Univerzita Karlova
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Matúš Proner

Kombinatorické trojúhelníky

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání

Praha 2018

Poděkování
Rád by som poďakoval vedúcemu bakalárskej práce doc. RNDr. Antonínovi Slavíkovi, Ph.D. za cenné rady a trpezlivosť pri vypracování bakalárskej práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Kombinatorické trojúhelníky

Autor: Matúš Proner

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: V kombinatorice se vyskytuje celá řada čísel, která lze přehledně uspořádat do trojúhelníkových schémat. Patří mezi ně i kombinační čísla, kombinační čísla druhého druhu a Lahova čísla. V práci jsou tato užitečná čísla podrobněji představena a jsou odvozeny identity popisujíci vzájemné vztahy mezi nimi. Některé zajímavé vlastnosti jsou znázorněny i v příslušných trojúhelníkových schématech.

Klíčová slova: kombinační čísla, kombinační čísla druhého druhu, Lahova čísla kombinatorický důkaz

Title: Combinatorial triangles

Author: Matúš Proner

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: In combinatorics, there are several types of numbers which can be neatly arranged into triangular schemes. Important examples are binomial coefficients of the first kind, binomial coefficients of the second kind and the Lah numbers. The aim of the thesis is to introduce these numbers and derive their basic properties. Some interesting features are shown in relevant triangular schemes.

Keywords: binomial coefficients of the first kind, binomial coefficients of the second kind, Lah numbers, combinatorial proof

Názov práce: Kombinatorické trojuholníky

Autor: Matúš Proner

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: V kombinatorike sa vyskytuje celá rada čísel, ktoré ide prehľadne usporiadať do trojuholníkovýh schémat. Patria medzi ne i kombinačné čísla, kombinačné čísla druhého druhu a Lahove čísla. V práci sú tieto užitočné čísla podrobnejšie predstavené a sú odvodené identity popisujúce vzájomne vzťahy medzi nimi. Niektoré zaujímavé vlastnosti sú znázornené i v príslušných trojuholníkových schématách.

Kľúčové slová: kombinačné číslo prvého druhu, kombinačné číslo druhého druhu, Lahove čísla, kombinatorický dôkaz

Obsah

Úvod

Témou práce sú tri skupiny čísel objavujúcich sa (mimo iného) v kombinatorike. Sú to kombinačné čísla, kombinačné čísla druhého druhu a Lahove čísla. Širšej spoločnosti sú známe iba kombinačné čísla, keďže sú súčasťou výuky na strednej škole. Napriek tomu je práca písana zväčša natoľko jednoduchým a zrozumiteľným štýlom, že bežný čitateľ text zvládne aj bez predchádzajúcich znalostí.

Každá téma je vybudována od základnej definície postupne ku zložitejším identitám, prípadne ku aplikácii. V prípade komplikovanejšej vety, a ak je to možné, je veta znázornená v trojuholníkovom schématu.

Ku zneniu vety sa skoro vždy dopracujeme otázkou, na ktorú, ako ukážeme, sa dá odpovedať rôznymi spôsobmi. Budeme sa pýtať na rôzne situácie v bežnom živote každého nerda[1] V prvej kapitole, pri rozoberaní kombinačných čísel sa budeme pýtať na nerdov a kandidátov, v druhej kapitole na nerdov a karamelky a v tretej kapitole to budú nerdi a kolóny. Výber takýchto slov slúži ku lepšiemu zapamätaniu si jednotlivých vzťahov pomocou fonetickej podobnosti, rovnako ako ku odľahčeniu čítania. Otázka a na ňu rôzne odpovede ktoré sú obe pravdivé a dospejú k výsledku rôznymi cestami a dajú výsledok v rôznych podobách, považujeme za kombinatorický dôkaz, väčšinou sa ale dôkaz prevedie aj algebraicky.

Text je určený všetkým, ktorí sa snažia niečo dozvedieť o týchto skupinách čísel, ale nevedia kde začať. Rovnako môže slúžiť študentom, ktorým kombinatorika robí problém, pretože spôsob ktorým prichádzame na identity je často dobrý spôsob, ako riešiť niektoré zložitejšie kombinatorické úlohy.

[1] Nerd je pojem prevzatý z angličiny. Je to osoba vnímana ako nadpriemerne inteligentná, väčšinou s nedostatkom sociálných dovedností. Značí človeka natoľko zabratého do vzdelania alebo vedy, že zanedbáva dokonca ignoruje okolitý svet.

Kapitola 1

Kombinačné čísla

Definice 1.1: Kombinačné číslo $\binom{n}{k}$, $n,k \in \mathbb{N}_0$ definujeme ako počet k-prvkových podmnožín n-prvkovej množiny. V prípade že $k > n$, počet takýchto podmnožín je 0.
Otázka 1.1: Koľkými spôsobmi môžeme vybrať k kandidátov z n nerdov?
Odpoveď 1: Podľa definície $\binom{n}{k}$.
Odpoveď 2: Vyberme z n nerdov jedného, ktorý bude jeden z našich k kandidátov, nožností takéhoto výberu je n. Potom do k-prvkovej skupiny kandidátov vyberme ďalšieho zo zvyšných $n-1$ nerdov, možností výberu je teda $n-1$. Potom vyberáme ďalších, až kým nemáme k vybraných. Celkový počet možností takýchto výberov je $n(n-1)(n-2)\dots(n-k)$. Teraz ale treba zohľadniť, že nezáleží na poradí nerdov v samotnej vybranej k-prvkovej množine, preto vydelíme počet možností $k!$.

Veta 1.1 ([2, str. 63]): $\forall n,k \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Otázka 1.2: Koľkými spôsobmi sa dá vybrať k kandidátov na prezidenta z n nerdov?
Odpoveď 1: Podľa definície, $\binom{n}{k}$ spôsobmi.
Odpoveď 2: Kandidátov určíme tak, že vyberieme všetkých čo nebudú kandidovať, čiže $n-k$ ľudí z n nerdov, a počet takých možností je z definície $\binom{n}{n-k}$.

Veta 1.2 ([2, str. 64]): $\forall n,k \in \mathbb{N}_0 \quad n \geq k$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Algebraický dôkaz:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(k+1)}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Tabulka 1.1: Pascalov trojuholník

Otázka 1.3: Opäť rovnaká otázka, koľkými spôsobmi sa dá vybrať k kandidátov n nerdov?
Odpoveď 1: Podľa definície $\binom{n}{k}$.
Odpoveď 2: Podmienku si dáme na jedného konkrétneho nerda, podľa toho či bude alebo nebude kandidát. Ak bude, tak nám treba dourčiť $k-1$ kandidátov z $n-1$ prvkov, podľa definície sa tak dá spraviť $\binom{n-1}{k-1}$ spôsobmi. Ak vybraný nerd kandidovať nebude, tak nám treba vybrať k kandidátov z $n-1$ nerdov, čo zase ide $\binom{n-1}{k}$ spôsobmi.

Veta 1.3 ([2, str. 64]): $\forall n,k \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Algebraický dôkaz:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{k!} + \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{(k-1)!}$$

Úpravami na spoločného menovateľa dostávame

$$\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k) + (n-1)(n-2)\dots(n-k+1)k}{k!} =$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

Ak vezmeme predchádzajúcu identitu a uvedomíme si, že $\binom{n}{k} = 0$ pre $k > n$ a $\binom{n}{0} = 1$, vieme vytvoriť obrazec známy ako Pascalov trojuholník bez použitia vety 1.1 (Tabulka 1.1).

Otázka 1.4: Koľko existuje možných skupín kandidátov, ktoré môžeme vytvoriť z n nerdov?
Odpoveď 1: Keďže množina kandidátov môže nadobudnúť každej veľkosti medzi 0 až n, spočítame to cez tieto veľkosti a podľa definície dostaneme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
Odpoveď 2: Budeme rozhodovať nerd po nerdovi, či v danej skupine kandidátov bude alebo nie. Každý nerd má dve možnosti rozhodnutia, teda zohľadnením jeho

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	súčet
0	1										=1
1	1	+1									=2
2	1	+2	+1								=4
3	1	+3	+3	+1							=8
4	1	+4	+6	+4	+1						=16
5	1	+5	+10	+10	+5	+1					=32
6	1	+6	+15	+20	+15	+6	+1				=64
7	1	+7	+21	+35	+35	+21	+7	+1			=128
8	1	+8	+28	+56	+70	+56	+28	+8	+1		=256
9	1	+9	+36	+84	+126	+126	+84	+36	+9	+1	=512

Tabulka 1.2: Súčet kombinačných čísel

voľby sa nám zdvojnásobí počet možných skupín kandidátov. Z n nerdov sa teda dá vytvoriť 2^n rôznych skupín kandidátov.

