Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Iva Koblížková

Matematika ve hře SET

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Studijní program:	Fyzika se zaměřením na vzdělávání
Studijní obor:	FMUP

Praha 2022

Můj dík patří všem, kteří mě při psaní této práce jakýmkoli způsobem podporovali. Především bych ráda poděkovala vedoucímu mé práce doc. RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D. zejména za návrh tématu, milý přístup a všechny cenné rady a připomínky při psaní této práce. Zároveň mu děkuji za ochotu obratem mi odpovídat na dotazy a podávat zpětnou vazbu prostřednictvím emailu prakticky v jakoukoli denní dobu (hlavně s blížícím se termínem odevzdání).

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....   Podpis autora

Název práce: Matematika ve hře SET

Autor: Iva Koblížková

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Antoník Slavík, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Bakalářská práce se věnuje matematickému popisu karetní hry SET. V úvodu seznámí čtenáře s historií a pravidly této hry. Následně jsou rozebrány různé kombinatorické otázky týkající se této hry. V dalších kapitolách je pro popis hry využito afinní geometrie, jež slouží jako užitečný nástroj pro výpočet tzv. maximální cap. V poslední kapitole je ukázáno, jak lze hru popsat a zavést některé dříve definované pojmy pomocí lineární algebry.

Klíčová slova: SET, karetní hra, afinní geometrie, maximum cap

Title: Mathematics in the game of SET

Author: Iva Koblížková

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: This bachelor thesis provides a mathematical description of the card game of SET. The reader is introduced to the history and the rules of this game. Further off, some combinatorial aspects of the game are investigated. In the following chapter, affine geometry is used to describe the game. Thanks to this generalization, the so-called maximum cap can be calculated. The last chapter shows how linear algebra can be used to characterize the game and some of the previously introduced ideas.

Keywords: SET, card game, affine geometry, maximum cap

Obsah

Úvod

Tato bakalářská práce se věnuje populární karetní hře SET, v České republice vydávané také pod názvem Triáda. Hra byla na trh uvedena před více než 30 lety a dodnes je populární mezi dětmi i dospělými, matematiky i nematematiky a získala také mnohá ocenění. Tato hra není zajímavá pouze z pohledu hráče, ale obsahuje také mnoho zajímavých matematických konceptů. Většina článků věnující se této hře je publikována v angličtině, což bylo jedním z podnětů k vytvoření tohoto textu v také češtině.

Práce je samozřejmě určena nadšencům do této stolní hry, kterým může ukázat, jak je možné matematicky popsat praktický problém, se kterým jsou již dobře seznámeni. Věřím, že převedení abstraktní matematické teorie na konkrétní situaci by mohlo sloužit i jako motivace pro čtenáře k dalšímu studiu matematiky. Dále je práce určena zájemcům o kombinatoriku a lineární algebru, které by tato práce mohla naopak seznámit s aplikací dříve naučené teorie a se hrou samotnou. V neposlední řadě je tato práce určena také učitelům matematiky na základních a středních školách, kterým by mohla přinést inspiraci pro vytvoření logických rébusů založených na principu hry SET, jež mohou být zařazeny pro zpestření do výuky.

Práce je členěna do čtyř kapitol. V první kapitole je čtenář seznámen s historií a pravidly této hry. Druhá kapitola se věnuje kombinatorickým otázkám této hry – tj. kolik je v celé hře SETů, v kolika SETech je obsažena konkrétní karta a podobně. Zde také zavádíme obecnější verze hry SET, dává totiž smysl uvažovat i karty s jiným počtem atributů než v základní verzi hry. Ve třetí kapitole jsou formulovány axiomy, pomocí nichž můžeme hru popsat pomocí konečné afinní geometrie, do řeči hry jsou zavedeny pojmy přímka, rovina a paralelnost. Tyto nástroje jsou poté použity k zodpovězení otázky, kolik minimálně karet musíme vyložit, aby mezi nimi s jistotou byl SET. Čtvrtá kapitola ukazuje, jak lze hru popsat pomocí lineární algebry (jednotlivé karty jsou zakódovány pomocí souřadnic ve čtyřrozměrném vektorovém prostoru) a k čemu lze takový popis využít. Na závěr jsou uvedeny ještě další zajímavé skupiny karet, které můžeme kromě SETů ve hře hledat.

