MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Matúš Proner

Kombinatorické úlohy o klobúkoch

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Učitelství matematiky - Učitelství deskriptivní geometrie

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Rád by som poďakoval vedúcemu práce za cenné rady, pozorné oko a nekonečnú trpezlivosť.

Název práce: Kombinatorické úlohy o klobúkoch

Autor: Bc. Matúš Proner

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Mnoho komplikovaných problémov má jednoduchú alebo aspoň pochopiteľnú verziu, ktorá je človeku príjemná na počúvanie a zamyslenie sa. Táto práca čitateľovi predstaví zaujímavý problém o klobúkoch, ktorý, ako sa ukáže, prekvapí množstvom variácií, rôznorodosťou postupov a nečakanými výsledkami. Práca (snáď) poslúži ako zábavná matematická literatúra pre hocikoho, kto sa na tieto problémy bude chcieť pozrieť, alebo ako dobrý zdroj logických problémov tohoto druhu. Prvá časť je preto písaná v uvoľnenom jazyku a štýle, úlohy sú zasadené do deju jedného (možno až prehnane rozprávkového) príbehu. V druhej časti je predstavená matematika, ktorá je za riešeniami úloh schovaná.

Klíčová slova: kombinatorika, klobúky, farby, teória grafov

Title: Hat guessing problems in combinatorics

Author: Bc. Matúš Proner

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: Many complicated problems have simple or at least understandable version, which can be pleasant to listen to and to think about. This work presents the reader with an interesting problem about hats, which, as it turns out, surprises with a number of variations, diversity of procedures and unexpected results. Work will (hopefully) serve as entertaining mathematical literature for anyone who wants to look at these problems, or as a good source of logical problems of this kind. The first part is therefore written in a relaxed language and style, problems are set in one (perhaps overly fairy-tale) story. Mathematics hidden behind problem solving is presented in the second part.

Keywords: combinatorics, hats, colors, graph theory

Obsah

Úvod

Práca sa venuje pomerne populárnym logickým problémom hádania farieb klobúkov. Problém má veľké množstvo variácii, ktorými sa v posledných rokoch zaoberajú nielen matematici. Záujem o problémy prejavila aj širšia verejnosť a je jasné prečo. Mnoho z úloh má zrozumiteľné pravidlá a riešenie sa dá vymyslieť pomerne jednoducho. Čaro úlohám dodáva napätie, keďže ide hádajúcim takpovediac o život.

Samotné úlohy sú ale viac, než len rekreačná matematika. Za riešením sa schováva okrem iného kombinatorika a teória grafov. Mnoho z úloh je len zjednodušením moderného problému súvisiaceho s vedným oborom, ktorý by nás za úlohou nenapadlo hľadať.

Práca má za cieľ tieto úlohy priblížiť bežnému čitateľovi. Preto sú pre čo naj-príjemnejší zážitok z čítania úlohy zasadené do (snáď) komického príbehu. Čo sa týka matematiky, v samotných riešeniach úloh je jej iba nutné minimum, to však neznamená, že by bol čitateľ o nejakú ochudený. V práci sú zhromáždené a usporiadané úlohy z rôznych zdrojov vrátane odborných článkov, ktoré pre bežného čitateľa nemusia byť zrozumiteľné. Niektoré z riešení a odôvodnení prichádzajú od autora práce.

Pre tých, čo s príbehom nechcú strácať čas, sú úlohy a ich riešenia oddeliteľné od deja a zaobídu sa bez neho. V druhej časti sa už nenachádza nič, iba korektná matematika, terminológia je ale poupravená tak, aby odpovedala úlohám v prvej časti. V matematickej časti sa nachádzajú všetky vety, ktoré boli využité pri tvorení riešení, a až na pár výnimiek sú všetky dokázané.

1. Trpaslíci a klobúky

Bola raz jedna veľmi vysoká veža mocného čarodejníka. Čarodejník sedel za stolom na najvyššom poschodí veže, pozeral do diaľky a uvažoval nad novými logickými úlohami. Ale čarodejník je v našom príbehu záporák. Klaďasovia sú pár poschodí pod ním, v podzemí veže. Trpaslíci sedeli zavretý v temnom sklípku, čo bol na poslednú chvíľu prerobený na žalár. Pojem „prerobený na žalár“ znamená, že dvere boli zamknuté na dva krát. Skupinka trpaslíkov tak smutne sedela a veľmi smutne spievala veľmi smutné pesničky, zatiaľ čo smutne pili a jedli čarodejníkove zásoby. Ako sa tam dostali... to do tohoto príbehu nepatrí, ale malo to niečo s hádkou v cukrárni, keď sa nevedeli dohodnúť na kombinácii koláčikov, ktoré si kúpia. A je ťažké sa dohodnúť, keď je tak veľa možností výberu... Teraz sedeli v žalári, nesnažili sa vyjsť von. Všade sa povrávalo, že čarodejovi vo veži straší, a naši hrdinovia predsa neboli tak hrdinský, aby sa postavili strašidlám.

Čarodej si sedel za stolom a uvažoval nad všetkými úlohami, s ktorými bude trápiť trpaslíkov. Už dlho totiž dumá nad logickými hádankami, ktoré našiel v knihe kúziel o tom, ako predpovedať budúcnosť a ako duplikovať veci. A každý čarodejník chce vedieť duplikovať veci, lebo párovať ponožky je príliš zložité, ľahšie je si rovno vyčarovať novú kópiu. Keď rozlúskne všetky hádanky a problémy, ktoré nechali záludný autori „na ctěném čtenáři jako jednoduché cvičení“, bude už len malý kúsok od toho nenosiť každý deň rôzne ponožky.

Je rozhodnuté. Trpaslíkom to prospeje, a jeho to náramne pobaví. Zišiel teda dole do sklepa, ale ešte keď bol dobrých 5 poschodí nad zemou, počul veľmi smutný spev trpaslíkov, ako mu evidentne veľmi smutne spotrebuvávajú jeho zásoby. Ich smútok ale určite trvať dlho nebude. Jediná vec, ktorú majú naši hrdinovia radšej ako logické úlohy, sú logické úlohy, v ktorých ide o život. A dobrý čarodejník predsa nezklame túžby jeho hostí, že nie?

Trpaslická banda bola úplne zaskočená, keď im čarodej povedal o matematických úlohách, ktoré ich čakajú. Každá úloha bude spočívať v tom, že čarodej vyčaruje trpaslíkom na hlavy klobúky a trpaslíci budú musieť hádať ich farby. Ak prehrajú, čarodej ich premení na ropuchy. Ak vyhrajú, idú na ďalšiu úlohu. Úlohy budú variovať v niekoľkých faktoroch, a to počet trpaslíkov, ktorý budú hrať, počet farieb klobúkov, kto vidí koho klobúk, ako sa chová čarodej pri vyčarovávaní klobúkov, či musia trpaslíci hádať naraz alebo majú čas, dostanú nejakú extra informáciu v ľubovoľnej podobe alebo nie. Celý čas trpaslíci nepodvádzajú, športový duch je predsa oveľa silnejší ako pud sebazáchovy.

1.1 Ľahká rozcvička

Na úplný začiatok, ako poctivú mozgovú rozcvičku dostali trpaslíci úlohy, kde nemusia odpovedať naraz. Sami si teda nejakým spôsobom môžu dodať informácie. Navyše ale, aby to nebolo príliš jednoduché, bude čarodej čítať trpaslíkom myšlienky a zakaždým im vyčaruje klobúky tak, aby čo najmenší počet trpaslíkov uhádol. Čarodej totižto trpaslíkmi šetriť nemusí, pretože ich má v sklepe n, no a každý vie, že ak máte v sklepe n trpaslíkov, máte tam aj $n + 1$ trpaslíkov (je ich proste veľa).

Úloha 1.1 [1] : Traja trpaslíci sedia okolo stola, každému vyčaruje čarodej na hlavu zelený alebo červený klobúk. Keď sa im na hlavách objavia klobúky, čarodej požiada tých, čo vidia aspoň jeden červený klobúk, nech zdvihnú ruku. Na základe toho, čo vidia a informácie v podobe zdvihnutých rúk majú trpaslíci určiť farbu svojho klobúka. Kto odpovie zle, bude premenený na žabu. Môžu si vždy všetci zachovať svoju podobu?

Riešenie 1.1 [1]: Máme štyri možnosti, ako rozdelenie mohlo prebehnúť. Mohli padnúť všetky klobúky zelené, dva zelené a jeden červený, jeden zelený a dva červené alebo mohli byť všetky červené. V prípade všetkých zelených nikto nezdvihne ruku, a všetkým je jasné, čo majú na hlavách. V prípade, že má jeden trpaslík červený klobúk a dvaja zelený, dvaja so zeleným klobúkom zdvihnú ruku a zároveň trpaslík s červeným klobúkom ruku nezdvihne. „Zeleným“ je teda jasné, že ani jeden nemá červený klobúk a svoju farbu poznajú, rovnako „červený“ vie, že nejaký červený klobúk padol, a keďže žiaden nevidí, musí to byť on. V prípade, že padli dve červené klobúky, všetci traja trpaslíci zdvihnú ruku. Dvaja z nich ale vidia, že zdvihol ruku niekto, kto vidí zelený klobúk, teda ten druhý musí byť červený a teda vedia svoju farbu. V tejto situácii „zelený“ nevie určiť hneď, čo za farbu má. Obe farby by totiž vyhovovali zdvihnutým rukám. Keďže ale nemusia hádať naraz, počká si, či „červení“ budú vedieť uhádnuť svoju farbu. Ak áno, tak im istotu dalo to, že on má na hlave zelený klobúk. Zahlási to teda neskôr, ale zahlási správne. Posledná možnosť, keď každý dostane na hlavu červený klobúk, spôsobí trápnu chvíľu ticha. Každý z nich totiž zdvihne ruku, ale každý sa ocitne na mieste neistého trpaslíka z predchádzajúceho prípadu. Keďže sa ale nikto neozve, zistia, že sú na tom všetci rovnako a každý má na hlave červenú.

Úloha 1.2 [1]: Okolo stola sedí 100 trpaslíkov. Každému vyčaruje čarodej na hlavu červený alebo zelený klobúk. Čarodej oznámi trpaslíkom, že medzi nimi je aspoň jeden zelený klobúk. Do stredu stola vyčaruje hodiny, ktoré počítajú minúty. Každú minútu sa môže ozvať nejaký trpaslík (aj viacerý naraz), a hádať, akú farbu má klobúk na ich hlave. Ak sa niekto ozve, ale neuhádne, všetci trpaslíci sa zmenia v žaby. Ak sa nikto neozve až do stej minúty, všetci sa zmenia v žaby. Trpaslíci teda uspejú a zachovajú si svoje pôvabné podoby iba ak aspoň jeden z nich bude hádať a zároveň každý vyslovený tip bude správny.

Riešenie 1.2 [1]: Každý z trpaslíkov vidí všetkých okrem seba. Ak nejaký trpaslík vidí c červených klobúkov, vie, že celkový počet červených klobúkov spolu s jeho vlastným je buďto c alebo $c + 1$. Niekto, kto má na hlave zelený klobúk, uvidí o jeden červený klobúk viac, ako niekto, kto má na hlave červený klobúk. Preto sa dohodnú takto. Každý zakričí v čase $100 - c$, že je jeho klobúk zelený. Tí, čo sú skutočne zelený, budú hádať svoju farbu minútu pred tými, čo by sa zmýlili. Svoju farbu tak uhádnu všetci so zeleným klobúkom. V momente keď niekto uhádne, ostatní vedia, že vyhrali a zostanú mlčať. Tým, že v hre je aspoň jeden zelený klobúk, trpaslíci majú výhernú stratégiu.

Úloha 1.3 [1]: Do zástupu sa postaví 100 trpaslíkov. Všetci sa pozerajú jedným smerom, takže prvý v rade nevidí žiadneho z trpaslíkov, druhý vidí jedného pred sebou, a tak ďalej, až posledný vidí všetkých okrem seba. Každému z nich je na hlave vyčarovaný klobúk červenej alebo zelenej farby. Čarodej oznámi trpaslíkom, že z každej farby je tam aspoň jeden klobúk. Tak začne od trpaslíka na konci zástupu (ktorý vidí všetky klobúky okrem svojho), a spýta sa, akú farbu má klobúk na jeho hlave. Trpaslík má možnosť hádať farbu alebo mlčať, čím posúva čarodeja na trpaslíka pred sebou. Tak sa čarodej spýta predposledného trpaslíka v zástupe (ten vidí 98 klobúkov pred sebou), spýta sa rovnakú otázku, trpaslík má rovnaké možnosti, a tak ďalej, až sa čarodej spýta prvého. Ak hociktorý trpaslík skúsi hádať farbu a netrafí, všetci budú premenení na žaby. Ak budú všetci mlčať, zase žaby. Znova teda vyhrajú iba ak niekto bude hádať, a každý vyslovený tip bude správny.

Riešenie 1.3 [1]: Ak by sme verili, že čarodejník rozdáva klobúky čestne podľa fér náhody, mohli by sme sa pokúsiť o obyčajný risk, a to tak, že všetci trpaslíci okrem prvého by mlčali a prvý by tipol svoju farbu náhodne. Šanca na úspech by bola dobrých 50%, lepšia ako keby mal každý tipovať samostatne. Čarodej ale vidí do myslí trpaslíkov, vie, aká stratégia bola zvolená a naschvál sa bude snažiť o minimum správnych odpovedí. Dôležitý logický krok pri uvažovaní je, že sa v zástupe objavia určitě obe farby. Na tom bude založená výherná stratégia. Posledný sa pozrie na klobúky pred sebou, a ak vidí dve rôzne farby, tak ostáva ticho, ak uvidí iba jednu farbu, je mu jasné, že je druhá farba na jeho hlave. V prípade, že hádal farbu, je každému trpaslíkovi pred ním jasné, že na hlave má druhú farbu, než tú, čo bola práve uhádnutá. V prípade, že farbu nehádal, trpaslík pred ním vie, že v zástupe 99 trpaslíkov sú dve farby, a teda sa jedná o rovnaký problém, ktorý má rovnaké riešnie, ale je tam o jedného trpaslíka menej. Takto mlčia všetci trpaslíci až na prvých pár trpaslíkov (kľudne prvých 100), ktorý už svoje farby budú vedieť s istotou určiť. Stačí ale, aby takto tipol farbu jeden a hra môže skončiť, pretože všetci ostatní môžu ostať ticho a tiež vyhrajú.

Poznámka 1: Táto úloha sa dá ľahko previesť na úlohu 1.2, kde by sa trpaslíci dohodli na ich usporiadaní, a každú od nultej minúty by jeden tipoval alebo by bol ticho.

Poznámka 2: Stratégia by fungovala (len jemne upravená), aj keby im čarodej oznámil, že je tam určite aspoň jeden červený klobúk. Každý trpaslík by totiž ostal ticho v prípade, že by pred sebou nejakú červenú videl, v opačnom prípade by hlásil, že sám je červená.

Poznámka 3: Ak by tam nebola pridaná podmienka so zaručenosťou výskytu farieb/farby, stratégia by nefungovala. Čarodej by totiž rozdal všetkým jednu farbu, a hneď prvý opýtaný trpaslík by spôsobil premnoženie ropúch v okolí veže.

Poznámka 4: Ak by sme predsa len nemali garantovaný výskyt farieb/farby, ale na druhú stranu by čarodej priradzoval farby klobúkov čestne náhodne, dostali by trpaslíci celkom dobrú šancu na zachovanie svojej podoby. Stratégia s možnosťou ostať ticho alebo hlásiť červenú z poznámky 2 by sa rozbila iba ak by všetci dostali zelenú farbu, čo je jedna z 2^{100} možností rozdelenia farieb.

Úloha 1.4 [1]: Rovnako ako v úlohe 1.3, do zástupu sa postaví 100 trpaslíkov a všetci sa pozerajú jedným smerom, takže prvý v rade nevidí žiadneho z trpaslíkov, druhý vidí jedného pred sebou, a tak ďalej, až posledný vidí všetkých okrem seba. Znova je každému z nich na hlave vyčarovaný klobúk červenej alebo zelenej farby. Nemáme podmienku, že z každej farby musí padnúť aspoň jeden klobúk. Znovu začne čarodej od trpaslíka na konci zástupu (ktorý vidí všetky klobúky okrem svojho), a spýta sa, akú farbu má klobúk na jeho hlave. Trpaslík musí hádať farbu svojho klobúka, nemá možnosť ostať ticho. Namiesto kolektívneho trestu bude tentokrát čarodej zaklínať na žaby každého trpalíka jednotlivo, podľa toho či uhádol svoju farbu alebo nie. Cieľom (prekvapivo) je, aby si čo najväčší počet trpaslíkov zachoval podobu.