Veta 1.4 ([2, str. 64]): $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Algebraický dôkaz prevedieme indukciou podľa n, pre $n = 0$ dostávame $\binom{0}{0} = 2^0$, čiže indukčnú podmienku by sme mali. Nech rovnosť platí pre n, teda nech platí predpoklad $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Ukážeme že rovnosť platí pre $n + 1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1}$$

Jednotku prepíšeme ako $\binom{n}{0}$, prvok $\binom{n}{n+1}$ je rovný nule, sumy teda môžeme prepísať na vhodný tvar a dostať:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} = 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overset{\text{I.P.}}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Otázka 1.5: Koľkými spôsobmi sa dá vybrať skupina kandidátov z n nerdov, tak aby počet kandidátov bol párny?
Odpoveď 1: Počet spôsobov, ako vybrať $2k$-ticu kandidátov je $\binom{n}{2k}$ a ak chceme všetky možné párne čísla, výsledkom bude suma $\sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k}$
Odpoveď 2: Odložíme si jedného nerda bokom, vyberieme ľubovoľnú k-ticu kandidátov zo zvyšných $n-1$ nerdov, a ak bude k nepárne, pridáme do k-tice našeho bokom odloženého nerda. Počet všetkých skupín s párnym počtom kandidátov z n nerdov bude rovný počtu všetkých možných skupín kandidátov z $n - 1$ nerdov, teda podľa definície $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$, čo sa rovná 2^{n-1}.

Veta 1.5 ([2, str. 65]): $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	součet
0	1										=1
1	1	-1									=0
2	1	-2	$+1$								=0
3	1	-3	$+3$	-1							=0
4	1	-4	$+6$	-4	$+1$						=0
5	1	-5	$+10$	-10	$+5$	-1					=0
6	1	-6	$+15$	-20	$+15$	-6	$+1$				=0
7	1	-7	$+21$	-35	$+35$	-21	$+7$	-1			=0
8	1	-8	$+28$	-56	$+70$	-56	$+28$	-8	$+1$		=0
9	1	-9	$+36$	-84	$+126$	-126	$+84$	-36	$+9$	-1	=0

Tabulka 1.3: Znázornenie vety 1.5

Posledná veta nám hovorí (s výnimkou pre $n = 0$), že presne polovica všetkých podmnožín (na konečnej množine) má párny počet prvkov. Čo ale znamená, že podmnožiny s nepárnym počtom prvkov budú tiež tvoriť polovicu všetkých podmnožín.
$\forall n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Na chvíľu odbočím, lebo táto identita je krátky a pekný dôkaz princípu inkluze a exkluze (PIE). O čom pojednáva PIE ([4, str. 101]):
Majme súbor množín $A_1, \ldots, A_n$. Potom veľkosť zjednotenia všetkých množín dostaneme ako

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i=1}^{n} A_i \right|$$

Jeden z možných postupov určovania veľkosti celého zjednotenia je, že vezmeme nejakú skupinu množín z A_1 až A_n, pozrieme sa aká je veľká (koľko množín sme vybrali), a podľa toho buď pričítame alebo odčítame prvky prieniku týchto množín. My ukážeme, že takto každý prvok z každej množiny pričítame práve raz. Nech x patrí k množinám z $A_1, \ldots, A_n$. Teda x sa nachádza práve v k množinách, práve v $\binom{k}{2}$ rôznych prienikoch dvoch množín, práve v $\binom{k}{3}$ rôznych prienikoch troch množín atd. x teda pripočítame týmto spôsobom presne

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \ldots + (-1)^{k+1} \binom{k}{k}$$

krát. Keby na začiatku bolo ešte $-\binom{k}{0}$ celé by sa to rovnalo nule, ale keďže tam

$-\binom{k}{0} = -1$ nie je, je x pričítany práve 1 krát.

Otázka 1.6 ([2, str. 65]): Koľkými sposôbmi môžeme vybrať k kandidátov z n nerdov, ak ešte jedného z kandidátov zvolíme za favorita skupiny?
Odpoveď 1: Najprv vyberieme k-ticu kandidátov, potom zvolíme favorita. Možnosti k-tic je podľa definície $\binom{n}{k}$ a pre každú k-ticu je k možností, ktorého nerda z nich zvolíme za favorita. Spolu je teda $k\binom{n}{k}$ možností výberu.
Odpoveď 2: Pôjdeme v opačnom poradí, najprv zvolíme favorita, takých možností je n, potom zvolíme $k-1$ zvyšných kandidátov, čize vyberáme $k-1$-ticu z $n-1$ nerdov. Celkový počet možností výberu kandidátov s favoritom je teda $n\binom{n-1}{k-1}$.

Veta 1.6 ([2, str. 65]): $\forall n,k \in \mathbb{N}$

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Algebraický dôkaz:

$$n\binom{n-1}{k-1} = n\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{(k-1)!} = k\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = k\binom{n}{k}$$

Otázka 1.7: Koľkými spôsobmi vieme z triedy n nerdov vybrať k kandidátov a k nim jedného nerda pomocníka (náhradník sám nie je kandidát)?
Odpoveď 1: Najprv vyberieme množinu k kandidátov z n nerdov, to sa dá spraviť $\binom{n}{k}$ spôsobmi, potom vyberieme zo zvyšku nerda pomocníka, to sa dá $n-k$ spôsobmi.
Odpoveď 2: Najprv vyberieme nerda pomocníka z n nerdov, čiže tak môžeme spraviť n spôsobmi, tak vyberieme z $n-1$ zvyšných nerdov k kandidátov.

Veta 1.7: $\forall n,k \in \mathbb{N}$

$$(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$$

Algebraický dôkaz:

$$(n-k)\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k-1)!} = n\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{(k-1)!}$$

Otázka 1.8: Koľkými spôsobmi vieme z triedy n nerdov vybrať k kandidátov, a z tých kandidátov ešte vybrať f favoritov?
Odpoveď 1: Z n nerdov vyberame k-ticu, podľa definície $\binom{n}{k}$ možnými spôsobmi. Potom z tejto k-tice vyberieme f-ticu favoritov, takých možností je $\binom{k}{f}$. Spolu je teda $\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{f}$ možností ako vybrať kandidátov a favoritov.
Odpoveď 2: Ideme v opačnom poradí, najprv vyberieme f kandidátov z n nerdov, ktorý budú priamo favoritmi. Tak vyberieme zo zvyšku kandidátov, ktorí favoritmi nebudú. V prvom kroku máme na výber $\binom{n}{f}$ možností, v druhom $\binom{n-f}{k-f}$. Spolu je teda $\binom{n}{f} \cdot \binom{n-f}{k-f}$ možností, ako dostať k kandidátov z n nerdov, medzi ktorými bude f favoritov.

Veta 1.8 ([2, str. 67]) : $\forall n,k,f \in \mathbb{N}_0 \quad k \geq f \quad n \geq f$

$$\binom{n}{k}\binom{k}{f} = \binom{n}{f}\binom{n-f}{k-f}$$

Algebraický dôkaz: pre $k = f$ je dôkaz triviálny, ukážeme pre $k > f$

$$\binom{n}{k}\binom{k}{f} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{k(k-1)\dots(k-f+1)}{f!} =$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-f+1)}{f!}(n-f)\dots(n-k+1)\frac{k(k-1)\dots(k-f+1)}{k!} =$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-f+1)}{f!}\frac{(n-f)(n-f+1)\dots(n-k+1)}{(k-f)!} = \binom{n}{f}\binom{n-f}{k-f}$$

Otázka 1.9: Koľkými spôsobmi vieme z n nerdov vytvoriť skupinu kandidátov ľubovolnej veľkosti, kde jeden z kandidátov bude vybraný za favorita?
Odpoveď 1: Pre konkrétny počet kandidátov k je počet možnosti ako vytvoriť takúto skupinu $k\binom{n}{k}$. Všetkých možností pre všetky možné počty kandidátov je potom počet možností suma cez všetky možné k, tj. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
Odpoveď 2: Najprv vyberieme favorita, v skupine n nerdov je n možností takejto voľby. Pre každú takúto voľbu potom ostáva vybrať množinu kandidátov nefavoritov z $n-1$ nerdov. Z vety 1.3 potom existuje 2^{n-1} rôznych množín kandidátov, ktoré pridáme ku vybranému favoritovi.

