



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Lucie Chybová

Šachové úlohy v kombinatorice

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Učitelství matematiky - deskriptivní
geometrie pro SŠ

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Ráda bych na tomto místě upřímně poděkovala vedoucímu diplomové práce panu doc. RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D. za ochotu, pečlivost a trpělivost s jakou přistupoval k připomínkování průběžných verzí. Bez jeho aktivního vedení, včetně vymyšlení zajímavého tématu, by tato práce jistě nevznikla. I proto jsem velmi vděčná za možnost spolupracovat na ní právě s ním.

Speciální poděkování patří mému bratru Janu Procházkovi, který mi dodal odvahu začít na MFF UK studovat a opakovaně mi pomáhal překlenout náročná období studia (zvláště ta zkoušková).

Na závěr děkuji rodičům za to, že jsem měla jejich podporu i v době, kdy se mi nedařilo tak, jak bych si přála.

Název práce: Šachové úlohy v kombinatorice

Autor: Bc. Lucie Chybová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Diplomová práce pojednává o matematických úlohách souvisejících se šachovými figurami. Řešení úloh jsou většinou elementární (někdy však velmi vynalézavá), v některých případech využívají základní poznatky z teorie grafů. Postupně se zaměřujeme na procházky figur po obdélníkových šachovnicích a dále na tzv. nezávislost a dominanci figur na čtvercových šachovnicích. Text je doplněn velkým množstvím obrázků s ukázkami konkrétních řešení daných úloh.

Klíčová slova: šachové figury, graf, procházka po šachovnici, hamiltonovská kružnice, nezávislá množina, dominující množina, nezávislá dominance

Title: Chessboard problems in combinatorics

Author: Bc. Lucie Chybová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: This master thesis discusses various mathematical problems related to the placement of chess pieces. Solutions to the problems are mostly elementary (yet sometimes quite inventive), in some cases rely on basic knowledge of graph theory. We successively focus on different chess pieces and their tours on rectangular boards, and then examine the "independence" and "domination" of chess pieces on square boards. The text is complemented with numerous pictures illustrating particular solutions to given problems.

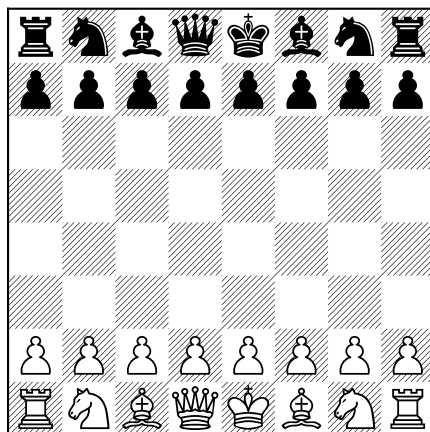
Keywords: chess pieces, graph, tour on a chessboard, Hamiltonian cycle, independent set, dominating set, independent domination number

Obsah

Úvod	2
1 Šachové figury	4
2 Procházky po šachovnici	7
2.1 Jezdcova procházka	7
2.1.1 Nejstarší známé jezdcovy procházky	7
2.1.2 Vybrané zajímavé jezdcovy procházky	9
2.1.3 Opravy neúplných procházek jezdce	11
2.1.4 Existence jezdcovy procházky po šachovnicích různých roz- měrů	13
2.2 Procházky ostatních figur	18
3 Nezávislost na šachovnici	20
3.1 Nezávislost dam	20
3.2 Nezávislost věží	25
3.3 Nezávislost jezdců	26
3.4 Nezávislost střelců	28
3.5 Nezávislost králů	31
4 Dominance na šachovnici	33
4.1 Dominance věží	33
4.2 Dominance králů	34
4.3 Dominance střelců	36
4.4 Dominance dam	40
4.5 Dominance jezdců	45
4.6 Vztah dominance a nezávislosti	46
Závěr	50
Literatura	51
Seznam obrázků	53
Seznam tabulek	55

Úvod

První zmínky o šachu pochází asi ze 6. století. My se ovšem nebudeme zabývat hrou samotnou, ale různými matematickými úlohami, které nějak souvisí se šachovnicí a šachovými figurami (obr. 1).



Obrázek 1: Ukázka šachovnice a figur.

V první kapitole představíme jednotlivé šachové figury, se kterými se v práci budeme dále setkávat. Rozšíříme definici klasické šachovnice 8×8 na šachovnice libovolných rozměrů. Každému poli šachovnice přiřadíme souřadnice a vysvětlíme, jak lze pohyb figur na šachovnici reprezentovat pomocí vhodného grafu.

Druhou kapitolu věnujeme především jezdcově procházce po šachovnici. Nejprve vysvětlíme, jaký je rozdíl mezi otevřenou a uzavřenou procházkou. Shrňme krátce historii této úlohy a ukážeme některé nejstarší a nejzajímavější procházky. Popíšeme způsob, jak lze neúplnou otevřenou jezdcovu procházku upravit na uzavřenou procházku po celé šachovnici. Ukážeme, na které šachovnici $m \times n$ existuje uzavřená jezdcova procházka. Dále ukážeme jednoduchý způsob, jak najít otevřenou jezdcovu procházku na šachovnici $(4k + 1) \times (4k + 1)$. V závěru kapitoly prozkoumáme existenci procházek dalších šachových figur.

Ve třetí kapitole hledáme maximální počet figur, které můžeme na šachovnici rozmístit tak, aby se žádné dvě neohrožovaly (tzv. nezávislost figur na šachovnici). Úlohu postupně vyřešíme pro dámy, věže, jezdce, střelce a krále. U některých figur navíc ukážeme, kolik existuje na dané šachovnici celkem řešení. Kapitola také obsahuje obrázky s několika konkrétními řešeními.

Čtvrtou kapitolu věnujeme hledání minimálního počtu figur, které musíme na šachovnici rozmístit tak, aby pokrývaly všechna její pole (tzv. dominance figur na šachovnici). Úlohu vyřešíme pro věže, krále a střelce. V případě dam uvedeme alespoň věty, které počet potřebných figur odhadují shora a zdola. Opět u některých figur ukážeme, kolik existuje celkem řešení na dané šachovnici a kapitolu doplníme obrázky s konkrétními řešeními. V jejím závěru ukážeme, jaký je vztah mezi dominancí a nezávislostí.

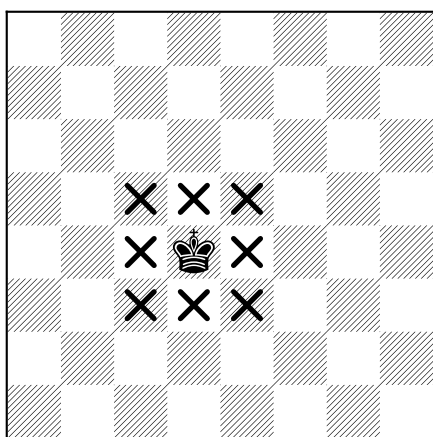
Problémy, které budeme řešit, jsou sice inspirovány šachem, jedná se však především o matematické úlohy. Ze šachu budeme potřebovat pouze pravidla pro pohyb figur po šachovnici, se kterými se seznámíme v kapitole 1. Práce by tedy měla být srozumitelná a zajímavá nejen pro milovníky šachu. Řešení jednotlivých úloh jsou často důmyslná, a přitom elementární. V kapitolách 2, 3, 4 uvidíme, že některé šachové problémy lze řešit elegantněji, pokud je přeformulujeme v řeči teorie grafů. Všechny potřebné pojmy a výsledky nejprve připomeneme, čtenář tedy vystačí se znalostí středoškolské matematiky.

Práce je zaměřená především na sestavení přehledu kombinatorických úloh souvisejících se šachovými figurami. K tématu existuje poměrně velké množství zahraniční literatury (včetně časopiseckých článků), která je na patřičných místech citována. Naším hlavním cílem bylo uceleně sepsat nejdůležitější výsledky ve formě srozumitelné především středoškolským a vysokoškolským studentům, ale i dalším zájemcům.

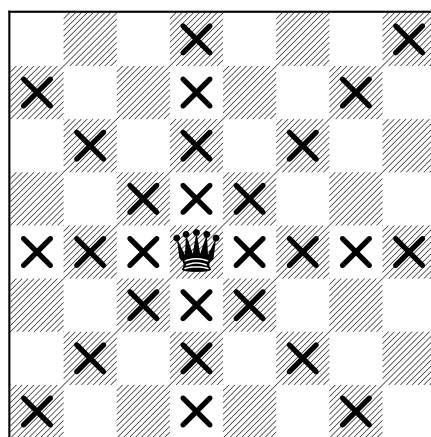
1. Šachové figury

V práci budeme uvažovat nejen klasickou čtvercovou šachovnici o rozměrech 8×8 , ale i obdélníkové šachovnice o rozměrech $m \times n$, kde m značí počet řádků a n počet sloupců. U figur nám nebude záležet na barvě, tj. nebudeme rozlišovat černé a bílé figury. Podstatné pro nás bude pouze to, o jaký typ figury se jedná a jaké tahy s ní tedy můžeme provést. V textu se setkáme s následujícími figurami:

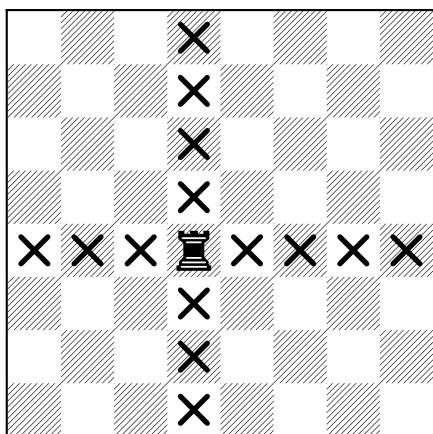
- *Král* se může v jednom tahu posunout o jedno pole v libovolném směru (svisle, vodorovně nebo po úhlopříčce – obr. 1.1a).
- *Dáma* se může v jednom tahu posunout o libovolný počet polí v libovolném směru (obr. 1.1b).
- *Věž* se může v jednom tahu posunout o libovolný počet polí svisle nebo vodorovně (obr. 1.1c).
- *Jezdec (kůň)* se může v jednom tahu posunout nejprve o dvě pole svisle nebo vodorovně a poté o jedno pole ve směru kolmém k předešlému (obr. 1.1d).
- *Střelec* se může v jednom tahu posunout o libovolný počet polí po úhlopříčkách (obr. 1.1e).



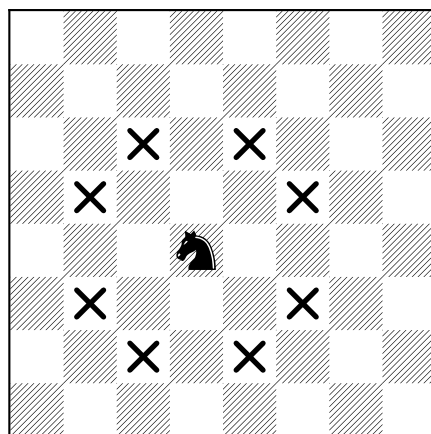
(a) král



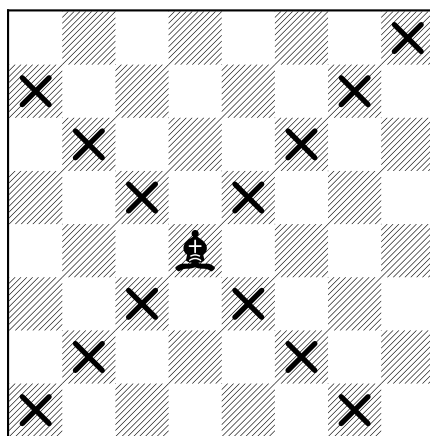
(b) dáma



(c) věž



(d) jezdec (kůň)



(e) střelec

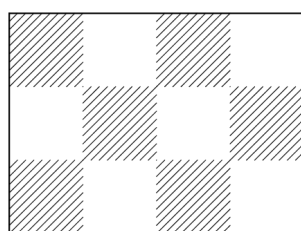
Obrázek 1.1: Pohyb figur po šachovnici.

Na některých místech práce budeme reprezentovat šachovnici a figury na ní umístěné pomocí vhodného grafu.

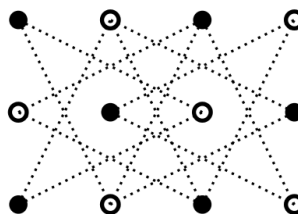
Definice 1 (graf, vrchol a hrana grafu). Graf *definujeme jako dvojici* $G = (V, E)$, kde $V = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ je konečná množina objektů, kterým říkáme vrcholy grafu a $E \subseteq \{\{u_i, u_j\} \mid u_i, u_j \in V, i \neq j\}$ je množina některých dvojic vrcholů, kterým říkáme hrany grafu.

Pohyb libovolné figury po šachovnici můžeme reprezentovat grafem, který zkonstruujeme následujícím způsobem: Každému poli šachovnice odpovídá právě jeden vrchol. Hrany tvoří dvojice vrcholů zastupující pole, mezi kterými může figura provést povolený tah. Grafy odpovídající různým figurám tedy mají stejné množiny vrcholů (pro šachovnici o rozměrech $m \times n$ je to mn vrcholů), ale odlišné množiny hran. Pro příslušný graf používáme označení $K_{m,n}$ v případě, že jde o krále, $D_{m,n}$ v případě dam, $V_{m,n}$ v případě věží, $J_{m,n}$ v případě jezdců a $S_{m,n}$ v případě střelců. Na obrázku 1.2 vidíme, jak lze pohyb jezdce po šachovnici 3×4 převést na graf $J_{3,4}$.

Pole šachovnice $m \times n$ (resp. vrcholy příslušného grafu) budeme číslovat podobným způsobem, jaký je obvyklý u klasické šachovnice 8×8 . Souřadnice levého dolního pole (resp. vrcholu) tedy budou $(1, 1)$, kde první souřadnice značí číslo řádku a druhá číslo sloupce. Navíc bude toto pole (resp. vrchol) mít černou barvu, stejně jako na šachovnici 8×8 . Obarvení zbylých polí (resp. vrcholů) je také znázorněno v obrázku 1.2.



(a) šachovnice 3×4



(b) graf $J_{3,4}$

Obrázek 1.2: Šachovnice a graf odpovídající povoleným tahům jezdce.

2. Procházky po šachovnici

2.1 Jezdcova procházka

Hledání jezdcovy procházky po šachovnici patří mezi nejrozšířenější matematické problémy, které nějak souvisí s šachovnicí a šachovými figurami, proto se jím budeme zabývat v této práci více a řekneme si něco také o jeho historii. Nejprve je ale třeba si vysvětlit, co to vlastně jezdcova procházka po šachovnici je.

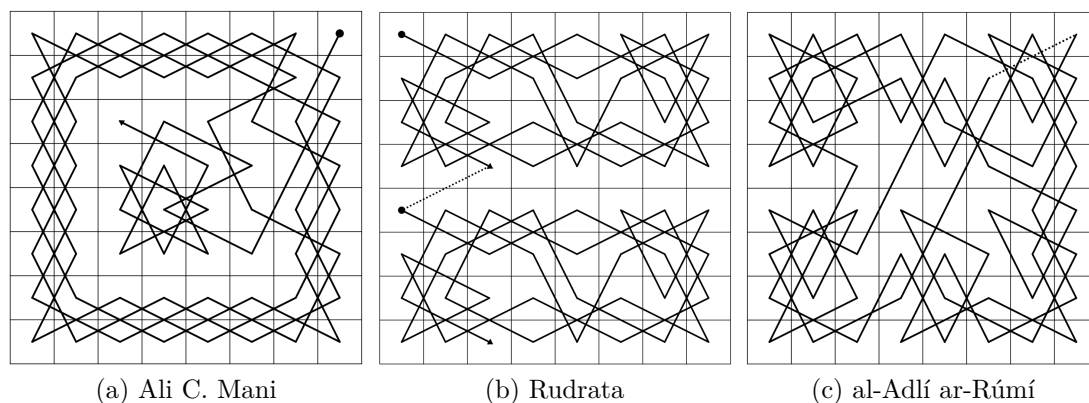
Definice 2 (uzavřená jezdcova procházka). *Jestliže jezdec projde šachovnici $m \times n$ tak, že na každé její pole stoupne právě jednou a dokáže se povoleným tahem dostat na pole, ze kterého začínal, nazýváme danou posloupnost tahů uzavřená jezdcova procházka nebo prostě jen jezdcova procházka.*

Definice 3 (otevřená jezdcova procházka). *Pokud jezdec projde šachovnici $m \times n$ tak, že na každé její pole stoupne právě jednou a nedokáže se povoleným tahem dostat na pole, ze kterého začínal, nazýváme danou posloupnost tahů otevřená jezdcova procházka.*

Poznámka. Na některých místech této práce se procházkami jezdce budou rozumět jak uzavřené, tak otevřené jezdcovy procházky. V takovém případě by však mělo být z kontextu zřejmé, že se nejedná pouze o zkrácený termín uzavřené jezdcovy procházky.

2.1.1 Nejstarší známé jezdcovy procházky

Historii šachů obecně se zabývá v rozsáhlé monografii [12] H. J. R. Murray. Podle něj byli prvními známými objeviteli jezdcovy procházky po šachovnici arabsí učenci Ali C. Mani, Rudrata a al-Adlí ar-Rúmí. Jejich procházky pochází z 9. století a není zcela jasné, která z nich je nejstarší. Na obrázku 2.1 je ovšem hned na první pohled vidět, že se velmi výrazně liší.

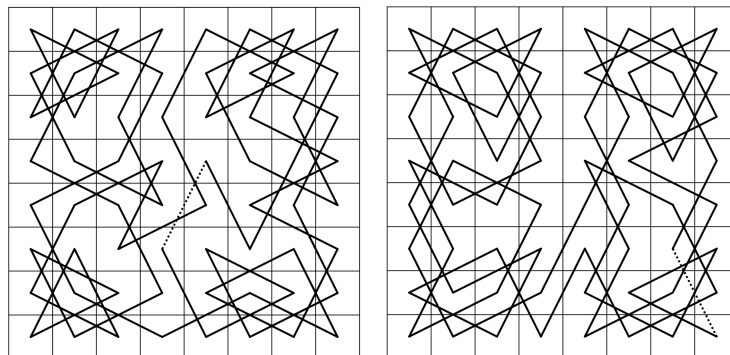


Obrázek 2.1: Ukázky nejstarších dochovaných procházek jezdce.

Ali C. Mani ve své procházce začíná na okrajích šachovnice a teprve potom se přesouvá do jejího středu. Jeho procházka je otevřená stejně jako Rudratova. Rudrata však nejprve prochází horní polovinu šachovnice a po projetí všech jejích

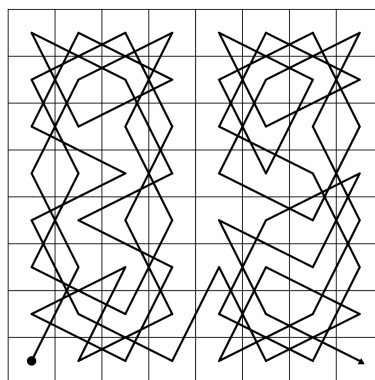
32 polí konstatuje, že by se dolní polovina procházela stejně. My zde pro lepší názornost uvádíme celou procházku. Procházka al-Adlí ar-Rúmího je možná méně přehledná, ale ve výsledku je dokonce uzavřená.

Ze stejné doby pochází dvě jezdcovy procházky, které objevil Muhammad ibn Jahjá as-Súlí. Tento učenec a historik původem z Turkestánu je autorem první vědecké knihy o šachové strategii, která právě také obsahovala obě zmíněné uzavřené jezdcovy procházky (obr. 2.2).