Riešenie 1.4 [1]: Ak by mal každý trpaslík hádať sám za seba, aj v čestnej hre by mal iba 50% šancu na zachovanie svojej honosnej meter dvadsať vysokej podoby. A my vieme, že o fér šanci sa môže trpaslíkom iba snívať. Potrebujú nejakú extra informáciu. Tú dostanú od posledného v rade. Ten vie, že pri nefér čarodejníkovi čítajúcemu mysle nemá šancu na správne uhádnutie farby svojho klobúka a môže začať trénovať chytanie hmyzu jazykom. Môže ale svojou odpoveďou dodať potrebnú informáciu, ktorá pomôže všetkým zvyšným trpaslíkom. Ako dať jedným slovom „červený“ alebo „zelený“ vedieť ostatným, na ktorých miestach je aká možnosť? Ak by zakričal farbu, ktorá pred ním prevláda, zvýšil by šancu na prežitie. Každý by zopakoval túto farbu, a eventuelne by prežila väčšina. Dá sa byť však ešte efektívnejší. Je treba si uvedomiť, že každý z trpaslíkov je schopný logického rozmýšľania a počítania (aspoň bol, než tak razantne ubudlo z čarodejníkových zásob v sklepe). Informácia, ktorú im posledný trpaslík v rade oznámi, povie ostatným, či posledný trpaslík vidí párny alebo nepárny počet zelených klobúkov. Dohodnutá stratégia bude, že v prípade nepárneho počtu zelených klobúkov zakričí zelená, inak červená. Každý trpaslík pred ním počuje, akú farbu povedal, a na základe toho bude vedieť určiť svoju farbu. Vezmime si, ako sa rozhodne nejaký trpaslík. Počul napríklad, ako úplne posledný trpaslík kričí „červená“ (tak záblesk a kvákanie novo-vzniknutej žaby), a teda vie, že prvých 99 trpaslíkov má párny počet zelených klobúkov. Tak počuje hádanie farieb trpaslíkov medzi ním a posledným teraz-už-žabou trpaslíkom. Spočíta, koľko krát sa za ním ozvalo zelená a koľko zelených klobúkov vidí ešte pred sebou. Ak je to párny počet, tak on sám je červený, ak nepárny tak on je jeden zo zelených, ktorý to doplní do párneho počtu.

Poznámka 5: Pridajme tomu nejaké číselné vyjadrenie. Nech červený klobúk má hodnotu 0, zelený 1, nech hodnota farby klobúka na i-tom trpaslíkovi je x_i. Na začiatku dostaneme informáciu, či súčet hodnôt klobúkov na prvých 99 pozíciách je párny alebo nepárny, čiže súčet farieb modulo 2 je nula alebo jedna. Potom si už n-tý trpaslík sám za seba dopočíta svoju hodnotu farby z rovnice

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{99} x_i\right) \bmod 2}_{\text{počiatočná informácia}} = \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} x_i}_{\text{čo vidí}} + \overbrace{x_n}^{\text{jeho hodnota}} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{99} x_i}_{\text{čo počul}}\right) \bmod 2$$

Úloha 1.5[1]: Znovu, rovnako ako v úlohách 1.3 a 1.4, do zástupu sa postaví 100 trpaslíkov a všetci sa pozerajú jedným smerom, takže prvý v rade nevidí žiadneho z trpaslíkov, druhý vidí jedného pred sebou, a tak ďalej, až posledný vidí všetkých okrem seba. Ale namiesto dvoch farieb máme farieb nejaké konkrétne množstvo f farieb od 3 do 100 (trpaslíci vedia, koľko možných farieb je v hre). Čarodej im oznámi, že z každej farby je tam aspoň jedna. Spôsob pýtania sa je rovnaký ako v úlohách 1.3 a 1.4, trpaslíci môžu mlčať. Znova vyhrávajú, ak aspoň jeden tip na farbu bude správny a zároveň nedojde k nesprávnemu tipu.

Riešenie 1.5[1]: Nech možných farieb je $3 \leq f \leq 100$, podobne ako v riešení 1.2, každý trpaslík mlčí, ak z každej farby vidí aspoň jeden klobúk. Prvý trpaslík, ktorý neuvidí všetky farby teda bude vedieť, že má na hlave klobúk s farbou, ktorú nevidí.

Poznámka 6: Na úspech v hre stačí slabšia pomocná informácia. Trpaslíkom stačí vedieť iba o jedinej farbe klobúka, ktorá sa určite objaví. Potom každý, kto vidí klobúk s touto farbou pred sebou, ostáva ticho, inak tipuje, že práve tú farbu má jeho klobúk.

Úloha 1.6[1]: Naposledy rovnaký zástup stovky trpaslíkov, ktorým sa na hlavy vyčarujú klobúky f rôznych farieb. Rovnaký spôsob pýtania sa, trpaslíci nemajú možnosť ostať ticho. Každý trpaslík sám za seba, teda každý, kto neuhádne, je premenený v ropuchu (rovnako ako v 1.4).

Riešenie 1.6[1]: Podobne, ako v riešení 1.4, posledný trpaslík vymení bujnú bradu za informáciu, ktorá umožní zachovanie brady všetkým ostatným trpaslíkom. Majme f rôznych farieb klobúkov. Potom farby vieme očíslovať 0 až $f-1$. Posledný trpaslík spočíta všetky hodnoty farieb, ktoré pred sebou vidí a túto informáciu povie ostatným ako svoj tip svojej farby. Keďže ale môže zahlásiť iba číslo medzi 0 a $f-1$, zahlási číslo, ktoré dostane ako zvyšok po celočíselnom dělení f-kom. Označme znova hodnotu farby klobúka i-tého trpaslíka x_i. Potom n-tý trpaslík bude vedieť určiť svoju farbu podobným výpočtom ako v poznámke 4.

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{99} x_i\right) \bmod f}_{\text{počiatočná informácia}} = \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} x_i}_{\text{čo vidí}} + \overbrace{x_n}^{\text{jeho hodnota}} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{99} x_i}_{\text{čo počul}}\right) \bmod f$$

1.2 Zákerný prístup

Po kvalitnej rozcvičke sa rozhodol čarodej prejsť ku skutočne náročným problémom. K problémom, v ktorých budú musieť trpaslíci odpovedať naraz na tlieskutie čarodeja, nie jeden po druhom, bez odmlky či vyčkávania na ostatných. Čarodej bude naďalej pokračovať v zákernom čítaní myšlienok a úmyselnom škodení trpaslíkom. Bude teda vedieť, akú stratégiu si zvolili trpaslíci, a nastaví klobúky tak, aby padol vždy čo najmenší počet správnych odpovedí. Takto ale trpaslíci budú v tak výraznej nevýhode, že určite nastanú prípady, kde trpaslíci neuhádnu svoju vlastnú farbu. Preto sa od teraz naďalej zmenia nielen vstupné pravidlá v hrách, ale aj podmienky, za ktorých trpaslíci vyhrajú. Na rozdiel od predchádzajúcich hier nebudeme hľadať riešenia bez omylov, ale skôr riešenia, ktoré zaručia (aj napriek všetkej čarodejovej snahe) nejaký minimálny počet správnych uhádnutí, často bude stačiť jeden.

Úloha 2.1 [1]: Čarodej proti sebe posadí dvoch trpaslíkov a každému dá na hlavu klobúk jednej z dvoch farieb, biely alebo čierny. Úlohou trpaslíkov je dať aspoň jednu správnu odpoveď.

Riešenie 2.1 [1]: Stratégie, kde sa obaja dohodnú, že jeden bude hádať takúto a druhý takúto farbu a vo väčšine prípadov to vyjde, nefunguje, lebo čarodej to bude vedieť a zvolí možnosť, kde im to nevyjde, a hneď bude o dva obojživelníky viac. Potrebujú stratégiu, ktorá na ich dva tipy pokryje všetky štyri možnosti, ktoré môžu nastať. Trpaslíci si uvedomili, že nastane jeden z dvoch prípadov, buď budú mať na hlavách klobúky rovnakej farby alebo nie. Preto bude jeden z trpalíkov hlásiť rovnakú farbu, ako je ta na hlave druhého trpaslíka, a druhý trpaslík urobí naopak, a bude hádať opačnú farbu, než tú, ktorú vidí. Takto vždy vyhrá práve jeden.

Úloha 2.2 [1]: Okolo okrúhleho stola sedí 100 trpaslíkov, čarodej každému trpaslíkovi vykúzli klobúk s jednou zo 100 farieb. Úlohou trpaslíkov je zariadiť aspoň jeden správny tip farby klobúka.

Riešenie 2.2 [1]: Trpaslíci použijú stratégiu z riešenia 2.1, ale pred zobecnením ju musia preformulovať. Namiesto uvažovania o rôznych možnostiach kto má s kým rovnakú alebo rôznu farbu, musia trpaslíci prísť s niečím iným. Debata o tom koľko je klobúkov s rovnakou farbou a koľko s rôznou sa rozpadne už pri troch trpaslíkoch a troch farbách. Jeden môže staviť na to, že majú všetci rovnaké farby, jeden na to, že každý má rôzne a poslednému ostáva možnosť, kde majú dvaja trpaslíci rovankú farbu a jeden inú. Problém je, že zatiaľ čo prvý dvaja majú jednoznačne určený tip, čo majú hádať, tretí má stále dve možnosti a čarodejovi teda stačí vybrať tú druhú možnosť na to, aby trojica prehrala a zmenila farbu nosov z červenej na tmavo-zelenú. Preto stratégiu 2.1 preformulujeme tak, že zameníme otázku „máme rovnaké alebo rôzne klobúky?“ na otázku „je súčet farieb párny alebo nepárny?“. Bielej farbe priradíme nulu, čiernej jednotku, jeden trpaslík bude hádať, že súčet farieb je párny, druhý naopak a takto opäť vyčerpajú všetky možnosti. Takto formulovaná stratégia „sa nerozbije“ pre vyššie počty trpaslíkov a farieb. Očíslujeme farby od 0 do 99. Trpaslíkom stačí vytipovať všetky možné výsledky súčtu farieb $\mod 100$. Preto sa na začiatku v rámci stratégie usporiadajú, a n-tý trpaslík staví na to, že celkový súčet všetkých farieb spolu s tou jeho $\mod 100$ je práve n. Svoju farbu teda vypočíta ako

$$n = \left(\sum_{i=0}^{99} x_i\right) \mod 100 = \left(\underbrace{\sum_{i=0, i\neq n}^{99} x_i}_{\text{čo vidí}} + \overbrace{x_n}^{\text{jeho farba}}\right) \mod 100$$

Týmto spôsobom sa vždy trafí práve jeden trpaslík, pretože práve jeden z nich správne trafí, aký bude celkový súčet farieb $\mod 100$.

Úloha 2.3 [2, str. 402]: Okolo stola sedí t trpaslíkov, na hlavy im čarodej vyčaruje klobúky f rôznych farieb. Každý trpaslík vidí farby všetkých klobúkov okrem vlastného. Úlohou je uhádnuť čo najviac farieb.

Riešenie 2.3 [2, str. 3]: Rozdelíme t trpaslíkov do skupín o počte f, a každá takáto skupina nám dá jednu správnu odpoveď stratégiou, ktorú sme použili v riešení 2.2. Spolu tak garantujeme $\lfloor t/f \rfloor$ správnych tipov. V prípade, že je farieb viac ako trpaslíkov, trpaslíci neuspejú.

Vyriešiť tieto úlohy je vec jedna, ukázať si, či to nejde nejako lepšie je vec druhá. No, čo sa týka počtu správnych tipov, ktoré sú garantované, to lepšie naozaj nejde a my si to ukážeme v druhej kapitole. Vzhľadom k tomu je táto stratégia jednoduchá a efektívna. Môže byť požadovaná vlastnosť, aby správne odpovede, ktoré padnú, tvorili akúsi reprezentatívnu vzorku farieb, ktoré boli vyčarované. Napríklad, ak sa rozhodne čarodej na hlavy načarovať polku čiernych a polku bielych klobúkov, správne odpovede budú tiež rozdelené (v rámci možností) napoly. Ako protipríklad zvolíme v úlohe 2.3 $t = 100$, $f = 2$ a farby klobúkov môžu byť pridelené rovnomerne, 50 z každej. Ale pre nešťastné popárovanie trpaslíkov sa môže stať, že všetci trpaslíci s čiernymi klobúkmi trafia svoju farbu, zatiaľ čo biely klobúk netipne ani jeden trpaslík.

Úloha 2.4 [2, str. 409]: Okolo stola sedí t trpaslíkov, na hlavy im čarodej vyčaruje klobúky 2 rôznych farieb. Každý trpaslík vidí farby všetkých klobúkov okrem vlastného. Úlohou je uhádnuť čo najviac farieb tak, aby pomer farieb uhádnutých klobúkov odpovedal (v rámci možností) pomeru farieb, ktoré boli skutočne na hlavách.

Úloha 2.5 [2, str. 410]: Okolo stola sedí t trpaslíkov, na hlavy im čarodej vyčaruje klobúky f rôznych farieb. Každý trpaslík vidí farby všetkých klobúkov okrem vlastného. Úlohou je uhádnuť čo najviac farieb tak, aby pomer farieb uhádnutých klobúkov medzi sebou odpovedal (v rámci možností) pomeru vyčarovaných farieb.

V posledných dvoch úlohách je požadovaná zhodnosť pomerov iba „v rámci možností“. Predstavme si napríklad hru so štyrmi trpaslíkmi a dvoma farbami. Nech traja trpaslíci majú na hlave klobúky jednej farby, štvrtý ma druhú. Pomer farieb klobúkov je $3 : 1$, ale pomer uhádnutých farieb môže byť $2 : 0$ alebo $1 : 1$. Presné definovanie tejto podmienky, **riešenie 2.4** a existenciu **riešenia 2.5** dodáme až v druhej časti, po tom, čo si predstavíme nový pohľad na vec. Zatiaľ trpaslíckemu trápeniu uľavíme aspoň s tým, že stratégia, ktorou zvládnu **úlohy 2.4** a **2.5**, skutočne existuje.

Čarodej sa na chvíľu zamyslel, čo by sa stalo, keby trpaslíkom povedal, koľko akých klobúkov použije. Veď to by bolo jasné, každý by si zapamätal zoznam farieb a potom hádal tú, ktorá na zozname chýba. Takže takto nie. Ale čo ak by hrali tak, že nebude mať z každej farby klobúkov neobmedzene, ale iba nejaký konkrétny počet? Zlepší sa nutne počet uhádnutých farieb, alebo nie?

Úhola 2.6 [2, str. 411]: Okolo stola sedia traja trpaslíci a čarodej im na hlavy vyčaruje klobúky bielej alebo čiernej farby. Oznámi im (čestne), že z každej farby vyčaruje maximálne dva klobúky. Pomôže tento fakt trpaslíkom na zlepšenie výsledkov oproti úlohe 2.3? Akú stratégiu majú trpaslíci zvoliť, aby zaručili čo najväčší počet správnych tipov?

Riešenie 2.6 [2, str. 411]: Prvý tipne farbu opačnú ako má druhý trpaslík. Rovnako, druhý trpaslík tipne opačnú farbu klobúka tretieho trpaslíka a tretí zase toho prvého, čím sa uzavrie kruh. Keďže sa farby klobúkov musia vystriedať práve dva krát, vždy trafia svoj tip dvaja z troch trpaslíkov. Bez extra informácie o obmedzenom počte farieb mohli trpaslíci dúfať iba v jeden správny tip.

Úloha 2.7 [2, str. 412]: Okolo stola sedia piati trpaslíci, na hlavu sú im vyčarované klobúky bielej alebo čiernej farby. Čarodej im ale oznámi, že z oboch farieb nevyčaruje viac ako tri klobúky. Akú stratégiu majú zvoliť, aby zaručili čo najväčší počet správnych tipov?

Riešenie 2.7: Znova budú trpaslíci pracovať s farbami ako číslami 0 a 1. Štyria trpaslíci sa upáruju do dvoch dvojíc a piaty ostane samostatne, stratégiu rozdelíme do troch krokov, prvé dva budú určovať tipy popárovanej štvorice, tretí krok je pre tip piateho trpaslíka.

Prvý, stratégia prvej dvojice bude tipovať, že majú rovnaký súčet farieb ako druhá dvojica (modulo 2). Naopak druhá dvojica bude tipovať, že súčty farieb sú odlišné. To by zariadilo dva správne tipy, pretože buď sa trafí jedna dvojica, alebo druhá.

Druhý krok stratégie spočíva v tom, že ak niekto vidí tri rovnaké farby, bude tipovať opačnú farbu. Druhý krok „prebíja“ prvý. To sme využili extra informáciu o farbách, ktorá nám tiež garantuje dva správne tipy. My ale nevieme, či to náhodou nebudú práve tie správne tipy, ktoré sme získali v prvom kroku. No a do toho vstupuje piaty trpaslík a tretí krok.

Sú totiž iba dve rozmiestnenia farieb, v ktorých prvé dva kroky zaručia iba dva správne tipy. V týchto situáciách má prevládajúcu farbu na hlavách dvojica, ktorá sa zmýli a piaty trpaslík. V týchto situáciách bude tip piateho trpaslíka farba, ktorú má na hlavách dvojica, ktorá sa zmýli (keďže ich vidí, vie si určiť, kto sa zmýli). Vo všetkých zvyšných situáciách sa totižto trafí jedna dvojica a k tomu ešte aspoň jeden trpaslík s menšinovou farbou, ktorý v nej nie je. Touto stratégiou vieme garantovať 3 správne tipy.

Úloha 2.8 [2, str. 413]: Okolo stola sedia piati trpaslíci, na hlavy sú im vyčarované klobúky bielej alebo čiernej farby. Čarodej im ale oznámi, že z bielej farby nevyčaruje viac ako tri klobúky a z čiernej nie viac ako 4. Akú stratégiu majú zvoliť, aby zaručili čo najväčší počet správnych tipov?

Riešenie 2.8: Konštrukciu tejto stratégie necháme zatiaľ do druhej časti. Čo je ale zaujímavé je, že existuje stratégia, pri ktorej sa trpaslíci trafia vždy v práve troch prípadoch.

Ako vlastne vyzerajú možné stratégie pre rôzne obmedzenia počtov farieb? Vidíme, že dve rôzne obmedzenia na počty farieb, jedno silnejšie než druhé, vrátili rovnaký garantovaný správny počet tipov. Otvára sa otázka, či sa trpaslíkom nemohlo v úlohe 2.7 podariť garantovať 4 správne odpovede, ak pre horšiu situáciu zvládli rovnaký výsledok. Kde leží hranica toho, čo sa dá uhádnuť? V druhej časti si ukážeme, že to skutočne lepšie nešlo a prečo tomu tak je. Na záver podkapitoly ale dáme ešte jednu úlohu s obecným pravidlom.