Veta 1.9 ([2, str. 66]): $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

Algebraický dôkaz:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \overset{\text{id.1.5}}{=} \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} \overset{\text{id.1.3}}{=} n2^{n-1}$$

Otázka 1.10: Koľkými spôsobmi môž skončiť pokus, kde každému z n nerdov dáme vyriešiť buď jeden z x rôznych matematických problémov alebo jeden z y rôznych fyzikálnych problémov (každý nerd si určite vyberie práve jeden problém, jeden problém môže riešiť naraz viacej nerdov)?
Odpoveď 1: Je n nerdov a každý má $x+y$ možností výberu, celkový počet rôznych kombinácií rozhodnutí je $(x+y)^n$
Odpoveď 2: Dáme si podmienku, že pre matematický problém sa rozhodne k nerdov. Koľko možností kombinácií rozhodnutí pre problémy budeme mať? Počet možností, ako vybrať k z n je $\binom{n}{k}$. Každý z tých, čo si vyberú matematický problém, má x možností. Spolu teda x^k roznych kombinácií pre matematiku. Podobne pre fyzikálne problémy, je y^{n-k} rôznych kombinácií, aké si nerdi vyberú, s tým že výberom nerdov fyzikov sa netrápime, vybrali sme ich rovno pri výbere

matematikov. Dohromady pre jedno konkrétne k je $\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$ rôznych kombinácii, a pre všetky rôzne k spolu to je $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$.

Veta 1.10 (Binomická veta) ([2, str. 66]): $\forall n,x,y \in \mathbb{N}_0$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ny^{n-k}$$

Dôkaz: Predstavme si nasledujúci zápis, koľko krát dostaneme po roznásobení člen x^ky^{n-k}, alebo inak, koľkými rôznymi spôsobmi pri násobení dostaneme x^ky^{n-k}? V n zátvorkách vyberieme x, vo zvyšných nám ostane y.

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)(x+y)...(x+y)}_{n \text{ krát}}$$

Takže člen x^ny^{n-k} dostaneme rovnako veľa krát, ako je počet sbôsobov ako vybrať k zátvoriek z n, teda $\binom{n}{k}$.

Binomická veta platí obecne pre $x,y \in \mathbb{R}$. Stačí si uvedomiť, že na oboch stranách máme polynóm dvoch premenných, a rovnosť platí pre každé prirodzené x a y, čiže pre nekonečne veľa hodnôt x a y. To znamená, že sa polynómy rovnajú aj vo všetkých zvyšných x a y reálnych.

Binomická veta ponúka pekný algebraický dôkaz viet 1.4 a 1.5. Položme $x = 1, y = 1$ a rovno dostaneme požadovaný výsledok vety 1.4. Podobne, ak položíme $x = 1, y = -1$ dostaneme $0^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$.

Otázka 1.11: Máme skupinu nerdov zloženú z n nerdov fyzikov a m nerdov matematikov. Koľkými spôsobmi vieme vytvoriť skupinu k kandidátov z týchto nerdov?
Odpoveď 1: Podľa definície, $\binom{n+m}{k}$
Odpoveď 2: Určíme si podmienku, koľko z kandidátov bude matematikov a koľko fyzikov. Nech $0 \leq j \leq n$ je počet matematikov medzi kandidátmi, tých vieme vybrať $\binom{n}{j}$ spôsobmi. K tomu dovyberieme $k-j$ fyzikov $\binom{m}{k-j}$ spôsobmi, a dostaneme počet rôznych možností výberu pre konkrétne j. Potom pre všetky možné j, teda pre všetky možné počty matematikov v skupine kandidátov dostaneme $\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$.

Veta 1.11 (Vandermondeova identita) ([2, str. 66]): $\forall n,m,k \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$$

Algebraický dôkaz: Použijeme binomickú vetu. Platí, že

$$(x+1)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}x^k$$

$$(x+1)^{m+n} = (x+1)^m(x+1)^n = \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}x^i\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Tabulka 1.4: Znázornenie Vandermondeovej identity pre $n = 5$, $m = 4$ a $k = 2$

$$= \left(\binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots\right) \cdot \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots\right)$$

$$= \binom{m}{0}\binom{n}{0}x^0 + \left(\binom{m}{0}\binom{n}{1} + \binom{m}{1}\binom{n}{0}\right)x^1 +$$

$$+\left(\binom{m}{0}\binom{n}{2} + \binom{m}{1}\binom{n}{1} + \binom{m}{2}\binom{n}{0}\right)x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{m+n}\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}x^k$$

Porovnáme koeficienty pred x^k a dostávame rovnosť

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}.$$

Ak teraz zvolíme za k priamo n dostaneme pekný prípad predchádzajúcej identity:

$$\binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m} = \sum_{j\geq 0}\binom{m}{j}\binom{n}{j}$$

Podobne pekný špeciálny prípad, ak m a n sa rovnajú:

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$$

Otázka 1.12: Koľkými spôsobmi sa dá z $n+1$ očíslovaných nerdov vybrať $k+1$ kandidátov?
Odpoveď 1: Podľa definície $\binom{n+1}{k+1}$ spôsobmi.
Odpoveď 2: Určíme podmienku, a to maximálne číslo m nerda medzi kandidátmi očíslovanými číslami 1 až $n+1$. Keďže kandidátov má byť $k+1$, toto číslo môže byť zvolené medzi $k+1$ a $n+1$. Potom pre každé takéto m zvolíme zvyšných kandidátov s číslami ostro nižšími ako m. Takých možností máme $\binom{m-1}{k}$ pre každé m. Spolu pre všetky rôzne m potom máme $\sum_{m=k+1}^{n+1}\binom{m-1}{k} = \sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k}$ možností.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	+4	1					
5	1	5	10	+10	5	1				
6	1	6	15	+20	15	6	1			
7	1	7	21	+35	35	21	7	1		
8	1	8	28	+56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	=126	126	84	36	9	1

Tabulka 1.5: Znázornenie vety 1.12

Veta 1.12 ([2, str. 67]): $\forall n,k \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}$$

Algebraický dôkaz:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1} =$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k+1} = \cdots =$$

$$= \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{k}{k} + \binom{k}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} + 0$$

K rovnakému záveru by sme prišli, ak by sme si ako podmienku nekládli maximálne číslo v skupine kandidátov ale minimálne.
Využitím symetrickosti kombinačných čísel dostaneme podobnú vetu. Zameňme vo vete 1.12 $\binom{n+1}{k+1}$ s $\binom{n+1}{n-k}$ a $\binom{m}{k}$ s $\binom{m}{m-k}$.

Veta 1.13: $\forall n,k \in \mathbb{N}_0 \quad n \geq k$

$$\binom{n+1}{n-k} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{m-k}$$

Priamo z toho ako sme ku vete prišli plynie aj dôkaz. Zíde sa ale vidieť v tabuľke, ako symetrickosť Pascalovho trojuholníka poskytuje ku mnohým identitám „symetrickú duálnu“ vetu.

Na záver prvej kapitoly zobecníme vetu 1.12, už bez algebraického dôkazu. Vezmime si nie maximálne či minimálne číslo v skupine, ale vezmime obecne niektoré z nich. Majme vybrať k-prvkovú množinu kandidátov z n nerdov, ktorí sú očíslovaný. Postupujme tak, že vyberieme najprv napríklad piate najväčšie

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Tabulka 1.6: Znázornenie viet 1.12 a 1.13

číslo p, ktoré sa vyskytne v množine kandidátov, potom pred p budú štyria kandidáti s menším číslom, za p bude $k-4$ kandidátov s väčšími číslami. Obecne, keď vyberieme číslo l ktoré je r-te v poradí kandidátov, musíme vybrať $(r-1)$-ticu z $l-1$ prvkov a $(k-r)$-ticu z $n-l$ prvkov. Na začiatku teda zvolíme r, a sčítame to cez všetky možné l, s tým že l je aspoň r a maximálne $n+r-k$.