Obrázek 2.2: Muhammad ibn Jahjá as-Súlí.

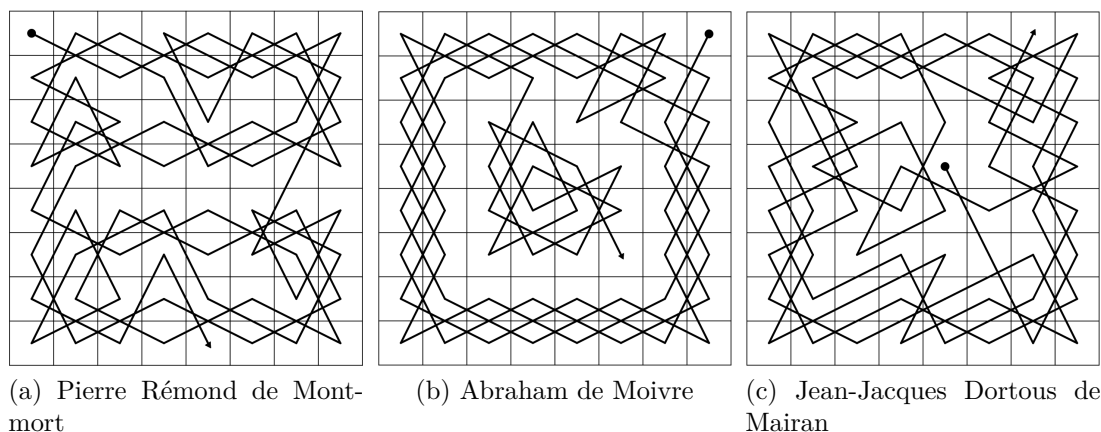
Pokud bychom hledali v evropských pramenech, našli bychom první zmínku o jezdcově procházce v rukopise uloženém nyní v londýnské British Library. Rukopis pochází z druhé poloviny 13. století a obsahuje kromě jiného i otevřenou jezdcovu procházku (obr. 2.3).



Obrázek 2.3: První známá evropská procházka jezdce.

I když se nová řešení objevovala stále, dalo by se říct, že v 18. století byla evropskými matematiky úloha znovu objevena. Při pohledu na první novodobá řešení (obr. 2.4), která našli Pierre Rémond de Montmort, Abraham de Moivre a Jean-Jacques Dortous de Mairan, se totiž zdá, že autoři neznali starší jezdcovy procházky (usuzujeme tak především z toho, že jsou všechny tři otevřené).

Z další historie jezdcovy procházky by stálo ještě za zmínku, že první ucelenou práci pojednávající o této úloze vydal roku 1759 Leonhard Euler a ani zdaleka nebyl poslední. Hledání jezdcovy procházky zůstává dodnes oblíbenou úlohou nejen mezi matematiky. Kromě zmíněné knihy [12], ve které je trochu složitější hledat historii pouze jezdcovy procházky, je velmi zajímavá internetová stránka [11] britského matematika George Jellisse. V seznamu literatury uvádíme odkaz přímo

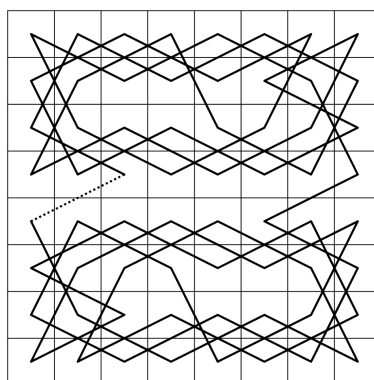


Obrázek 2.4: Ukázky novodobých procházek jezdce.

na sekci věnovanou historii jezdcovy procházky, kterou autor částečně zpracoval podle výše citované knihy [12] H. J. R. Murrayho. Stránka se ale věnuje i dalším šachovým úlohám a jiným matematickým tématům.

2.1.2 Vybrané zajímavé jezdcovy procházky

Někteří lidé se nespokojili pouze se samotným hledáním jezdcovy procházky po šachovnici, ale hledali takové procházky, které by měly další zajímavé vlastnosti. Jak píše v jedné ze svých knih [6] M. Gardner, v roce 1759 Leonhard Euler zveřejnil kromě jiného i uzavřenou jezdcovu procházku (obr. 2.5), ve které postupuje podobně jako Rudrata tak, že nejprve projede jednu polovinu šachovnice, ze které se po projetí všech 32 polí přesune do druhé poloviny. Procházka je však zajímavá především tím, že je souměrná podle středu šachovnice.



Obrázek 2.5: Leonhard Euler – středově souměrná jezdcova procházka.

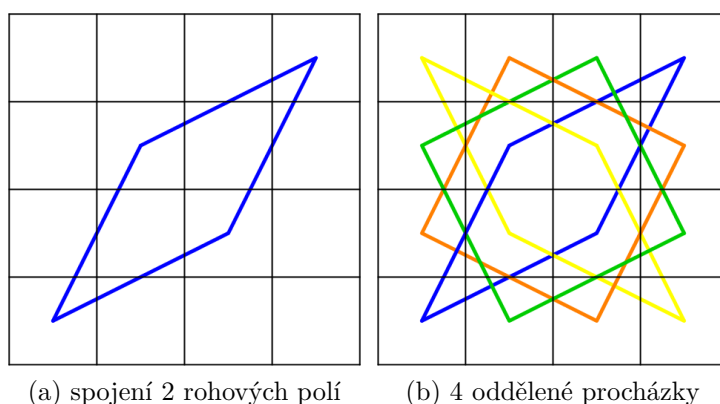
Další zajímavé vlastnosti jezdcových procházek můžeme odhalit, jestliže na jednotlivá pole zapisujeme čísla odpovídající pořadí, ve kterém je navštívujeme. Jak se ve své knize [6] M. Gardner také zmiňuje, v roce 1848 publikoval William Beverley svou procházku jezdce (obr. 2.6), jejíž číselný zápis tvoří semimagický čtverec (součty čísel ve všech řádcích a sloupcích jsou stejné). Dlouho se lidé snažili přijít na to, zda existuje jezdcova procházka, jejíž číselný zápis by tvořil dokonce magický čtverec (kromě sloupců a řádků jsou stejné součty i na úhlo-

příčkách spojujících rohová pole). V roce 2003 vytvořil Jean Charles Meyrignac program, který po několika desítkách dní běhu našel všech 140 různých procházek jezdce, jejichž číselné zápisy tvoří semimagické čtverce, a také se za jeho pomoci podařilo dokázat, že jezdcova procházka, jejíž číselný zápis by tvořil magický čtverec, neexistuje. Veškeré informace o tomto projektu jsou dostupné na internetové stránce <http://magictour.free.fr>, která se mu celá věnuje.

1	30	47	52	5	28	43	54
48	51	2	29	44	53	6	27
31	46	49	4	25	8	55	42
50	3	32	45	56	41	26	7
33	62	15	20	9	24	39	58
16	19	34	61	40	57	10	23
63	14	17	36	21	12	59	38
18	35	64	13	60	37	22	11

Obrázek 2.6: William Beverley – semimagická jezdcova procházka.

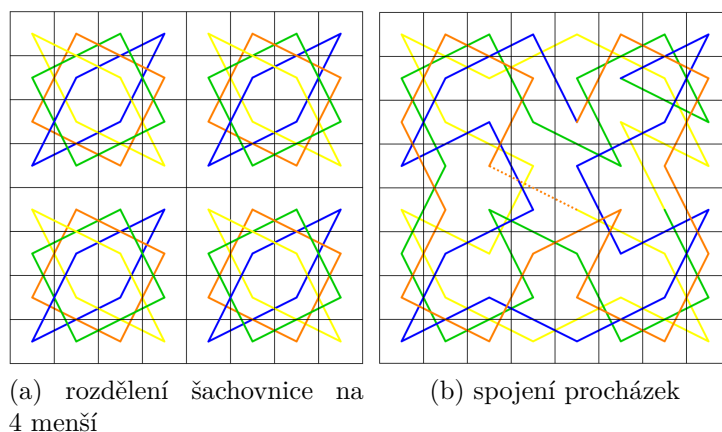
Poslední zajímavá jezdcova procházka, kterou zde uvedeme, pochází z díla [20] Johna J. Watkinse, ve kterém se věnuje matematice spojené se šachovými problémy. Autor zde nejprve ukazuje, že neexistuje uzavřená jezdcova procházka na šachovnici 4×4 . Pokud se totiž například zaměříme na levé dolní pole a pravé horní pole, máme pouze dvě možnosti, jak se na pole a z pole dostat. Pro tato dvě pole se ale tyto možnosti shodují. Kdybychom tedy chtěli do jezdcovy procházky zahrnout zmíněná rohová pole, prošli bychom pouze čtyři pole z celkových šestnácti tak, jak je znázorněno modrou čarou v obrázku 2.7a. Podobná situace nastává pro levý horní a pravý dolní roh šachovnice. Po vynechání zmíněných osmi polí máme opět pouze jednu možnost, jak se dostat na každé ze zbývajících polí a jak se dostat z nich. Celá šachovnice 4×4 se tak rozdělí na čtyři uzavřené jezdcovy procházky po čtyřech polích. V obrázku 2.7b je každá z nich naznačena jinou barvou.



Obrázek 2.7: Neexistence jezdcovy procházky na šachovnici 4×4 .

Watkins v knize dále ukazuje, jak výše zmíněných oddělených procházek po šachovnici 4×4 využil L. Euler při hledání jezdcovy procházky po klasické ša-

chovnici 8×8 . Tu si Euler rozdělil na čtyři šachovnice 4×4 a na každé si vyznačil i uvedené uzavřené procházky po vybraných čtyřech polích (obr. 2.8a). Poté si vybral jednu barvu, projel postupně všechna pole této barvy v každém ze čtyř čtverců 4×4 a po jejich projetí se přesunul povoleným tahem na další barvu. Takto se mu podařilo projet všechna pole šachovnice a dokonce celou jezdcovu procházku po šachovnici uzavřít (obr. 2.8b).



Obrázek 2.8: Leonhard Euler – jezdcova procházka spojující šestnáct oddělených procházek.

2.1.3 Opravy neúplných procházek jezdce

Neúplná jezdcova procházka je taková posloupnost tahů, ve které jezdec smí na každé pole vstoupit nejvýše jednou, neprojde však celou šachovnicí. Pokud bychom bez použití počítače chtěli najít uzavřenou jezdcovu procházku, mohli bychom samozřejmě zkusmo provádět tahy jezdce po šachovnici tak dlouho, dokud bychom nějakou uzavřenou procházku nenašli. Walter William Rouse Ball však ve své knize [1] popisuje heuristický postup L. Eulera, publikovaný v roce 1759, kterým lze upravit neúplnou otevřenou jezdcovu procházku na uzavřenou jezdcovu procházku po celé šachovnici. Stejný postup je popsán také v článku [17] Eda Sandifera a i my si ho zde nyní na vlastním příkladu podrobně vysvětlíme.

V první fázi se snažíme projít jezdce co nejvíce polí šachovnice. V našem případě jsme zvolili podobnou taktiku jako Ali C. Mani a projíždíme nejprve okraje šachovnice a pak teprve se přesouváme k jejímu středu. Tímto způsobem se nám podařilo projít 63 polí (obr. 2.9).

Ve druhé fázi se budeme snažit uzavřít tuto neúplnou procházku. Vyhledáme pole, na která se lze povoleným tahem jezdce dostat z prvního pole naší procházky (v obrázku 2.10a jsou označena oranžově). Na pole s číslem 1 se lze dostat pouze z polí s čísly 2 a 12. Číslo 2 tedy ponecháme na svém místě a číslo 12 musí být posledním polem naší zatím neúplné uzavřené procházky. Protože nezáleží na směru procházky (šachovnici můžeme procházet od čísla 1 až po číslo 63 nebo naopak od čísla 63 po číslo 1 a stále budeme provádět povolené tahy jezdce), předpokládejme nyní, že se na číslo 12 posuneme z čísla 13, na číslo 13 z čísla 14, ..., na číslo 62 z čísla 63. Nyní vyhledáme pole, ze kterých se lze dostat povoleným tahem jezdce na pole s číslem 63 naší neúplné procházky (v obrázku 2.10b jsou

48	21	34	9	46	19	32	7
35	10	47	20	33	8	45	18
22	49		63	52	61	6	31
11	36	51	60	55	58	17	44
50	23	38	57	62	53	30	5
37	12	25	54	59	56	43	16
24	39	2	27	14	41	4	29
1	26	13	40	3	28	15	42

Obrázek 2.9: Neúplná otevřená procházka jezdce.

označena červeně). Mezi těmito poli se snažíme najít pole s co nejvyšším číslem, které je však menší než 12, neboť pole 12–63 jsme již projeli. Tyto podmínky splňuje pole s číslem 10. Naši neúplnou otevřenou procházku tedy upravíme na uzavřenou tak, že projdeme pole 1–10, z pole s číslem 10 pokračujeme na pole s číslem 63, odtud pozpátku až na pole s číslem 12 a z něj zpět na pole s číslem 1 (obr. 2.10c).

48	21	34	9	46	19	32	7	48	21	34	9	46	19	32	7	26	53	40	9	28	55	42	7
35	10	47	20	33	8	45	18	35	10	47	20	33	8	45	18	39	10	27	54	41	8	29	56
22	49		63	52	61	6	31	22	49		63	52	61	6	31	52	25		11	22	13	6	43
11	36	51	60	55	58	17	44	11	36	51	60	55	58	17	44		38	23	14	19	16	57	30
50	23	38	57	62	53	30	5	50	23	38	57	62	53	30	5	24	51	36	17	12	21	44	5
37	12	25	54	59	56	43	16	37	12	25	54	59	56	43	16	37	62	49	20	15	18	31	58
24	39	2	27	14	41	4	29	24	39	2	27	14	41	4	29	50	35	2	47	60	33	4	45
1	26	13	40	3	28	15	42	1	26	13	40	3	28	15	42	1	48	61	34	3	46	59	32

(a) pole dostupná z pole 1 (b) pole dostupná z pole 63 (c) neúplná uzavřená procházka

Obrázek 2.10: Uzavření neúplné otevřené procházky jezdce.

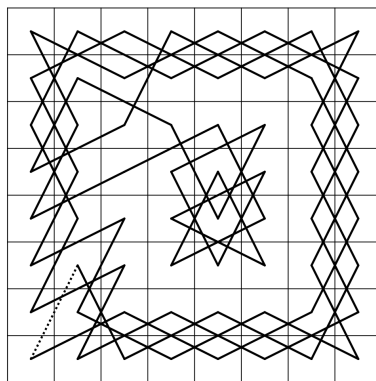
V poslední fázi je ještě třeba začlenit do naší uzavřené procházky zbývající dvě pole, která jsme zatím vynechali. Výhodou je, že se lze z jednoho na druhé dostat povoleným tahem jezdce, a proto by se nám jejich začlenění mělo podařit provést v jednom kroku. Volná pole si označíme dvěma různými barvami (obr. 2.11a). Podobně jako v předchozím kroku vyhledáme pole, na která se lze dostat povoleným tahem jezdce z oranžového pole (v obrázku 2.11b jsou označena oranžově) a pole, na která se lze dostat z červeného pole (v obrázku 2.11b jsou označena červeně). Mezi těmito obarvenými čísly se snažíme najít taková dvě čísla, která mají co nejmenší rozdíl a každé z nich má jinou barvu. Tyto podmínky splňují čísla 9 a 10. Protože na sebe tato čísla navazují a z červeného pole se dá přejít na oranžové pole, upravíme procházku tak, že projdeme pole 1–9, z pole 9 pokračujeme na červené a oranžové pole a odtud pokračujeme čísly 10–62 (obr. 2.11c).

26	53	40	9	28	55	42	7	26	53	40	9	28	55	42	7	28	55	42	9	30	57	44	7
39	10	27	54	41	8	29	56	39	10	27	54	41	8	29	56	41	12	29	56	43	8	31	58
52	25		11	22	13	6	43	52	25		11	22	13	6	43	54	27	10	13	24	15	6	45
	38	23	14	19	16	57	30		38	23	14	19	16	57	30	11	40	25	16	21	18	59	32
24	51	36	17	12	21	44	5	24	51	36	17	12	21	44	5	26	53	38	19	14	23	46	5
37	62	49	20	15	18	31	58	37	62	49	20	15	18	31	58	39	64	51	22	17	20	33	60
50	35	2	47	60	33	4	45	50	35	2	47	60	33	4	45	52	37	2	49	62	35	4	47
1	48	61	34	3	46	59	32	1	48	61	34	3	46	59	32	1	50	63	36	3	48	61	34

(a) vynechaná pole (b) pole dostupná z vynechaných polí (c) uzavřená procházka

Obrázek 2.11: Doplnění neúplné uzavřené procházky jezdce.

Pro lepší srovnání s ostatními procházkami si ještě ukážeme na obrázku 2.12, jak vypadá naše procházka znázorněná jen schematicky.



Obrázek 2.12: Opravená uzavřená procházka jezdce znázorněná schematicky.

Mohlo by se zdát, že je postup z velké části založen na štěstí. Důkaz, že Eulerova metoda vždy vede k cíli, opravdu nemáme. V jednotlivých fázích oprav však existuje vždy více možností, jak procházku upravit. Pokud tedy vyzkoušíme jednu, která nikam nevede, můžeme se vrátit zpět a zkusit jinou. Spíše než o štěstí bychom tedy mohli mluvit o vytrvalosti.

2.1.4 Existence jezdcovy procházky po šachovnicích různých rozměrů

Závěr celé této kapitoly zaměříme na otázku existence jezdcovy procházky po šachovnicích různých rozměrů, které se ve svém článku [19] podrobně věnuje Allen J. Schwenk. Ten jako první sepsal jak důkaz neexistence jezdcovy procházky po některých šachovnicích speciálních rozměrů, tak důkaz existence jezdcovy procházky po všech ostatních šachovnicích. Větu si zde později uvedeme. Nejprve však připomeneme několik pojmů z teorie grafů, se kterými budeme dále pracovat.

Definice 4 (podgraf). Řekneme, že graf $H = (V_H, E_H)$ je podgrafem grafu $G = (V_G, E_G)$, jestliže $V_H \subseteq V_G$ a $E_H \subseteq E_G$.

Definice 5 (cesta). Cesta je posloupnost navzájem různých vrcholů $v_1, \dots, v_k$, kde každé dva po sobě jdoucí vrcholy jsou spojeny hranou (tj. $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ pro každé $i \in \{1, \dots, k-1\}$).

Definice 6 (souvislý graf). Řekneme, že graf je souvislý, pokud mezi každými jeho dvěma vrcholy vede cesta.

Definice 7 (souvislá komponenta). Souvislá komponenta grafu G je každý podgraf H , který je souvislý a není obsažen v žádném jiném souvislém podgrafu grafu G .

Definice 8 (kružnice). Kružnice je posloupnost vrcholů $v_1, \dots, v_{k+1}$, kde $v_1, \dots, v_k$ jsou navzájem různé, $v_{k+1} = v_1$, a navíc jsou každé dva po sobě jdoucí vrcholy spojeny hranou (tj. $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$).

Definice 9 (hamiltonovská kružnice). Hamiltonovská kružnice je kružnice, která je tvořena všemi vrcholy grafu.

Pohyb jezdce po šachovnici $m \times n$ můžeme reprezentovat pomocí grafu $J_{m,n}$, jehož konstrukci jsme popsali v kapitole 1. Hledání uzavřené jezdcovy procházky po šachovnici $m \times n$ je potom zjevně ekvivalentní s problémem hledání hamiltonovské kružnice v grafu $J_{m,n}$.