Úloha 2.9 [3]: Okolo stola sedí $t = 4k - 1$ trpaslíkov pre nejaké prirodzené k. Na hlavy sú im vyčarované klobúky bielej alebo čiernej farby. Čarodej im oznámi, že z oboch farieb je maximálne $2k$. Aký najväčší počet správnych tipov vedia trpaslíci garantovať?

Riešenie 2.9 [3]: Z jednej farby sa na hlavách objaví $2k$ klobúkov, z druhej $2k - 1$. Všetci trpaslíci, ktorí majú na hlavách menšinovú farbu, vidia $2k$ klobúkov väčšinovej farby a hneď vedia určiť s istotou tú svoju. Problém je u trpaslíkov s väčšinovou farbou, tí vidia z oboch farieb po $2k-1$ klobúkov a ich tip teda musí prísť z nejakej dopredu pevne danej stratégie. Chceme preto prísť so stratégiou, ktorá by zaručila čo najväčší počet správnych tipov väčšinovej farby. K tomu už vieme z **riešenia 2.3**, že pre ľubovoľnú stratégiu, s ktorou týchto $2k$ trpaslíkov príde, budú vedieť garantovať maximálne $\lfloor 2k/2 \rfloor = k$ správnych tipov klobúkov s väčšinovou farbou.

Problém je v tom, že nech zvolíme akékoľvek skupinkovanie trpaslíkov a nech spárujeme skupinky ľubovolne, symetrické stratégie nebudú fungovať. Čo to znamená? Povedzme, že vytvoríme dvojice trpaslíkov ako v úlohe 2.3 pre 2 farby. Táto stratégia nám vie dať $\lfloor 4k - 1/2 \rfloor = 2k - 1$ správnych tipov, a čarodej vie klobúky rozmiestniť tak, že všetky správne tipy budú menšinovej farby. Alebo ak by sme trpaslíkov rozdelili na dve skupiny, kde jedna bude hádať, že súčet všetkých farieb (modulo 2) je párny a druhá, že nepárny, dopadne to podobne, jedna strana určite neuhádne a čarodej si klobúky rozmiestni tak, aby to bola tá väčšia. Potrebujeme preto nesymetrickú stratégiu. Tu je jedna taká stratégia.

Každý trpaslík, ktorý má na hlave väčšinovú farbu sa pozrie na $2k-1$ trpaslíkov po svojej ľavici (teda v smere hodinových ručičiek od neho) a bude tipovať tú farbu, ktorá medzi nimi prevláda. Takto tipne väčšinovú farbu presne k trpaslíkov. Prečo to funguje? Označme (v protismere hodinových ručičiek) si trpaslíkov s väčšinovou farbou v_1 až v_{2k} a pozrime sa na dvojicu trpaslíkov v_1 a v_{k+1}. Aby trpaslík v_{k+1} tipol väčšinovú farbu touto stratégiou, musí sa medzi $2k-1$ trpaslíkmi po jeho ľavici nachádzať aspoň k trpaslíkov s väčšinovou farbou. To znamená, že sa medzi nimi nachádza aj trpaslík v_1. Naopak, aby svoju farbu trafil v_1, musí sa v_{k+1} nachádzať medzi $2k - 1$ trpaslíkmi po jeho ľavici. Určite nastane práve jedna z týchto dvoch možností, čím sa zaručí jedna správna odpoveď pre každú z dvojíc v_i a v_{k+i}. Dostávame takto k správnych tipov väčšinovej farby.

Dohromady touto stratégiou vedia trpaslíci garantovať $2k-1+k=3k-1$ správnych tipov.

1.3 Na čerstvom vzduchu

Keď sa snažili o predvedenie úloh s veľkým počtom trpaslíkov, zistili, že je celkom zložité, aby sa videli všetci navzájom. To priviedlo čarodeja k nápadom o nových úlohách, kde nedovolí, aby sa videli všetci trpaslíci navzájom, napríklad ak by stáli okolo budovy alebo v hustom lese. Keď trpaslíkom oznámil, že pri pár ďalších hrách sa aj trochu rozhýbajú, zožal hukot, piskot a všeobecne kreatívne trpaslícke nadávky. Nerozumel, k čomu všetkému mu prirovnalí tie jeho nápady a kam poslali jeho klobúky, a bol za to celkom rád. Vysvetlil trpaslíkom, ako bude vyzerať pár ďalších hier.

Nebudú vidieť všetci na všetkých, bude sa meniť, kto koho uvidí. Rovnako sa bude meniť, či sa trpaslíci môžu otáčať alebo nie, to znamená, či bude platiť, že ak vidí jeden druhého, platí to aj obrátene. Znovu budú všetci trpaslíci nasledujúcich pár úloh hlásiť svoje tipy naraz a bez možnosti ostať mlčať.

Vysvetlenia a dôkazy toho, že výsledky, ktoré dostaneme sa zlepšiť nedajú, uvedieme v druhej časti. Rovnako tak aj niektoré časti riešení či celé postupy, pokiaľ budú nateraz príliš komplikované.

Úloha 3.1 [2, str. 402]: t trpaslíkov sa rozmiestni náhodne v lese, stromy bránia vo výhľade medzi niektorými trpaslíkmi. Trpaslíci sa môžu otáčať. Trpaslíkom čarodejník vyčaruje klobúky dvoch farieb. Koľko uhádnutí sa môže trpaslíkom podariť?

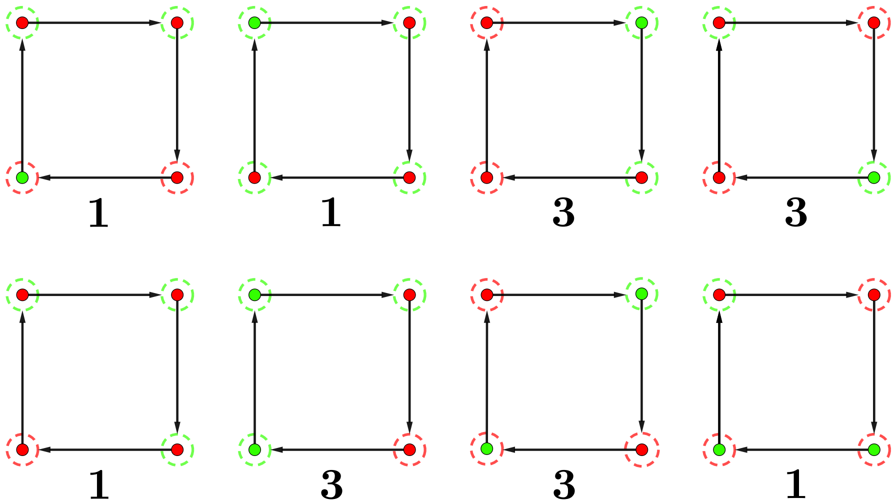
Riešenie 3.1 [2, str. 402]: Prirodzenou stratégiou pre trpaslíkov je, že sa popárujú dvojice, ktoré na seba vidia, pričom každý trpaslík je v maximálne jednej dvojici. Každá takáto dvojica postupuje ako v **riešení 2.1**, čím zaručí jednu správnu odpoveď. Trpaslíci sa preto popárujú najlepšia ako sa to dá, čím získajú maximálny možný počet správnych tipov.

Trpaslíkom ešte ostáva nájsť najlepšie možné párovanie, ale to už nejako zvládnu. Inšpirovať sa môžu napríklad v [4].

Úloha 3.2 [2, str. 403]: t trpaslíkov sa rozmiestni okolo veľkej skaly dookola tak, že každý vidí iba jedného trpaslíka rovno po svojej pravici. Trpaslíci sa nemôžu otáčať. Trpaslíkom čarodejník vyčaruje klobúky dvoch farieb. Koľko uhádnutí sa môže trpaslíkom podariť?

Riešenie 3.2 [2, str. 403]: Napriek všetkým snahám mali veľký problém prísť s podobne úspešnou stratégiou ako keď sa mohli na seba pozerať vzájomne. Najlepšia stratégia, s ktorou prišli, zaručila vždy iba jednu správnu odpoveď. Vybral sa jeden trpaslík, ktorý tipoval, že má na hlave rovnakú farbu ako trpaslík, ktorého vidí, všetci ostatní tipujú, že majú opačnú farbu ako trpaslík, ktorého vidia. V prípade, že majú všetci rovnakú farbu, uspeje práve jeden vybraný trpaslík, inak uspeje aspoň jeden zo zvyšných trpaslíkov. Viac ako jeden správny tip sa nedá garantovať.

Ako ukážku vezmeme prípad $t = 4$. Všetky možnosti farbení a tipovania sú graficky znázornené v obrázku 1.1 (pojem graf viditeľnosti a jeho využitie sme ešte nezaviedli, je to ale pomerne zrozumiteľný príklad). Farba vrcholu je farbou klobúka, farba kružnice je tip trpaslíka. Správny tip nastane, keď vrchol a kružnica okolo neho majú rovnakú farbu. Trpaslík reprezentovaný ľavým dolným vrcholom háda rovnakú farbu, ako vidí, zvyšní traja hádajú farbu opačnú. Číslo pod štvoricou ukazuje, koľko trpaslíkov trafilo svoju farbu pre dané farbenie.



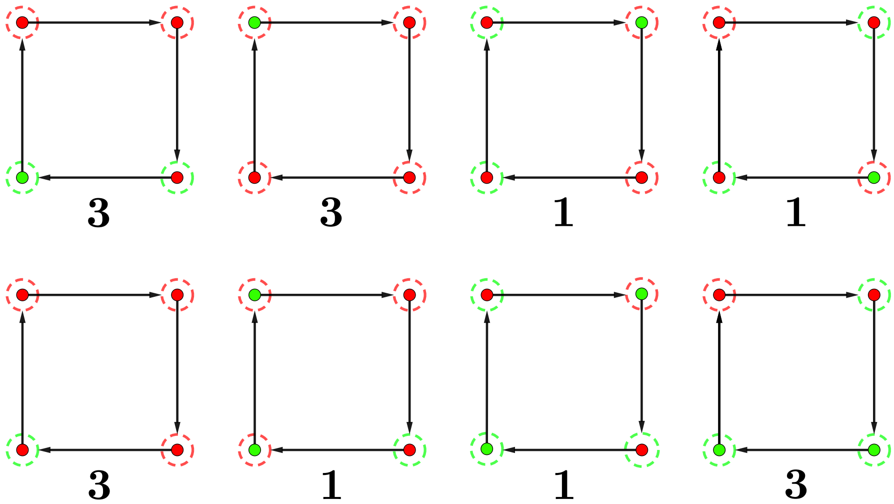
Obr. 1.1: Všetky možnosti farbenia a odpovedí príkladu 3.2

Poznámka 7: V prípade, že by si trpaslíci prehodili úlohy a traja tipovali rovnakú farbu ako vidia a štvrtý by tipoval opačnú, uspeli by rovnako (viď. obrázok 1.2). Vidíme tiež, že v každom farbení, kde predtým uspel jeden, teraz uspejú traja a naopak.

Úloha 3.3 [2, str. 404]: 4 trpaslíci sa rozmiestnia okolo veľkej skaly dookola tak, že každý vidí iba jedného trpaslíka rovno po svojej pravici. Navyše ale na skalu hore vylezie piaty trpaslík, ktorý vidí všetkých štyroch dole a všetci z dola vidia trpaslíka hore. Trpaslíci dole sa nemôžu otáčať. Trpaslíkom čarodejník vyčaruje klobúky dvoch farieb, červené a zelené. Úlohou je prísť so stratégiou zaručujúcou dva správne tipy.

Riešenie 3.3 [2, str. 404]: Najprv trpaslíkov napadlo párovať niektorého z trpaslíkov dole s trpaslíkom hore a nechať tento pár postupovať ako v úlohe 2.1, zatiaľ čo trpaslíci dole sa budú pokúšať o stratégiu riešenia 3.3. Takýto mix ale neprinesie požadované ovocie, pretože čarodejovi stačí nastaviť farby klobúkov tak, aby z dvojice a zo štvorice uhádol farbu ten istý trpaslík, končiac tak hru len s jedným správnym tipom.

Štyria trpaslíci dole použijú buď stratégiu z **riešenia 3.2** alebo z *poznámky 7*. To, ktorú z dvoch stratégií si vyberú bude záležať na farbe klobúka trpaslíka na skale. Ak bude mať na hlave zelený klobúk, budú trpaslíci dole postupovať ako v **riešení 3.2**. Naopak, ak bude mať trpaslík na skale červený klobúk, budú



Obr. 1.2: Všetky možnosti farbenia a odpovedí príkladu 3.2

traja trpaslíci postupovať ako v *poznámke 7*. To znamená, že sa štvorica dole trafí buď v práve jednom alebo v práve troch farbách.

Poďme teraz na stratégiu trpaslíka hore. Trpaslík na skale vie, ako postupujú trpaslíci dole a vie, že im čarodej dá na hlavu farby tak, aby uhádol iba jeden z nich. Tipne teda, že má na hlave takú farbu, pri ktorej si trpaslíci dole zvolia horšiu z možností a trafia sa iba do jednej farby. Takto sa zdvihne minimálny počet správnych odpovedí na 2 (ak by sa totiž trpaslík na skale netrafil, znamenalo by to, že dole padli 3 správne tipy).

Poznámka 8: V podobnej úlohe, ktorá by sa od **úlohy 3.3** líšila iba tým, že na skale by boli dvaja trpaslíci namiesto jedného, ktorí sa navzájom vidia (a ktorých by znovu videli všetci zdola a ktorí by videli všetkých štyroch dole a seba navzájom), mohli by trpaslíci zaručiť 3 správne odpovede. Ak trpaslíci dole vidia na klobúkoch hore dve rovnaké farby, zvolia stratégiu z **riešenia 3.2**, inak zvolia stratégiu z *poznámky 7*. Trpaslíci hore predpokladajú, že majú na hlavách také farby, že dole padne iba jeden správny tip. Takto nastane jedna z dvoch možností, buď sa trafí jeden trpaslík dole a dvojica hore, alebo sa trafia traja trpaslíci dole a hore ani jeden.

Úloha 3.4 [2, str. 405]: Čarodej proti sebe postaví dva rady trpaslíkov. Každý trpaslík vidí všetkých z opačnej rady, ale nikoho z vlastnej. Čarodej im na hlavy vyčaruje klobúky f farieb. Existuje nejaký počet trpaslíkov, ktorí musia stáť v jednotlivých radách a nejaká stratégia, ktorá zaručí aspoň jeden správny tip?

Riešenie 3.4 ukážeme v druhej časti, zatiaľ ale môžu trpaslíci pokojne pokračovať, pretože riešenie existuje.

1.4 Koniec naschválom

Zavrite trpaslíkov do sklepa plného sudov a jedla, dajte im zaujímavé problémy, kde sa im môže celkom dobre dariť, motivujte ich strachom zo straty podoby a zo zmeny apetítu na viacej-nohé bytosti, a máte skvelý recept na kopu zábavy a k tomu zaujímavé výsledky logických problémov.

Vezmite ale trpaslíkov von, preč od plných stolov a núťte ich hýbať sa na čerstvom vzduchu. Pridajte do toho problémy, v ktorých napriek hocijakej snahe drvivá väčšina neuspeje, a máte skvelý recept na konflikt. To, že recept funguje, si čarodej overil empirickým pozorovaním. Po poslednej sade problémov hodili klobúky po čarodejovi, zakričali pomerne dlhé vetné skladby a odobrali sa z lesa späť do sklepa. Čarodej opäť nerozumel ani slovo, opäť bol za to celkom rád.

Rozhodol sa dať trpaslíkom krátky oddych a tak sa vydal za nimi. Keď dorazil ku sklepu a zatlačil za dvere, ani s nimi nepohol. Pošmátral po kľúči, že ich odomkne, ale v tom sa z vnútra ozvalo hihňanie. Došlo mu, že dvere nie su zamknuté, ale že ich niekto z vnútra zablokoval. Skúsil dvere otvoriť nasilu, čo viedlo k veľkému úspechu. Pod úspechom rozumieme jedno čarodejné narazené rameno a burácajúci výbuch smiechu spojený s trepaním pästťami o stôl spoza dverí. Kúzla použiť nemôže, dvere sú čerstvo nalakované a povedzme, že fyzická sila nepatrila medzi čarodejove prednosti. Musel použiť svoj šarm a charakter. Takže to bol stratený boj.

Niekto by mohol označiť čarodejov ďalší krok za priznanie porážky. To však vôbec nie je pravda. On len odišiel na vrchol veže do svojej pracovne a strategicky si ľahol spať. Veď nemôžu byť nahnevaní dlho. Prespí sa a zajtra to zkúsi znova.

Jeho strategické vyspávanie sa ukázalo ako geniálny ťah. Ešte za tmy ho zobudil jeden z mladších trpaslíkov, že starešina dole s ním chce rozprávať. V nočnej košeli (čiže to samé čo cez deň, ale iná farba) zišiel dole do sklepa a vypočul si, k čomu trpaslíci došli. Zdelili mu, že došli ku dnu sudov. A to je problém. Takže ak čarodej vyrieši ten ich, tak oni na oplátku budú pokračovať v riešení tých jeho. Mali ale ešte jednu podmienku. Mali dosť čarodejovho robenia naschvál. Od teraz ďalej sa budú farby klobúkov určovať čisto náhodne.

Čarodej súhlasil, odomkol novú pasáž pivnice a šiel si nazad ľahnúť. Určite to za to stojí.

V nasledujúcich úlohách budú mať trpaslíci možnosť mlčať namiesto tipovania svojej farby. Budú tipovať naraz a vyhrajú, ak aspoň jeden z trpaslíkov svoju farbu uhádne a nikto netipne svoju farbu nesprávne. Cieľom bude prísť so stratégiou s čo najväčšou šancou na úspech. Farby budú priradené náhodne.