Práce je vysázena pomocí systému LaTeX. Obrázky herních karet jsou vytvořeny pomocí LaTeXového balíčku setdeck.

Kapitola 1

Představení hry SET

Tato kapitola je zpracována na základě knihy [6] (strana 1–12).

1.1 Historie

SET je karetní stolní hra zaměřená především na hráčovu představivost, soustředěnost a logické uvažování. Díky jednoduchosti pravidel a použití symbolů v ní mohou děti snadno porazit dospělé.

Její autorkou je genetička Marsha Jean Falco. S nápadem na hru přišla v roce 1974 když zkoumala, zda je epilepsie u německých ovčáků dědičná. U těchto psů sledovala určité jejich vlastnosti. Jelikož pozorované vlastnosti byly společné pro mnoho psů, místo opakovaného vypisování informací nahradila dané vlastnosti symboly, které zapisovala na kartičky. Rozlišné symboly na kartičkách tedy reprezentovaly rozdílné vlastnosti psů.

Při hledání zákonitostí v sesbíraných datech si všimla, že jde vlastně o celkem zajímavou logickou hádanku, která by mohla mít potenciál jako hra. S podporou rodiny a přátel tedy vyvinula karetní hru SET, uvedenou na trh roku 1990.

SET je jedna z nejpopulárnějších karetních her posledních let. Byla několikrát oceněna jako výjimečná vzdělávací hra, například cenou Mensa Select v roce 1991. Hra vzbudila také zájem matematiků, vznikl velký počet publikací zabývajících se její problematikou i pedagogicky zaměřených článků týkající se využití této hry ve výuce. Pro matematický popis hry je využito poznatků z kombinatoriky, lineární algebry, geometrie a abstraktní algebry.

1.2 Pravidla hry

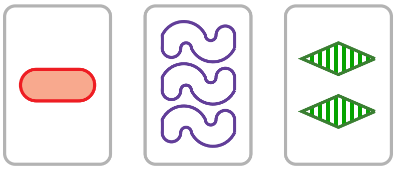
Balíček je tvořen 81 speciálními kartami, z nichž každá má 4 atributy - počet symbolů, barvu, výplň, tvar. V každém tomto atributu je na výběr ze 3 různých možností:

- *Počet:* 1, 2, 3
- *Barva:* červená, zelená, fialová

- *Výplň:* prázdná, pruhovaná, plná
- *Tvar:* ovály, diamanty, klikatky

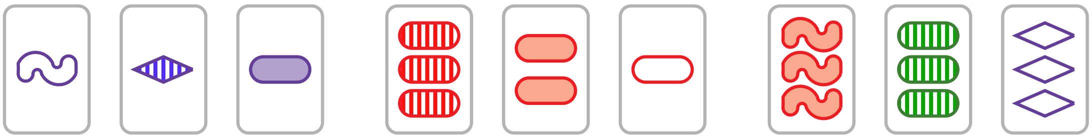
Balíček obsahuje všechny dostupné kombinace těchto atributů. Na obrázku 1.1 jsou ukázány následující příklady karet:

- 1 červený plný ovál
- 3 fialové prázdné klikatky
- 2 zelené pruhované diamanty



Obrázek 1.1: Ukázka některých karet

Cílem hry je najít co nejvíce SETů. SET je taková trojice karet, kde se v každém atributu buď všechny tři karty liší, nebo se všechny tři karty shodují. Například karty z obrázku 1.1 tvoří SET, protože se všechny liší v počtu, barvě, tvaru i výplni. Obrázek 1.2 vlevo také zobrazuje SET, jelikož v barvě a počtu se všechny tři karty shodují, zatímco ve tvaru a výplni se všechny tři karty liší. Obrázky 1.2 uprostřed a vpravo zobrazují další příklady SETů.