Jak jsme již uvedli na začátku této podkapitoly, Schwenkova věta, která bude nyní následovat, udává nutné a postačující podmínky existence uzavřené jezdcovy procházky na šachovnici $m \times n$. My zde však dokážeme jen to, že jsou dané podmínky nutné, a důkaz druhé implikace pouze naznačíme. Ve větě dále uvažujeme pouze $m \leq n$. Pokud šachovnice tuto podmínku nesplňuje, stačí ji otočit o 90° .

Věta 1 (Schwenkova). Pro všechna přirozená $m \leq n$ existuje na šachovnici $m \times n$ uzavřená jezdcova procházka právě tehdy, když není splněna žádná z následujících podmínek:

- (i) m a n jsou obě lichá čísla,
- (ii) $m = 1, 2$ nebo 4 ,
- (iii) $m = 3$ a $n = 4, 6$ nebo 8 .

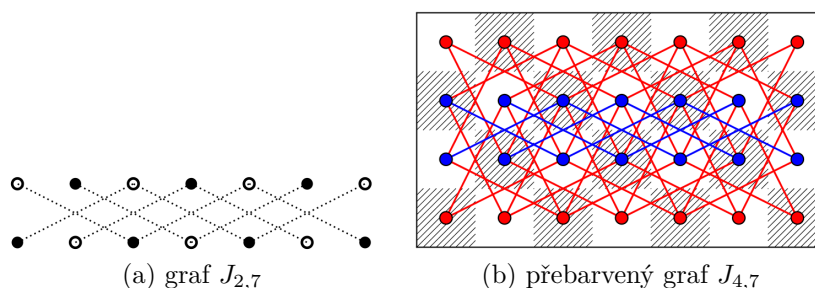
Částečný důkaz. Projdeme jednotlivé podmínky v tvrzení věty a ukážeme, proč na šachovnici $m \times n$ splňující tyto podmínky nenajdeme jezdcovu procházku. Celý důkaz však provedeme v řeči grafů.

- (i) Pokud jsou obě čísla m a n lichá, má graf $J_{m,n}$ lichý počet vrcholů, a tedy různý počet vrcholů černé a bílé barvy. Jak je vidět na obrázku 1.2b, každý vrchol je spojen hranou pouze s vrcholem jiné barvy. To znamená, že v posloupnosti vrcholů, které tvoří hledanou hamiltonovskou kružnici, se střídají vrcholy černé a bílé barvy. Na každý černý vrchol tedy musí připadat jeden bílý a naopak. To v grafech s lichým počtem vrcholů neplatí, a proto v nich neexistuje hamiltonovská kružnice.

- (ii) Pro $m = 1$ v grafu neexistuje žádná hrana. Proto je jasné, že v něm nemůžeme najít ani žádnou hamiltonovskou kružnici.

Pro $m = 2$ platí, že bude z rohových vrcholů vycházet vždy jen jedna hrana (obr. 2.13a). Aby však v grafu existovala hamiltonovská kružnice, musí z každého vrcholu vycházet alespoň dvě hrany.

Pro $m = 4$ provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že jsme v grafu $J_{4,n}$ našli hamiltonovskou kružnici $v_1, v_2, \dots, v_{4n}, v_1$. Přebarvíme vrcholy grafu tak, že vrcholy ve spodní a horní řadě budou červené a vrcholy v prostředních dvou řadách budou modré. Potom platí, že z červených vrcholů vedou hrany (v obrázku 2.13b jsou vyznačeny červeně) pouze do modrých vrcholů. Protože je červených a modrých vrcholů stejný počet, znamená to, že červenému vrcholu musí předcházet v nalezené hamiltonovské kružnici modrý vrchol a stejně tak po něm musí následovat.



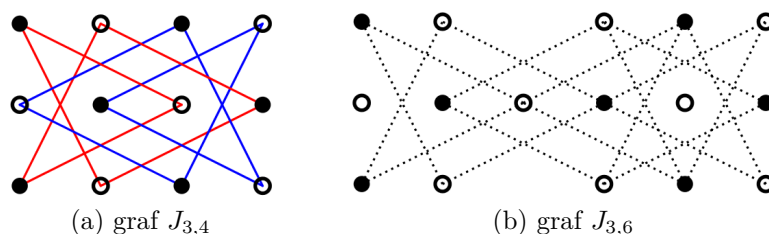
Obrázek 2.13: Podmínka (ii) ve Schwenkově větě.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že vrchol $v_1 = (1, 1)$. Tento vrchol má červenou barvu, a protože se vrcholy červené a modré barvy musí střídat, znamená to, že všechny vrcholy v_{2k+1} , $k \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}$ mají červenou barvu. Stejně tak jsme ale ukázali dříve v důkazu (i), že se v nalezené hamiltonovské kružnici musí střídat vrcholy černé a bílé barvy. Vzhledem k tomu, že vrchol $v_1 = (1, 1)$ má v původním obarvení černou barvu, musí mít vrcholy v_{2k+1} , $k \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}$ také černou barvu. Všechny vrcholy červené barvy by tedy původně musely mít černou barvu. Na obrázku 2.13b je však vidět, že vrcholy červené barvy se neshodují s vrcholy, které měly původně černou barvu (jejich obarvení je v obrázku znázorněno barvou pole šachovnice, které daný vrchol zastupuje). Posloupnost $v_1, v_2, \dots, v_{4n}, v_1$ tedy nemohla být hamiltonovská kružnice a v grafech $J_{4,n}$ žádná hamiltonovská kružnice neexistuje.

- (iii) V grafu $J_{3,4}$ vychází z osmi z celkových dvanácti vrcholů právě dvě hrany (obr. 1.2b). Je tedy jasné, že každé tyto dvě hrany musí být součástí hledané hamiltonovské kružnice. Jak je však vidět na obrázku 2.14a, graf se nám tímto způsobem rozdělí na dvě kružnice. Jedna je znázorněna červenou a druhá modrou barvou. V grafu $J_{3,4}$ tedy hamiltonovská kružnice neexistuje.

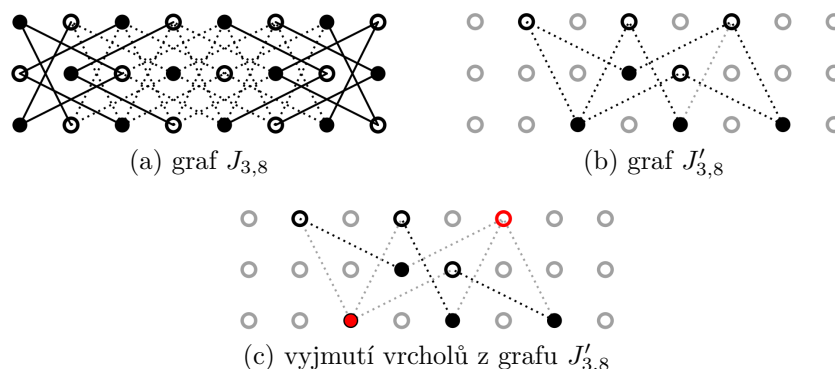
Abychom dokázali, že v grafu $J_{3,6}$ neexistuje hamiltonovská kružnice, povšimneme si nejprve jedné vlastnosti, kterou má každý graf obsahující hamiltonovskou kružnici: Pokud z grafu vyjmemě libovolných k vrcholů včetně

hran, které z nich vycházejí, rozpadne se graf na nejvýše k souvislých komponent. Jak je ovšem vidět na obrázku 2.14b, pokud z grafu $J_{3,6}$ vyjmeleme vrcholy $(1, 3)$ a $(3, 3)$, rozpadne se graf na 3 souvislé komponenty – vrchol $(2, 1)$, vrchol $(2, 5)$ a zbytek grafu bez těchto a vyjmutých vrcholů. Pokud by však v grafu existovala hamiltonovská kružnice, rozpadl by se graf na nejvýše dvě souvislé komponenty. V grafu $J_{3,6}$ tedy hamiltonovská kružnice neexistuje.



Obrázek 2.14: Podmínka (iii) ve Schwenkově větě (grafy $J_{3,4}$ a $J_{3,6}$).

V grafu $J_{3,8}$ vychází z osmi z celkových dvaceti čtyř vrcholů právě dvě hrany. Podobně jako v grafu $J_{3,4}$ je proto jasné, že každé tyto dvě hrany musí být součástí hledané hamiltonovské kružnice. Na obrázku 2.15a je vidět, že nám takto vznikne šest cest. Dva vrcholy uprostřed grafu nejsou součástí žádné z těchto cest.



Obrázek 2.15: Podmínka (iii) ve Schwenkově větě (graf $J_{3,8}$).

Nyní definujeme graf $J'_{3,8}$ následujícím způsobem (obr. 2.15b): Protože výše zmíněné cesty začínají a končí vrcholem stejné barvy, můžeme každou z nich nahradit jedním vrcholem právě této barvy. Takto nahradíme cestu $(1, 2)$, $(3, 1)$, $(2, 3)$, $(1, 1)$, $(3, 2)$ vrcholem $(3, 2)$, cestu $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(3, 3)$ vrcholem $(1, 3)$, cestu $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(3, 4)$ vrcholem $(3, 4)$, cestu $(1, 5)$, $(2, 7)$, $(3, 5)$ vrcholem $(1, 5)$, cestu $(1, 6)$, $(2, 8)$, $(3, 6)$ vrcholem $(3, 6)$ a konečně cestu $(1, 7)$, $(3, 8)$, $(2, 6)$, $(1, 8)$, $(3, 7)$ vrcholem $(1, 7)$. Vrcholy $(2, 4)$ a $(2, 5)$ ponecháme na místě. Poté doplníme hrany tam, kde i v původním grafu existovala hrana mezi výše zmíněnými šesti cestami a dvěma centrálními vrcholy. Pokud existuje hamiltonovská kružnice v grafu $J_{3,8}$, existuje i v grafu $J'_{3,8}$ (opačná implikace sice neplatí, ale na tento důkaz nemá tato skutečnost vliv). To ovšem také znamená, že pokud neexistuje hamiltonovská kružnice v grafu $J'_{3,8}$, neexistuje ani v grafu $J_{3,8}$. Na obrázku 2.15c je

vidět, že vyjmutím dvou červeně obarvených vrcholů a tím i šedě obarvených hran z grafu $J'_{3,8}$, by se tento graf rozpadl na 3 souvislé komponenty, a jak jsme již uvedli výše v důkazu neexistence hamiltonovské kružnice v grafu $J_{3,6}$, znamená to, že v grafu $J'_{3,8}$, a tedy ani v grafu $J_{3,8}$, neexistuje hamiltonovská kružnice.

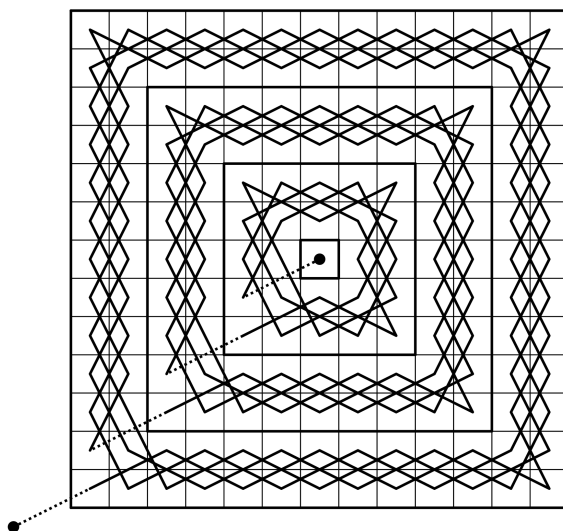
Podařilo se nám dokázat, ve kterých grafech nenajdeme hamiltonovskou kružnici. Uvedeme si zde ještě alespoň myšlenku toho, jak ukázat, že ve všech ostatních grafech tato kružnice existuje. Autor článku [19], ze kterého zde vycházíme, nejprve ukazuje, jak se dá libovolná hamiltonovská kružnice v grafu $J_{m,n}$ rozšířit na hamiltonovskou kružnici v grafu $J_{m+4,n}$ nebo v grafu $J_{m,n+4}$. Dále uvádí hamiltonovské kružnice v několika nejmenších grafech, ve kterých existují, tedy $J_{3,10}$, $J_{3,12}$, $J_{5,6}$, $J_{5,8}$, $J_{6,6}$, $J_{6,7}$, $J_{6,8}$, $J_{7,8}$ a $J_{8,8}$. Rozšířením těchto grafů jedním ze dvou výše zmíněných způsobů nalezneme hamiltonovskou kružnici v libovolném grafu vyjma těch, které splňují jednu z podmínek (i) – (iii) ve znění této věty.

□

V předchozí větě 1 jsme ukázali, že na šachovnicích, které mají lichý počet polí, neexistuje uzavřená jezdcova procházka. Následující věta pocházející z knihy [20] Johna J. Watkinse říká, že na některých z nich existuje alespoň otevřená jezdcova procházka.

Věta 2. *Na každé šachovnici $n \times n$, kde $n = 4k + 1$ a k je přirozené, existuje otevřená jezdcova procházka.*

Důkaz.



Obrázek 2.16: Otevřená jezdcova procházka po šachovnici $(4k + 1) \times (4k + 1)$.

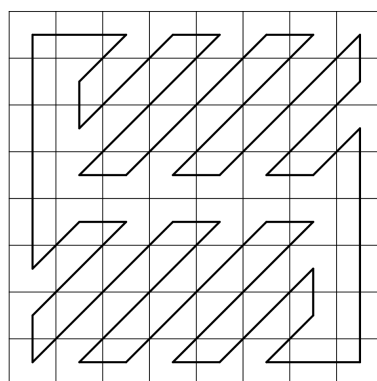
Na obrázku 2.16 vidíme otevřenou jezdcovu procházku po šachovnici 5×5 a její rozšíření na šachovnici 9×9 a 13×13 . Stačí začít na prostředním poli, pokračovat na pole, které je u levého okraje a na druhém řádku odspodu šachovnice 5×5 , a dále procházet šachovnici po směru hodinových ručiček tak dlouho, dokud se nedostaneme na pole v levém dolním rohu této šachovnice. Odtud se

můžeme posunout o jedno pole dolů a dvě pole doleva a skončíme u levého okraje a na druhém řádku odspodu větší šachovnice. Takto se nám podaří najít otevřenou jezdcovu procházku po libovolné šachovnici $n \times n$, kde $n = 4k + 1$.

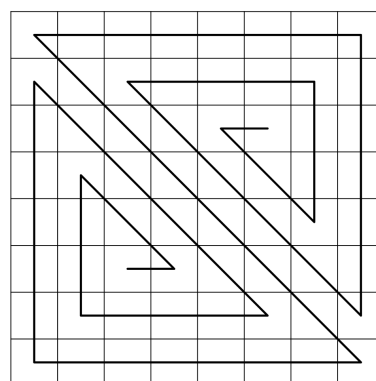
□

2.2 Procházky ostatních figur

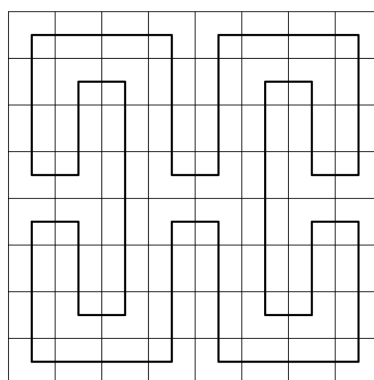
Kromě jezdcovy procházky můžeme samozřejmě hledat procházky i ostatních šachových figur. Najít procházku krále, dámy a věže není těžké. Navíc je každá procházka krále zároveň i procházkou dámy. My zde uvádíme taková řešení (obr. 2.17a–2.17c), která mají jednu další zajímavou vlastnost – jsou středově souměrná podle středu šachovnice (procházka věže je také osově souměrná podle dvou os). Některá navíc tvoří uzavřenou procházku. Všechna tato řešení pochází z již citované knihy [20] Johna J. Watkinse.



(a) uzavřená procházka krále a dámy



(b) otevřená procházka krále a dámy



(c) uzavřená procházka věže

Obrázek 2.17: Souměrné procházky dalších figur.

Střelcovou procházku po celé šachovnici samozřejmě najít nemůžeme, protože se střelec pohybuje pouze po polích jedné barvy. Mohli bychom však úlohu přeformulovat: Hledáme takovou střelcovou procházku po polích jedné barvy, která přes každé pole projede podél jedné úhlopříčky maximálně jednou. Příklad jedné takové procházky po polích černé barvy, si můžeme prohlédnout na obrázku 2.18.

Tato procházka je navíc opět dokonce uzavřená.

	29		20		24		22
28		30		25		23	
	27		31		21		18
4		26		32		19	
	5		1		17		11
6		3		16		12	
	7		9		15		13
2		8		10		14	

Obrázek 2.18: Uzavřená střelcova procházka.

3. Nezávislost na šachovnici

V úlohách o nezávislosti figur na šachovnici hledáme maximální počet figur, které můžeme na šachovnici rozmístit tak, aby se žádné dvě neohrožovaly (figura je na nějakém poli ohrožována, pokud se jiná figura může na toto pole dostat jedním povoleným tahem). Bude nás zajímat nejen maximální počet figur, ale také jejich rozmístění. V některých případech je dokonce možné určit počet všech možností. Neomezíme se pouze na klasickou šachovnici 8×8 , ale budeme uvažovat i další čtvercové šachovnice. Nejdříve si však musíme doplnit několik dalších pojmů z teorie grafů.

Poznámka. Při hledání počtu možností rozmístění figur započítáváme všechna rozmístění, která nejsou stejná. To znamená, že pokud jedno vznikne rotací nebo osovou symetrií z druhého, považujeme tato rozmístění za různá a započítáváme obě.

Definice 10 (nezávislá množina). *Množinu vrcholů $N \subseteq V$ v grafu $G = (V, E)$ nazveme nezávislou, pokud žádné dva vrcholy této množiny nejsou spojeny hranou.*

Definice 11 (maximální nezávislá množina). *Řekneme, že nezávislá množina vrcholů $N \subseteq V$ v grafu $G = (V, E)$ je maximální, jestliže v tomto grafu neexistuje žádná nezávislá množina s větším počtem vrcholů.*

Definice 12 (nezávislost grafu). *Nezávislost grafu G je rovna počtu vrcholů maximální nezávislé množiny a značí se $\beta(G)$.*

Řešení úlohy o nezávislosti figur na šachovnici $n \times n$ je ekvivalentní hledání maximální nezávislé množiny v příslušném grafu, jehož konstrukci jsme popsali v kapitole 1. Maximální počet figur, které můžeme na šachovnici $n \times n$ rozmístit, je roven nezávislosti odpovídajícího grafu.

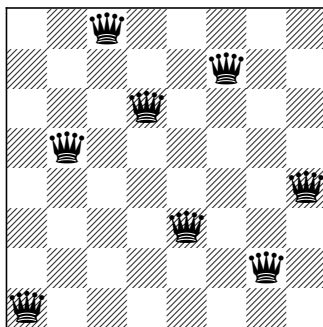
3.1 Nezávislost dam

Úloha o nezávislosti dam na šachovnici 8×8 patří mezi nejznámější úlohy tohoto typu. V české literatuře ji najdeme pod heslem problém osmi dam. Poprvé ji zveřejnil v roce 1848 Max Bezzel [2]. Roku 1850 pak Franz Nauck ve svém článku [13] uvedl správně počet všech řešení, jak na šachovnici 8×8 umístit 8 nezávislých dam, a navrhl zobecnění problému na šachovnici $n \times n$. Počet všech řešení na šachovnici 8×8 našel a publikoval ve svém článku [8] James Whitbread Lee Glaisher až v roce 1874.