Veta 1.14 ([2, str. 69]):$\forall n,k,r \in \mathbb{N} \quad k \geq r \geq 1$

$$\sum_{l=r}^{n+r-k} \binom{l-1}{r-1}\binom{n-l}{k-r} = \binom{n}{k}$$

V prípade voľby $r = 1$ dostávame priamo vetu 1.12.

Kapitola 2

Kombinačné čísla druhého druhu

Definice 2.1: Kombinačné čísla druhého druhu $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ vyjadrujú počet možností, ako vybrať z n prvkov neusporiadanú k-ticu, ak sa každý prvok môže v k-tici vyskytnúť neobmedzene krát. V takýchto prípadoch hovoríme o kombináciach s opakovaním.

Otázka, ktorú budeme často klásť bude počet možností, ako môže prebehnúť rozdeľovanie k karameliek n hladným nerdom. Jedna z odpovedí bude kombinačné číslo druhého druhu $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$. Keď sa totižto rozhodujeme či danému nerdovi dáme karamelku, rozhodujeme sa vlastne či ho vyberieme do množiny majiteľov karamelky. Do tej množiny ho ale môžeme vybrať viac krát, za každú karamelku ktorú vlastní. Rovnako, nech x_i značí počet karameliek pre i-tého nerda, potom $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ vyjadruje počet možných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k.$$

Otázka 2.1: Koľkými spôsobmi vieme rozdeliť k karameliek n nerdom?
Odpoveď 1: Podľa definície kombinačného čísla druhého druhu to je $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$
Odpoveď 2: Pozmeníme otázku na podobnú. Máme k karameliek (budeme značiť κ) poukladaných v rade, a oddelíme ich od seba $n-1$ oddeľovačmi (budeme značiť $|$). Vznikne tak postupnosť dĺžky $n+k-1$ tvorená k karamelkami a $n-1$ oddeľovačmi. Nová otázka teda znie: koľkými spôsobmi vieme vytvoriť takúto postupnosť? Kedže sa jedná o identické oddeľovače $|$ i karamelky κ, vyberáme $n-1$-ticu z $n+k-1$ prvkov, kam môžeme položiť oddeľovač. Na zvyšné miesta idú automaticky karamelky. Rovnako naopak sme mohli najprv vybrať k-ticu z $n+k-1$ pozícií na ktoré by sme položili karamelky, a oddeľovače by išli na zvyšné miesta.

Veta 2.1([2, str. 71]) : $\forall n,k \in \mathbb{N}_0, n \geq 1$

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

Príklad: majme 4 nerdov a 6 karameliek ktoré im chceme rozdeliť, potom jedna z možností ako to spraviť je poukladať karamelky do rady a náhodne medzi ne vtlačiť 3 oddeľovače:

$$\begin{array}{ccccccccc} \kappa & | & \kappa & \kappa & | & | & \kappa & \kappa & \kappa \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

V tomto konkrétnom prípade prvý nerd dostane jednu, druhý dve, tretí žiadnu a štvrtý tri karamelky. Dá sa očakávať, že vďaka vzťahu medzi kombinačnými číslami prvého a druhého druhu budú identity medzi kombinačnými číslami druhého druhu pripomínať mnoho predchádzajúcich identít. Čo ak sa chceme zachovať trochu férovo a postaráme sa aby žiaden nerd neostal bez karamelky?

Otázka 2.2: Koľkými spôsobmi sa dá rozdeliť k karameliek n hladným nerdom, ak chceme, aby každý dostal aspoň jednu karamelku?
Odpoveď 1: Najprv rozdelíme n karameliek, každému nerdovi po jednej. Potom rozdelíme zvyšných $k-n$ karameliek bez podmienok, čo sa dá $\left(\!\binom{n}{k-n}\!\right)$ spôsobmi. Je jasné, že ak $k < n$, tak žiadnu takú možnosť nemáme.
Odpoveď 2: Znova ako v otázke 2.1, poukladáme karamelky za sebou a podávame medzi ne oddeľovače. Tento krát ale musíme dodržať dve podmienky, oddeľovač nesmie byť na začiatku ani na konci a dva oddeľovače nesmú byť vedľa seba. Čiže vyberáme, medzi ktorými dvoma karamelkami bude oddeľovač a medzi ktorými nie. Karameliek máme k, čiže máme $k-1$ možných pozícií pre oddeľovač, ktorých je $n-1$. Vyberáme teda $n-1$-ticu z $k-1$ prvkov. Počet možností, ako toto dosiahnuť je $\binom{k-1}{n-1}$.

Veta 2.2 ([2, str. 72]): $\forall n,k \in \mathbb{N}, \quad k \geq n$

$$\left(\!\!\binom{n}{k-n}\!\!\right) = \binom{k-1}{n-1} = \binom{k-1}{k-n}$$

Samozrejme sme mohli k tomuto výsledku prísť aj jednoduchým dosadením a použitím vety 2.1.
Ukázali sme, že ak chceme zostaviť postupnosť z k karameliek a $n-1$ oddeľovačov, môžeme to spraviť $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ rôznymi spôsobmi. Čo ak vymeníme počet karameliek a počet oddeľovačov? Ak v každej z týchto možností vymeníme všetky karamelky za oddeľovače a naopak? Každej postupnosti $n-1$ oddeľovačov a k karameliek tak pripadne práve jedna jediná postupnosť $n-1$ karameliek a k oddeľovačov. Celkový počet možností sa teda nemení a dostávame tak nasledujúcu vetu.

Veta 2.3 ([2, str. 72]): $\forall n,k \in \mathbb{N}_0, n \geq 1$

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{k+1}{n-1}\!\!\right)$$

Algebraický dôkaz:

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{(k+1)+(n-1)-1}{n-1} = \left(\!\!\binom{k+1}{n-1}\!\!\right)$$

Otáka 2.4: Koľkými spôsobmi vieme rozdeliť k karameliek n nerdom?
Odpoveď 1: Podľa definície, $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.
Odpoveď 2: Určíme si podmienku, či jednému zvolenému nerdovi dáme alebo nedáme aspoň jednu karamelku. Ak dáme, tak nám ostáva $k-1$ karameliek ktoré

k \ n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45
3	0	1	4	10	20	35	54	82	118	163
4	0	1	5	15	35	70	124	206	324	487
5	0	1	6	21	54	124	248	454	778	1265
6	0	1	7	28	82	206	454	908	1686	2951
7	0	1	8	36	118	324	778	1686	3372	6323
8	0	1	9	45	163	487	1265	2951	6323	12646

Tabulka 2.1: Kombinačné čísla druhého druhu

musíme rozdeliť n nerdom, čo môžeme spraviť $\left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right)$ spôsobmi. Ak sa rozhodneme že zvolený nerd karamelku nedostane, ostáva nám rozdeliť k karameliek $n-1$ nerdom, čo sa dá spraviť $\left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right)$ spôsobmi. Dohromady dostávame:

Veta 2.4 ([2, str. 73]) : $\forall n,k \in \mathbb{N}$

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right)$$

Algebraický dôkaz:

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k} \overset{\text{I.1.2}}{=} \binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-2}{k} \overset{\text{def}}{=} \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right)$$

Vďaka tejto vete (ktorú budeme hojne používať pri nasledujúcich dôkazoch) máme rekurentné vyjadrenie kombinačných čísel druhého druhu. Ak is uvedomíme, že pre $n \geq 1$ platí $\left(\!\!\binom{n}{0}\!\!\right) = 1$ a pridáme si, že pre $k \geq 1$ platí $\left(\!\!\binom{0}{k}\!\!\right) = 0$, vieme vytvoriť kombinatorický trojuholník bez vypočítavania jednotlivých hodnôt. Číslo $\left(\!\!\binom{0}{0}\!\!\right)$ nieje definované, dodefinujeme ho teda ako $\left(\!\!\binom{0}{0}\!\!\right) = 0$. Trojuholníkovo vyzerajúca tabuľka má podobne ako Pascalov trojuholník osu symetrie (ak odignorujeme prvý stĺpec). Táto osa ale bude diagonálou tabuľky. Túto symetriu popisuje veta 2.3.