Úloha 4.1 [5]: Traja trpaslíci sedia okolo stola, všetci sa vidia navzájom. Čarodej im na hlavy vyčaruje čierne alebo biele klobúky náhodne. Akú stratégiu majú trpaslíci zvoliť, aby mali čo najlepšiu šancu na úspech?

Prvý nápad, ktorý prišiel, bol nech sa vyberie jeden z trpaslíkov, ktorí svoju farbu tipne náhodne, pretože každý ďalší pokus len zvyšuje šancu, že sa niekto netrafí a všetci prehrajú. To by bolo ale príliš jednoduché a určite to ide lepšie.

Riešenie 4.1 [5]: V prípade, že trpaslíci uvidia dve rôzne farby na hlavách kolegov, ostanú ticho. V prípade, že na hlavách kolegov uvidia rovnaké farby klobúkov, budú tipovať, že majú opačnú farbu. Pri tejto stratégii trpaslíci prehrajú iba v prípade, že majú všetci na hlavách klobúky rovnakej farby, vo zvyšných šiestich prípadoch uspejú.

Trpaslíkom zostalo zodpovedať otázku, či sa nedá tento výsledok ešte zlepšiť. Nedá sa nejako ukázať, že neexistuje lepšia stratégia? Dá [1], poďme na to postupne. Pre každú stratégiu a každé rozloženie farieb má každý trpaslík pevne dané, ako sa bude chovať. Každé správne uhádnutie farby svojho klobúka je zrkadlené nesprávnym tipom v rozložení farieb, ktoré sa líši jediným klobúkom. No a jeden nesprávny tip, a celé hádanie farieb končí a trpaslíci idú domov. Vlastne, čarodej sa vyhrážal tou premenou na žaby... Takže! Čím viac jednotlivých nesprávnych tipov sa trpaslíkom podarí dať dohromady do jednej situácie (čiže do jedného rozdelenia farieb), tým lepšia stratégia to bude.

Vezmime si, že existuje nejaká ideálna stratégia. V tejto stratégii sa podarí trpaslíkom napchať všetky nesprávne tipy do čo najmenej možných situácií, a naopak sa podarí správne tipy rozložiť do čo najviac možných situácií. Povedzme, že máme t trpaslíkov. Nech súčet počtov správnych tipov fšetkých trpaslíkov za všetky situácie je rovný číslu c. Rovnako je c súčet všetkých nesprávnych tipov. Pre ideálnu stratégiu by trpaslíci prehrali v $\lceil c/t \rceil$ situáciách, nenastala by situácia, kde by zostali všetci ticho a vo všetkých zvyšných situáciách by tipoval práve jeden trpaslík správne. To ale znamená, že výherných situácií je práve c. Pravdepodobnosť, že nastane situácia, v ktorej sa trpaslíkom podarí vyhrať, by bola

$$P = \frac{c}{\lceil c/t \rceil + 0 + c} \ .$$

Toto platí pre perfektnú stratégiu pre obecný počet trpaslíkov. Pravdepodobnosť sa mení v závislosti na počte trpaslíkov. Najvyššia pravdepodobnosť nastane, keď v situáciách, kde sa zmýli jeden, sa zmýlia všetci. To znamená, že $\lceil c/t \rceil = c/t$ a teda

$$\frac{c}{c/t + 0 + c} = \frac{t \cdot c}{c + t \cdot c} = \frac{t}{t+1} \ .$$

Prihodíme fakt, že počet všetkých možných situácií, ako sa rozdajú klobúky, je 2^t a pravdepodobnosť úspechu pri tipovaní je $\frac{c}{2^t}$, dostávame rovnicu

$$\frac{c}{2^t} = \frac{t}{t+1}$$

$$c \cdot (t+1) = t \cdot 2^t \ .$$

Všetky prvky tejto rovnice sú prirodzené čísla, preto musí byť $t \cdot 2^t$ násobkom $t+1$. Trpasíci sú aspoň dvaja, hrať takúto hru sám je na blázinec (alebo na vrchné poschodie čarodejnej veže). Čísla t a $t+1$ sú teda nesúdeľné, čiže rovnica dáva zmysel, ak je číslo $t+1$ mocninou dvojky. Preto najlepšia možná pravdepodobnosť úspechu $\frac{t}{t+1}$ môže nastať iba vtedy, keď $t = 2^n - 1$ pre prirodzené $n \geq 2$. V takýchto prípadoch pravdepodobnosť rastie až k jedničke pre rastúce n.

Pre $n = 2$ dostávame pravdepodobnosť výhry pri ideálnej stratégii $P = 3/4$, čo stratégia z **riešenia 4.1** splňuje, lepšiu stratégiu teda nevymyslíme.

Ako ideálna stratégia vyzerá pre väčšie n?

Úloha 4.2 [1]: Okolo stola sedí $t = 2^n - 1$ trpaslíkov. Všetci sa navzájom vidia a každému je na hlavu náhodne pridelený biely alebo čierny klobúk. Úlohou je prísť so stratégiou, pri ktorej majú trpaslíci pravdepodobnosť úspechu $\frac{t}{t+1}$.

Riešenie 4.2 [1]: Trpaslíkov očíslujeme od jedinčky do 2^n-1, ale v dvojkovej sústave, kde každému priradíme n-ciferný binárny kód. Prvý bude mať číslo 000 . . . 01, druhý 000 . . . 10 a tak ďalej až posledný (2^n-1)-vý trpaslík dostane číslo 111 . . . 11. Po tom, čo sa rozdajú klobúky, sa každý trpaslík rozhliadne a spočíta čísla, na kto-rých vidí čierny klobúk. Nespočíta ale čísla obyčajne (prečo inak by sme sa trápili s binárnym očíslovaním trpaslíkov), ale nasledujúcim spôsobom. Spočítajú sa jed-notlivé cifry čísel modulo 2. To znamená, že ak chcem spočítať dve čísla týmto spôsobom, na i-tej pozícii čísla napíšem nulu, ak majú dané čísla rovnakú cifru na i-tej pozícii, a jedničku v prípade, že sa čísla v i-tej cifre líšia. Označme takéto sčítanie $\oplus$, potom príklad takéhoto sčítania je $1100 \oplus 1010 = 0101$. Pri tomto počítaní pre všetky k platí $k \oplus k = 0$.

Každý trpaslík si týmto spôsobom spočíta všetky čierne farby, ktoré vidí. Nech je súčet $\oplus$ všetkých čiernych farieb s. Ak má k-tý trpaslík čierny klobúk na hlave, vidí súčet $s \oplus k$. Každý trpaslík s bielym klobúkom vidí súčet s. Trpaslíci určia svoje tipy nasledovne. V prípade, že trpaslíkovi vyjde nula (teda číslo $000 \ldots 00$), tipne čiernu. V prípade, že vyjde práve jeho číslo, tipne bielu a v prípade, že vyjde nejaké číslo iné od nuly a jeho vlastného čísla, ostane ticho a nebude tipovať.

V akých situáciách trpaslíci uspejú, a v akých nie? Ak je súčet $\oplus$ všetkých čiernych klobúkov nula, všetci trpaslíci s bielym klobúkom tipnú čiernu farbu. Všetci trpaslíci, ktorý majú na hlavách čierny klobúk, dostanú ako súčet svoje vlastné číslo a tipnú bielu. Takto sa všetci naraz netrafia. T eraz n ech j e súčet čísel s čiernym klobúkom $s \neq 0$. Potom s-tý trpaslík tipne čiernu, pretože súčet čiernych farieb je z jeho pohľadu $s \oplus s = 0$. Trpaslíci s bielym klobúkom vidia všetky čierne klobúky, ktorých súčet je s, čo nie je ich číslo. Trpaslíci s čiernym klobúkom s číslom iným ako s po sčítaní nevidia súčet ani seba, ani nulu. Preto všetci okrem s-tého trpaslíka ostanú ticho.

Vidíme, že pri tejto stratégii nenastane situácia, v ktorej by nikto netipoval, v situáciách, kde sa netrafí jeden, netrafia sa všetci naraz a všetky zvyšné situácie sú výherné. Dosiahli teda maximálnu možnú úspešnosť.

Naše **riešenie 4.1** je presne táto stratégia pre $n = 2$. Číslovania trpaslíkov sú 01, 10 a 11, nulu získa trpaslík iba ak sú oba klobúky, ktoré vidí, biele. Jeho vlastné číslo mu vyjde práve vtedy, keď sú oba klobúky čierne. Prehrajú, keď sú všetky tri klobúky stejnej farby, keďže $01 \oplus 10 \oplus 11 = 00$.

Úloha 4.3 [6]: Okolo stola sedí t trpaslíkov, všetci sa navzájom vidia. Na hlavu im je vyčarovaný klobúk bielej alebo čiernej farby, farby sú pridelené náhodne. Zmenou bude, že vyhrajú, ak uhádne aspoň $k > 1$ trpaslíkov (pre prípad $k = 1$ máme presne **úlohu 4.2**). Úlohou je prísť s najlepšou možnou stratégiou úspechu.

Riešenie 4.3 zatiaľ necháme sedieť bokom a zodpovieme v druhej časti.

1.5 Náhoda nakoniec

Na záver dňa oznámil čarodej, že mu ostáva už len jedna úloha. V očiach trpaslíkov sa miešala radosť a strach. Na jednu stranu super, je koniec. Na druhú, čo si asi tak mohol preboha nechať čarodej na koniec?

Úloha 5.1 [7]: t trpaslíkom sú na hlavy vyčarované kloubúky f farieb (každej farbe máme priradené jedno číslo z $1, \ldots, f$), farby klobúkov určuje čarodej a trpaslíci tipujú všetci naraz. Navyše je medzi nich (tak, aby ho všetci videli a počuli) položený prístroj, ktorý na požiadanie vyberie náhodné číslo (vyhovujúce prípadným požiadavkám). Trpaslíci musia tipnúť jednu farbu, ktorú má na hlave aspoň jeden z nich. Všetci ale musia tipnúť tú istú farbu, ak zazneje viac ako jedna farba, trpaslíci prehrajú. Úlohou je prísť so stratégiou, ktorá by dala trpaslíkom čo najväčšiu šancu na výhru.

Riešenie 5.1[8]: Každý trpaslík si predstaví f nových klobúkov, z každej farby jeden. Tie pridá k tým, ktoré vidí a všetkých $t+f-1$ klobúkov usporiada do neklesajúcej postupnosti. Prístroj na náhodné čísla vyberie celé číslo j medzi 1 a $t+f-1$. Potom každý trpaslík zakričí farbu j-teho klobúka zo svojho usporiadaného zoznamu.

Takto každý trpaslík zakričí farbu j-teho alebo $(j+1)$-vého klobúka v neklesajúcom usporiadaní všetkých (skutočných aj fiktívnych) klobúkov. Ak má totiž trpaslík na hlave klobúk, ktorý je v usporiadaní pred j, bude jeho tip farba $(j+1)$-vého klobúka. Naopak, ak je poradie jeho klobúka väčšie alebo rovné j, tipne j-tý klobúk v usporiadaní. Trpaslíci uspejú, ak sú farby na j-tom a $(j+1)$-vom klobúku rovnaké. Vtedy zakričia všetci rovnakú farbu, ktorá je na aspoň jednom skutočnom klobúku.

Prečo je tomu tak a aká je šanca, že sú tieto dva klobúky rovnakej farby? V neklesajúcom usporiadaní všetkých (skutočných aj fiktívnych) klobúkov je práve jeden fiktívny z každej farby. Ak sú nejaké dva klobúky rovnakej farby, aspoň jeden z nich je skutočný a niekto ho má na hlave. Predstavme si teraz, že pri usporiadávaní klobúkov postupovali trpaslíci tak, že najprv usporiadali skutočné klobúky a potom do usporiadania vložili fiktívne klobúky vždy na posledné možné miesto. Takto je každý reálny klobúk nasledovaný klobúkom rovnakej farby, buď reálnym (ktorý je znova nasledovaný rovnakou farbou) alebo fiktívnym, ktorý je posledný z danej farby v usporiadaní. Preto trpaslíci uspejú práve vtedy, keď náhodné číslo j padne na reálny klobúk v tomto usporiadaní.

Pravdepodobnosť výhry pri tejto stratégii je teda $\frac{t}{t+f-1}$. Ukázať, že táto šanca je najlepšia možná bude pomerne zložité, necháme si to na koniec druhej časti.

2. Pár dôkazov

Od druhej kapitoly ďalej sme rozoberali problémy a ich riešenia, miestami ale bez korektnej matematiky. Preto ďalej zavedieme pojmy, vety a dôkazy, ktoré nám v postupoch doposiaľ slúžili a boli vynechané alebo len okrajovo spomenuté. Ukážeme niektoré riešenia alebo ich časti, ktoré sme pre komplikovanosť vynechali a dokážeme si, že sa trpaslíkom už lepšie dariť nemohlo.

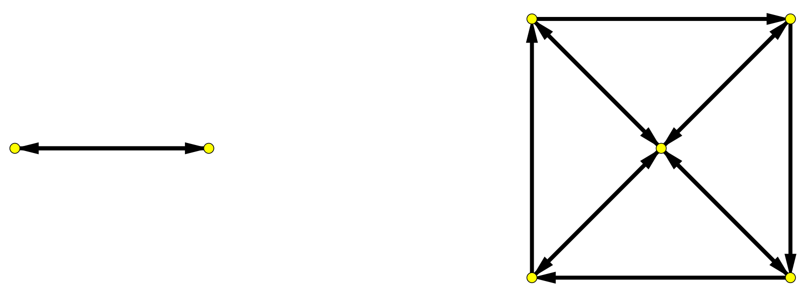
Rozostavenia v hre reprezentujeme grafom. Množinu trpaslíkov označíme T, jednotlivých trpaslíkov budeme značiť malými písmenami s indexom $a_1, a_2, \dots \in T$. Množinu farieb označíme F, jednotlivé farby $f_1, f_2, \dots \in F$ budeme vo farbeniach reprezentovať celými nezápornými číslami.

Definícia 1: (Orientovaný graf) *Orientovaný graf G je usporiadaná dvojica $G = (V,E)$, kde V je neprázdna množina vrcholov grafu a E je množina usporiadaných dvojíc vrcholov (u,v).*

Definícia 2: (Neorientovaný graf) *Neorientovaný graf G je usporiadaná dvojica $G = (V,E)$, kde V je neprázdna množina vrcholov grafu a E je množina neusporiadaných dvojíc vrcholov $\{u,v\}$.*

Neorientovaný graf môžeme chápať ako špeciálny prípad orientovaného grafu, každú neorientovanú hranu môžeme nahradiť dvojicou orientovaných hrán.

Každú úlohu môžeme reprezentovať grafom $G = (V,E)$, kde orientovaná hrana $a_i \longrightarrow a_j$ vedie z vrcholu a_i do vrcholu a_j práve vtedy, keď trpaslík a_i vidí trpaslíka a_j. V prípade, že sa všetci trpaslíci vidia navzájom, necháme hrany grafu neorientované. Množinu trpaslíkov, ktorých vidí trpaslík a, teda množinu vrcholov, do ktorých vedie hrana z vrcholu a nazveme $T_a = \{b \in V,\ (a,b) \in E\}$.



Obr. 2.1: Grafy znázorňujúce úlohy 2.1 (vľavo) a 3.3 (vpravo)

Vo všetkých problémoch platí, že si žiaden trpaslík nevidí vlastný klobúk, uvažujeme teda iba grafy bez smyčiek. Je dobré si uvedomiť, že jeden graf môže reprezentovať viacej úloh. Trpaslíci sa môžu vidieť rovnako v dvoch rôznych úlohách s odlišnými pravidlami.

Definícia 3: (Indukovaný podgraf) *Hovoríme, že graf* $I = (\mathrm{V}',E')$ *je indukovaným podgrafom grafu* $G = (V,E)$*, ak platí* $V' \subseteq V$ *a zároveň* $\forall a,b \in V'\ (a,b) \in E \Rightarrow (a,b) \in E'$.

Definícia 4: (Úplný graf) *Neorientovaný graf nazveme úplný, ak sú každé dva vrcholy grafu spojené hranou.*

Definícia 5: (Bipartitný graf) *Bipartitným grafom nazveme taký, ktorého množina vrcholov sa dá rozdeliť na dve časti, pričom z vrcholov jednej časti vedú hrany iba do vrcholov druhej časti a naopak. Pokiaľ z každého vrcholu jednej časti vedie hrana do každého vrcholu druhej časti, hovoríme o úplnom bipartitnom grafe.*

Definícia 6: (Cyklus) *Cyklusom grafu* $G = (V,E)$ *nazveme postupnosť vrcholov a hrán* $(a_0, e_1, a_1, \ldots, e_t, a_t = a_0)$*, kde* $a_0, a_1, \ldots, a_{t-1} \in V$ *sú navzájom rôzne vrcholy a* $\forall i\ (a_{i-1},a_i) \in E$.

Definícia 7: (Farbenie) *Farbením grafu* $G = (V,E)$ *nazveme funkciu* $\varphi : \mathrm{V} \to F$. *Množinu všetkých takýchto funkcií označíme* $\Phi(V,F)$.

V prípade, že sú množiny T a F ľubovoľné alebo je jasné, o aké množiny sa jedná, budeme písať iba φ a Φ. Pre každého trpaslíka existujú rôzne farbenia, ktoré nedokáže rozlíšiť. Kvôli tomu pridáme nasledujúcu definíciu.

Definícia 8: (Ekvivalencia farbenia) *Majme graf viditeľnosti* $G = (V,E)$*, nech* $a \in V$ *a majme dve farbenia* $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(V,F)$ *pre ktoré platí* $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)\ \forall b \in V_a$. *Potom tieto farbenia nazveme a-ekvivalentné, píšeme* $\varphi_1 \approx_a \varphi_2$.

Takže dve rôzne vyfarbenia klobúkov nazveme a-ekvivalentné, ak trpaslík a medzi nimi nepozná rozdiel, a teda sa líšia iba na niektorých z klobúkov, ktoré a nevidí.