Jedním z nejznámějších matematiků, kteří se problémem osmi dam zabývali, byl Carl Friedrich Gauss. Ten převedl kolem roku 1850 těžší část úlohy na jednoduché aritmetické cvičení. Nejprve rozmístil dámy na šachovnici 8×8 tak, aby v každém řádku a sloupci stála právě jedna dáma. Toto rozmístění zapsal ve formě posloupnosti osmi čísel. První číslo odpovídalo číslu řádku, ve kterém stála dáma v prvním sloupci, druhé číslo odpovídalo číslu řádku, ve kterém stála dáma ve druhém sloupci atd. Aby měl Gauss jistotu, že žádné dvě dámy nestojí na jedné úhlopříčce, využil následující vlastnosti souřadnic polí na jedné úhlopříčce: Dvě pole leží na jedné úhlopříčce vedené jihovýchodním směrem právě tehdy, když

je součet souřadnic jednoho pole roven součtu souřadnic druhého pole. Dvě pole leží na jedné úhlopříčce vedené jihozápadním směrem právě tehdy, když je součet souřadnic jednoho pole roven součtu souřadnic druhého pole, přičemž sloupce v tomto případě číslujeme zprava. Postup využijeme v následujícím příkladu. Bylo by zde sice jednodušší pomocí obrázku ověřit, že žádné dvě dámy nestojí na stejné úhlopříčce, ale Gaussova metoda se nám bude hodit v dalším důkazu.

Na obrázku 3.1 vidíme osm dam rozmístěných po šachovnici 8×8 tak, že žádné dvě nestojí ve stejném sloupci ani na stejném řádku. Toto rozmístění můžeme zapsat posloupností 1 5 8 6 3 7 2 4. Nyní zjistíme součty souřadnic polí, na kterých stojí dáma: $1 + 1 = 2$, $5 + 2 = 7$, $8 + 3 = 11$, $6 + 4 = 10$, $3 + 5 = 8$, $7 + 6 = 13$, $2 + 7 = 9$ a $4 + 8 = 12$. Vidíme, že se všechny tyto součty liší. Podobně je třeba ověřit, zda se liší součty souřadnic polí s dámou v případě, že bychom sloupce číslovali zprava: $1 + 8 = 9$, $5 + 7 = 12$, $8 + 6 = 14$, $6 + 5 = 11$, $3 + 4 = 7$, $7 + 3 = 10$, $2 + 2 = 4$ a $4 + 1 = 5$. I tyto součty se liší. Žádné dvě dámy tedy nestojí na jedné úhlopříčce a na obrázku 3.1 vidíme jedno z řešení úlohy o nezávislosti dam na šachovnici 8×8 .



Obrázek 3.1: Gaussova metoda ověření nezávislosti dam.

Nyní dokážeme větu, která říká, kolik nejvýše dam můžeme umístit na šachovnici $n \times n$ tak, aby se žádné dvě neohrožovaly. Důkaz této věty pochází z knihy [21], kterou napsali bratři Isaak Moisejevič Jaglom a Akiva Moisejevič Jaglom, a jedná se o mírně pozměněnou verzi původních důkazů pocházejících z článků [14] a [15] Emila Paulse.

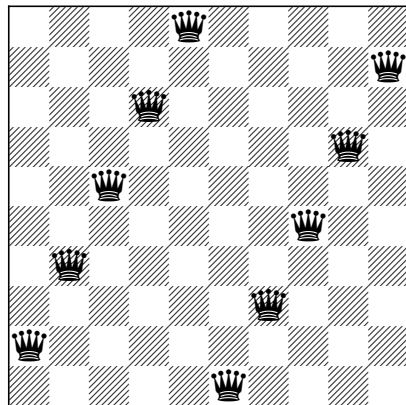
Věta 3. $\beta(D_{1,1}) = \beta(D_{2,2}) = 1$, $\beta(D_{3,3}) = 2$ a pro $n \geq 4$ platí

$$\beta(D_{n,n}) = n.$$

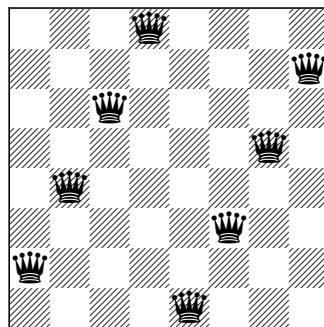
Důkaz. Pro grafy $D_{1,1}$, $D_{2,2}$ a $D_{3,3}$ tvrzení jistě platí. Zaměříme se tedy na $n \geq 4$. Důkaz dále rozdělíme na případy, kdy je n liché a na případy, kdy je n sudé, a zkusíme najít konkrétní rozestavení n dam na šachovnici $n \times n$ v obou případech.

- n sudé ($n = 2k$): První dámu umístíme na pole se souřadnicemi $(2, 1)$. Dále si představíme, že posouváme jezdce od tohoto pole vždy o dvě pole nahoru a jedno doprava, a na každé pole, na které jezdec stoupne, umístíme další dámu. Takto se nám podaří umístit dámy do prvních k sloupců a do každého

řádku sudého čísla. Postup opakujeme znovu, ale tentokrát začneme na poli o souřadnicích $(1, k + 1)$. Tímto způsobem obsadíme zbylé sloupce a řádky lichého čísla (obr. 3.2a).



(a) šachovnice 10×10



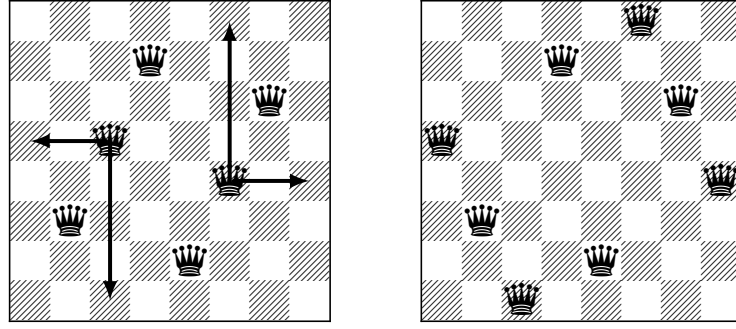
(b) šachovnice 8×8

Obrázek 3.2: Rozmístění dam na šachovnici $n \times n$ ($n = 2k$).

Nyní ověříme, zda neleží některé dvě dámy na jedné úhlopříčce. Vzhledem k tomu, jak jsme dámy na šachovnici umisťovali, je hned jasné, že stačí zkontrolovat pouze úhlopříčky směřující jihovýchodním směrem. K tomu využijeme výše popsanou Gaussovu metodu, kterou aplikujeme na r -tou dámu ve skupině k dam na levé části šachovnice a s -tou dámu ve skupině k dam na pravé části šachovnice, neboť dvě dámy stojící ve stejné skupině jistě nestojí na jedné úhlopříčce. r -tá dáma v první skupině stojí na poli o souřadnicích $(2r, r)$, s -tá dáma ve druhé skupině stojí na poli o souřadnicích $(2s - 1, k + s)$. Dámy tedy stojí na stejné úhlopříčce, pokud platí rovnost $2r + r = 2s - 1 + k + s$. Po úpravě dostáváme $k = 3(r - s) + 1$ a protože $n = 2k$, můžeme rovnost dále upravit na $n = 6(r - s) + 2$. Z toho vyplývá, že pokud lze n psát ve tvaru $n = 6l + 2$ pro libovolné přirozené l , pak budou při popsaném rozmísťování dam některé dámy stát na jedné úhlopříčce (obr. 3.2b). Na ostatních šachovnicích metoda funguje.

Případ $n = 6l + 2$ vyšetříme zvlášť: První dámu umístíme na pole se souřadnicemi $(3, 2)$. Dále pokračujeme opět tak, že si představíme, že posouváme jezdce od tohoto pole vždy o dvě pole nahoru a jedno doprava, a na každé pole, na které jezdec stoupne, umístíme další dámu (obr. 3.3a). Tímto způsobem se nám podařilo rozmístit $k - 1$ dam a vynechali jsme první sloupec. Nyní odstraníme dámu z pole se souřadnicemi $(n - 3, k - 1)$ a místo ní postavíme jednu dámu na pole se souřadnicemi $(n - 3, 1)$ a jednu dámu na pole se souřadnicemi $(1, k - 1)$. Dále otočíme šachovnici o 180° a postup opakujeme. Tímto způsobem obsadíme všechny sloupce a řádky (obr. 3.3b).

Nyní ověříme, že žádné dvě dámy nestojí na stejné úhlopříčce. Ověřování začneme provádět pro $n - 2$ dam na šachovnici, které jsme umisťovali pravidelně (tzn. před nahrazením dámy na poli o souřadnicích $(n - 3, k - 1)$ a dámy umístěné na stejném poli při otočení šachovnice). Opět je jasné, že



(a) šachovnice 8×8 - nahrazování (b) šachovnice 8×8 - konečné rozmístění

Obrázek 3.3: Rozmístění dam na šachovnici $n \times n$ ($n = 6l + 2$).

stačí zkontrolovat pouze úhlopříčky směřující jihovýchodním směrem a zaměřit se na dvojici dam, z nichž jedna je v levé a druhá v pravé části šachovnice. r -tá dáma v první skupině stojí na poli o souřadnicích $(2r + 1, r + 1)$, s -tá dáma ve druhé skupině stojí na poli o souřadnicích $(2s, k + s)$. Dámy tedy stojí na stejné úhlopříčce, pokud platí rovnost $2r + 1 + r + 1 = 2s + k + s$. Po úpravě dostáváme $k = 3(r - s) + 2$ a protože $n = 2k$, můžeme rovnost dále upravit na $n = 6(r - s) + 4$. Protože však vycházíme z předpokladu, že $n = 6l + 2$, znamená to, že žádné dvě z těchto $n - 2$ dam nestojí na stejné úhlopříčce.

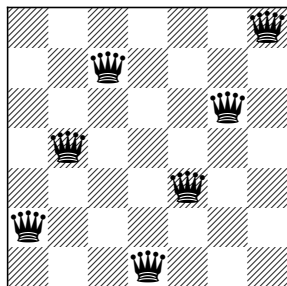
Při nahrazování zmíněných dvou dam obsadíme zbylé neobsazené řádky a sloupce. Je zřejmé, že žádné dvě dámy z těchto čtyř nestojí na stejné úhlopříčce. Stačí tedy zkontrolovat, že nově umístěné čtyři dámy nestojí na stejné úhlopříčce s některou z dříve rozmístěných dam. Nejprve se podíváme na dámu na poli se souřadnicemi $(n - 3, 1)$ a r -tou dámu na levé části šachovnice. Dámy stojí na stejné úhlopříčce, pokud platí rovnost $n - 3 + 1 = 2r + 1 + r + 1$. Po úpravě dostáváme $n = 3r + 4$ a musíme ověřit, zda někdy nastane rovnost $6l + 2 (= n) = 3r + 4$. Rovnost nastává pouze v případě, že $2l - r = \frac{2}{3}$, což není možné, protože l i r nabývají jen přirozených hodnot. Stejně postupujeme v případě s -té dámy na pravé části šachovnice. Dámy stojí na stejné úhlopříčce, pokud platí rovnost $n - 3 + 1 = 2s + k + s$. Protože $n = 2k$, můžeme rovnost upravit a dostáváme $k = 3s + 2$, a tedy $n = 6s + 4$. Protože však vycházíme z předpokladu, že $n = 6l + 2$, znamená to, že ani v tomto případě nestojí dvě dámy na stejné úhlopříčce.

Nyní se podíváme na dámu na poli se souřadnicemi $(1, k - 1)$ a r -tou dámu na levé části šachovnice. Dámy stojí na stejné úhlopříčce, pokud platí rovnost $1 + k - 1 = 2r + 1 + r + 1$. Protože $n = 2k$, můžeme rovnost upravit a dostáváme $n = 6r + 4$. Stejně postupujeme v případě s -té dámy na pravé části šachovnice. Dámy stojí na stejné úhlopříčce, pokud platí rovnost $1 + k - 1 = 2s + k + s$. Po úpravě dostáváme $0 = 3s$. Protože však vycházíme z předpokladu, že $n = 6l + 2$ a $s > 0$, znamená to, že ani v jednom z těchto dvou případů nestojí dvě dámy na stejné úhlopříčce. Postavení zbylých dvou dam již nemusíme kontrolovat, neboť jsme je umísťovali stejným

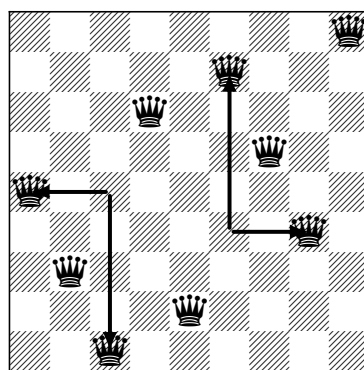
způsobem jako předchozí dvě dámy pouze s tím rozdílem, že jsme přitom otočili šachovnici.

Tato metoda rozmístování dam na šachovnici $n \times n$, kde $n = 6l + 2$, tedy funguje a tím je dokončen důkaz pro sudé n .

- n liché ($n = 2k - 1$): Při obou metodách rozmístování dam po šachovnici $n \times n$, kde n je sudé, zůstává neobsazená úhlopříčka spojující pole se souřadnicemi $(1, 1)$ a (n, n) . Stačí tedy na šachovnici $(n - 1) \times (n - 1)$ rozmístit dámy podle výše popsanych návodu a po přidání n -tého sloupce a n -tého řádku umístit zbývající n -tou dámu na pole se souřadnicemi (n, n) . Na obrázku 3.4 vidíme oba typy těchto rozmístění.



(a) šachovnice 7×7



(b) šachovnice 9×9

Obrázek 3.4: Rozmístění dam na šachovnici $n \times n$ ($n = 2k - 1$).

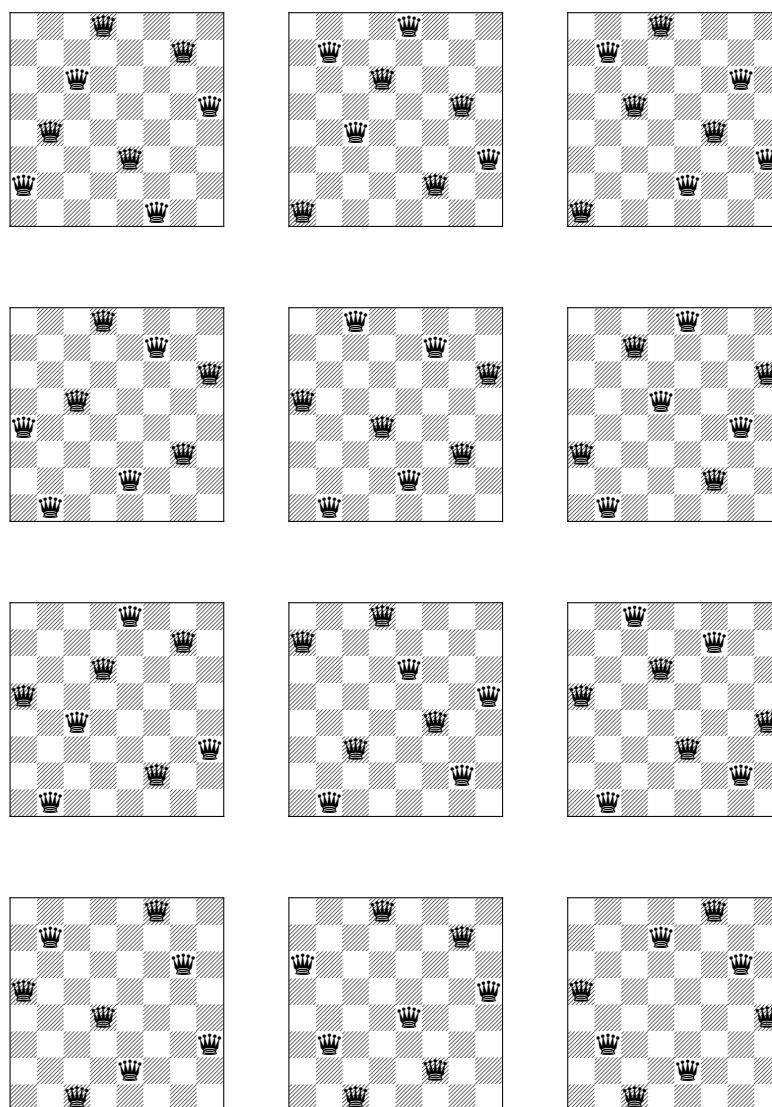
□

Zatím nebyl nalezen obecný vzorec udávající počet možností rozmístění maximálního počtu nezávislých dam na šachovnici $n \times n$. Pro některé hodnoty n jsou však tyto počty známy. Pro několik nejmenších n jsme je převzali z internetové stránky <http://oeis.org/A000170> a uvádíme je v tabulce 3.1.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
počet řešení na šachovnici $n \times n$	1	4	8	2	10	4	40	92	352

Tabulka 3.1: Počet možností rozmístění maximálního počtu nezávislých dam na šachovnici $n \times n$.

Pro zajímavost poznamenejme, že všech 92 možností rozmístění osmi dam na šachovnici 8×8 lze získat z dvanácti základních řešení (obr. 3.5) pomocí otočení nebo symetrie podle každé ze čtyř os. Z každého z prvních jedenácti řešení lze takto získat dalších sedm řešení. Poslední řešení je samo o sobě symetrické, a proto z něj můžeme získat pouze tři další nová řešení.



Obrázek 3.5: Nezávislost osmi dam na šachovnici 8×8 .

3.2 Nezávislost věží

Úloha o nezávislosti věží je výrazně jednodušší než úloha o nezávislosti dam, protože nemusíme ověřovat, zda některé dvě věže nestojí na stejné úhlopříčce. Proto je i určení hodnoty $\beta(V_{n,n})$ velmi jednoduché.

Věta 4. *Pro každé přirozené n platí*

$$\beta(V_{n,n}) = n.$$

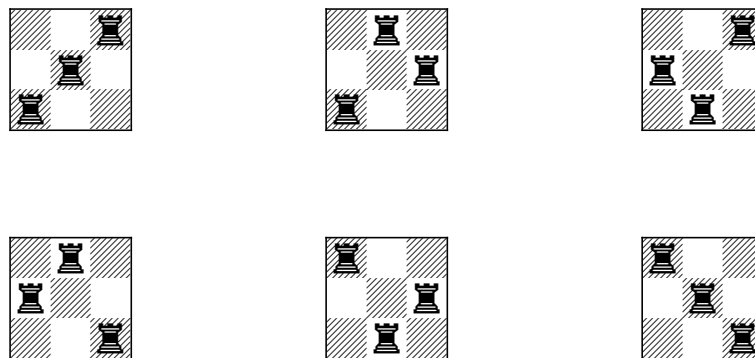
Důkaz. Pokud umístíme dvě věže do jednoho řádku nebo sloupce, pak se tyto dvě věže ohrožují. Dostáváme tedy nerovnost $\beta(V_{n,n}) \leq n$. Navíc můžeme na šachovnici $n \times n$ umístit věž na každé pole úhlopříčky spojující některá dvě protější rohová pole. To je dohromady n nezávislých věží, a tedy $\beta(V_{n,n}) = n$.

□

Věta 5. Počet všech možností rozmístění n nezávislých věží na šachovnici $n \times n$ je $n!$.

Důkaz. Řekněme, že rozmisťujeme věže po řádcích. V prvním řádku máme n možností, kam věž postavit. Ve druhém řádku máme už jen $n - 1$ možností, neboť jsme první věží obsadili také jeden sloupec. Takto pokračujeme dále až k poslednímu řádku, kde zbývá už jen jedna možnost, kam věž postavit, neboť jsme již obsadili $n - 1$ sloupců. Dohromady tedy máme $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ možností, jak rozmístit n nezávislých věží na šachovnici $n \times n$. □

Na obrázku 3.6 vidíme všechna možná rozmístění tří nezávislých věží na šachovnici 3×3 .