V nasledujúcej otázke bude užitočné si uvedomiť jednu vec. Všetky možnosti ako rozdeliť karamelky nerdom vieme prirovnať ku vsúvaniu oddeľovačov do rady karameliek, ale aj ku vyberaniu neklesajúcej postupnosti čísel. Majme k karameliek, tak postupnosť $1 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k \leq n$ nám povie, ako sú tieto karamelky rozdelené medzi n nerdami, totiž číslo a_i značí, u ktorého nerda sa i-tá karamelka nachádza.

Otázka 2.5: Koľkými spôsobmi vieme rozdeliť k karameliek n nerdom, pričom jedna z karameliek ma výrobnu vadu, a navyše záleží na poradí vadnej karamelky medzi karamelkami priradenými nešťastnému nerdovi?
Odpoveď 1: Rozdelíme karamelky normálne, takých spôsobov je $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$, tak vyberieme jednu karamelku, ktorá bude mať vadu. Spolu je teda $k\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$ možností takehoto rozdelenia.

Odpoveď 2: Predstavíme si karamelky ako neklesajúcu postupnosť $1 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k \leq n$. Najprv vyberieme hodnotu chybnej karamelky (určujeme takto, ktorý chudák nerd dostane karamelku s vadou). Nech táto hodnota je v, a takýchto hodnôt vieme vybrať n. Potom vytvoríme postupnosť dlhú $k-1$ prvkov medzi 1 až $n+1$. Takýchto postupností je $\left(\!\binom{n+1}{k-1}\!\right)$. i-tý nerd, kde $i \neq v$, dostane toľko karameliek, koľkokrát sa v postupnosti $k-1$ čísel vyskytlo číslo i. v-tý nerd dostane zbývajúce karamelky: najprv toľko bezchybných, koľkokrát sa v postupnosti objavilo číslo v, potom jednu chybnú, potom toľko bezchybných, koľikrát se objavilo číslo $n+1$. Berie sa tak v úvahu aj poradie a vadná karamelka se môže objaviť na každej pozícii.

Veta 2.5 ([2, str. 73]): $\forall n,k \in \mathbb{N}$

$$k\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = n\left(\!\binom{n+1}{k-1}\!\right)$$

Algebraický dôkaz:

$$k\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = k\binom{n+k-1}{k} = k\frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n)}{k!} =$$

$$= n\frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+1)}{(k-1)!} = n\binom{n+k-1}{k-1} = n\left(\!\binom{n+1}{k-1}\!\right)$$

Otázka 2.6: Koľkými spôsobmi vieme rozdeliť k karameliek n nerdom, pričom jedna z karameliek ma výrobnu vadu a navyše záleží na poradí vadnej karamelky medzi karamelkami priradenými nešťastnému nerdovi?
Odpoveď 1: Ako sme ukázali u otázky 2.5, $n\left(\!\binom{n+1}{k-1}\!\right)$
Odpoveď 2: Najprv vyberieme, ktorý z nerdov dostane vadnú karamelku. Tak sa zvyšných $k-1$ karameliek rozdelí obyčajným spôsobom, následne aby sme zahrnuli všetky možnosti poradia vadnej karamelky, vynásobíme celkový počet možností vždy množstvom karameliek priradených nerdovi s vadnou karamelkou. Napr. celkovy počet možností ako nami vybranému nerdovi dame 4 karamelky (a jedna z toho je vadná) bude $4\left(\!\binom{n-1}{k-4}\!\right)$. Ak to spočítame cez všetky možnosti počtu karameliek, ktoré môže dostať nami vybraný nerd, budeme mať súčet $1\left(\!\binom{n-1}{k-1}\!\right) + 2\left(\!\binom{n-1}{k-2}\!\right) + 3\left(\!\binom{n-1}{k-3}\!\right) + \cdots + k\left(\!\binom{n-1}{k-k}\!\right) = \sum_{i=1}^{k} i\left(\!\binom{n-1}{k-i}\!\right)$. Ešte nezabudnúť na to, že na začiatku vyberáme jedného z nerdov.

Veta 2.6:$\forall n,k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{k} i\left(\!\binom{n-1}{k-i}\!\right) = \left(\!\binom{n+1}{k-1}\!\right)$$

Algebraický dôkaz prevedieme následovne, prepíšeme kombinačné čísla druhého druhu na čísla prvého druhu.

$$\sum_{i=1}^{k} i\left(\!\binom{n-1}{k-i}\!\right) = \sum_{i=1}^{k} i\binom{n+k-2-i}{n-2} \stackrel{?}{=} \binom{n+k-1}{n} = \left(\!\binom{n+1}{k-1}\!\right)$$

k \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	1	1	1	1	5×1	1	1	1
1	0	1	2	3	4	5	$+4 \times 6$	7	8	9
2	0	1	3	6	10	15	$+3 \times 21$	28	36	45
3	0	1	4	10	20	35	$+2 \times 54$	82	118	163
4	0	1	5	15	35	70	+124	206	=324	487
5	0	1	6	21	54	124	248	454	778	1265
6	0	1	7	28	82	206	454	908	1686	2951

Tabulka 2.2: Znázornenie vety 2.6 pre $n = 7 \quad k = 5$

Chceme ukázať, že platí $\sum_{i=1}^{k} i\binom{n+k-2-i}{n-2} = \binom{n+k-1}{n}$, sumu na ľavej strane si chytro rozpíšeme na viacero menších súm a následne dva krát použijeme vetu 1.10.

$$\sum_{i=1}^{k} i\binom{n+k-2-i}{n-2} = \sum_{i=1}^{k}\binom{n+k-2-i}{n-2} + \sum_{i=2}^{k}\binom{n+k-2-i}{n-2} + \ldots +$$

$$+\sum_{i=k}^{k}\binom{n+k-2-i}{n-2} = \sum_{m=n-2}^{n+k-3}\binom{m}{n-2} + \sum_{m=n-2}^{n+k-4}\binom{m}{n-2} + \ldots + \sum_{m=n-2}^{n+k-2-k}\binom{m}{n-2}$$

$$\overset{1.10}{=} \binom{n+k-2}{n-1} + \binom{n+k-3}{n-1} + \ldots + \binom{n+k-k-1}{n-1} =$$

$$= \sum_{m=n-1}^{n+k-2}\binom{m}{n-1} \overset{1.10}{=} \binom{n+k-1}{n}$$

Otázka 2.7: Koľkými spôsobmi sa dá rozdeliť k karameliek n nerdom?
Odpoveď 1: Podľa definície, $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.
Odpoved 2: Označíme si nerdov číslami od 1 do n, a dáme si podmienku na najväčšie číslo v nerda, ktorý ešte dostane karamelku. Napr. ak v zvolíme 2, bude to znamenať, ze všetky karamelky budú rozdelené medzi prvých dvoch nerdov a zvyšní nedostanú nič. Potom pre každé jedno zvolené v existuje $\left(\!\binom{v}{k-1}\!\right)$ možností ako rozmiestniť zvyšné karamelky. Sumou cez všetky možné výbery v dostaneme $\sum_{v=1}^{n}\left(\!\binom{v}{k-1}\!\right)$.