Definícia 9: (Stratégia) *Stratégiou nazveme zobrazenie* $S : T \times \Phi \to F$*, pre ktoré platí, že pre ľuboľného trpaslíka* $a \in T$ *a farbenia* $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ *zobrazenie* S *splňuje podmienku* $\varphi_1 \approx_a \varphi_2 \Rightarrow S(a,\varphi_1) = S(a,\varphi_2)$.

Podmienka vyjadruje iba to, že stratégia nie je založená na náhode a farba, ktorú trpaslík a tipne je jednoznačne určená iba farbami klobúkov, ktoré vidí. To, že trpaslík a trafí farbu svojho klobúku pomocou stratégie S zapíšeme vzťahom $S(a, \varphi) = \varphi(a)$.

Definícia 10: (Minimálna stratégia) *Minimálnou stratégiou* S *nazveme takú stratégiu, pre ktorú platí* $\forall \varphi \in \Phi\ \exists\ a \in T,\ S(a, \varphi) = \varphi(a)$.

Minimálna stratégia teda zaručuje minimálne jeden správny tip pre každé jedno vyfarbenie klobúkov. Okrem minimálnej stratégie prirodzene hľadáme optimálnu stratégiu. Tou rozumieme takú stratégiu, ktorá pre daný problém garantuje najväčší možný počet správnych tipov.

Veta 1 [9, str. 12]: *Majme $|T| = t$ trpaslíkov a $|F| = f$ farieb klobúkov, graf popisujúci rozostavenie a vzájomnú viditeľnosť nech je ľubovoľný. Potom ľubovoľná stratégia S dá priemerne $\frac{t}{f}$ správnych tipov (pričom priemer počítame cez všetky farbenia).*

Dôkaz 1 [9, str. 12]: Vezmime ľubovoľnú stratégiu S a trpaslíka a. Priraďme farby všetkým ostatním trpaslíkom a pevne tak určme, aký bude tip trpaslíka a. Tento tip je správny iba pre jedno z f možných farbení, ktoré môžu nastať. Takže, priemerne sa ľubovoľný trpaslík trafí v jednom z f prípadov, a t trpaslíkov nám dá priemerne $\frac{t}{f}$ správnych odpovedí.

Veta 2 [2, str. 402]: *Nech $|T| = |F| = t$ a nech graf G popisujúci rozostavenie je neorientovaný. Potom existuje minimálna stratégia práve vtedy, keď je G úplny graf.*

Dôkaz 2 [2, str. 402]: $\Longleftarrow$ Existencia stratégie je dokázaná **riešením 2.2** zobecneným pre ľubovoľné t.
$\Longrightarrow$ Implikáciu druhým smerom dokážeme obmenou, a teda ak graf G nie je úplný, tak neexistuje minimálna stratégia. Nech teda existuje dvojica $a,b \in T$, pre ktoré $\{a,b\} \notin E$. Potom pre ľubovoľnú stratégiu S a ľubovoľné farbenie φ je $S(a,\varphi)$ nezávisle na $\varphi(b)$, pretože $b \notin T_a$. To platí tiež opačným smerom, $S(b,\varphi)$ je nezávislé na $\varphi(a)$. Vezmime ľubovoľné farbenie φ také, kde $S(a,\varphi) = \varphi(a)$. Následne zmeňme farbu $\varphi(b)$ tak, aby pri tejto stratégii tiež nastalo $S(b,\varphi) = \varphi(b)$. Táto výmena farieb neovplyvní tip trpaslíka a, takže sa zároveň trafia obaja trpaslíci. Z **vety 1** ale vieme, že pre ľubovoľnú stratégiu S dostaneme priemerne $\frac{t}{t} = 1$ správny tip cez všetky $\varphi \in \Phi$. My sme ukázali, že pre každú stratégiu existuje farbenie, ktoré dá dva správne tipy, a preto musí pre každú stratégiu tiež existovať farbenie, v ktorom nepadne žiaden správny tip.

Veta 3 [2, str. 402]: *Nech $|T| = t$, $|F| = f$ a G je úplny graf, potom existuje stratégia zaručujúca $\lfloor t/f \rfloor$ správnych tipov a neexistuje stratégia zaručujúca $\lfloor t/f \rfloor + 1$ správnych tipov.*

Dôkaz 3 [2, str. 402]: Existencia takejto stratégie je dokázaná riešením 2.3.

Neexistencia stratégie, ktorá by zaručila aspoň $\lfloor t/f \rfloor + 1$ správnych tipov, je priamym následkom vety 1. Ak by totiž takáto stratégia existovala, priemerný počet správnych odpovedí cez všetky $\varphi \in \Phi$ by bol ostro väčší, než $\frac{t}{f}$, čo je spor s vetou 1.

Takto jednoducho sme ukázali, že **riešenia 2.2** a **2.3** zaručia maximálny možný počet uhádnutých farieb.

Definícia 11(Párovanie grafu): *Párovaním neorientovaného grafu nazveme výber hrán $e_1, e_2, \ldots \in E$ takých, že žiadne dve z nich nemajú spoločný vrchol. Pokiaľ* *pre nejaké párovanie P platí, že neexistuje párovanie P' s väčším počtom hrán, nazveme P maximálne.*

Veta Tutte-Berge [10]: *Pre ľubovoľný graf $G = (T,E)$ existuje množina $U \subset T$ taká, že prekaždé maximálne párovanie P platí*

$$|P| = \frac{|T| + |U| - n(G - U)}{2},$$

kde $G - U$ je indukovaný podgraf grafu G s množinou vrcholov $T \setminus U$ a $n(G - U)$ je počet jeho komponentov s nepárnym počtom vrcholov.

Veta 4 [2, str. 402]: *Nech $|T| = t$, $|F| = 2$ a G je neorientovaný graf, nech P je maximálne párovanie na G. Potom maximálny možný počet garantovaných správnych odpovedí je rovný $|P|$.*

Dôkaz 4 [2, str. 403]: Fakt, že počet správnych tipov je aspoň $|P|$ prichádza z riešenia 3.1.

K dokázaniu toho, že maximálny možný počet garantovaných správnych tipov nepresiahne $|P|$, použijeme **Tutte-Bergeho vetu**. Majme graf G a podmnožinu jeho vrcholov U, ktorej existenciu zaručuje **Tutte-Bergeho veta**. Nech $j = n(G - U)$, označme príslušné komponenty $N_1, N_2, \dots N_j$, a zjednotenie všetkých komponentov indukovaného podgrafu $G - U$ s párnym počtom vrcholov označme Y. Postupujme vo farbení nasledovne. Začneme s U, umiestnime tam farby ľubovoľne, predpokladajme pre horný odhad, že sa trpaslíkom z U podarí všetkým uhádnuť svoje farby. Ak máme toto určené, potom farbením komponentu N_i jednoznačne určíme tipy trpaslíkov v N_i, pretože sa vidia iba medzi sebou a prípadne s trpaslíkmi z U. Z **vety 3** vieme, že zaručený počet správnych tipov, ktoré padnú medzi trpaslíkmi v N_i je $\frac{|N_i|-1}{2}$. Rovnako, farbením Y sú určené tipy trpaslíkov z Y a zaručený počet správnych tipov je $\frac{|Y|}{2}$. Takže dohromady počet správnych tipov je zhora obmedzený číslom

$$|U| + \frac{|N_1| - 1}{2} + \frac{|N_2| - 1}{2} + \cdots + \frac{|N_j| - 1}{2} + \frac{|Y|}{2} = \frac{|T| + |U| - j}{2} = |P| \ .$$

Pozrime sa na riešenie 3.4. Úlohe odpovedá úplný bipartitný graf. Ukážeme, že trpaslíci môžu uspieť, ak sa do ľavej rady postaví $l = f - 1$ trpaslíkov a napravo $p = f^{f^{f-1}}$. Takto prekvapivý počet vychádza z nasledujúcej stratégie hádania.

Veta 5 [2, str. 405]: *Majme $|F| = f > 2$ a úplný bipartitný graf G, ktorého časti majú (naľavo) $f - 1$ a (napravo) $f^{f^{f-1}}$ vrcholov. Potom pre problém existuje minimálna stratégia.*

Dôkaz 5 [2, str. 405]: Označme φ_l vyfarbenie ľavej strany G, množinu týchto farbení Φ_l, rovnako φ_p a Φ_p pre pravú stranu. Potom $|\Phi_l| = f^{f-1}$, a teda pravá strana má presne $f^{|\Phi_l|}$ vrcholov. To je rovnako veľa, ako je možných zobrazení $\gamma : \Phi_l \to \{1,2,\dots,f\}$. i-tý trpaslík na pravej strane si vezme jedno takéto zobrazenie γ_i a tipuje farbu $\gamma_i(\varphi_l)$. Ukážeme, že pre takúto stratégiu pravej strany platí, že nech je farbenie φ_p zvolené ľubovoľne, existuje maximálne $f - 1$ rôznych farbení ľavej strany $\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2} \dots$, pre ktoré všetci trpaslíci napravo netrafia svoju farbu. Potom stačí, aby si trpaslík a_i z ľavej strany zobral farbenie φ_{l_i} a svoju farbu tipoval na $\varphi_{l_i}(a_i)$. Takto naľavo zaručia správnu odpoveď, keď pravá strana zlyhá.

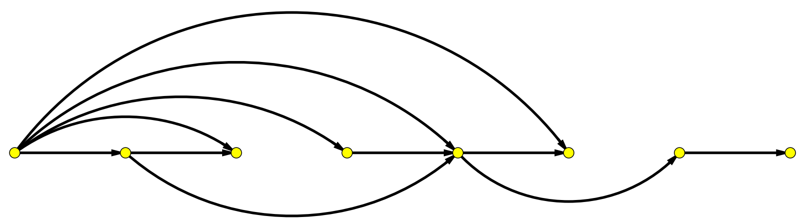
Ostáva ešte ukázať, že pre pevné φ_p existuje maximálne $f-1$ rôznych far-bení φ_{l_1} , φ_{l_2} , . . . , pre ktoré všetci trpaslíci napravo netrafia svoju farbu. Predpokladajme pre spor, že existuje množina f nejakých takýchto farbení ľavej strany $\Phi_l' = \{\varphi_{l_1} \ . \ . \ . \ \varphi_{l_f}\}$. Potom existuje funkcia γ, ktorá Φ_l zobrazí na množinu $\{1{,}2,\dots{,}f\}$ tak, že γ nadobudne f rôznych hodnôt na množine Φ_l'. Pre γ existuje na pravej strane G vrchol b, ktorý háda podľa nej ($\varphi_p(b)$ je pevne dané). Keďže ale $\{\gamma(\varphi_{l_1}),\dots,\gamma(\varphi_{l_f})\}$ obsahuje všetkých f hodnôt, trpaslík b musí trafiť svoju farbu pre jedno z farbení z Φ_l', čím získavame spor s predpokladom.

Na teraz môžeme opustiť druhú časť úloh a pozrieť sa na stratégie z tej tretej. Pre nesymetrickú viditeľnosť použijeme orientované grafy. Na začiatok si ukážeme obecné pravidlo, kedy sa trpaslíkom nepodarí ani jeden správny tip.

Definícia 12: *Majme orientovaný graf $G = (V,E)$, indruktívne definujeme podmnožiny B_i nasledovne. Nech B_0 je množina vrcholov, z ktorých nevychádza žiadna hrana, B_1 je množina vrcholov z ktorých vychádzajú hrany iba do vrcholov z B_0, B_2 množina vrcholov z ktorých vychádzajú hrany iba do B_0 alebo B_1, a tak ďalej. Obecne ak $u \in B_i$, $(u{,}v) \in E \ \Rightarrow \ v \in \cup\{B_j, j < i\}$. Zjednotenie množín $\cup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ označíme B.*

Definícia 13 (Topologické usporiadanie grafu): *Majme orientovaný graf G s n vrcholmi. Topologickým usporiadaním grafu G nazveme priradenie čísel $1,\dots{,}n$ vrcholom tak, že každá hrana vedie z vrcholu s menším číslom do vrcholu s väčším číslom.*

Inak povedané, ak poukladáme vrcholy zľava doprava podľa nejakého topologického usporiadania, všetky hrany budú šípky smerujúce zľava doprava. Je jasné, že iba acyklické grafy sa dajú topologicky usporiadať. Acyklickosť grafu je ale aj postačujúca podmienka nato, aby sa graf dal topologicky usporiadať [11].



Obr. 2.2: Príklad grafu s topologicky usporiadanými vrcholmi

Podobne sme mali usporiadaných trpaslíkov napríklad v **úlohe 1.3**, kde každý trpaslík videl všetkých pred sebou, ale žiadneho za sebou. Ako topologicky usporiadať ľubovoľný acyklický graf môžeme nájsť napríklad v [11].

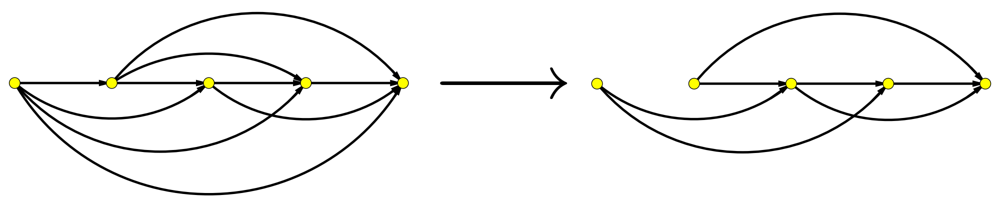
Poznámka 9: V *poznámke 3* sme si uviedli, že bez extra informácie nemajú trpaslíci šancu na úspech. Ak máme totiž trpaslíkov v zástupe, kde všetci vidia len jedným smerom, ľahko môže byť vytvorené farbenie klobúkov, v ktorom nikto neuhádne. Čarodej môže postupovať pri farbení zprava doľava. Trpaslík úplne napravo nikoho nevidí, má svoj tip pevne daný ešte pred farbením, čarodej o ňom vie a dá mu na hlavu inú farbu, potom postupuje doľava. Každý trpaslík určuje svoj tip na základe farieb napravo od neho. Keď k nemu príde čarodej, trpaslík už má svoj tip určený. Ten ale čarodej pozná, trpaslík tak dostane na hlavu inú farbu. Takto sa nikomu zo zástupu nepodarí uspieť.

Podobne to platí pre ľubovoľnú množinu B definovanú vyššie, ako hovorí ďalšia veta.

Veta 6 [9, str. 4]: *Nech $G = (V,E)$ je ľubovoľný orientovaný graf s podmnožinou vrcholov B definovanou vyššie. Potom pre ľubovoľné farbenie vrcholov $V \setminus B$ platí, že sa dá rozšíriť na farbenie všetkých vrcholov φ tak, že žiaden trpaslík z B svoju farbu neuhádne.*

Dôkaz 6 [9, str. 5]: Trpaslíci z B nevidia nikoho mimo B, preto ľubovoľné farbenie vrcholov $V \setminus B$ neovplyvní ich tipy. Množina B neobsahuje cyklus, môžeme ju teda topologicky usporiadať. Farbenie takto usporiadaných vrcholov potom prebieha rovnako ako v *poznámke* **9**, znovu nepadne jediný správny tip.

Môžeme si všimnúť, že obecnú topologicky usporiadanou množinu môžeme dostať aj tak, že odoberieme nezáporný počet hrán z grafu reprezentujúceho úlohu 1.3 pre obecný počet trpaslíkov (na obrázku nižšie pre 5 vrcholov). Odobraním hrán odoberáme informácie, čím nemôžeme zvýšiť počet správnych tipov. Preto ani tu žiaden trpaslík neuspeje.



Obr. 2.3: Odobranie hrán z topologicky usporiadaného grafu

Veta 7 [9, str. 12]: *Nech $|T| = t$, $|F| = 2$ a G je ľubovoľný orientovaný graf, potom existuje minimálna stratégia práve vtedy, keď G obsahuje cyklus.*

Dôkaz 7 [9, str. 12]: $\Longleftarrow$ Implikácia zprava doľava je dokázaná existenciou takejto stratégie v riešení 3.2.
$\Longrightarrow$ Implikáciu zľava doprava dokážeme obmenou - ak je orientovaný graf G acyklický, tak žiadna stratégia nezaručí správny tip. Priamo to vyplýva z faktu, že acyklický graf môžeme topologicky usporiadať, a dostať znovu množinu B, následne použiť **vetu 6**.

Veta 8 [2, str. 403]: *Nech $|T| = t$, $|F| = 2$, nech G je orientovaný graf. Nech $c(G)$ je maximálny počet cyklov v G, ktoré nemajú žiadny spoločný vrchol a nech $o(G)$ je minimálny počet vrcholov, ktoré treba odstrániť, aby sa G stal acyklickým. Potom je počet garantovaných správnych tipov obmedzený zdola $c(G)$ a zhora $o(G)$.*

Dôkaz 8 [2, str. 403]: Dolné obmedzenie je priamym dôsledkom **riešenia 3.2**, každý cyklus nám zaručí minimálne jeden správny tip.

Množinu vrcholov, po odstránení ktorých ostane graf G acyklický, označme O. Po ich odstránení ostane graf acyklický a môžeme ho topologicky usporiadať. Predstavme si, že vrcholy ležia na priamke a všetky hrany vedú z ľava doprava. Napravo od nich vrátime vrcholy z O a doplníme skôr odobrané hrany. Takto jediné hrany grafu, ktoré smerujú doľava, vychádzajú z vrcholov v O. Farbenie grafu vytvoríme tak, že najprv ľubovolne vyfarbíme vrcholy v O a následne postupujeme doľava, rovnako ako v *poznámke 9*. Takto zaručíme, že všetci trpaslíci z $V \setminus O$ neuhádnu svoju farbu, z kadiaľ dostávame hornú hranicu maximálneho garantovaného počtu správnych tipov.