Obrázek 3.6: Nezávislost tří věží na šachovnici 3×3 .

3.3 Nezávislost jezdců

Následující větu, která udává nejvyšší počet jezdců, které můžeme umístit na šachovnici $n \times n$ tak, aby se žádní dva neohrožovali, lze dokázat několika různými způsoby. My vyjdeme z důkazu pro šachovnici 8×8 , který uveřejnil Ralph Greenberg [9] a který rozšířil na obecné n ve své knize [20] John J. Watkins.

Věta 6. $\beta(J_{1,1}) = 1$, $\beta(J_{2,2}) = 4$ a pro $n \geq 3$ platí

$$\beta(J_{n,n}) = \begin{cases} \frac{1}{2}n^2, & \text{je-li } n \text{ sudé,} \\ \frac{1}{2}(n^2 + 1), & \text{je-li } n \text{ liché.} \end{cases}$$

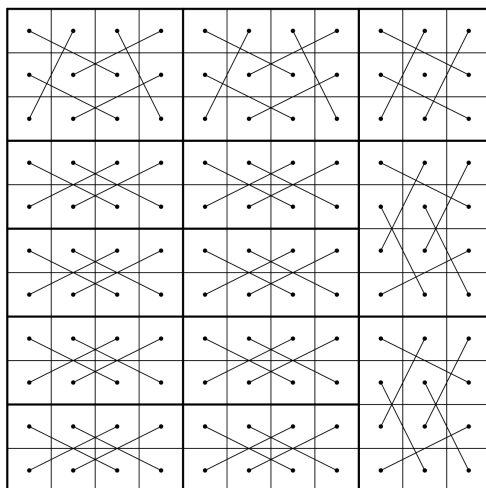
Důkaz. Pro graf $J_{1,1}$ tvrzení jistě platí. Pro graf $J_{2,2}$ platí, že můžeme umístit jezdce na každé pole šachovnice, kterou graf reprezentuje, což jsou dohromady čtyři jezdci. Důkaz pro $n \geq 3$ rozdělíme na výše uvedené dva případy.

- n sudé ($n = 2k$): Pro $n = 4$ rozdělíme šachovnici na dva obdélníky o rozměrech 2×4 . Každý z těchto obdélníků může obsahovat nejvýše čtyři nezávislé

jezdce, neboť jezdec na kterémkoliv poli takového obdélníku ohrožuje právě dvě jeho pole; pole, na kterém stojí, a k němu jedno další. Dostáváme tedy nerovnost $\beta(J_{4,4}) \leq 8$. Pokud navíc umístíme jezdce na všechna pole jedné barvy, nebudou se žádní dva jezdci ohrožovat, neboť ohrožují pouze pole odlišné barvy. Takto se nám tedy podaří umístit na šachovnici osm jezdců, což je hledané maximum pro šachovnici 4×4 .

Pro $n > 4$ využijeme (Schwenkovu) větu 1, která říká, že na každé takové šachovnici $n \times n$ existuje uzavřená jezdcova procházka. Vezmeme-li onu uzavřenou procházku, pak jezdci musejí stát na polích, která nenásledují těsně po sobě. Minimálně každé druhé pole tedy musíme vynechat a dostáváme nerovnost $\beta(J_{n,n}) \leq \frac{1}{2}n^2$. Navíc opět můžeme využít toho, že jezdec ohrožuje pouze pole odlišné barvy. Umístěním jezdců na všechna pole jedné barvy tedy dostaneme $\frac{1}{2}n^2$ nezávislých jezdců na šachovnici $n \times n$ pro sudé $n > 4$.

- n liché ($n = 4k + 1$): Na všech šachovnicích $(4k + 1) \times (4k + 1)$ existuje podle věty 2 otevřená jezdcova procházka. Na základě stejného argumentu jako v předchozím odstavci dostáváme nerovnost $\beta(J_{n,n}) \leq \frac{1}{2}(n^2 + 1)$. Protože je n liché, je na šachovnici více černých polí. Pokud umístíme jezdce na všechna černá pole, neohrožují se a dostáváme rovnost $\beta(J_{n,n}) = \frac{1}{2}(n^2 + 1)$.



Obrázek 3.7: Rozdělení šachovnice $(4k - 1) \times (4k - 1)$.

- n liché ($n = 4k - 1$): Šachovnici $(4k - 1) \times (4k - 1)$ lze rozdělit celkem na $2(k - 1)^2$ obdélníků o rozměrech 2×4 , $2(k - 1)$ obdélníků o rozměrech 3×4 a čtverec o rozměrech 3×3 (obr. 3.7). Každé pole v těchto pravoúhelnících spojíme hranou s právě jedním polem odpovídajícím nějakému povolenému tahu. Vidíme, že na obdélníky o rozměrech 2×4 můžeme rozmístit nejvýše čtyři jezdce, na obdélníky o rozměrech 3×4 nejvýše šest jezdců a na čtverec o rozměrech 3×3 nejvýše pět jezdců. Pro $\beta(J_{n,n})$ tedy dostáváme nerovnost $\beta(J_{n,n}) \leq 4(2(k - 1)^2) + 6(2(k - 1)) + 5 = \frac{1}{2}((4k - 1)^2 + 1)$. Dále opět platí, že pro liché n je na šachovnici více černých polí, a pokud umístíme jezdce na každé černé pole, dostáváme rovnost $\beta(J_{n,n}) = \frac{1}{2}((4k - 1)^2 + 1) = \frac{1}{2}(n^2 + 1)$.

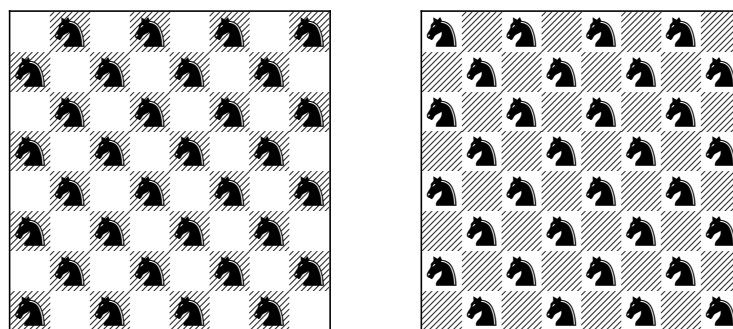
□

Stejně jako pro dámy ani pro jezdce zatím nebyl nalezen obecný vzorec udávající počet možností rozmístění maximálního počtu nezávislých jezdců na šachovnici $n \times n$, ale alespoň pro některé hodnoty n jsou tyto počty známy. Pro několik nejmenších n jsme je převzali z internetové stránky <http://oeis.org/A244081> a uvádíme je v tabulce 3.2.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
počet řešení na šachovnici $n \times n$	1	1	2	6	1	2	1	2	1	2

Tabulka 3.2: Počet možností rozmístění maximálního počtu nezávislých jezdců na šachovnici $n \times n$.

Na obrázku 3.8 vidíme obě řešení na šachovnici 8×8 .



Obrázek 3.8: 32 nezávislých jezdců na šachovnici 8×8 .

3.4 Nezávislost střelců

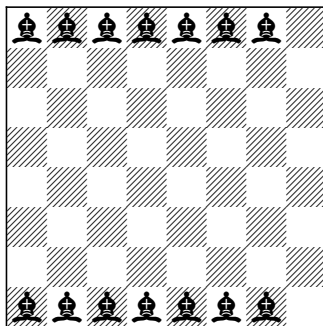
Podobně jako v předchozích případech nejprve ukážeme, kolik nejvýše nezávislých střelců můžeme umístit na šachovnici $n \times n$. Důkazy této i následující věty pochází z knihy [21] bratří Jaglomů.

Věta 7. $\beta(S_{1,1}) = 1$ a pro každé přirozené $n \geq 2$ platí

$$\beta(S_{n,n}) = 2n - 2.$$

Důkaz. Pro graf $S_{1,1}$ tvrzení jistě platí. Pozornost tedy upřeme na $n \geq 2$. Šachovnice $n \times n$ má celkem $2n - 1$ úhlopříček vedených jedním směrem. Dvě z těchto úhlopříček jsou tvořeny pouze jedním polem v protějších rozích šachovnice. Tato dvě pole zároveň leží na jedné úhlopříčce vedené opačným směrem. Proto nemůžou střelci stát na obou těchto polích a nemohou obsadit více než $2n - 1 - 1$ úhlopříček. Dostáváme tedy nerovnost $\beta(S_{n,n}) \leq 2n - 2$.

Pokud umístíme střelce na pole o souřadnicích $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, n - 1)$ a dále na pole o souřadnicích $(n, 1), (n, 2), \dots, (n, n - 1)$, žádní dva střelci se neohrožují a dohromady je na šachovnici $n - 1 + n - 1 = 2n - 2$ střelců (obr. 3.9).



Obrázek 3.9: 14 nezávislých střelců na šachovnici 8×8 .

Proto platí $\beta(S_{n,n}) = 2n - 2$.

□

Věta 8. *Je-li na šachovnici $n \times n$ rozmístěno $2n - 2$ nezávislých střelců, pak stojí vždy u okrajů šachovnice.*

Důkaz. Předpokládejme, že je na šachovnici $n \times n$ rozmístěno $2n - 2$ nezávislých střelců. Každé pole šachovnice očíslovme podle toho, kolika střelci je ohrožováno. Nejvyšším číslem, které se na šachovnici může vyskytovat, je číslo dvě. Jedno pole je totiž součástí nejvýše dvou úhlopříček a na každé úhlopříčce může stát nejvýše jeden střelec. Nejnižším číslem, které se na šachovnici může vyskytovat, je číslo jedna. Kdyby některé pole nebylo ohrožováno žádným střelcem, mohli bychom na toto pole postavit dalšího střelce, což neodpovídá předpokladu, že už máme na šachovnici maximální počet $2n - 2$ nezávislých střelců. Na každém poli šachovnice $n \times n$ je tedy buď číslo jedna, nebo číslo dvě.

Nyní ukážeme, že polí s číslem jedna je nejméně $2n$. Všechna pole, na kterých stojí střelec, mají jistě číslo jedna. Takových polí je $2n - 2$. Navíc mají číslo jedna určitě všechna čtyři rohová pole a alespoň dvě z nich nejsou obsazena střelcem. Dohromady tedy dostáváme nejméně $2n - 2 + 2 = 2n$ polí, na kterých je číslo jedna.

Označme S součet všech čísel na šachovnici. Tento součet můžeme odhadnout shora následujícím způsobem:

$$S \leq 1 \cdot 2n + 2 \cdot (n^2 - 2n) = (2n - 2)n.$$

Střelec na libovolném krajním poli šachovnice ohrožuje přesně n polí. Jednoduše můžeme nahlédnout, že střelec, který stojí na stejné úhlopříčce, ale mimo okraj šachovnice, ohrožuje nejméně $n + 2$ polí. Označme a počet střelců mimo okraje šachovnice a b počet střelců u jejích okrajů. Protože je $a + b = 2n - 2$, platí nerovnost:

$$S \geq bn + a(n + 2) = (a + b)n + 2a = (2n - 2)n + 2a.$$

Celkově tedy dostáváme odhad pro S :

$$(2n - 2)n + 2a \leq S \leq (2n - 2)n.$$

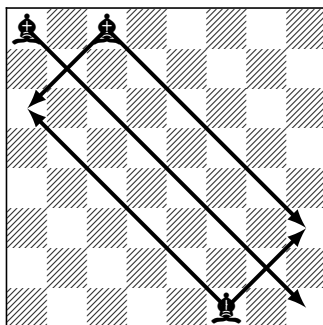
To ovšem znamená, že a musí být rovno nule, a všichni střelci tedy stojí u okrajů šachovnice.

□

Následující věta říká, kolik existuje možností umístění maximálního počtu nezávislých střelců na šachovnici $n \times n$. Její důkaz najdeme v knize [4] Henryho Ernesta Dudeneyho.

Věta 9. *Pro $n \geq 2$ je počet všech možností rozmístění $2n - 2$ nezávislých střelců na šachovnici $n \times n$ roven 2^n .*

Důkaz. Pro $n = 2$ je tvrzení jasné. Pro $n > 2$ využijeme minulé věty 8, díky které víme, že střelci stojí pouze na okrajích šachovnice. Jestliže střelce umístíme do jednoho rohového pole, v protějším rohu už střelec stát nemůže. Pokud střelec v jednom rohu nestojí, musí jistě stát v protějším rohu. Podobně platí, že pokud umístíme střelce do nejvyššího řádku na pole o souřadnicích (n, k) , pak na polích u pravého a levého okraje se souřadnicemi (k, n) a $(n - k + 1, 1)$ střelci nestojí, neboť jsou tato pole střelcem ohrožována. Navíc je již jasné, že v nejnižším řádku na poli o souřadnicích $(1, n - k + 1)$ střelec stojí, protože jediná další krajní pole, ze kterých lze pole $(1, n - k + 1)$ ohrožit, jsou dvě právě zmíněná pole u pravého a levého okraje, a ta jsou prázdná (obr. 3.10).



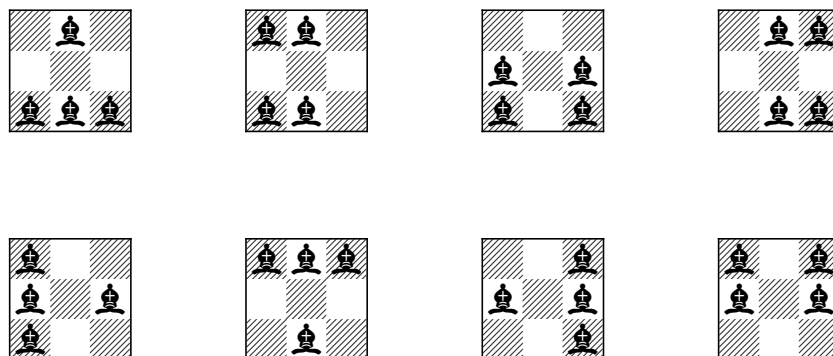
Obrázek 3.10: Ohrožování krajních polí střelci na šachovnici 8×8 .

Pokud naopak neumístíme střelce do nejvyššího řádku na pole o souřadnicích (n, k) , pak na polích u levého a pravého okraje se souřadnicemi $(n - k + 1, 1)$ a (k, n) střelci stojí a v nejnižším řádku na poli o souřadnicích $(1, n - k + 1)$ střelec nestojí.

Na každém poli nejvyššího řádku šachovnice se tedy můžeme rozhodnout, zda na něj postavíme střelce. U každého takového pole máme dvě možnosti a v jednom řádku je dohromady n polí. To je dohromady 2^n možností. Rozmístění střelců na zbývajících krajních polích je již jednoznačně určeno.

□

Na závěr této části uvádíme všechny možnosti, jak rozmístit čtyři střelce na šachovnici 3×3 (obr. 3.11).



Obrázek 3.11: Nezávislost čtyř střelců na šachovnici 3×3 .

3.5 Nezávislost králů

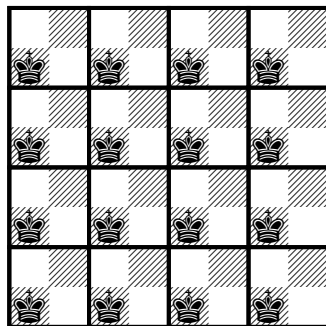
Důkaz následující věty, která říká, kolik nejvýše nezávislých králů můžeme umístit na šachovnici $n \times n$, pochází opět z knihy [21] bratří Jaglomů.

Věta 10. *Pro každé přirozené n platí*

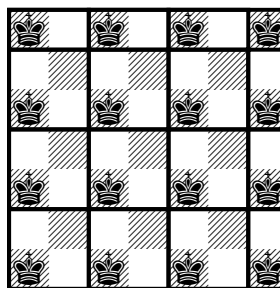
$$\beta(K_{n,n}) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}n\right)^2, & \text{je-li } n \text{ sudé,} \\ \left(\frac{1}{2}(n+1)\right)^2, & \text{je-li } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Důkaz. Pro $n = 1$ je tvrzení jasné. Ostatní hodnoty n rozdělíme stejně jako ve znění věty na sudé a liché. V obou případech však využijeme toho, že do čtverce 2×2 lze umístit nejvýše jednoho nezávislého krále.

- n sudé: Šachovnici $n \times n$ lze rozdělit na $\left(\frac{1}{2}n\right)^2$ čtverců 2×2 . Proto platí nerovnost $\beta(K_{n,n}) \leq \left(\frac{1}{2}n\right)^2$. Pokud navíc do těchto čtverců umístíme po jednom králi na stejnou pozici (např. do levého dolního rohu), jsou tito králové nezávislí (obr. 3.12a). Dostáváme tedy rovnost $\beta(K_{n,n}) = \left(\frac{1}{2}n\right)^2$.
- n liché, $n > 1$: Jestliže je n liché, znamená to, že $n - 1$ je sudé. Na šachovnici $(n - 1) \times (n - 1)$ proto umístíme krále stejným způsobem, který jsme popsali výše. Takto rozmístíme $\left(\frac{1}{2}(n - 1)\right)^2$ králů. Dále přidáme zbývajících n -tý řádek a n -tý sloupec a rozdělíme je na jeden společný čtverec 1×1 v rohu šachovnice a $n - 1$ obdélníků 2×1 (obr. 3.12b). Využijeme toho, že do obdélníku 2×1 lze umístit nejvýše jednoho nezávislého krále a umístíme krále do levého pole všech obdélníků v n -tém řádku a do spodního pole všech obdélníků v n -tém sloupci. Navíc postavíme krále na pole se souřadnicemi (n, n) . Dohromady tedy dostáváme rovnost $\beta(K_{n,n}) = \left(\frac{1}{2}(n - 1)\right)^2 + \frac{1}{2}(n - 1) + \frac{1}{2}(n - 1) + 1 = \left(\frac{1}{2}(n + 1)\right)^2$.



(a) šachovnice 8×8



(b) šachovnice 7×7

Obrázek 3.12: Nezávislost králů na šachovnici $n \times n$.

□

Také pro krále platí, že zatím nebyl nalezen obecný vzorec udávající počet možností rozmístění maximálního počtu nezávislých králů na šachovnici $n \times n$, ale alespoň pro některé hodnoty n jsou tyto počty známy. Pro několik nejmenších n jsme je převzali z internetové stránky <http://oeis.org/A193580> a uvádíme je v tabulce 3.3.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
počet řešení na šachovnici $n \times n$	1	4	1	79	1	3600	1	281 571

Tabulka 3.3: Počet možností rozmístění maximálního počtu nezávislých králů na šachovnici $n \times n$.

4. Dominance na šachovnici

V úlohách o dominanci figur na šachovnici hledáme minimální počet figur předepsaného typu, které musíme na šachovnici rozmístit tak, aby pokrývaly všechna její pole (pole šachovnice je pokryto, pokud se na něj může nějaká figura dostat jedním povoleným tahem nebo na něm přímo stojí). Podobně jako v kapitole 3 nás bude zajímat minimální potřebný počet figur, jejich rozmístění, případně počet možností. Opět budeme uvažovat nejen klasickou šachovnici 8×8 , ale i další čtvercové šachovnice.

Poznámka. Při hledání počtu řešení opět započítáváme všechna řešení, která nejsou stejná. Pro připomenutí to znamená, že pokud jedno řešení vznikne rotací nebo osovou symetrií z druhého, považujeme tato řešení za různá a započítáváme obě.

Podobně jako v předchozích kapitolách si nejprve vysvětlíme několik dalších pojmů z teorie grafů, které budeme používat.