Veta 2.7 ([2, str. 73]): $\forall n,k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{v=1}^{n}\left(\!\binom{v}{k-1}\!\right) = \left(\!\binom{n}{k}\!\right)$$

Algebraický dôkaz:

$$\sum_{v=1}^{n}\left(\!\binom{v}{k-1}\!\right) = \sum_{v=1}^{n}\binom{v+k-2}{k-1} \overset{?}{=} \binom{n+k-1}{k} = \left(\!\binom{n}{k}\!\right)$$

$$\sum_{m=k-1}^{n+k-2}\binom{m}{k-1} \overset{1.10}{=} \binom{n+k-1}{k}$$

k \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45
3	0	1	4	10	20	35	54	82	118	163
4	0	+1	+5	+15	+35	+70	+124	+206	324	487
5	0	1	6	21	54	124	248	=454	778	1265
6	0	1	7	28	82	206	454	908	1686	2951
7	0	1	8	36	118	324	778	1686	3372	6323
8	0	1	9	45	163	487	1265	2951	6323	12646

Tabulka 2.3: Znázornenie vety 2.7 pre $k = 5 \quad n = 7$

Otázka 2.8: Koľkými spôsobmi sa dá rozdeliť k karameliek n nerdom?
Odpoveď 1: Podľa definície, $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.
Odpoveď 2: Znovu si nerdov očíslujeme, podmienku si dáme na počet karameliek rozdaných nerdom s číslami 1 až $n-1$. Pre každé číslo v medzi 0 až k budeme mať $\left(\!\binom{n-1}{v}\!\right)$ možností ako rozmiestniť daných v karameliek, zvyšných $k-v$ je jednoznačne priradených poslednému n-tému nerdovi. Potom všetky možnosti spolu budú súčet týchto možností, a teda $\sum_{v=0}^{k} \left(\!\binom{n-1}{v}\!\right)$

Veta 2.8: $\forall n,k \in \mathbb{N}_0, \quad n \geq 1$

$$\sum_{v=0}^{k} \left(\!\binom{n-1}{v}\!\right) = \left(\!\binom{n}{k}\!\right)$$

Algebraický dôkaz:

$$\sum_{v=0}^{k} \left(\!\binom{n-1}{v}\!\right) \overset{2.3}{=} \sum_{v=0}^{k} \left(\!\binom{v+1}{n-2}\!\right) \overset{2.7}{=} \left(\!\binom{k+1}{n-1}\!\right) \overset{2.3}{=} \left(\!\binom{n}{k}\!\right)$$

Opäť pre $n = 7$, $k = 5$ dostávame súčet vyznačený v nasledujúcej tabuľke.

k \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45
3	0	1	4	10	20	35	54	82	118	163
4	0	1	5	15	35	70	124	206	324	487
5	0	1	6	21	54	124	248	454	778	1265
6	0	1	7	28	82	206	454	908	1686	2951
7	0	1	8	36	118	324	778	1686	3372	6323
8	0	1	9	45	163	487	1265	2951	6323	12646

Tabulka 2.4: Znázornenie viet 2.7 žltou a 2.8 červenou

A znova je pekne vidieť ako sú k sebe vety 2.7 a 2.8 „symetrické“.

Kapitola 3

Lahove čísla

Lahove čísla sú pomenované po slovinskom matematikovi Ivovi Lahovi, ktorý sa k týmto číslam dopracoval vo svojej práci v roku 1955 pri hľadaní vzťahu medzi rastúcou a klesajúcou mocninou ([5]). Vetu ktorá je po ňom pomenovaná a popisuje tento vzťah si ukážeme na záver kapitoly.

Definice 3.1: Lahove čísla $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$ vyjadrujú počet možných rozdelení n odlišných prvkov do k neprázdnych usporiadaných množín. V tejto kapitole si ukážeme menej identít než v predchádzajúcich kapitolách, zato ukážeme niekoľko vzťahov, kde sa Lahove čísla objavia. Začneme explicitným vyjadrením $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$.

Otázka 3.1: Koľkými spôsobmi sa dá rozdeliť n nerdov do k kolón (kolóna je neprázdna usporiadaná množina)?
Odpoveď 1: Podľa definície $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$.
Odpoveď 2: Zoraďme všetkých n nerdov do jednej veľkej kolóny. To sa dá spraviť $n!$ spôsobmi. Teraz vložíme do kolóny medzi jednotlivých nerdov oddeľovače tak, aby sme veľkú kolónu rozdelili na k menších kolón. To sa dá spraviť $\binom{n-1}{k-1}$ možnými spôsobmi. Na záver treba doplniť, že nezáleží na usporiadaní samotných menších k kolón. Takýchto usporiadaní je $k!$. Preto celkovo dostávame:

Veta 3.1 ([3, str. 2]): $\forall n,k \in \mathbb{N}$

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}$$

Je zrejmé, že vytvorenie k neprázných kolón z n nerdov, ak je $n < k$ sa dá spraviť 0 spôsobmi. Dodajme ešte, že počet možností ako rozdeliť n nerdov ($n \geq 1$) do 0 kolón je 0, teda $\left\lfloor {n \atop 0} \right\rfloor = 0$. Na usporiadanie do trojuholníkoveho schéma by sa nám zišiel rekurentný vzorec.

Otázka 3.2: Koľkými spôsobmi sa dá rozdeliť $n+1$ nerdov do k kolón?
Odpoveď 1: Podľa definície $\left\lfloor {n+1 \atop k} \right\rfloor$ spôsobmi.
Odpoveď 2: Dáme si podmienku na to, či bude $(n+1)$-vý nerd v kolóne sám alebo nie. Ak bude sám, ostáva nám rozmiestniť n nerdov do $k-1$ kolón, a to $\left\lfloor {n \atop k-1} \right\rfloor$ spôsobmi. Ak $(n+1)$-tý nerd sám nebude, musíme ho k niekomu priradiť. Najprv rozmiestnime zvyšných n nerdov do k kolón, čo sa dá spraviť $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$ spôsobmi,

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	2	1	0	0	0	0	0
3	0	6	6	1	0	0	0	0
4	0	24	36	12	1	0	0	0
5	0	120	240	120	20	1	0	0
6	0	720	1800	1200	300	30	1	0
7	0	5040	15120	12600	4200	630	42	1

Tabulka 3.1: Lahove čísla

potom $(n+1)$-vého nerda vtlačíme medzi nich. Buď ho dáme na začiatok nejakej kolóny alebo za nejakého nerda. Miest kam ho môžeme dať je teda $n+k$. Spolu celkovo máme teda $\left\lfloor {n \atop k-1} \right\rfloor + (n+k)\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$ možností, ako rozmiestniť $n+1$ nerdov do k kolón.

Veta 3.2 ([1, str. 41]): $\forall n,k \in \mathbb{N}_0 \quad k \geq 1$

$$\left\lfloor {n+1 \atop k} \right\rfloor = \left\lfloor {n \atop k-1} \right\rfloor + (n+k)\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$$

Algebraický dôkaz:

$$\frac{(n+1)!}{k!}\binom{n}{k-1} \stackrel{?}{=} \frac{n!}{(k-1)!}\binom{n-1}{k-2} + (n+k)\frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}$$

Obe strany vynásobíme $\frac{k!}{n!}$:

$$(n+1)\binom{n}{k-1} \stackrel{?}{=} k\binom{n-1}{k-2} + (n+k)\binom{n-1}{k-1} =$$

$$= k\left(\binom{n-1}{k-2} + \binom{n-1}{k-1}\right) + n\binom{n-1}{k-1}$$

$$(n+1)\binom{n}{k-1} \stackrel{?}{=} k\binom{n}{k-1} + n\binom{n-1}{k-1}$$

$$(n+1-k)\binom{n}{k-1} \stackrel{1.7}{=} n\binom{n-1}{k-1}$$

Teraz na vytvorenie tabuľky Lahových čísel nám stačí predchádzajúca veta, $\left\lfloor {1 \atop 1} \right\rfloor = 1$ a to že máme definované $\left\lfloor {n \atop 0} \right\rfloor = 0$ a $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = 0$ pre $k > n$.

Otázka 3.3: Koľkými spôsobmi sa dá rozdeliť n nerdov do k kolón, následne vybrať kolóna ktorá sa označí červenou a potom ďalšia, ktorá sa označí modrou farbou ?
Odpoveď 1: Rozdelíme n nerdov do k kolón, podľa definície $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$ možnými spôsobmi, potom vyberieme červenú kolónu, pre ňu máme k možností výberu a potom vyberieme modrú kolónu, pre ňu máme $k-1$ možností výberu. Spolu máme $k(k-1)\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$

možností takého výberu.
Odpoveď 2: Rozdelíme n nerdov do $k-1$ kolón, podľa definície $\left\lfloor {n \atop k-1} \right\rfloor$ rôznymi spôsobmi. Potom vložíme oddeľovač medzi ľubovoľných dvoch nerdov, ktorým rozdelíme jednu kolónu na dve, prvú označíme červenou a druhou modrou. Možností, kde vložiť oddeľovač je $n-(k-1)$, pretože oddeľovač musíme položiť pred nejakého nerda, ktorý nestojí na začiatku zo žiadnej z $k-1$ kolón. Spolu máme teda $(n-k+1)\left\lfloor {n \atop k-1} \right\rfloor$ možností takého výberu.