Vráťme sa do druhej kapitoly k úlohám 2.4 a ďalej. Predstavíme si nový pohľad na problém a iný spôsob reprezentácie úlohy grafom.

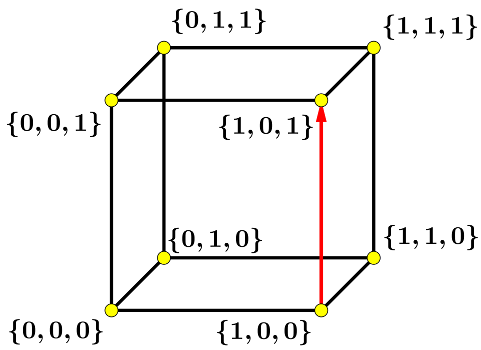
Definícia 1 4 (Graf Q_n): *M ajme g raf r eprezentujúci v rcholy n-dimenzionálnej kocky. Každému z vrcholov priradíme n-ticu jedničiek a nuliek tak, aby sa dva susedné vrcholy líšili iba v jednom čísle (každému z vrcholov sú tak priradené jeho súradnice, ak by bola kocka vhodne umiestnená do priestoru). Takýto graf spolu s očíslovaním jeho vrcholov označíme Q_n.*

Graf Q_n sa líši od doposiaľ zaužívaného grafu G. Tento graf nám tiež bude reprezentovať úlohu, ale inak. Na hlavy trpaslíkov priradia biele alebo čierne klobúky, pre nás reprezentované jedničkami a nulkami. Počet vrcholov na Q_n odpovedá takejto úlohe s n trpaslíkmi, každý vrchol značí jedno možné vyfarbenie φ. Každá hrana spája dva vrcholy, ktoré sa líšia iba v jednej i-tej súradnici. Pre nás to znamená, že hrana reprezentuje možné tipy i-tého trpaslíka (predpokladáme, že trpaslík háda, nateraz vynecháme možnosť mlčať), tieto dva vrcholy sú teda dve $i-$ekvivalentné farbenia. Stratégiu i-teho traslíka stotožníme s orientáciou hrany grafu, smer hrany bude značiť voľbu.

Napríklad, majme hru, ktorú hrajú traja trpaslíci. Tretí trpaslík c vidí bielu farbu na prvom a čiernu na druhom kolegovi. Možnosti farbení na grafe z jeho pohľadu sú vrcholy $\varphi_1 = \{1{,}0{,}0\}$ alebo $\varphi_2 = \{1{,}0{,}1\}$. Dajme tomu, že stratégia káže tipnúť svoju farbu bielu, potom na grafe orientujeme hranu $\{1{,}0{,}0\} \longrightarrow \{1{,}0{,}1\}$, viz. obrázok.

Hľadanie stratégie S hádania trpaslíkov sa nám takto zamieňa s hľadaním orientácie hrán grafu Q_n. Pre ľubovoľné farbenie φ je počet správnych odpovedí rovný počtu hrán vstupujúcich do vrcholu reprezentujúceho φ. To znamená, že minimálny počet správnych tipov, ktoré stratégia garantuje, je rovný minimálnemu počtu vstupných hrán.

Hľadanie optimálnej stratégie teda odpovedá maximalizácii minimálneho stu-



Obr. 2.4: Graf Q_3 s jednou orientovanou hranou

pňa. Teraz nás ale budú zaujímať tzv. vybalancované stratégie.

Definícia 15 (Vybalancovaná stratégia): *Nech hru hrá t trpaslíkov, množina farieb má f prvkov. Stratégiu S nazveme vybalancovanou, ak platí, že pre ľubovoľné farbenie $\varphi \in \Phi$ bude splňať nasledujúcu podmienku. Ak sa pri farbení φ vyfarbí t_1 klobúkov farby f_1, t_2 klobúkov farby f_2 a tak ďalej (platí $t_1 + t_2 + \cdots + t_f = t$), tak sa medzi správnymi tipmi objaví aspoň $\lfloor t_1/f \rfloor$ klobúkov farby f_1, $\lfloor t_2/f \rfloor$ klobúkov farby f_2 a tak ďalej, až $\lfloor t_f/f \rfloor$ správnych tipov klobúkov poslednej farby.*

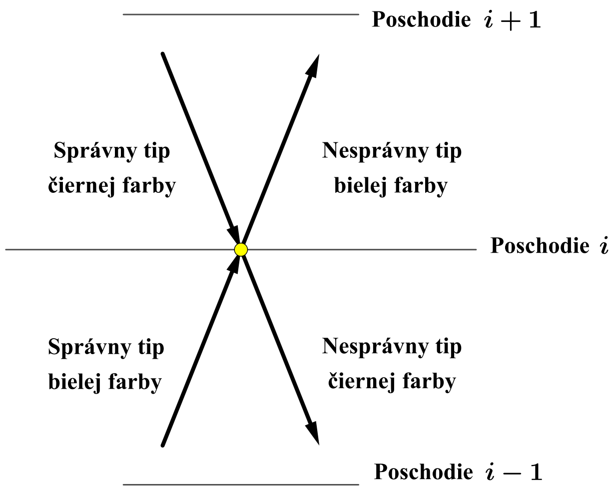
Úlohy 2.4 a 2.5 môžeme preformulovať ako hľadanie vybalancovanej stratégie.

Veta 9 [2, str. 409]: Nech $|T| = t$, $|F| = 2$, G je úplný graf. Potom pre problém existuje vybalancovaná stratégia.

Dôkaz 9 [2, str. 409]: Dôkaz prevedieme konštrunkciou. Čiernu farbu reprezentuje číslo 0, bielu 1. Najprv si usporiadame graf Q_n do „poschodí“, na jednom poschodí budú vrcholy so stejným počtom jedničiek. Označme h_i počet hrán, ktoré vedú z vrcholu na i-tom poschodí nahor a podobne d_i počet hran, ktoré vedú dole.

Majme nejaké farbenie klobúkov φ reprezentované vrcholom na grafe. Hrana smerujúca do tohoto vrcholu zhora reprezentuje správny tip trpaslíka s čiernou farbou, hrana smerujúca do vrcholu zdola znamená správny tip trpaslíka s bielou farbou. Naša vybalancovaná stratégia bude teda taká, v ktorej do každého vrcholu na i-tom poschodí bude smerovať zhora $\lfloor h_i/2 \rfloor$ a zdola $\lfloor d_i/2 \rfloor$ hrán. Tým sa zaručí, že v každom farbení sa trafí „približne polovica“ jak z bielych, tak čiernych klobúkov.

Ak je n párne, potom si môžeme vybrať ľubovoľný počiatočný vrchol grafu a orientovať jednu hranu od neho k inému vrcholu. Pokračujeme postupne ďalej od vrcholu k vrcholu. Jediná podmienka pre nás je, že ak sme orientovali hranu medzi vrcholmi, ktoré boli na i-tom a $i + 1$-vom poschodí a máme možnosť pokračovať hranou medzi týmito poschodiami, potom túto hranu vyberieme ako ďalšiu (ak taká hrana nie je, tak pokračujeme ľubovoľnou možnou). Ak sa nemáme kam

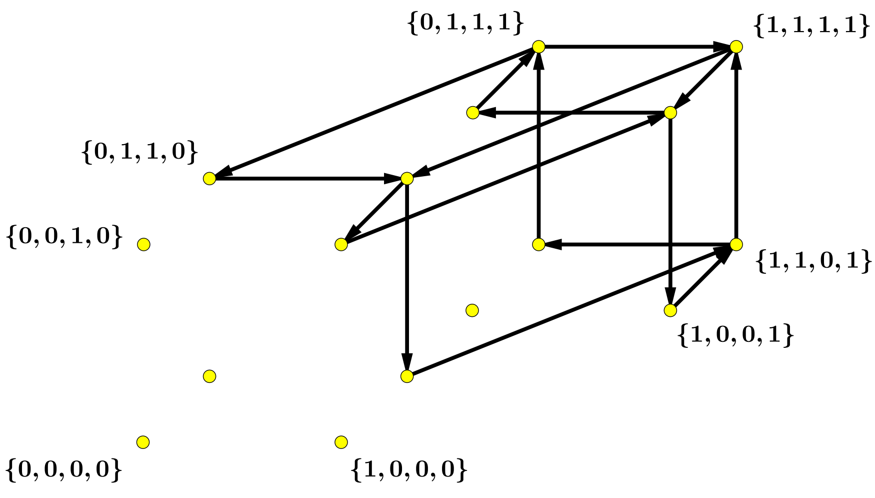


Obr. 2.5: Znázornenie významu orientovaných hrán

pohnúť ďalej, ale ešte niesme hotoví, celý postup zopakujeme.

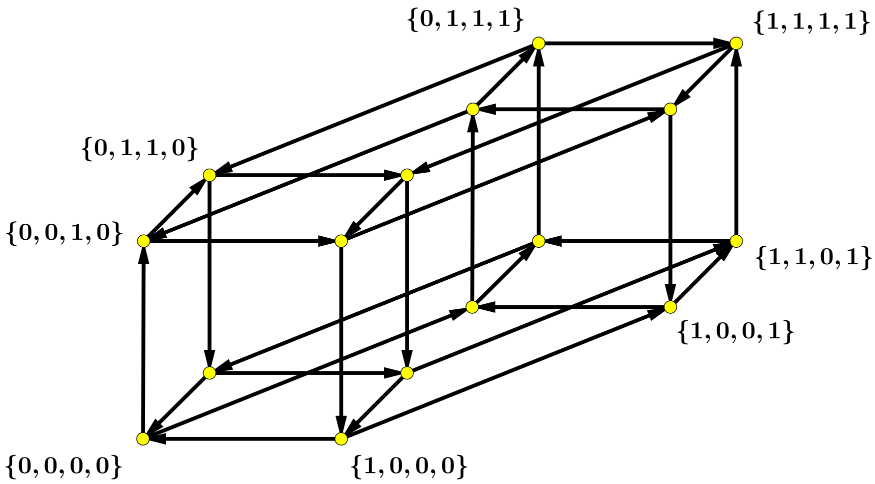
V prípade, že je n nepárne, postup je rovnaký s jedinou výnimkou. Počiatočné hrany musíme vyberať tak, aby smerovali buďto nahor od vrcholu s nepárnym h_i, alebo nadol od vrcholu s nepárnym d_i.

Na obázku 2.6 je algorytmom z **dôkazu 9** vytváraná vybalancovaná stratégia. Ako prvá hrana bola zvolená $\{1{,}1{,}1{,}1\} \rightarrow \{1{,}1{,}1{,}0\}$. Došli možnosti predĺženia orientovanej cesty, ako ďalší počiatočný bod bol zvolený $\{0{,}0{,}0{,}0\}$, z ktorého bola orientovaná hrana do $\{0{,}0{,}1{,}0\}$. Druhým krokom boli vyčerpané všetky hrany a výslednú stratégiu můžeme vidieť na obrázku 2.7.



Obr. 2.6: Prvý krok orientácie hrán grafu Q_4

Ak by sme chceli hľadať stratégie pre viacej než dve farby, obyčajné Q_n a orientácia hrán grafu na to nestačí. Vybalancovanú stratégiu sa stále dá nájsť pre ľubovoľnú dvojicu t,f, postup je ale založený na tokoch v sieťach, preto uvedieme



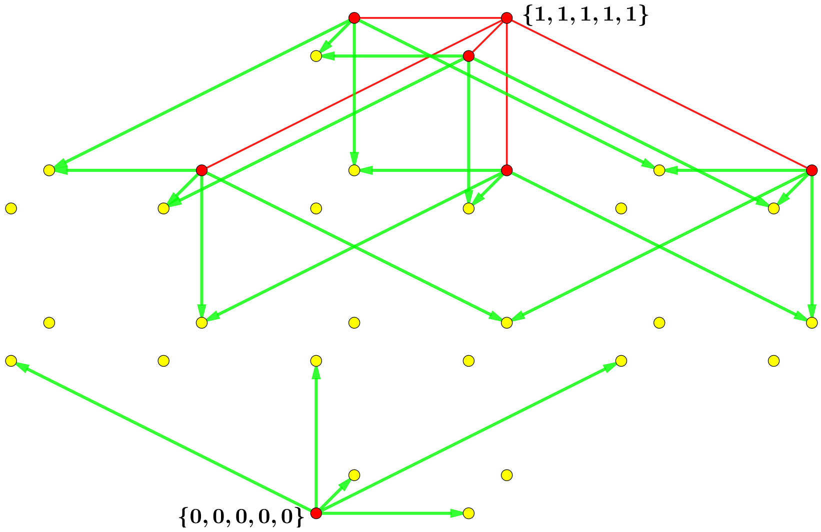
Obr. 2.7: Graf Q_4 s vybalancovanou stratégiou

iba vetu nez dôkazu.

Veta 10 [2, str. 410]: Nech $|T| = t$, $|F| = f$, G je úplný graf. Potom pre problém existuje vybalancovaná stratégia.

Pozrieme sa na posledné úlohy druhej kapitoly, kde trpaslíci dostávajú extra informáciu o obmedzení farieb. Ukážeme si jednu možnú stratégiu úlohy 2.8 a potom ukážeme hornú hranicu počtu správnych tipov. Využijeme pri tom už definovaný graf Q_n.

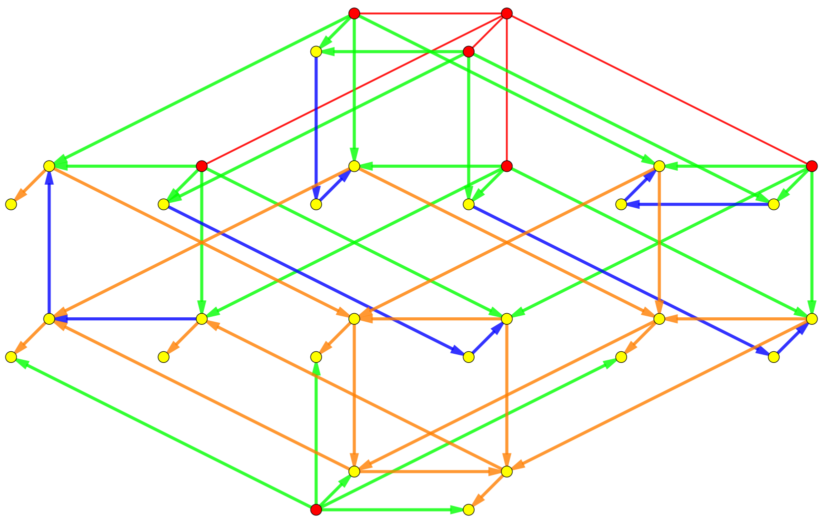
Riešenie 2.8: Necháme trpaslíkov zkonštruovať jedno možné riešenie pomocou Q_5, kroky konštrukcie sú znázornené na obrázkoch. Cieľom je zkonštruovať orientáciu hrán grafu tak, aby do každého vrcholu smerovali 3 hrany. Potom, čo si nakreslia graf, vyznačia si (v obrázku červenou) všetky vrcholy, ktoré reprezentujú farbenia, ktoré nenastanú. Týchto vrcholov je 7 - jeden s farbením {0,0,0,0,0}, jeden s {1,1,1,1,1} a päť vrcholov s jednou nulkou a štyrma jedničkami.



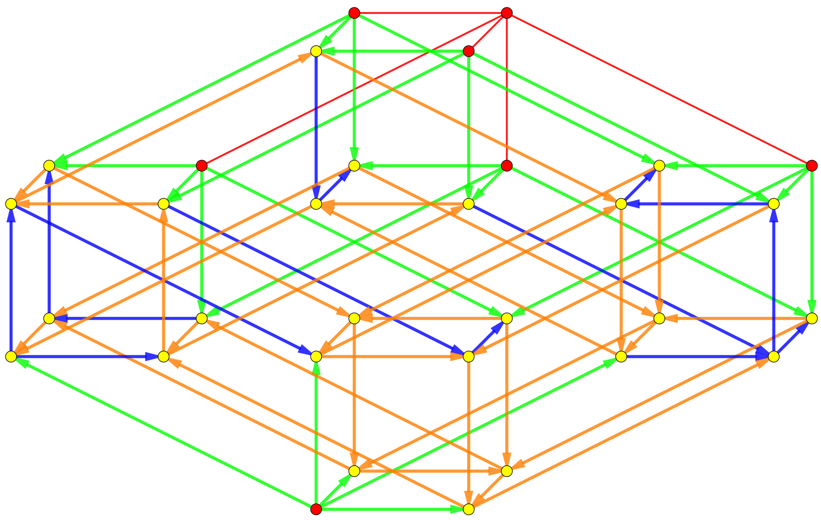
Obr. 2.8: Krok 1

Pri určovaní orientácie hrán do týchto vrcholov nebude smerovať žiadna hrana, preto môžeme orientovať všetky hrany s jedným koncovým červeným vrcholom (v obrázku zelenou). Hrany medzi dvoma červenými vrcholmi (v obrázku červenou) reprezentujú rozhodovanie medzi dvoma nemožnými situáciami, preto ich ignorujeme (viď. obrázok 2.8).

V druhom kroku si vyberieme jeden vrchol, ktorý ešte nemá všetky s ním incidentné hrany orientované. Hranu orientujeme preč, a postupne tvoríme orientovanú cestu (modrá). Zakaždým, keď orientujeme hranu, zkontrolujeme, či nevznikol vrchol, ktorý má dve výstupné alebo tri vstupné hrany. V prípade, že taký vrchol vznikol, orientujeme potrebné hrany (oranžovou) tak, aby do daného vrcholu vstupovali 3 a vystupovali dve hrany. Ak nemusíme doplĺňať žiadne takéto potrebné hrany, pokračujeme v predlžovaní orientovanej modrej cesty. Keď cestu nemôžeme ďalej predĺžiť a nemáme ešte všetky hrany orientované, zopakujeme celý cyklus pre nový počiatočný vrchol (obrázky 2.9 a 2.10).