Definice 13 (dominující množina). *Množinu vrcholů $D \subseteq V$ v grafu $G = (V, E)$ nazveme dominující, pokud každý vrchol z $V \setminus D$ je spojen hranou s některým vrcholem z D .*

Definice 14 (minimální dominující množina). *Řekneme, že dominující množina vrcholů $D \subseteq V$ v grafu $G = (V, E)$ je minimální, jestliže v tomto grafu neexistuje žádná dominující množina s menším počtem prvků.*

Definice 15 (dominance grafu). *Dominance grafu G je rovna počtu prvků minimální dominující množiny a značí se $\gamma(G)$.*

Řešení úlohy o dominanci figur na šachovnici $n \times n$ je ekvivalentní hledání minimální dominující množiny v příslušném grafu, jehož konstrukci jsme popsali v kapitole 1. Minimální počet figur, které musíme na šachovnici $n \times n$ rozmístit tak, aby pokrývaly všechna její neobsazená pole, je roven dominance grafu.

4.1 Dominance věží

Úloha o dominanci věží na šachovnici $n \times n$ patří mezi první úlohy tohoto typu, které čtenářům představili ve svém díle [21] bratři Jaglomové. Jejich řešení si zde nyní ukážeme.

Věta 11. *Pro šachovnici $n \times n$ platí*

$$\gamma(V_{n,n}) = n.$$

Důkaz. Pokud rozmístíme na šachovnici $n \times n$ méně než n věží, znamená to, že určitě existuje alespoň jeden řádek (označme ho např. k), ve kterém žádná věž nestojí. Stejně tak existuje alespoň jeden sloupec (např. l), ve kterém žádná věž nestojí. Pokud však nestojí žádná věž v řádku k a ve sloupci l , pak pole se souřadnicemi (k, l) není žádnou věží pokryto, a není proto pokryta celá šachovnice $n \times n$. Abychom tedy pokryli celou šachovnici $n \times n$, musíme na ni rozestavit alespoň n věží.

Pokud postavíme n věží do jednoho řádku nebo sloupce, pokryjí tyto věže celou šachovnici $n \times n$.

□

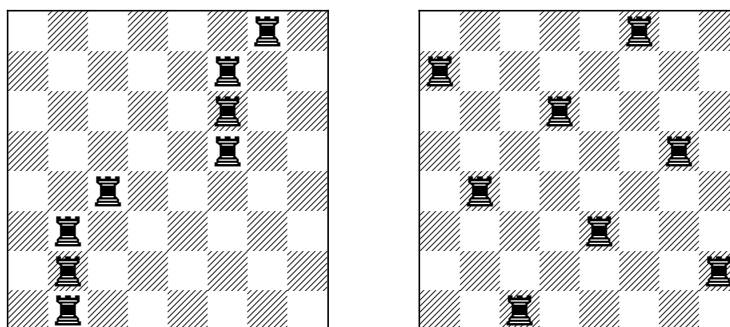
Věta 12. *Počet způsobů, jak šachovnici $n \times n$ pokrýt n věžemi, je $2n^n - n!$.*

Důkaz. V důkazu věty 11 jsme ukázali, že pokud nestojí žádná věž v řádku k ani ve sloupci l , pak není pokryto pole se souřadnicemi (k, l) . To znamená, že aby byla pokryta celá šachovnice $n \times n$, musí v každém řádku nebo v každém sloupci stát věž. Řádků je dohromady n a v každém z nich máme n možností, kam věž postavit. To je dohromady $n \cdot n \cdots n \cdot n = n^n$ možností, jak umístit věže tak, aby v každém řádku stála jedna. Počet možností, kam postavit věže tak, aby v každém sloupci byla jedna, je stejný. Dohromady tedy dostáváme $n^n + n^n = 2n^n$ možností takových rozmístění věží, kde v každém řádku nebo v každém sloupci stojí jedna.

Od tohoto čísla však musíme odečíst ta rozmístění, která započítáváme dvakrát, tj. případy, kdy stojí jedna věž zároveň v každém řádku i v každém sloupci. Takových případů je $n!$. V prvním řádku máme totiž n možností, kam věž postavit, ve druhém máme jen $n - 1$ možností, kam věž postavit, neboť jeden sloupec je již obsazený. Takto bychom mohli pokračovat dál, až dojdeme k poslednímu řádku, ve kterém máme jen jednu možnost, kam věž postavit. Dohromady tedy máme $n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ možností. Tento výsledek musíme od předchozího odečíst a dostáváme konečný výsledek $2n^n - n!$.

□

Na následujícím obrázku 4.1 uvádíme dvě možnosti z celkových $2 \cdot 8^8 - 8! = 33\,514\,112$, jak rozmístit 8 věží na šachovnici 8×8 tak, aby ji celou pokrývaly.



(a) věž v každém řádku

(b) věž v každém řádku i sloupci

Obrázek 4.1: Dominance věží na šachovnici 8×8 .

4.2 Dominance králů

John J. Watkins v knize [20] píše, že je dominance králů překvapivě jednoduchá, a dokonce nudná, což demonstruje na důkazu hodnoty dominance grafu $K_{n,n}$.

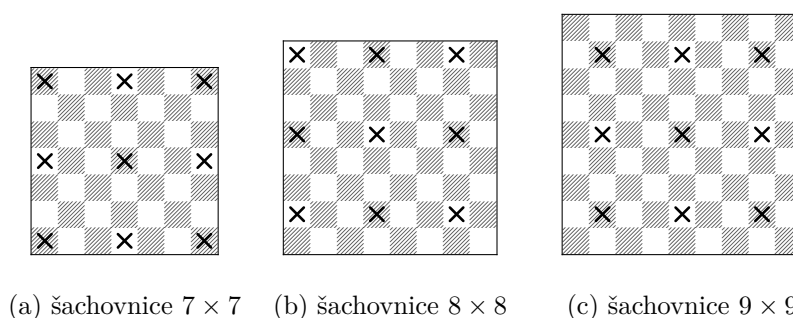
Abychom se o její jednoduchosti přesvědčili i my, ukážeme si Watkinsův důkaz v mírně upravené formě.

Věta 13. *Pro šachovnici $n \times n$ platí*

$$\gamma(K_{n,n}) = \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor^2,$$

kde $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část čísla x .

Důkaz. V obrázku 4.2 je na šachovnici 7×7 , 8×8 a 9×9 označeno 9 polí, z nichž žádná dvě není schopen pokrýt pouze jeden král.

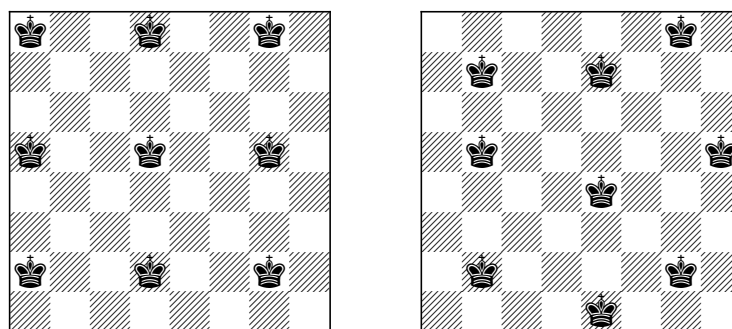


Obrázek 4.2: Důkaz dominance králů.

Podobně lze postupovat i na šachovnicích jiných rozměrů. Pro libovolné přirozené číslo k začneme na šachovnicích typu $(3k-2) \times (3k-2)$ na poli $(1, 1)$, na šachovnicích typu $(3k-1) \times (3k-1)$ na poli $(2, 1)$ a na šachovnicích typu $(3k) \times (3k)$ na poli $(2, 2)$ a mezi každými dvěma označenými poli necháme dvě neoznačená pole ve vodorovném i svislém směru. Žádná dvě takto označená pole není schopen pokrýt pouze jeden král. To znamená, že k pokrytí šachovnic potřebujeme nejméně tolik králů, kolik je označených polí. Na šachovnicích všech tří zmíněných typů je tento počet roven hodnotě k^2 . U prvního typu šachovnic je $n = 3k - 2$, a tedy $k^2 = \left(\frac{n+2}{3}\right)^2$. U druhého typu šachovnic je $n = 3k - 1$, a tedy $k^2 = \left(\frac{n+1}{3}\right)^2$. U třetího typu šachovnic je $n = 3k$, a tedy $k^2 = \left(\frac{n}{3}\right)^2$. Souhrnně tedy můžeme napsat, že je k pokrytí libovolné šachovnice $n \times n$ potřeba alespoň $\left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor^2$ králů.

Jestliže na šachovnici $n \times n$ umístíme krále na všechna pole označená způsobem, který jsme popsali v předchozím odstavci, pak pokryjí celou šachovnici. Počet těchto králů odpovídá počtu označených polí a těch je $\left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor^2$. □

V dostupné literatuře zatím neexistuje odhad počtu možností umístění dominujících králů na šachovnici $n \times n$. Na závěr této části tedy na obrázku 4.3 alespoň uvádíme dvě možnosti, jak rozmístit 9 králů na šachovnici 8×8 tak, aby ji celou pokrývali.



Obrázek 4.3: Dominance králů na šachovnici 8×8 .

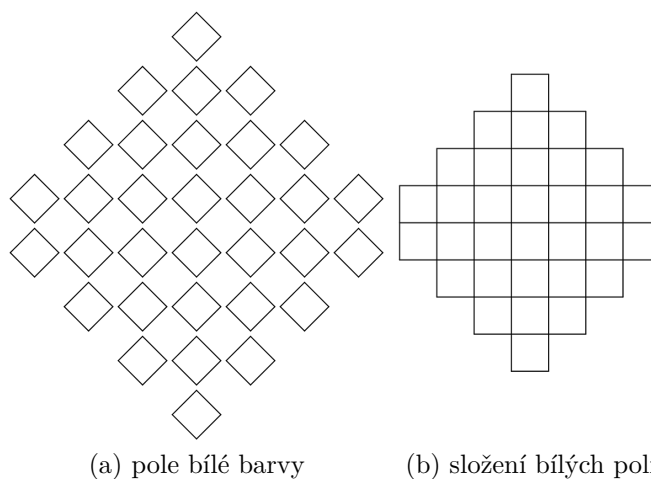
4.3 Dominance střelců

Začneme opět větou, která říká, jaká je hodnota dominance střelců pro šachovnici $n \times n$. Její důkaz pochází z již citované knihy [21] bratří Jaglomů.

Věta 14. *Pro šachovnici $n \times n$ platí*

$$\gamma(S_{n,n}) = n.$$

Důkaz. Jak jsme uvedli v kapitole 1, střelec se může pohybovat pouze po úhlopříčkách. Protože je každá úhlopříčka tvořena poli jedné barvy, znamená to, že se každý střelec může pohybovat po polích pouze jedné barvy. Při řešení dominance střelců na šachovnici $n \times n$ proto postupujeme tak, že úlohu řešíme zvlášť pro černá a zvlášť pro bílá pole. Představme si nyní, že se šachovnice otočí o 45° doprava, odstraní se všechna pole např. černé barvy (obr. 4.4a) a zbylá pole se složí k sobě (obr. 4.4b). Potom se střelci pohybují vodorovně a svisle místo po diagonálách a jejich pohyb po takto upravené šachovnici tedy odpovídá pohybu věží.

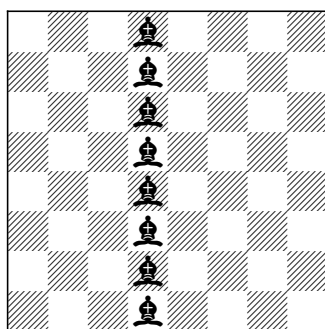


Obrázek 4.4: Otočení a složení bílých polí šachovnice 8×8 .

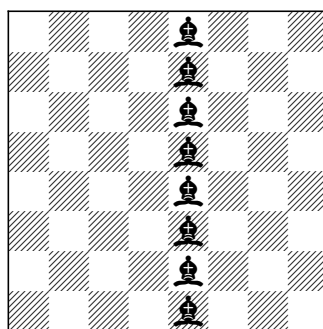
Protože se pro n liché liší počet černých a bílých polí na šachovnici $n \times n$, je třeba řešení dále rozdělit na případ, kdy je n sudé, a na případ, kdy je n liché.

- n sudé: Otočením a složením polí jedné barvy šachovnice $n \times n$ vzniká nepravidelný útvar, který ve svém středu obsahuje obdélník $\left(\frac{n}{2}\right) \times \left(\frac{n}{2} + 1\right)$. Na jeho pokrytí potřebujeme jistě alespoň $\frac{n}{2}$ věží. Na pokrytí původního neotočeného útvaru je tedy zapotřebí stejný počet střelců (již jsme uvedli, že pohyb střelců po této upravené šachovnici odpovídá pohybu věží, proto je odhad pro oba typy figur stejný). Počet černých polí je v tomto případě stejný jako počet bílých polí. Proto k jejich pokrytí potřebujeme také alespoň $\frac{n}{2}$ střelců. Dohromady tedy na pokrytí šachovnice $n \times n$ potřebujeme alespoň $\frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$ střelců.

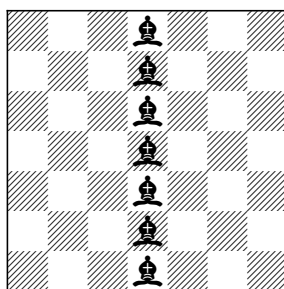
Na obrázcích 4.5a a 4.5b ukazujeme dvě možnosti rozmístění střelců dominujících šachovnici 8×8 . Pokud na ostatních čtvercových šachovnicích $n \times n$, kde n je sudé, postupujeme stejně a umístíme jednoho střelce do každého pole sloupce s číslem $\frac{n}{2}$ nebo do každého pole sloupce s číslem $\frac{n}{2} + 1$, bude jimi pokryta celá šachovnice. K pokrytí šachovnice $n \times n$ nám proto stačí nejvýše n střelců.



(a) šachovnice 8×8



(b) šachovnice 8×8



(c) šachovnice 7×7

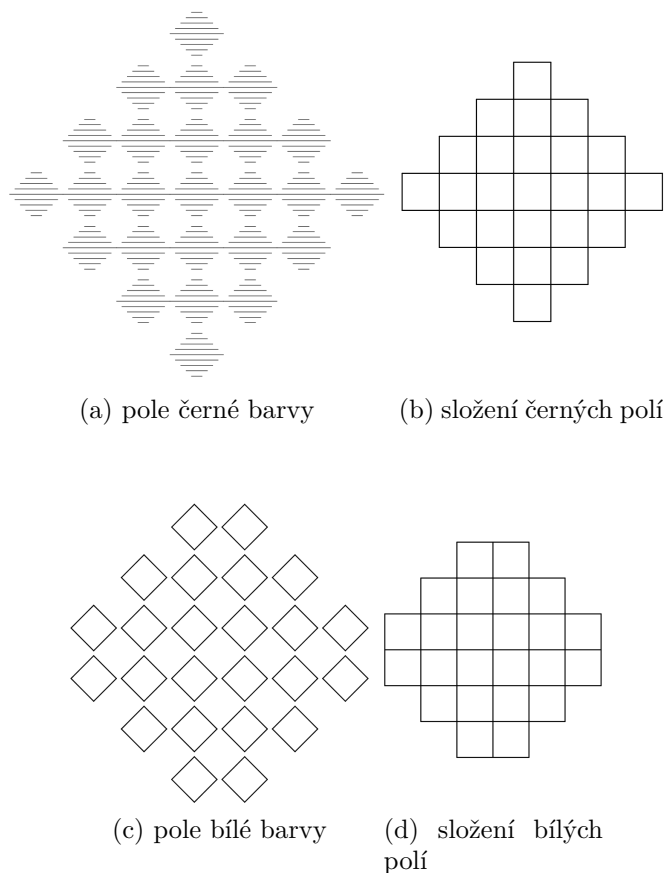
Obrázek 4.5: Dominance střelců.

Pro n sudé jsme dokázali, že je k pokrytí šachovnice $n \times n$ potřeba právě n střelců.

- n liché: Pro $n = 1$ tvrzení jistě platí. Zaměříme se tedy na $n \geq 3$. Jestliže je n liché, můžeme je zapsat ve formě $n = 2k + 1$ pro nějaké přirozené

číslo k . Dále víme, že pole se souřadnicemi $(1, 1)$ má černou barvu, takže bude černých polí pro n liché vždy o jedno více než bílých polí.

Otočením a složením polí černé barvy (obr. 4.6a a 4.6b) vzniká útvar obsahující ve svém středu čtverec $k \times k$, na jehož pokrytí potřebujeme určité alespoň k věží, a tedy i stejný počet střelců. Otočením a složením polí bílé barvy (obr. 4.6c a 4.6d) vzniká útvar obsahující ve svém středu čtverec $(k+1) \times (k+1)$, na jehož pokrytí potřebujeme určité alespoň $k+1$ věží, a tedy i stejný počet střelců. Dohromady tedy na pokrytí šachovnice $n \times n$ potřebujeme alespoň $k + (k+1) = 2k+1$ střelců.



Obrázek 4.6: Otočení a složení polí šachovnice 7×7 .

Jestliže umístíme jednoho střelce do každého pole sloupce s číslem $k+1$, bude jimi pokryta celá šachovnice (na obrázku 4.5c vidíme pokrytí šachovnice 7×7). K pokrytí šachovnice $n \times n$ nám proto stačí nejvýše n střelců.

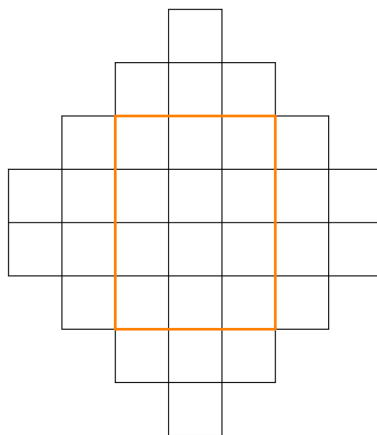
Pro n liché jsme dokázali, že je k pokrytí šachovnice $n \times n$ potřeba právě n střelců.

Bez ohledu na to, zda bylo n liché nebo sudé, jsme dokázali, že $\gamma(S_{n,n}) = n$. □

Nyní ukážeme, jaký je podle [20] počet všech možností rozmístění střelců pokrývajících šachovnici 8×8 .

Věta 15. Počet všech způsobů, jak šachovnici 8×8 pokrýt pomocí osmi střelců, je $108^2 = 11\,664$.

Důkaz. Postupujeme podobně jako v důkazu předchozí věty 14. Šachovnici 8×8 rozdělíme na dvě části podle barvy polí, každou z těchto částí otočíme a složíme pole jedné barvy zpět k sobě.



Obrázek 4.7: Otočená a složená pole šachovnice 8×8 .

V obrázku 4.7, kde jsou takto upravená bílá pole šachovnice, je navíc vyznačen oranžový obdélník 4×3 . Dále si opět můžeme představit, že na takto upravenou šachovnici rozmisťujeme čtyři věže místo čtyř střelců tak, aby jí dominovaly. Počet rozmístění stačí určit pouze pro pole jedné barvy. Pro pole druhé barvy bude jejich počet stejný.

Všimněme si nejprve, že v každém ze tří sloupců uprostřed obrazce musí stát jedna věž. Každý z těchto sloupců se totiž skládá z více než čtyř polí, a proto jej nelze pokrýt čtyřmi věžemi umístěnými mimo tento sloupec. Ze stejného důvodu platí, že v každém ze čtyř řádků uprostřed obrazce musí stát jedna věž. Naopak platí, že pokud každý ze zmíněných tří sloupců a čtyř řádků obsahuje jednu věž, jsou pokryta všechna pole obrazce.

