivations by Leonhard Euler and Colin MacLaurin of the Euler-MacLaurin Summation Formula*, Archive for History of Exact Sciences, vol. 33 (1985), 1–13.
- [11] Pengelley D. J.: *Dances between continuous and discrete: Euler's summation formula*, In Robert Bradley and Ed Sandifer (Eds), Proceedings, Euler 2K+2 Conference (Rumford, Maine, 2002), Euler Society, (2003).
- [12] Porubský Š.: *Matyáš Lerch's book „Bernoulli's polynoms“*, Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum, vol. 7 (2003), 119–141.
- [13] Smith D. E.: *A Source Book in Mathematics*, Dover Publications, (1984).

- [14] Veselý J.: *Základy matematické analýzy, 2. díl*, Matfyzpress, Praha, (2009).
- [15] Wagon S.: *Mathematica in Action (2nd edition)*, Springer, (1999).