Veta 3.3 ([3, str. 3]) : $\forall n,k \in \mathbb{N}$

$$k(k-1)\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = (n-k+1)\left\lfloor {n \atop k-1} \right\rfloor$$

Algebraický dôkaz:

$$k(k-1)\frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1} \stackrel{?}{=} (n-k+1)\frac{n!}{(k-1)!}\binom{n-1}{k-2}$$

$$k(k-1)\frac{n!}{k!}\frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!} \stackrel{?}{=} (n-k+1)\frac{n!}{(k-1)!}\frac{(n-1)\cdots(n-k+2)}{(k-2)!}$$

$$\frac{n!}{(k-1)!}\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(k-2)!} = \frac{n!}{(k-1)!}\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(k-2)!}$$

Vystavanie trojuholníkového schématu Lahových čísel by teda šlo tiež spraviť tak, že dostaneme prvý stĺpec a použijeme predchádzajúcu vetu. Navyše prvý stĺpec nieje nič iné ako faktoriály prirodzených čísel.
Skombinovanie viet 3.2 a 3.3 nás dovedie ku vzťahu $\left\lfloor {n+1 \atop k} \right\rfloor$ a $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$. Kombinatorický dôkaz tento krát neuvádzame, šlo by o skombinovanie otázok 3.2 a 3.3 a ich odpovedí, najprv by sme dali podmienku na $(n+1)$-vého nerda, potom by sme vyberali farby.

Veta 3.4 ([3, str. 3]): $\forall n,k \in \mathbb{N}$

$$(n+1-k)\left\lfloor {n+1 \atop k} \right\rfloor = n(n+1)\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$$

Algebraický dôkaz:

$$\left\lfloor {n+1 \atop k} \right\rfloor = \left\lfloor {n \atop k-1} \right\rfloor + (n+k)\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = \frac{k(k-1)}{n-k+1}\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor + (n+k)\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor =$$

$$= \frac{k(k-1)+(n-k+1)(n+k)}{n-k+1}\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = \frac{n(n+1)}{n-k+1}\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$$

Čo ak by sme ale chceli, aby niektorí hádaví nerdi boli alebo neboli spolu v jednej kolóne? Situácia, kde chceme aby boli spolu je jednoduchá, tvárime sa že daní nerdi sú ako jeden jediný, potom sa postaráme o poradie v ich kolóne a sme hotoví. Na to aby prvých r hádavých nerdov nebolo spolu budeme potrebovať trochu viac úsilia.

Definícia 3.2 ([3, str. 1]): r-Lahové číslo $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$, $n \geq r$ značí počet možností ako rozdeliť n rôznych prvkov do k neprázdnych usporiadaných množín, ak prvých r prvkov nemôže byť spolu v jednej kolóne.

Ak za r zvolíme jednotku, dostaneme priamo obyčajné Lahove čísla. Preto identity, ktoré ukážeme že platia pre $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$ budú iba zobecnením už ukázaných pre Lahove čísla. Treba nám ešte poznamenať jeden prípad, ak $r > k$, $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r = 0$

Otázka 3.5: Koľkými spôsobmi vieme rozmiestniť n nerdov do k kolón tak, aby žiadni z prvých r hádavých nerdov neboli spolu v jednej kolóne?
Odpoveď 1: Podľa definície $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$
Odpoveď 2: Najprv rozmiestnime hádavých nerdov do samostantých r kolón. Potom zo zvyšku vyberieme $k-r$ nerdov ktorí budú stáť na začiatku $k-r$ prázdnych kolón. Počet možností tohoto výberu je $\binom{n-r}{k-r}$. Potom zo zvyšných $n-k$ nerdov berieme po jednom a určujeme každému samostatne, koľko má možností na umiestenie sa. Vezmeme prvého nerda n_{k+1} (zo zvyšku), ten sa môže zaradiť za jedného z $k-r$ nehádavých nerdov (pretože tí sú vybraný ako začiatok kolóny) alebo môže ísť do kolóny s hádavým nerdom. Hádavý nerd však nemusí nutne stáť na začiatku kolóny, preto sa nerd n_{k+1} môže postaviť na dve rôzne miesta pre každého hádavého nerda. Spolu máme pre neho $2r + k - r = r + k$ možností umiestenia. Nerd n_{k+2} má o jednu možnosť umiestnenia viacej, vytvoril mu ju predchádzajúci n_{k+1}, bude mať teda $r + k + 1$ možností na umiestnenie. Rovnako dostane n_{k+3} o možnosť viac než n_{k+2} atd. Posledný nerd n_n bude mať $r + n - 1$ možností. Celkovo tak dostávame $\binom{n-r}{k-r}(r+k)(r+k+1)\dots(r+n-1)$.

Veta 3.5 ([3, str. 2]): $\forall n,k,r \in \mathbb{N}, \quad n \geq r \quad k \geq r$

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r = \frac{(n+r-1)!}{(k+r-1)!}\binom{n-r}{k-r}$$

Otázka 3.6: Koľkými spôsobmi vieme rozmiestniť $n+1$ nerdov do k kolón tak, aby žiadni z prvých r hádavých nerdov neboli spolu v jednej kolóne?
Odpoveď 1: Podľa definície $\left\lfloor {n+1 \atop k} \right\rfloor_r$.
Odpoveď 2: Postupujeme identicky ako v odpovedi 2 otázky 3.2. Predpokládame, že $n+1$-vý nerd nieje hádavý, a teda v odpovedi nijako nezáleží na r.

Veta 3.6 ([3, str. 1]): $\forall n,k,r \in \mathbb{N}, \quad n \geq r \quad k \geq r$

$$\left\lfloor {n+1 \atop k} \right\rfloor_r = \left\lfloor {n \atop k-1} \right\rfloor_r + (n+k)\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$$

Algebraický dôkaz: po prepise r-Lahových čísel pomocou vety 3.5 dostaneme

$$\frac{(n+r)!}{(k+r-1)!}\frac{(n-r+1)(n-r)\cdots(n-k+2)}{(k-r)!} \stackrel{?}{=}$$

$$\stackrel{?}{=} \frac{(n+r-1)!}{(k+r-2)!}\frac{(n-r)\cdots(n-k+2)}{(k-r-1)!} + (n+k)\frac{(n+r-1)!}{(k+r-1)!}\frac{(n-r)\cdots(n-k+1)}{(k-r)!}$$

a po vynásobení $\frac{(k+r-1)!(k-r)!}{(n+r-1)!(n-r)\cdots(n-k+2)}$ nám ostane:

$$(n-r+1)(n+r) \stackrel{?}{=} (k+r-1)(k-r) + (n+k)(n-k+1)$$

čo po roznásobení ukazuje platnosť vety.
Následujúca veta predstavuje zobecnenie vety 3.3.

Veta 3.7 ([3, str. 3]): $\forall n,k,r \in \mathbb{N}, \quad n \geq r \quad k \geq r$

$$(k-r)(k+r-1)\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r = (n-k+1)\left\lfloor {n \atop k-1} \right\rfloor_r$$

K dôkazu sa opäť dá dopracovať rozpisom pomocou vety 3.5 a úpravami.

Na záver ku vzťahom medzi r-Lahovými číslami navzájom dodávame rekurentné vyjadrenie vzhľadom ku počtu hádavých nerdov r.