Máme dvě možnosti, jak takového rozmístění docílit:

- Všechny čtyři věže stojí v prostředních třech sloupcích: Pokud stojí čtyři věže ve třech sloupcích, musí v jednom sloupci samozřejmě stát dvě věže. Máme 3 možnosti výběru takového sloupce a v něm dále $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ možností výběru konkrétních dvou polí. Další dvě věže je třeba rozmístit do zbylých dvou sloupců a zbylých dvou řádků, což lze udělat pouze $2! = 2$ způsoby. Dohromady tedy dostáváme $3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$ způsobů, jak rozmístit všechny čtyři věže do prostředních tří sloupců.
- Jedna věž stojí mimo prostřední tři sloupce: Počet polí mimo prostřední tři sloupce je roven dvanácti, to znamená, že máme 12 možností, kam umístit tuto jednu věž. Po umístění této věže je třeba další věže rozmístit do zbývajících tří neobsazených řádků, což lze udělat $3! = 6$ způsoby. Dohromady tedy dostáváme $12 \cdot 6 = 72$ způsobů, jak umístit jednu věž mimo prostřední tři sloupce a zbylé tři věže do těchto sloupců.

Zjistili jsme, že existuje $36 + 72 = 108$ možností, jak rozmístit 4 věže na šachovnici tak, aby dominovaly všem bílým polím. Stejně tak je tedy 108 možností, jak rozmístit 4 věže tak, aby dominovaly všem černým polím. Protože na sobě tato rozmístění nezávisí, můžeme spočítat počet všech rozmístění věží dominujících celé šachovnici jako $108^2 = 11\,664$.

□

Důkaz následující věty již uvádět nebudeme. K nahlédnutí je ve výše citované knize [21].

Věta 16. *Je-li $n \geq 2$, pak počet způsobů, jak šachovnici $n \times n$ pokrýt střelci, je:*

- pro $n = 4k$: $\left(\frac{(2k)!(4k+1)}{2}\right)^2$,
- pro $n = 4k + 1$: $(2k)!(2k)!\frac{16k^3+24k^2+11k+1}{2}$,
- pro $n = 4k + 2$: $((2k)!(4k^2 + 5k + 2))^2$,
- pro $n = 4k + 3$: $(2k + 1)!(2k)!(16k^4 + 56k^3 + 67k^2 + 33k + 6)$.

4.4 Dominance dam

Zatím se pro šachovnici $n \times n$ nepodařilo zjistit, jaká je přesná hodnota $\gamma(D_{n,n})$. Jsou známy pouze hodnoty dominancí pro malá přirozená čísla n . Dále existují věty, které tuto hodnotu odhadují shora a zdola. Důkaz následující věty pochází z článku [3] Ernesta J. Cockaynea, ten však za jejího autora označuje L. Welche.

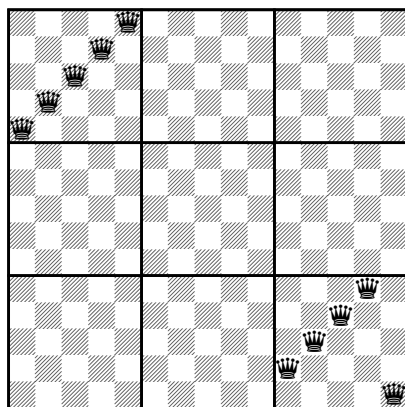
Věta 17. *Pro šachovnici $n \times n$, kde $n = 3m + r$, $0 \leq r < 3$, platí*

$$\gamma(D_{n,n}) \leq 2m + r.$$

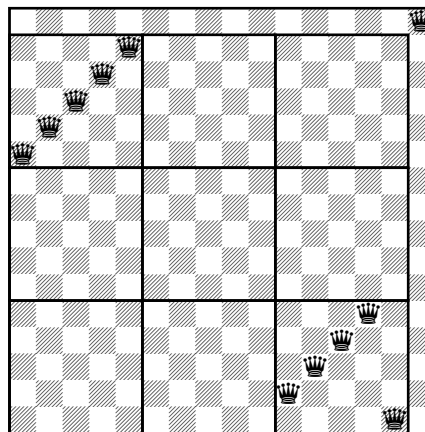
Důkaz. Šachovnici $3m \times 3m$ rozdělíme na devět čtverců $m \times m$ a rozmístíme m dam do levého horního čtverce a m dam do pravého dolního čtverce tak, aby pokrývaly celou šachovnici. Na její pokrytí tedy potřebujeme $m + m = 2m$ dam. Na obrázku 4.8a vidíme rozdělení a pokrytí šachovnice 15×15 , v obecném případě postupujeme podle stejného schématu.

Šachovnice $(3m + 1) \times (3m + 1)$ má oproti šachovnici $3m \times 3m$ o jeden řádek a sloupec více. Tento řádek a sloupec lze pokrýt jednou další dámou tak, že ji umístíme na pole se souřadnicemi $(3m + 1, 3m + 1)$. Na pokrytí šachovnice $(3m+1) \times (3m+1)$ nám tedy stačí $m+m+1 = 2m+1$ dam (obr. 4.8b pro speciální případ šachovnice 16×16). Podobně má šachovnice $(3m+2) \times (3m+2)$ oproti šachovnici $(3m + 1) \times (3m + 1)$ o jeden řádek a sloupec více a ty lze opět pokrýt jednou další dámou tak, že ji umístíme na pole se souřadnicemi $(3m + 2, 3m + 2)$. Na pokrytí šachovnice $(3m+2) \times (3m+2)$ proto stačí $m+m+1+1 = 2m+2$ dam (obr. 4.8c pro speciální případ šachovnice 17×17).

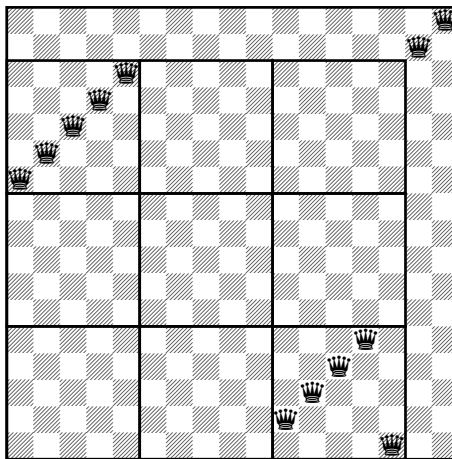
□



(a) šachovnice 15×15



(b) šachovnice 16×16



(c) šachovnice 17×17

Obrázek 4.8: Dominance dam.

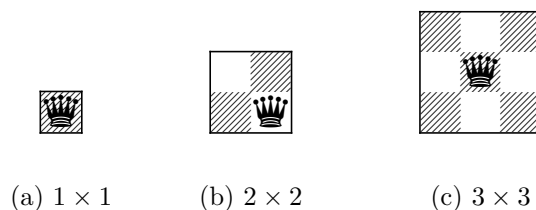
Také důkaz následující věty je převzat z již citovaného článku [3]. Důkaz obecnějšího tvrzení pro obdélníkové šachovnice byl však publikován již dříve v článku [16] Vijaye Raghavana a Shankara M. Venkatesana.

Věta 18. *Pro šachovnici $n \times n$ platí*

$$\gamma(D_{n,n}) \geq \frac{n-1}{2}.$$

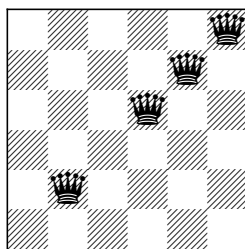
Důkaz.

- $1 \leq n \leq 3$: Na obrázcích 4.9a–4.9c vidíme, že šachovnice o velikostech 1×1 , 2×2 a 3×3 lze pokrýt jednou dámou. Protože $1 \geq \frac{3-1}{2} \geq \frac{2-1}{2} \geq \frac{1-1}{2}$, věta pro $n = 1$, $n = 2$ a $n = 3$ platí.
- $n > 3$: Předpokládejme, že je na šachovnici $n \times n$ rozmístěný minimální počet dam tak, že je celá pokryta. Označme si tento počet $\gamma(D_{n,n}) = \gamma$.



Obrázek 4.9: Dominance dam na nejmenších šachovnicích.

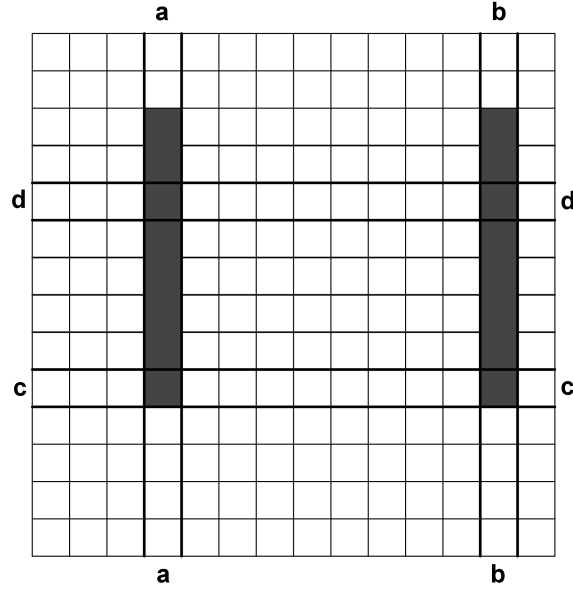
Nejprve dokážeme, že $\gamma \leq n - 2$. Jestliže na libovolnou šachovnici $n \times n$ umístíme dámu na každé pole úhlopříčky spojující pole $(1, 1)$ a (n, n) kromě polí $(1, 1)$ a $(3, 3)$, pak je pokryta celá šachovnice (obr. 4.10 pro speciální případ $n = 6$) a bylo potřeba maximálně $n - 2$ dam. Můžeme proto předpokládat, že $\gamma \leq n - 2$. Potom existují určitě alespoň dva řádky a alespoň dva sloupce, ve kterých nestojí žádná dáma. Označme a číslo prázdného sloupce umístěného nejvíce vlevo, b číslo prázdného sloupce umístěného nejvíce vpravo, c číslo prázdného řádku umístěného nejvíce dole a d číslo prázdného řádku umístěného nejvíce nahoře (obr. 4.11). Dále předpokládejme, že $b - a \geq d - c$. Pokud by tomu tak nebylo, můžeme šachovnici otočit o 90° .



Obrázek 4.10: Dominance dam na šachovnici 6×6 .

Označme M množinu skládající se z $b - a$ na sebe navazujících polí ve sloupci a začínajících na poli se souřadnicemi (c, a) a pokračujících svisle nahoru a dále z $b - a$ na sebe navazujících polí ve sloupci b začínajících na poli se souřadnicemi (c, b) a pokračujících svisle nahoru (šedá pole v obrázku 4.11). Pokud na šachovnici nad poli (c, a) a (c, b) není dostatek místa, označíme prostě odshora v příslušných sloupcích $b - a$ polí. Protože je $b - a \geq d - c$, pokrývá množina M jistě všechna pole ve sloupcích a a b mezi řádky c a d a pole se souřadnicemi (c, a) a (c, b) . Dále víme, že množina M obsahuje přesně $2(b - a)$ polí.

Každý z řádků pod a nad množinou M obsahuje dámu. Pouze v případě, že $b - a = d - c$, se může stát, že má první řádek nad M číslo d a dámu neobsahuje, všechny další řádky již ano. V každém případě tedy víme, že pod a nad množinou M se nachází aspoň $n - (b - a) - 1$ dam. Každá z nich pokrývá nejvýše dvě pole množiny M (každé na jiné úhlopříčce), neboť množina M má s libovolnou úhlopříčkou na šachovnici společné nejvýše



Obrázek 4.11: Označení prázdných řádků a sloupců; vyznačení množiny M .

jedno pole.

Každá ze zbývajících $\gamma - (n - (b - a) - 1)$ dam umístěných na šachovnici ve zbylých řádcích pokrývá nejvýše čtyři pole z množiny M . Proto platí nerovnost $2(n - (b - a) - 1) + 4(\gamma - (n - (b - a) - 1)) \geq 2(b - a)$, neboť všechna pole množiny M musí být pokryta. Nerovnost upravíme:

$$\begin{aligned}
2(n - (b - a) - 1) + 4(\gamma - (n - (b - a) - 1)) &\geq 2(b - a) \\
2n - 2b + 2a - 2 + 4\gamma - 4n + 4b - 4a + 4 &\geq 2b - 2a \\
-2n + 2b - 2a + 2 + 4\gamma &\geq 2b - 2a \\
4\gamma &\geq 2n - 2 \\
\gamma &\geq \frac{n - 1}{2}
\end{aligned}$$

Dokázali jsme tedy, že pro libovolné n platí $\frac{n-1}{2} \leq \gamma = \gamma(D_{n,n})$.

□

Věta 18 poskytuje dolní odhad dominace $\gamma(D_{n,n})$. Nabízí se přirozená otázka, za jakých okolností je tento odhad optimální. Dmitry Finozhenok a William D. Weakley ve svém článku [5] dokázali, že rovnost $\gamma(D_{n,n}) = \frac{n-1}{2}$ nastává jen pro $n = 3$ a $n = 11$. V ostatních případech tedy odhad z věty 18 není optimální.

Pro hodnoty $\gamma(D_{n,n})$, kde $n = 3m + r$ a $0 \leq r < 3$, získáváme z vět 17 a 18 následující odhady (uvádíme pro několik nejmenších n):

- $0 \leq \gamma(D_{1,1}) \leq 1$
- $\frac{1}{2} \leq \gamma(D_{2,2}) \leq 2$
- $1 \leq \gamma(D_{3,3}) \leq 2$

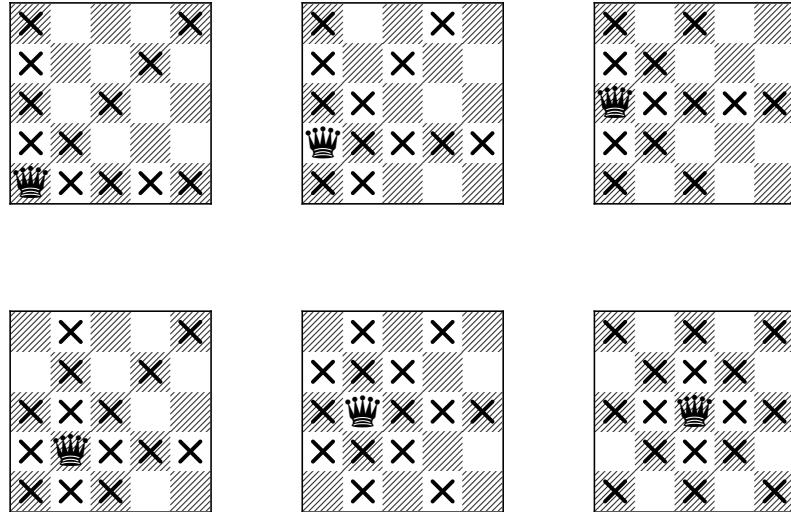
- $\frac{3}{2} \leq \gamma(D_{4,4}) \leq 3$
- $2 \leq \gamma(D_{5,5}) \leq 4$
- $\frac{5}{2} \leq \gamma(D_{6,6}) \leq 4$
- $3 \leq \gamma(D_{7,7}) \leq 5$
- $\frac{7}{2} \leq \gamma(D_{8,8}) \leq 6$

Přesné hodnoty $\gamma(D_{n,n})$ jsou alespoň pro některá n také známé. Nalezneme je například na internetové stránce <http://oeis.org/A075458> a několik z nich uvádíme v následující tabulce 4.1.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\gamma(D_{n,n})$	1	1	1	2	3	3	4	5	5	5
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
$\gamma(D_{n,n})$	5	6	7	8	9	9	9	9	10	

Tabulka 4.1: Minimální počet dam potřebných na pokrytí šachovnice $n \times n$.

Pro $n = 1$, $n = 2$ a $n = 3$ jsou přesné hodnoty $\gamma(D_{n,n})$ zdůvodněny v důkazu věty 18. Pro $n = 4$ dostáváme nerovnost $\gamma(D_{4,4}) \geq \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$. Protože $\gamma(D_{4,4})$ označuje počet dam na šachovnici, může nabývat pouze přirozených hodnot. To znamená, že můžeme nerovnost upravit na tvar $\gamma(D_{4,4}) \geq 2$. Podobně je $\gamma(D_{6,6}) \geq \frac{6-1}{2} = \frac{5}{2}$ a po úpravě $\gamma(D_{6,6}) \geq 3$. Jak uvidíme níže, pro obě tyto hodnoty najdeme na příslušných šachovnicích řešení.

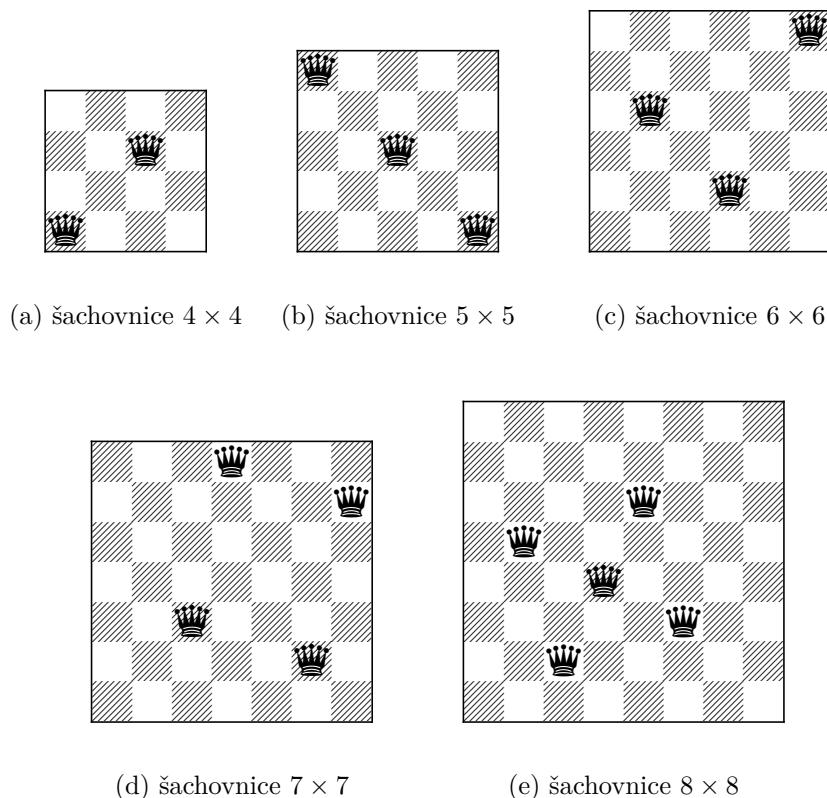


Obrázek 4.12: Částečné pokrytí šachovnice 5×5 jednou dámou.

Pro $n = 5$ dostáváme nerovnost $\gamma(D_{5,5}) \geq \frac{5-1}{2} = 2$. Na obrázku 4.12 však vidíme všech šest možností umístění jedné dámy na šachovnici (každá další by

vznikla z těchto šesti rotací nebo symetrií), křížky označují pokrytá pole. Na první pohled je vidět, že přidáním jedné dámy se nepodaří pokrýt všechna zbývající pole šachovnice. Níže však ukazujeme, že se třemi dámami to už není problém. Další hodnoty $\gamma(D_{n,n})$ již odůvodňovat nebudeme; některé z nich byly nalezeny (ručně nebo na počítači) zkoušením všech možností a není známo žádné elegantnější řešení.

Na závěr uvádíme na obrázcích 4.13a–4.13e ukázky pokrytí šachovnice 4×4 , 5×5 , 6×6 , 7×7 a 8×8 nejmenším možným počtem dam.