Obr. 2.9: Orientované hrany po piatich cykloch



Obr. 2.10: Proces dokončený po siedmich cykloch

Počet cyklov a dĺžky modrých ciest môžu byť rôzne. Ako môžeme vidieť, využili sme každú hranu na to, aby bol každý vrchol tipnutý práve tri krát. Do každého vrcholu vedú presne 3 hrany, nezostala jediná voľná hrana.

Preto ľubovoľná stratégia, pri ktorej by pre nejaké farbenie dostali trpaslíci 4 správne tipy, obsahovala tiež farbenie, kde by trafili maximálne 2. Ako teda vyzerajú obecné pravidlá pre maximálny možný garantovaný počet správnych tipov?

Definícia 17 ($H(t,o_1, o_2, \ldots, o_f)$): Majme úlohu s t trpaslíkmi, f farbami, a maj-me dané obmedzenie na maximálny počet klobúkov z jednotlivých farieb.

Potom maximálny počet garantovaných správnych tipov označíme $H(t; o_1, o_2, \ldots, o_f)$, ak počet klobúkov s farbou f_i je maximálne o_i. Predpokladáme, že

$$\sum_{i=1}^{f} o_i \geq t, \quad 1 \leq o_i \leq t \quad \forall i \in \{1, \ldots, f\}.$$

Veta 11 [2, str. 411]: Pre číslo $H(t; o_1, o_2, \ldots, o_f)$ platia nasledujúce vlastnosti:

(i) $H(t; \underbrace{t, t, \ldots, t}_{f\ krát}) = \lfloor t/f \rfloor$

(ii) Ak platí $o_1 + o_2 + \cdots + o_f = t$, potom $H(t; o_1, o_2, \ldots, o_f) = t$

(iii) Ak je číslo m párne alebo f nepárne, potom

$$H(mf - 1; \underbrace{m, m, \ldots, m}_{f\ krát}) = \frac{mf + m - 2}{2}$$

(iv) Pre ľubovoľnú permutáciu σ platí

$$H(t; o_1, o_2, \ldots, o_f) = H(t; o_{\sigma(1)}, o_{\sigma(2)}, \ldots, o_{\sigma(f)})$$

(v) Ak platí $o_i \geq a_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, f\}$, potom

$$H(t; o_1, o_2, \ldots, o_f) \leq H(t; a_1, a_2, \ldots, a_f)$$

(vi) Maximálny počet spránych tipov je zhora obmedzený hodnotou

$$\left\lfloor \sum_{\substack{a_i \leq o_i \ \forall i \in \{1, \ldots f\} \\ a_1 + \cdots + a_f = t-1}} \frac{t!}{a_1! \ldots a_f!} \Bigg/ \sum_{\substack{a_i \leq o_i \ \forall i \in \{1, \ldots f\} \\ a_1 + \cdots + a_f = t}} \frac{t!}{a_1! \ldots a_f!} \right\rfloor.$$

Dôkaz 11 [2, str. 412]: (ii) platí priamo z definície, pretože v tomto prípade sú počty klobúkov jednotlivých farieb dané a každý trpaslík tak ihneď vie, ktorá je ta jeho.

(v): Tvrdenie vyplýva z toho, že ak sú jednotlivé počty farbieb obmedzené číslami $a_1, \ldots, a_f$, potom sú určite odmedzené aj číslami $o_1, \ldots, o_f$.

(vi): Na tvrdenie využijeme myšlienku z Q_t, ale zobecníme pre ľubovoľné množstvo farieb. Namiesto t-tice jedničiek a nuliek bude farbenie reprezentovať t-tica čísel z $0, \ldots, f-1$. Ak by sme nemali obmedzenia pre počty klobúkov jednotlivých farieb, bolo by možných farbení t^f. Pre trpaslíka a by boli a-ekvivalntné farbenia f-tice farbení líšiacich sa farbou jeho klobúka. Jeho tipom bude vybra-nie a „označenie“ jedného z týchto farbení. Napríklad, majme troch trpaslíkov a tri farby, prvý trpaslík vidí {?, 2,0}. Má na výber tri možnosti, {0, 2,0}, {1, 2,0} a $\{2,2,0\}$. Dajme tomu, že jeho stratégia mu káže vybrať možnosť $\{0,2,0\}$, tak ju označí.

Dohromady vedia trpaslíci garantovať počet správnych tipov rovný tomu, koľko krát je označené najmenej označované farbenie. Ideálna stratégia rozmiestni označenia všetkých trpaslíkov rovnomerne po všetkých farbeniach. Preto

$$H(t; o_1, o_2, \ldots, o_f) \leq \left\lfloor \frac{\text{počet všetkých označení farbení}}{\text{počet všetkých farbení}} \right\rfloor.$$

Koľko označení vrcholov máme? Trpaslík b má jedno označenie pre každú skupinu b-ekvivalentných farbení (tieto skupiny môžu mať rôzne počty prvkov, záleží na obmedzení farieb). To znamená, že dostaneme jedno označenie pre každú kombináciu farieb pre zvyšných $t-1$ trpaslíkov. Koľko takých kombinácií je? Vyberme $f-1$ ticu čísel $a_i \leq o_i$ tak, aby $a_1+\cdots+a_f = t-1$, to sme vybrali jednu možnosť, koľko klobúkov z každej farby použijeme. Koľkými spôsobmi ich môžeme rozdeliť na hlavy? Jedná sa o permutácie s opakovaním, takže dostávame $\frac{(t-1)!}{a_1!\cdot a_2!\ldots a_f!}$ možných rozmiestnení. To dostaneme pre každý výber čísel a_i a možnosti sčítame. Na záver, toto môžeme spraviť pre každého z t trpaslíkov, dohromady dostávame požadovaný výraz v čitateli

$$t \cdot \sum_{\substack{a_i \leq o_i \ \forall i \in \{1,\ldots f\} \\ a_1+\cdots+a_f = t-1}} \frac{(t-1)!}{a_1!\ldots a_f!} = \sum_{\substack{a_i \leq o_i \ \forall i \in \{1,\ldots f\} \\ a_1+\cdots+a_f = t-1}} \frac{t!}{a_1!\ldots a_f!}.$$

Menovateľ zlomku získame rovnako, spočítame všetky možné farbenia všetkých t trpaslíkov a dostávame požadovaný zlomok.

(iii): Z podmienok úlohy plynie, že každé farbenie bude obsahovať $m-1$ klobúkov z jednej farby a m klobúkov z $f-1$ zvyšných farieb. Určíme maximálny možný počet garantovaných správnych odpovedí, podobne ako v (vi), najprv pre všetkých trpaslíkov, ktorí svoju farbu nevedia hneď a potom k nim pripočítame $m-1$ správnych tipov trpaslíkov, ktorí z každej okrem jednej farby vidia m klobúkov.

Vyberieme dve farby, z ktorých trpaslík uvidí iba $m-1$ klobúkov, tie rozmiestnime na hlavy, potom rozmiestnime zvyšné, z každej farby po m. Takže počet označení je

$$(mf-1) \cdot \binom{f}{2} \cdot \frac{(mf-2)!}{(m-1)!\cdot(m-1)!\cdot m!\ldots m!}.$$

Celkový počet možných farbení získlame tak, že vyberieme jednu z f farieb, z ktorej bude iba $m-1$ klobúkov a potom znova premurácia s opakovaním.

$$f \cdot \frac{(mf-1)!}{(m-1)!\cdot m!\ldots m!},$$

takže po dosadení do zlomku sa nám väčšina faktoriálov zkráti a zostane

$$\left\lfloor \frac{(mf-1)\cdot\binom{f}{2}\cdot\frac{(mf-2)!}{(m-1)!\cdot(m-1)!\cdot m!\ldots m!}}{f\cdot\frac{(mf-1)!}{(m-1)!\cdot m!\ldots m!}} \right\rfloor = m \cdot \frac{f-1}{2}$$

Po pričítaní $m-1$ garantovaných správnych tipov, ktoré sme na začiatku dali bokom dostávame hornú mez $\frac{mf+m-2}{2}$.

Chceme teda prísť so stratégiou garantujúcou horný odhad tipov. Každá t-tica a-ekvivalentných farbení φ_a má dve možnosti. Buďto obsahuje jedno farbenie, ktoré sa dá označiť (pokiaľ je a trpaslík, ktorý vidí m klobúkov z každej farby okrem jednej), alebo obsahuje dve farbenia, ktoré sa dajú označiť (ak a nevie hneď určiť, akú má farbu). Každý vrchol sa nachádza v práve $m-1$ t-ticiach prvého typu, jedna za každý klobúk z menšinovej farby a v práve $t-(m-1)=mf-m$ t-ticiach druhého typu.

Vytvoríme bipartitný graf, ktorého pravá strana vrcholov sú farbenia, ktoré ešte neboli označené a na ľavej strane sú t-tice a-ekvivalentných farbení, v ktorých ešte nebolo označené farbenie. Pokiaľ môže nejaká t-tica označiť nejaké farbenie, spojíme ich hranou. Takto do každého farbenia vstupuje $mf-m$ hrán a do každej t-tice práve dve. Na pravej strane vytvoríme $\frac{mf-m}{2}-1$ (z podmienky je $mf-m$ párne) kópií každého vrcholu a rozdelíme hrany originálneho vrcholu medzi kópie tak, aby mal každý vrchol stupeň 2. Teraz zostáva orientovať hrany, to je ale triviálne, keďže sme vlastne zkonštruovali jeden veľký cyklus. Do každého vrcholu tak vstupuje práve jedna hrana, teda je každé z farbení tipnuté $\frac{mf-m}{2}$ krát.

Ak k tomu pridáme $m-1$ garantovaných správnych tipov zo začiatku, dostávame požadova-nú hodnotu $\frac{mf+m-2}{2}$.

Ako príklad môžeme využitím vety 11 potvrdiť, že riešenia úloh 2.7 a 2.9 sa už zlepšiť nedajú:

2.7:

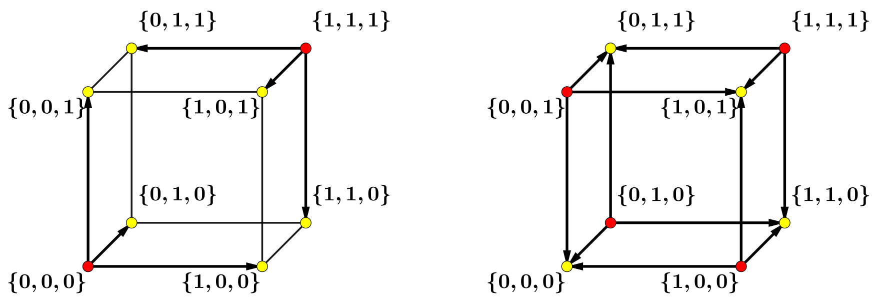
$$H(5{,}3{,}3)=\left\lfloor\frac{\frac{5!}{3!\cdot 1!}+\frac{5!}{2!\cdot 2!}+\frac{5!}{1!\cdot 3!}}{\frac{5!}{3!\cdot 2!}+\frac{5!}{2!\cdot 3!}}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{70}{20}\right\rfloor=3$$

2.9:

$$H(4k-1{,}2k{,}2k)=\frac{4k+2k-2}{2}=3k-1$$

Poďme sa pozrieť na **úlohu 4.3**. Výhra prichádza v prípade, že svoju farbu správne uhádne aspoň k trpaslíkov. K riešeniu opäť použijeme graf Q_n. Trpaslíci v hre môžu mlčať, čo budeme v grafe Q_n reprezentovať neorientovaním hrany. V grafe bude výherné farbenie každý vrchol, do ktorého vstúpi aspoň k hrán a žiadna z neho nevychádza. Farbenie, v ktorom trpaslíci neuspejú je vrchol, ktorý má buď menej než k hrán, ktoré do neho vchádzajú, alebo má aspoň jednu hranu, ktorá z neho vychádza. Na obrázku sú znázornené grafy Q_3, jeden pre úlohu s $k=1$ (naľavo), druhý pre $k=3$ (napravo). Všimnime si tiež, že graf naľavo má hrany orientované presne podľa stratégie z **úlohy 4.1**.

V grafoch sú víťazné vrcholy označené žltou farbou, červenou zase vrcholy, v ktorých trpaslíci neuspejú. O chvíľu týmto množinám pridáme špeciálne pomenovanie. Najprve ale označme maximálnu možnú pravdepodobnosť výhry v hre s t trpaslíkmi, kde sa požaduje uhádnutie aspoň k farieb $P_{t,k}$.



Veta 12 [6]: Pre maximálnu možnú pravdepodobnosť $P_{t,k}$ platí

$$P_{t,k} \leq \frac{t}{t+k} \quad .$$

Dôkaz 12: Majme pre daný počet k nejaký ideálny počet t a graf Q_n s 2^t vrcholmi. Majme nejakú ideálnu stratégiu, v ktorej vyberieme z vrcholov grafu a orientujeme z nich všetky hrany smerom von. Týchto z vrcholov sú všetky farbenia, v ktorých prehráme, môžeme teda písať

$$P_{t,k} = 1 - \frac{z}{2^t}.$$

Ak rozdelíme hrany zo z vrcholov rovnomerne medzi zvyšných $2^t - z$ vrcholov, každému pripadne $\lfloor z \cdot t/(2^t - z) \rfloor$ hrán, čo má byť naše požedované k. Dostávame tak rovnicu

$$\lfloor z \cdot t/(2^t - z) \rfloor = k.$$

Z toho vieme vyvodiť nerovnosť

$$z \cdot t \geq (2^t - z) \cdot k \quad .$$

Tú môžeme ďalej upraviť na

$$z \cdot (t+k) \geq 2^t \cdot k$$

$$z \geq 2^t \cdot \frac{k}{t+k}.$$

Nerovnosť dosadíme do rovnice pre $P_{t,k}$

$$P_{t,k} \leq 1 - \frac{2^t \cdot \frac{k}{t+k}}{2^t} = 1 - \frac{k}{t+k} = \frac{t}{t+k}$$

Definícia 18: Podmnožinu vrcholov $D \subset V$ neorientovaného grafu $G = (V,E)$ nazveme k-domi-nantnou, pokiaľ je každý vrchol $v \in V \setminus D$ spojený hranou s aspoň k vrcholmi v D.

Veta 13 [6]: Nech D je k-dominantná množina vrcholov grafu Q_n s minimálnym počtom vrcholov, potom

$$P_{t,k} = 1 - \frac{|D|}{2^t}.$$

Dôkaz 13 [6]: Majme k-dominantnú množinu D, stratégia jednotlivých trpaslíkov by bola nasledovná. Na základe toho, čo vidí, vyberá trpaslík z dvoch možných farbení φ_1 a φ_2. Ostane mlčať, ak sa ani jedno z týchto farbení nenachádza v D. Pokiaľ sa jedno z týchto farbení nachádza v množine D, trpaslík tipne to druhé, ktoré v nej nie je. Pri použití tejto stratégie vyhrajú trpaslíci vtedy, keď je skutočné farbenie vrcholom mimo D. Ak sa totiž farbenie reprezentované vrcholom v, ktorý sa nenachádza v množine D, existuje (aspoň) k vrcholov neležiacich v D spojených hranou s vrcholom v. Tieto hrany reprezentujú voľbu nejakého trpaslíka, kde práve jeden z nich je v D, a teda $|D|$ volieb týchto trpaslíkov bude správne. Dostávame tak nerovnosť

$$P_{t,k} \geq 1 - \frac{|D|}{2^t}.$$

Opačnú nerovnosť získavame nasledovne. Majme nejakú stratégiu zaručujúcu výhru s pravdepodobnosťou $P_{t,k}$. Vezmime množinu D_0 vrcholov reprezentujúcich farbenia, v ktorých trpaslíci neuspejú. Potom platí $|D_0| = (1 - P_{t,k}) \cdot 2^n$ (fakt platí priamo z definície výhernej pravdepodobnosti). Ukážeme, že množina D_0 je k-dominantná a budeme hotoví. Pre každý vrchol $v \notin D_0$ aspoň k trpaslíkov $a_1, \dots a_k, \dots$ trafí svoju farbu. To ale znamená, že máme aspoň k vrcholov, z ktorých vedú hrany do v, pre každé výherné v. To robí z D_0 k-dominantnú množinu, čím dostávame nasledujúce nerovnosti:

$$|D| \leq |D_0| = (1 - P_{t,k}) \cdot 2^n$$

$$P_{t,k} \leq 1 - \frac{|D|}{2^t},$$

čím je rovnosť dokázaná.

Definícia 19: Rozdelenie vrcholov grafu Q_n na dve disjunktné podmnožiny V_1, V_2 označíme (d_1,d_2)-regulárnym rozdelením, ak je každý z vrcholov vo V_1 spojený hranou presne s d_1 vrcholmi z V_2 a naopak každý vrchol vo V_2 je spojený hranou s presne d_2 vrcholmi z V_1.

Je dobré poznamenať, že $|V_1| = \frac{d_2}{d_1+d_2} \cdot 2^n$ a $|V_2| = \frac{d_1}{d_1+d_2} \cdot 2^n$. Vyplýva to z rovnice pre celkový počet vrcholov a

$$|V_1| + |V_2| = 2^n$$

a z počtu hrán medzi vrcholmi V_1 a V_2

$$d_1|V_1| = d_2|V_2|.$$

Uvedieme pár vlastností pre $P_{t,k}$ a pomerne jednoduchú stratégiu, ktorou sa k nej dostaneme. K tomu všetkému využijeme k-dominantné množiny a (d_1,d_2)-regulárne rozdelenia.