Veta 3.8 ([3, str. 3]): $\forall n,k,r \in \mathbb{N}, \quad n \geq r \quad k \geq r$

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r = (k-r+1)\frac{n+r-2}{k+r-1}\left\lfloor {n-1 \atop k} \right\rfloor_{r-1} + \frac{n+r-2}{k+r-2}\left\lfloor {n-1 \atop k-1} \right\rfloor_{r-1}$$

Algebraický dôkaz:

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r = \frac{(n+r-1)!}{(k+r-1)!}\binom{n-r}{k-r} = \frac{(n-r)!}{(k-r)!}\binom{n+r-1}{k+r-1} =$$

$$= \frac{(n-r)!}{(k-r)!}\left(\binom{n+r-2}{k+r-1} + \binom{n+r-2}{k+r-2}\right) =$$

$$= \frac{(n-r)!}{(k-r)!}\left(\frac{n+r-2}{k+r-1}\binom{n+r-3}{k+r-2} + \frac{n+r-2}{k+r-2}\binom{n+r-3}{k+r-3}\right) =$$

$$= \frac{n+r-2}{k+r-1}(k-r+1)\frac{(n-r)!}{(k-r+1)!}\binom{n+r-3}{k+r-2} + \frac{n+r-2}{k+r-2}\frac{(n-r)!}{(k-r)!}\binom{n+r-3}{k+r-3} =$$

$$\frac{n+r-2}{k+r-1}(k-r+1)\frac{(n-r)!(n+r-3)\cdots(n-k)}{(k-r+1)!(k+r-2)!} +$$

$$+ \frac{n+r-2}{k+r-2}\frac{(n-r)!(n+r-3)\cdots(n-k+1)}{(k-r)!(k+r-3)!} =$$

$$= (k-r+1)\frac{n+r-2}{k+r-1}\frac{((n-1)+(r-1)-1)!}{(k+(r-1)-1)!}\frac{(n-r)\cdots(n-k)}{(k-(r-1))!} +$$

$$+\frac{n+r-2}{k+r-2}\frac{((n-1)+(r-1)-1)!}{((k-1)+(r-1)-1)!}\frac{(n-r)\cdots(n-k+1)}{((k-1)-(r-1))!}=$$

$$=(k-r+1)\frac{n+r-2}{k+r-1}\left\lfloor{n-1 \atop k}\right\rfloor_{r-1}+\frac{n+r-2}{k+r-2}\left\lfloor{n-1 \atop k-1}\right\rfloor_{r-1}$$

Navyše ak uvážime že z vety 3.7 plynie $\left\lfloor{n \atop k-1}\right\rfloor_{r-1}=\frac{(k-r+1)(k+r-2)}{n-k+1}\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor_{r-1}$ dostávame

$$\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor_{r}=\frac{(n+r)(n+r-2)(k-r+1)}{(n-k+1)(k+r-1)}\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor_{r-1}.$$

Otázka 3.9: Koľkými spôsobmi sa môže rozostaviť n nerdov pred x stánkov s rôznymi učebnicami (každý stánok ponúka iné učebnice a môže sa stať, že pred nejakým stánkom nebude nikto stáť)?
Odpoveď 1: Pôjdeme nerd po nerdovi, a zakaždým určíme, koľko má možností na umiestnenie. Prvý má x stánkov, pred ktorých sa môže postaviť. Druhý sa môže postaviť na koniec jednej z x front alebo sa môže obehnúť a postaviť pred jedného nerda, má teda $x+1$ možných pozícií, kam pôjde. Tretí má $x+2$ možností, štvrtý $x+3$ atd. Posledný nerd má $x+n-1$ možností kam si stúpnuť, dohromady teda celé rozmiestnenie môže prebehnúť $x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$ spôsobmi.
Odpoveď 2: Podmienku si určíme na počet stánkov, pred ktoré sa nepostavil žiade nerd. Nech počet neprázdnych front pred stánkami je k. Najprv musíme vybrať pred ktoré z x stánkov budeme umiestňovať nerdov. Pre k neprázdnych kolón sa to dá spraviť $x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)$ spôsobmi. Potom musí dôjsť k samotnému rozdeleniu n nerdov do k kolón, čo sa dá spraviť $\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor$ spôsobmi. Teraz ešte musíme sčítať počet možností pre všetky k, čiže finálny výsledok bude suma $\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor x(x-1)\dots(x-k+1)$. Je dobré poznamenať, že všetky sčítance, kde je $k>x$ sú nulové.

Veta 3.9 (Lahova veta) ([5]): $\forall n,x\in\mathbb{N}$

$$x^{\overline{n}}=\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor x^{\underline{n}}$$

kde $x^{\overline{n}}=(x)(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$ je tzv. stúpajúca mocnina a $x^{\underline{n}}=x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$ je tzv. klesajúca mocnina.
Ukázali sme, že veta platí pre každé prirodzené x. Ale rovnako ako pri binomickej vete v kapitole 1, na oboch stranách rovnice sú polynómy stupňa n, takže nám stačilo ukázať, že rovnosť platí pre $n+1$ rôznych hodnôt. My sme to však ukázali pre nekonečne veľa hodnôt (všetky prirodzené čísla), preto rovnosť musí platiť aj pre všetky reálne čísla.

Lahove čísla a derivácie $e^{\frac{1}{x}}$

Čo dostaneme, ak opakovane derivujeme funkciu $e^{\frac{1}{x}}$ podľa premennej x? Určite tam bude samotné $e^{\frac{1}{x}}$ vynásobené sumou mocnín x^{-1}. Aké budú koeficienty pred týmito mocninami? Pozrime sa na prvých pár derivácií:

n	$\frac{d^n}{dx^n}(e^{\frac{1}{x}})$
1	$-e^{\frac{1}{x}}x^{-2}$
2	$e^{\frac{1}{x}}(2x^{-3}+x^{-4})$
3	$-e^{\frac{1}{x}}(6x^{-4}+6x^{-5}+x^{-6})$
4	$e^{\frac{1}{x}}(24x^{-5}+36x^{-6}+12x^{-7}+x^{-8})$
5	$-e^{\frac{1}{x}}(120x^{-6}+240x^{-7}+120x^{-8}+20x^{-9}+x^{-10})$
6	$e^{\frac{1}{x}}(720x^{-7}+1800x^{-8}+1200x^{-9}+300x^{-10}+30x^{-11}+x^{-12})$

Tabulka 3.2: Derivácie $e^{1/x}$

Vidno, že koeficienty pred jednotlivými mocninami x^{-1} sú presne Lahove čísla. A ako dokážeme, skutočne platí nasledujúca veta:
Veta 3.10 [1, str. 40]: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{\frac{1}{x}}) = (-1)^n e^{\frac{1}{x}} \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor x^{-n-k}$$

Algebraický dôkaz prevedieme indukciou podľa n. Platnosť rovnosti pre $n = 1$ je zrejmá. Nech rovnosť platí pre n, ukážeme že platí pre $n+1$.

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(e^{\frac{1}{x}}) = \frac{d}{dx}\left((-1)^n e^{\frac{1}{x}} \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor x^{-n-k}\right) =$$

$$= (-1)^{n+1} e^{\frac{1}{x}} \left(\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor x^{-n-k-2} + \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor (n+k) x^{-n-k-1}\right) =$$

$$= (-1)^{n+1} e^{\frac{1}{x}} \sum_{k=1}^{n+1} \left(\left\lfloor {n \atop k-1} \right\rfloor + \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor (n+k)\right) x^{-n-k-1} \overset{3.2}{=}$$

$$\overset{3.2}{=} (-1)^{n+1} e^{\frac{1}{x}} \sum_{k=1}^{n+1} \left\lfloor {n+1 \atop k} \right\rfloor x^{-(n+1)-k}$$

Literatura

[1] S. Daboul, J. Mangaldan, M. Z. Spivey, P. J Taylor, *The Lah numbers and the nth derivative of* $e^{1/x}$, Mathematics Magazine 86 (2013), 39-47

[2] A. T. Benjamin, J. J. Quinn, *Proofs that really count: The art of combinational proof*, Cambridge University Press (2003), Washington D.C.

[3] H. Belchair, A. Belkhir, *Cross recurence relations for r-Lah numbers*, Ars Combinatoria 115 (2013), 199-203

[4] J. Matoušek, J. Nešetřil, *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Nakladatelství Karolinum (2009), Praha

[5] I. Lah, *A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics*, Boletin do Instituto dos Actuarios Portugueses 9 (1954), 7-15

Seznam tabulek