Obrázek 4.13: Dominance dam na větších šachovnicích.

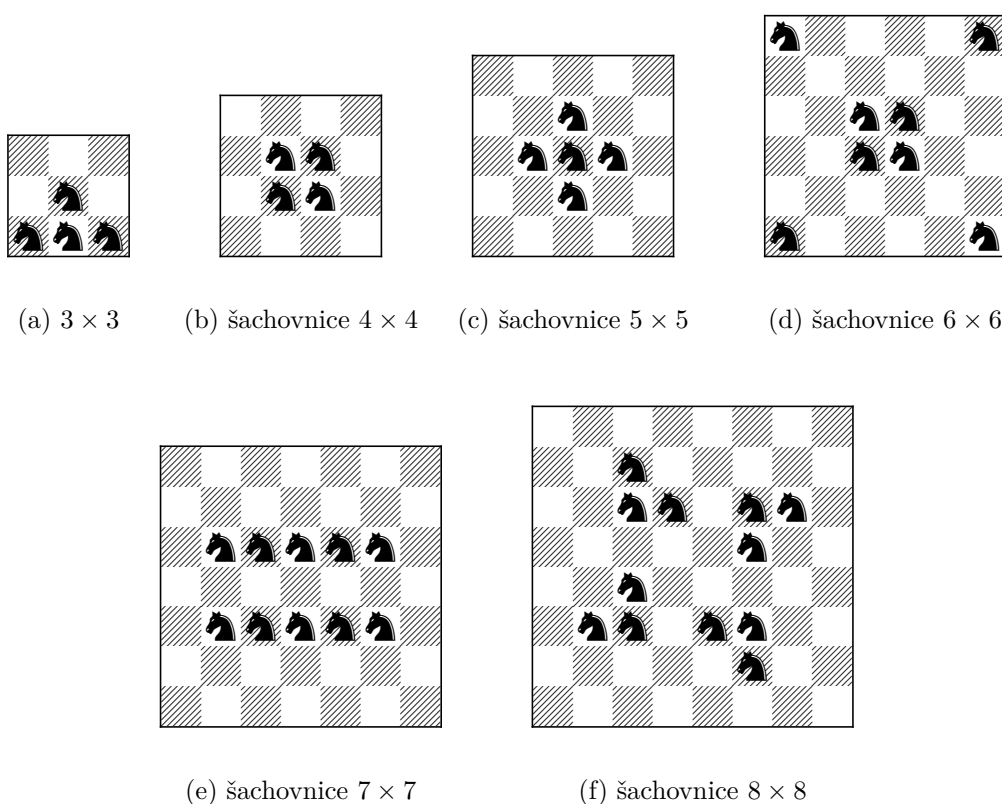
4.5 Dominance jezdců

Podobně jako pro dámy ani pro jezdce není znám obecný vzorec udávající minimální počet jezdců potřebných na pokrytí šachovnice $n \times n$. Pro některé hodnoty n jsou však tyto počty známy. Nalezneme je například na internetové stránce <http://oeis.org/A006075> a několik z nich uvádíme v následující tabulce 4.2.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\gamma(J_{n,n})$	1	4	4	4	5	8	10	12	14	16
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\gamma(J_{n,n})$	21	24	28	32	36	40	46	52	57	62

Tabulka 4.2: Minimální počet jezdců potřebných na pokrytí šachovnice $n \times n$.

Dále uvádíme ukázky konkrétních řešení na šachovnici o rozměrech 3×3 , 4×4 , 5×5 , 6×6 , 7×7 a 8×8 (obr. 4.14a–4.14f).



Obrázek 4.14: Dominance jezdců.

4.6 Vztah dominance a nezávislosti

Na závěr celé kapitoly ještě uvedeme jeden zajímavý vztah týkající se nezávislosti a dominance. Pro každý graf G platí nerovnost

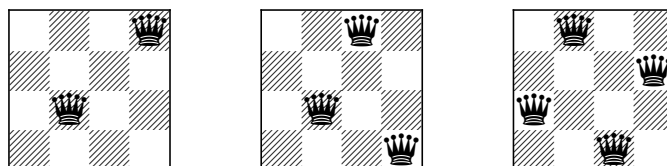
$$\gamma(G) \leq \beta(G).$$

Jestliže najdeme maximální nezávislou množinu vrcholů v grafu G , pak je tato množina jistě dominující. Pokud by dominující nebyla, existoval by vrchol v grafu G , který by nebyl spojen s žádným vrcholem z nezávislé množiny a ani by

sám nebyl její součástí. Takový vrchol bychom tedy mohli do nezávislé množiny přidat a zvětšit tak počet jejích vrcholů. To je však spor s tvrzením, že počet vrcholů původní nezávislé množiny byl maximální.

Ukázali jsme, že každá maximální nezávislá množina je zároveň dominující. Nyní se pokusíme zjistit, zda také naopak platí, že každá minimální dominující množina je nezávislá.

Toto tvrzení můžeme podobně jako John J. Watkins v knize [20] jednoduše vyvrátit příkladem dam na šachovnici 4×4 . Na obrázku 4.15a vidíme dvě dámy, které pokrývají celou šachovnici 4×4 , ale nejsou nezávislé. Pokud figury přemístíme a přidáme k nim třetí (obr. 4.15b), pak pokrývají celou šachovnici a jsou i nezávislé. Netvoří však maximální nezávislou množinu. Tu dostaneme až opětovným přemístěním figur a přidáním čtvrté dámy (obr. 4.15c). Tyto úvahy nás motivují k definici dalšího pojmu z teorie grafů.



(a) minimální domi- (b) dominující a ne- (c) dominující a ma-
nující množina závislá množina ximální nezávislá
množina množina

Obrázek 4.15: Dominance a nezávislost dam na šachovnici 4×4 .

Definice 16 (nezávislá dominance grafu). Nezávislá dominance grafu G je rovna počtu vrcholů nejmenší nezávislé a dominující množiny a značí se $i(G)$.

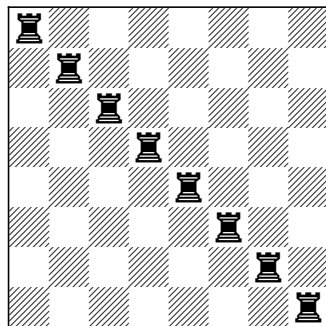
V tuto chvíli je jasné, že pro libovolný graf G platí nerovnost

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta(G).$$

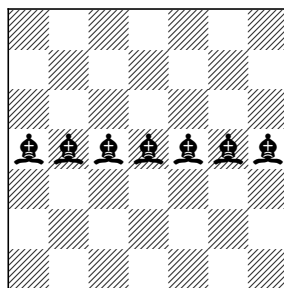
Na obrázku 4.15 například vidíme, že $\gamma(D_{4,4}) = 2$, $i(D_{4,4}) = 3$ a $\beta(D_{4,4}) = 4$. Zajímavá je však především otázka, pro které grafy G platí rovnost

$$\gamma(G) = i(G).$$

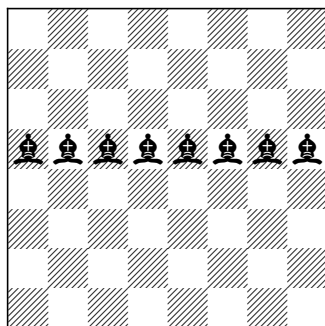
Ve Watkinsově, již několikrát citované, knize [20] se dočteme, že pro grafy $V_{n,n}$, $S_{n,n}$ a $K_{n,n}$ tato rovnost platí pro libovolné n . Věže stačí umístit na jednu z úhlopříček spojujících protější rohová pole (obr. 4.16a). Střelce postavíme do všech polí prostředního sloupce nebo řádku v případě, že je n liché (obr. 4.16b). Pokud je n sudé, vybereme si jeden ze dvou prostředních sloupců nebo řádků a opět zaplníme všechna jeho pole (obr. 4.16c). V případě králů můžeme využít rozmístění popsané v důkazu věty 13 (obr. 4.16d).



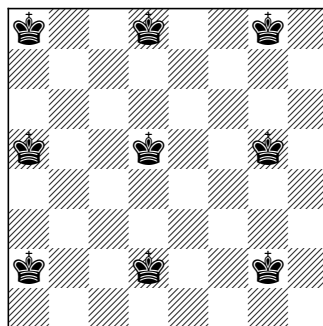
(a) 8 věží na šachovnici 8×8



(b) 7 střelců na šachovnici 7×7



(c) 8 střelců na šachovnici 8×8

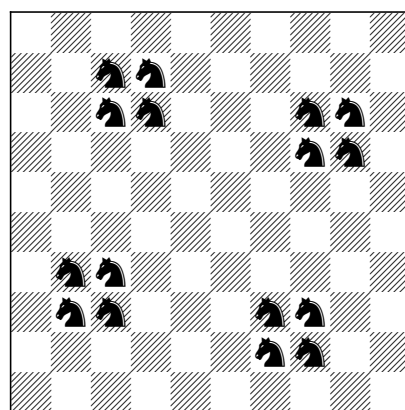
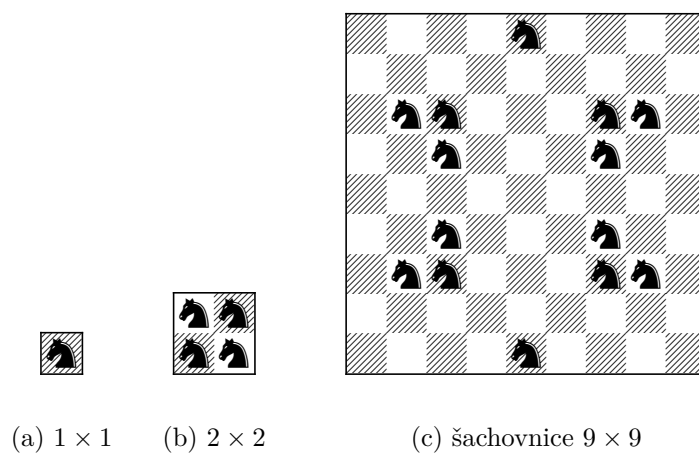


(d) 9 králů na šachovnici 8×8

Obrázek 4.16: Ukázky případů, kdy $\gamma(G) = i(G)$.

Jak jsme již ukázali výše, rovnost $\gamma(D_{n,n}) = i(D_{n,n})$ obecně neplatí. Kromě uvedeného příkladu, kdy $n = 4$, jsou však známy pouze dvě další hodnoty n , pro které rovnost neplatí, a to je $n = 6$ a $n = 12$.

Poslední figura, kterou jsme zatím v souvislosti s porovnáním hodnot dominance grafu a nezávislé dominance grafu nezmínili, je jezdec. O něm jsme však schopni říct pouze to, že pro všechny hodnoty $n \in \{1, \dots, 10\}$ kromě $n = 7$ a $n = 8$ nastává rovnost $\gamma(J_{n,n}) = i(J_{n,n})$. Ukázky rozmístění jezdců na šachovnici $n \times n$, kde rovnost nastává, vidíme na obrázcích 4.14a–4.14d a dále na obrázku 4.17.



(d) šachovnice 10×10

Obrázek 4.17: Ukázky případů, kdy $\gamma(J_{n,n}) = i(J_{n,n})$.

Závěr

Matematické úlohy inspirované šachem jsou velmi oblíbené nejen mezi matematiky a šachisty, ale díky velkému množství populárně naučné literatury, která se tomuto tématu věnuje, se úlohy dostaly do povědomí širší veřejnosti. Velkou zásluhu na tom má např. Martin Gardner, jehož práci [6] jsme již citovali ve druhé kapitole zaměřené na jezdcovu procházku. Několik dalších autorů se nespokojilo s hledáním jezdcovy procházky pouze na obdélníkových šachovnicích v rovině. Kelley Seibel se ve své práci [18] zabývá jezdcovými procházkami po válci a anuloidu, John J. Watkins k nim ve své knize [20] přidává procházky po Kleinově láhvi a Möbiově pásce. Podobně se dají rozšířit úlohy o nezávislosti a dominanci figur. Liam H. Harris, Stephanie Perkins, Paul A. Rauch a Sian K. Jones [10] dokázali najít hodnoty nezávislosti střelců na válci, Möbiově pásce, anuloidu, Kleinově láhvi a na plášti krychle. Martin Gardner v další ze svých knih [7] ukazuje, jak lze umístit na šachovnici osm figur (krále, dámu, dva střelce, dva jezdce a dvě věže) tak, aby ohrožovaly nejmenší možný počet polí nebo naopak, aby ohrožovaly největší možný počet polí.

Literatura

- [1] W. W. Rouse Ball, *Mathematical Recreations and Essays*, London: Macmillan and Co., Limited, 1905.
- [2] M. Bezzel, *Zwei Schachfragen*, Berliner Schachzeitung 3, 1848, 363.
- [3] E. J. Cockayne, *Chessboard Domination Problems*, Discrete Mathematics, Vol. 86, Issue 1–3 (Dec., 1990), 13–20.
- [4] H. E. Dudeney, *Amusements in Mathematics*, Thomas Nelson and Sons Ltd., London, 1917.
- [5] D. Finozhenok, W. D. Weakley, *An Improved Lower Bound for Domination Numbers of the Queen's Graph*, Australasian Journal of Combinatorics, Vol. 37, 2007.
- [6] M. Gardner, *Mathematical Magic Show*, MAA, Washington D. C., 1989.
- [7] M. Gardner, *The Unexpected Hanging and other Mathematical Diversions*, The University of Chicago Press, 1991.
- [8] J. W. L. Glaisher, *On the Problem of the Eight Queens*, Philosophical Magazine, series 4, Vol. 48, 1874, 457–467.
- [9] R. Greenberg, *Elementary Problems and Solutions E1585 II.*, American Mathematical Monthly, Vol. 71, No. 2, Feb. 1964, 210.
- [10] L. H. Harris, S. Perkins, P. A. Rauch a S. K. Jones, *Bishop Independence*, British Journal of Mathematics and Computer Science 3(4), 2013, 835–843.
- [11] G. Jelliss: Knight's Tour Notes [online], [10. 7. 2017]. Dostupné z: <http://www.mayhematics.com/t/t.htm>
- [12] H. J. R. Murray, *A History of Chess*, Oxford: At the Clarendon Press, 1913.
- [13] F. Nauck, *Briefwechseln mit Allen für Alle*, Illustrierte Zeitung, 15 (No. 377), 1850, 182.
- [14] E. Pauls, *Das Maximalproblem der Damen auf dem Schachbrette I.*, Deutsche Schachzeitung, Nr. 5, Leipzig, 1874, 129–134.
- [15] E. Pauls, *Das Maximalproblem der Damen auf dem Schachbrette II.*, Deutsche Schachzeitung, Nr. 9, Leipzig, 1874, 257–267.
- [16] V. Raghavan, S. M. Venkatesan, *On Bounds for a Board Covering Problem*, Information Processing Letters, 25, 1987, 281–284.
- [17] E. Sandifer: Knight's Tour [online], [10. 7. 2017]. Dostupné z: <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2006-04.pdf>
- [18] K. Seibel, *The Knight's Tour on the Cylinder and Torus*, Proceedings of the Research Experiences for Undergraduates Program in Mathematics, Oregon State University, Summer 1994.

- [19] A. J. Schwenk, *Which Rectangular Chessboards Have a Knight's Tour?*, Mathematics Magazine, Vol. 64, No. 5 (Dec., 1991), 325–332.
- [20] J. J. Watkins, *Across the Board: The Mathematics of Chessboard Problems*, Princeton University Press, 2004.
- [21] A. M. Jaglom, I. M. Jaglom, *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions, Vol. 1: Combinatorial Analysis and Probability Theory*, Dover Publications, Inc., New York, 1964.

Seznam obrázků

1	Ukázka šachovnice a figur.	2
1.1	Pohyb figur po šachovnici.	5
1.2	Šachovnice a graf odpovídající povoleným tahům jezdce.	6
2.1	Ukázky nejstarších dochovaných procházek jezdce.	7
2.2	Muhammad ibn Jahjá as-Súlí.	8
2.3	První známá evropská procházka jezdce.	8
2.4	Ukázky novodobých procházek jezdce.	9
2.5	Leonhard Euler – středově souměrná jezdcova procházka.	9
2.6	William Beverley – semimagická jezdcova procházka.	10
2.7	Neexistence jezdcovy procházky na šachovnici 4×4	10
2.8	Leonhard Euler – jezdcova procházka spojující šestnáct oddělených procházek.	11
2.9	Neúplná otevřená procházka jezdce.	12
2.10	Uzavření neúplné otevřené procházky jezdce.	12
2.11	Doplnění neúplné uzavřené procházky jezdce.	13
2.12	Opravená uzavřená procházka jezdce znázorněná schematicky. . .	13
2.13	Podmínka (ii) ve Schwenkově větě.	15
2.14	Podmínka (iii) ve Schwenkově větě (grafy $J_{3,4}$ a $J_{3,6}$).	16
2.15	Podmínka (iii) ve Schwenkově větě (graf $J_{3,8}$).	16
2.16	Otevřená jezdcova procházka po šachovnici $(4k + 1) \times (4k + 1)$. .	17
2.17	Souměrné procházky dalších figur.	18
2.18	Uzavřená střelcová procházka.	19
3.1	Gaussova metoda ověření nezávislosti dam.	21
3.2	Rozmístění dam na šachovnici $n \times n$ ($n = 2k$).	22
3.3	Rozmístění dam na šachovnici $n \times n$ ($n = 6l + 2$).	23
3.4	Rozmístění dam na šachovnici $n \times n$ ($n = 2k - 1$).	24
3.5	Nezávislost osmi dam na šachovnici 8×8	25
3.6	Nezávislost tří věží na šachovnici 3×3	26
3.7	Rozdělení šachovnice $(4k - 1) \times (4k - 1)$	27
3.8	32 nezávislých jezdců na šachovnici 8×8	28
3.9	14 nezávislých střelců na šachovnici 8×8	29
3.10	Ohrožování krajních polí střelci na šachovnici 8×8	30
3.11	Nezávislost čtyř střelců na šachovnici 3×3	31
3.12	Nezávislost králů na šachovnici $n \times n$	32
4.1	Dominance věží na šachovnici 8×8	34
4.2	Důkaz dominance králů.	35
4.3	Dominance králů na šachovnici 8×8	36
4.4	Otočení a složení bílých polí šachovnice 8×8	36
4.5	Dominance střelců.	37
4.6	Otočení a složení polí šachovnice 7×7	38
4.7	Otočená a složená pole šachovnice 8×8	39
4.8	Dominance dam.	41
4.9	Dominance dam na nejmenších šachovnicích.	42

4.10	Dominance dam na šachovnici 6×6	42
4.11	Označení prázdných řádků a sloupců; vyznačení množiny M	43
4.12	Částečné pokrytí šachovnice 5×5 jednou dámou.	44
4.13	Dominance dam na větších šachovnicích.	45
4.14	Dominance jezdců.	46
4.15	Dominance a nezávislost dam na šachovnici 4×4	47
4.16	Ukázky případů, kdy $\gamma(G) = i(G)$	48
4.17	Ukázky případů, kdy $\gamma(J_{n,n}) = i(J_{n,n})$	49

Seznam tabulek

3.1	Počet možností rozmístění maximálního počtu nezávislých dam na šachovnici $n \times n$	24
3.2	Počet možností rozmístění maximálního počtu nezávislých jezdců na šachovnici $n \times n$	28
3.3	Počet možností rozmístění maximálního počtu nezávislých králů na šachovnici $n \times n$	32
4.1	Minimální počet dam potřebných na pokrytí šachovnice $n \times n$. . .	44
4.2	Minimální počet jezdců potřebných na pokrytí šachovnice $n \times n$. .	46