Veta 14 [6]: Pre $P_{t,k}$ platia nasledujúce vlastnosti:

(i) $t_2 > t_1 \Rightarrow P_{t_2,k} \geq P_{t_1,k}$

(ii) $P_{t,k} = \frac{t}{t+k}$ práve vtedy, keď existuje (t,k)-regulárne rozdelenie.

(iii) Pre $n \in \mathbb{N}$ platí $P_{nt,nk} \geq P_{t,k}$

Dôkaz 14 [6]: (i) Majme Q_{t_1} a jeho k-dominantnú množinu D_{t_1}. Tento graf nakopírujeme $2^{t_2-t_1}$ krát a vhodným pospojovaním kópií tak vytvoríme Q_{t_2} (upravíme číslovanie, o to ale teraz nejde). Týmto spôsobom sme kopírovaním $|D_{t_1}|$ vytvorili k-dominantnú množinu D_{t_2} grafu Q_{t_2}, ktorá ale nemusí byť najmenšia možná. Z **vety 13** potom dostávame nerovnosť

$$P_{t_2,k} \geq 1 - \frac{|D_{t_2}|}{2^{t_2}} = 1 - \frac{2^{t_2-t_1}|D_{t_1}|}{2^{t_2}} = 1 - \frac{|D_{t_1}|}{2^{t_1}} = P_{t_1,k}.$$

(ii) $\Leftarrow$ Majme nejaké (t,k)-regulárne rozdelenie (V_1,V_2), potom je V_1 jednou k-dominantnou množinou Q_t a platí $|V_1| = \frac{k}{t+k} \cdot 2^t$ a $|V_2| = \frac{t}{t+k} \cdot 2^t$. Dostávame $P_{t,k} = 1 - \frac{|V_1|}{2^t} = \frac{t}{t+k}$.

$\Rightarrow$ Nech platí $P_{t,k} = \frac{t}{t+k}$, potom z **vety 13** máme nejakú najmenšiu možnú k-dominantnú množinu D a platí $|D| = \frac{k}{t+k} \cdot 2^t$. Potom dvojica $(D,Q_n \setminus D)$ je (t,k)-regulárnym rozdelením.

(iii) Nech $\varphi^t \in \Phi_t$ sú farbenia t trpaslíkov, $\varphi^{nt} \in \Phi_{nt}$ sú farbenia nt trpaslí-kov. Vytvoríme zobrazenie $P : \Phi_{nt} \to \Phi_t$ nasledovne. Rozdelíme nt trpaslíkov do t skupín po n trpaslíkoch. Sčítame farby každej skupiny, za každú skupinu dostaneme jednu farbu a vytvoríme tak farbenie t klobúkov.

$$\varphi^t(a_i) = \sum_{j=ni-n+1}^{ni} \varphi^{nt}(a_j) \qquad i \in \{1,\ldots,t\}$$

Teraz môžeme vysvetliť stratégiu nt trpaslíkov a ukázať, že nie je horšia ako stratégia t trpaslíkov, ktorý požívajú stratégiu S, s ktorou majú pravdepodobnosť výhry $P_{t,k}$. Vezmime si trpaslíkov z i-tej skupiny (tak, ako sme ich rozdelili). Všetci vedia určiť hodnoty $\varphi^t(a_1),\ldots,\varphi^t(a_{i-1}),\varphi^t(a_{i+1}),\ldots,\varphi^t(a_t)$, takže si vedia určiť, ako by sa choval i-tý medzi t trpaslíkmi pri použití stratégie S. Ak by mlčal, budú mlčať aj oni, ak by tipol nejakú farbu, budú tipovať, že súčet farieb i-tej skupiny je práve tá farba (a keďže vedia určiť súčet farieb, vedia určiť svoju farbu). Takto sa celá i-tá skupina z nt trpaslíkov trafí práve vtedy, keď sa trafí i-tý z t trpaslíkov a naopak. Dostávame tak vlastnosť $P_{nt,nk} \geq P_{t,k}$.

Ako posledné ukážeme, že pravdepodobnosť výhry, ktorú trpaslíci dosiahli v **riešení 5.1** je najlepšia možná. Majme teda pravidlá **úlohy 5.1**, potom platí nasledujúca veta.

Veta 14 [12]: Pre ľubovoľnú deterministickú stratégiu t trpaslíkov v hre s f farbami platí, že pravdepodobnosť výhry je maximálne $\frac{t}{t+f-1}$.

V článku [12] sa nachádza odôvodnenie založené na teórii hier a ukazujuce, že rovnaký výsledok platí aj pre nedeterministické stratégie.

Dôkaz 14 [12]: Nech čarodej priraďuje klobúky náhodne nasledujúcim spôsobom. Najprv vyberie neklesajúcu postupnosť z čísel $\{1,\ldots,f\}$ dĺžky t. Takýchto postupností je $\left(\!\binom{t}{f}\!\right) = \binom{t+f-1}{f}$, jedná sa totiž o kombinácie s opakovaním. Následne čísla v postupnosti náhodne poprehadzuje a na základe tejto permutácie priradí klobúky trpaslíkom. Ak označíme f_i počet klobúkov farby i vo farbení φ, môžeme pravdepodobnosť, že čarodej vyberie toto farbenie vyjadriť ako

$$P(\varphi) = \frac{1}{\binom{t+f-1}{t}} \cdot \frac{1}{\frac{t!}{\prod_{i=1}^{f} f_i!}} .$$

Označme P^* pravdepodobnosť, že sa čarodej trafí do farbenia, v ktorom trpaslíci vyhrajú. Naša snaha bude obmedziť P^* zhora hodnotou $\frac{t}{t+f-1}$.

Označme φ_v farbenia, v ktorých trpaslíci vyhrajú, množinu všetkých takýchto farbení Φ_v. Pravdepodobnosť, že sa čarodej trafí do nejakého výherného farbenia označme $P(\varphi_v)$. Potom $P^* = \sum_{\varphi_v \in \Phi_v} P(\varphi_v)$.

Označme farbenie $t-1$ klobúkov φ' a množinu všetkých takýchto farbení Φ'. Označme ϕ náhodný proces, ktorý z výherného farbenia odstráni jeden náhodný klobúk výhernej farby. Ak nejaké farbenie $t-1$ klobúkov vznikne z farbenia φ_v týmto náhodným procesom, označíme ho $\phi(\varphi_v)$.

Pre všetky $\varphi_v \in \Phi_v$ a všetky $\varphi' \in \Phi'$ označme $P(\varphi_v, \varphi')$ pravdepodobnosť, že čarodej vybral farbenie φ_v a že $\varphi' = \phi(\varphi_v)$. Ďalej budeme pracovať s $P(\varphi_v, \varphi')$, pretože

$$P(\varphi_v) = \sum_{\varphi' \in \Phi'} P(\varphi_v, \varphi'),$$

čo môžeme vložiť do $P^* = \sum_{\varphi_v \in \Phi_v} P(\varphi_v)$ a dostať

$$P^* = \sum_{\varphi_v \in \Phi_v} \sum_{\varphi' \in \Phi'} P(\varphi_v, \varphi').$$

V ďalších úpravách sa nám zíde pravdepodobnosť, že zo všetkých farbení $t-1$ klobúkov vyberieme jedno konkrétne farvene $\varphi' \in \Phi'$, ktorú chytro upravíme. Označme g_i počet farieb i vo farbení φ', potom

$$P(\varphi') = \frac{1}{\binom{(t-1)+f-1}{t-1}} \cdot \frac{1}{\frac{(t-1)!}{\prod_{i=1}^{f} g_i!}},$$

ktorú prenásobíme vhodonou konštantou a označíme $Q(\varphi')$

$$Q(\varphi') = \frac{\binom{(t-1)+f-1}{t-1}}{\binom{t+f-1}{t}} \cdot P(\varphi').$$

Ak rovnosť sčítame cez všetky $\varphi' \in \Phi'$, dostaneme

$$\sum_{\varphi' \in \Phi'} Q(\varphi') = \sum_{\varphi' \in \Phi'} \frac{\binom{(t-1)+f-1}{t-1}}{\binom{t+f-1}{t}} \cdot P(\varphi'),$$

konštantu vyberieme pred sumu a upravíme na

$$\sum_{\varphi' \in \Phi'} Q(\varphi') = \frac{(t+f-2)! \cdot t! \cdot (f-1)!}{(t+f-1)! \cdot (t-1)! \cdot (f-1)!} \cdot \sum_{\varphi' \in \Phi'} P(\varphi') = \frac{t}{t+f-1} \cdot 1.$$

Napravo sa objavila jednička, pretože sčítame pravdepodobnosti cez všetky možné javy. Teraz vidíme, načo nám poslúži $Q(\varphi')$. Ak ňou obmedzíme $\sum_{\varphi_v \in \Phi_v} P(\varphi_v, \varphi')$, dostaneme požadované obmedzenie pre P^*. Upravíme $Q(\varphi')$ do tvaru, v ktorom sa objaví neskôr.

$$Q(\varphi') = \frac{1}{\binom{t+f-1}{t}} \cdot \frac{1}{\frac{(t-1)!}{\prod_{i=1}^{f} g_i!}} = \frac{t! \cdot (f-1)!}{(t+f-1)!} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{f} g_i!}{(t-1)!} = \frac{(f-1)! \cdot \prod_{i=1}^{f} g_i!}{(t+f-1)!} \cdot t$$

Upravme teraz $\sum_{\varphi_v \in \Phi_v} P(\varphi_v, \varphi')$. Majme pevne zvolené nejaké $\varphi' \in \Phi'$. Nech $\varphi_{v_1}, \varphi_{v_2}, \ldots, \varphi_{v_k}$ sú všetky farbenia z Φ_v, pre ktoré môže nastať $\phi(\varphi_{v_i}) = \varphi'$ s nejakou nenulovou pravdepodobnosťou. Potom pre toto zvolené φ' môžeme $\sum_{\varphi_v \in \Phi_v} P(\varphi_v, \varphi')$ prepísať ako

$$\sum_{\varphi_v \in \Phi_v} P(\varphi_v, \varphi') = \sum_{i=1}^{k} (\text{Pravdepodobnosť, že } \phi(\varphi_{v_i}) = \varphi') \cdot P(\varphi_{v_i})$$

Chceme zistiť, aká je šanca, že pri odstránení náhodného klobúka z φ_{v_i} skutočne vznikne φ'. Označme $s(i)$ tipovanú farbu pre farbenie φ_{v_i} a označme r_i počet, koľko krát po sebe sa objaví klobúk s farbou $s(i)$ v skupine, z ktorej musíme klobúk odobrať pri tvorbe φ'. Napríklad pre $\varphi_{v_i} = \{3{,}2{,}2{,}2{,}2{,}1{,}2{,}2\}$ a $\varphi' = \{3{,}2{,}2{,}2{,}1{,}2{,}2\}$ dostávame $s(i) = 2$ a $r_i = 4$. Pripomeňme, že f_i značí počet klobúkov i-tej farby vo farbení φ_{v_i}, rovnako g_i vo farbení φ'. Vidíme, že pri tvorbe φ' musíme odobrať jeden z r_i klobúkov, pričom vyberáme náhodne z $f_{s(i)}$ možností (pretože vyberáme jeden z klobúkov farby $s(i)$). Dostávame

$$(\text{Pravdepodobnosť, že } \phi(\varphi_{v_i}) = \varphi') = \frac{r_i}{f_{s(i)}}$$

V prípade $\varphi_{v_i} = \{3{,}2{,}2{,}2{,}2{,}1{,}2{,}2\}$, $\varphi' = \{3{,}2{,}2{,}2{,}1{,}2{,}2\}$ dostávame pravdepodobnosť 2/3, keďže $r_i = 4$ a $f_{s(i)} = 6$.

Pravdepodobnosť výberu farbenia φ_{v_i} už máme určenú. Vieme, že $f_i = g_i$ pre všetky i okrem $s(i)$, pre $s(i)$ platí $f_{s(i)} = g_{s(i)} + 1$. Dostávame tak

$$\sum_{\varphi_v \in \Phi_v} P(\varphi_v, \varphi') = \sum_{i=1}^{k} (\text{Pravdepodobnosť, že } \phi(\varphi_{v_i}) = \varphi') \cdot P(\varphi_{v_i}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{r_i}{f_{s(i)}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\binom{t+f-1}{t}} \cdot \frac{1}{\frac{t!}{\prod_{j=1} f_i!}} \right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{r_i}{f_{s(i)}} \cdot \frac{t! \cdot (f-1)!}{(t+f-1)!} \cdot \frac{\frac{f_{s(i)}!}{g_{s(i)}!} \cdot \prod_{j=1} g_j!}{t!} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} r_i \cdot \frac{(f-1)!}{(t+f-1)!} \cdot \prod_{j=1} g_j! = \frac{(f-1)! \cdot \prod_{j=1} g_j!}{(t+f-1)!} \cdot \sum_{i=1}^{k} r_i$$

Už sme skoro hotoví, stačí ukázať, že $\sum_{i=1}^{k} r_i \leq t$. Nerovnosť ale priamo vyplýva z nasledujúceho argumentu. Majme pevne zvolené φ'. Je iba t miest, kde môžeme do φ' pridať klobúk. Každý takto pridaný klobúk má svoju farbu pevne určenú (pretože trpaslík na danej pozícii určuje svoj tip jednoznačne na základe ostatných farieb, a my pridávame klobúk výhernej farby). Keďže každé r_i určuje počet, z koľkých pozíc možno odstrániť klobúk z φ_{v_i} a zároveň je maximálne t možností, ako pridať klobúk do φ', aby sme dostali nejaké φ_{v_i}, dostávame požadovanú nerovnosť $\sum_{i=1}^{k} r_i \leq t$.

A veľké finále:

$$P^* = \sum_{\varphi_v \in \Phi_v} \sum_{\varphi' \in \Phi'} P(\varphi_v, \varphi') = \sum_{\varphi' \in \Phi'} \sum_{\varphi_v \in \Phi_v} P(\varphi_v, \varphi') =$$

$$= \sum_{\varphi' \in \Phi'} \sum_{i=1}^{k} (\text{Pravdepodobnosť, že } \phi(\varphi_{v_i}) = \varphi') \cdot P(\varphi_{v_i}) =$$

$$= \sum_{\varphi' \in \Phi'} \frac{(f-1)! \cdot \prod_{j=1} g_j!}{(t+f-1)!} \cdot \sum_{i=1}^{k} r_i \leq \sum_{\varphi' \in \Phi'} \frac{(f-1)! \cdot \prod_{j=1} g_j!}{(t+f-1)!} \cdot t =$$

$$= \sum_{\varphi' \in \Phi'} Q(\varphi') = \frac{t}{t+f-1}$$

Záver

Čarodej si sadol za stôl na vrchole veže. Dole sa skupina trpaslíkov balila na cestu domov. Čo nestihli, budú mať na doma. Alebo aspoň ako osvieženie na cestu. Na to, že čarodejovi vo veži straší, im bolo celkom dobre. Určite si to niekedy zopakujú.

Čarodej sedel a uvažoval. Bol to zaujímavý víkend. Ani zďaleka nestihol všetko, čo chcel. Na druhú stranu, ešte nikdy nestihol všetko, čo chcel.

Mohol aspoň spokojne otvoriť knihu o predpovedaní budúcnosti a o duplikovaní vecí. Nalistoval si stránky s logickými hádankami, prelistoval až na koniec kapitoly. Bol spokojný, stihol väčšinu úloh. Vlastne ich stihli trpaslíci, musí ich znova niekedy pozvať.

Čarodej otočil stránku. Zbledol a zavrel knihu. Kapitolu „Nekonečné prípady“ si nechá na inokedy. Načo si kaziť náladu, víkend to bol dobrý.

Človek sa pobavil, pre zmenu so spoločnosťou a nie izolovaný. Snáď aj tým nepriamo zapojeným do príbehu alebo bočným pozorovateľom zážitok priniesol aspoň trochu užitočného a malý kúsok humorného.

Seznam použité literatury

[1] Ezra Brown and James Tanton. A Dozen Hat Problems. *Math Horizons*, 16:22–25, 04 2009.

[2] Steve Butler, Mohammad Hajiaghayi, Robert Kleinberg, and Tom Leighton. Hat Guessing Games. *SIAM Review*, 51:399–413, 05 2009.

[3] Uriel Feige. You can leave your hat on (if you guess its color). *Technical report MCS04-03 of the Weizmann Institute*, 2004.

[4] Norbert Blum. A new approach to maximum matching in general graphs. *International Colloquium on Automata, Languages and Programming* volume 443, pages 586–597, 07 1990.

[5] Ebert T. Application of Recursive Operators to Randomness and Complexity. *Ph.D. Thesis, University of California at Santa Barbara*, 1998.

[6] Tengyu Ma, Xiaoming Sun, and Huacheng Yu. A New Variation of Hat Guessing Games. *ArXiv, abs/1101.0869., Institute for Theoretical Computer Science Tsinghua Uni-versity, Beijing, China*, pages 616–626, 01 2011.

[7] T. Seacrest. Puzzling Stack Exchange: 100 Dwarves vs. the Evil Elf (Question). *puzzling.stackexchange.com/q/18557/2722*, 2015.

[8] T. Seacrest. Puzzling Stack Exchange: 100 Dwarves vs. the Evil Elf (Answer). *puzzling.stackexchange.com/a/18557/2722*, 2015.

[9] Christopher Hardin and Alan Taylor. *The mathematics of coordinated inference. A study of generalized hat problems*, volume 33. 01 2013.

[10] C. Berge. Sur le couplage maximum d"un graphe. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris*, 247, 01 1958.

[11] Valla T. Mareš, M. *Průvodce labyrintem algoritmů*. CZ.NIC, z.s.p.o., 2017.

[12] Deborah Seacrest and Tyler Seacrest. The Prisoner Shouting Puzzle and Variations. *The American Mathematical Monthly*, 126:291–305, 04 2019.

Zoznam obrázkov