Obrázek 1.2: Příklady SETů

Hra je určena pro jakýkoli počet hráčů – hra jednoho hráče může být brána jako trénink, od většího počtu hráčů už je hra kompetitivní.

Na začátku hry se z promíchaného balíčku vyloží 12 karet lícem nahoru. Všichni hráči zároveň mezi nimi hledají SET. Pokud některý z nich hledanou trojici uvidí, oznámí to výkřikem SET!, po němž danou trojici ukáže ostatním hráčům, kteří odsouhlasí, že se skutečně jedná o SET. Tyto 3 karty si pak hráč bere k sobě, na stůl se místo nich doplní 3 nové karty z balíčku a hra pokračuje.

Pokud se v nějaké fázi hry hráči shodnou, že na stole žádný SET nevidí, doplní se na stůl ještě 3 karty navíc. To se může stát i na úplném začátku hry, postup je stejný.

Hraje se až do vyčerpání všech karet z balíčku, vítězí hráč s největším počtem nasbíraných SETů.

Kapitola 2

SET a kombinatorika

2.1 Standardní SET

Již při prvních několika hrách jistě vyvstanou na mysli hráče otázky jako „kolik SETů celkem obsahuje balíček?“; „mohou být libovolné 2 karty společně součástí SETu?“; nebo „v kolika SETech je obsažena konkrétní karta?“. Takovým otázkám se budeme věnovat v této kapitole.

První, nejjednoduší kombinatorický problém této hry, je vůbec počet jejích karet. Každá karta má 4 atributy – počet symbolů, barvu, výplň a tvar. Přitom u každého z těchto atributů vybíráme ze 3 možností. V balíčku jsou obsaženy úplně všechny karty, které lze tímto způsobem vytvořit. Jejich počet bude tedy:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \text{ karet}$$

Jedním ze základních poznatků o hře je fakt, že vybereme-li libovolnou dvojici karet, existuje právě jedna karta, která je doplní jako SET. Tj. vybráním dvou karet je SET už jednoznačně určen. To zároveň znamená, že libovolné 2 karty mohou být ve společném SETu, vhodnou 3. kartu pro ně nalezneme vždy. (viz [6])

Díky tomuto faktu lze zodpovědět otázku, součástí kolika SETů je jedna konkrétní karta. Představme si, že tedy náhodně vybereme z balíčku kartu A. Zbyde nám tak 80 karet — ty budeme ke kartě A postupně přiřazovat. Ke kartě A přiřadíme kartu 1. Tím máme už jednoznačně určen SET a navíc máme jistotu, že ve zbylých kartách najdeme takovou kartu, která ho doplní. Nyní ke kartě A přiřadíme kartu B a celá situace se opakuje — opět máme jednoznačně určenu kartu, která tuto dvojici doplní jako SET. Tímto způsobem bychom našli SET pro všech zbylých 80 karet; to nám tedy dává celkem 80 trojic. Toto číslo je třeba ale ještě vydělit 2, abychom se zbavili závislosti na pořadí — jinak bychom měli trojice A,B,C a A,C,B započítány jako rozdílné:

$$\frac{1 \cdot 80}{2} = 40$$

Každá karta je tedy součástí 40 SETů.

V návaznosti lze jednoduše vypočíst i celkový počet SETů, který se dá z karet v balíčku vytvořit. Každá karta je součástí 40 SETů a karet je celkově 81. Tato čísla ale nestačí pouze vynásobit - tím bychom každý SET započítali z pohledu každé jeho karty, tedy třikrát. Tento součin musíme tedy ještě vydělit třemi.

$$\frac{81 \cdot 40}{3} = 1080$$

Jiný způsob výpočtu je pomocí představy, že u první karty vybíráme z celého balíčku, tj. 81 karet, u druhé z 80 karet a třetí karta je už určena jednoznačně. Přitom nezáleží na pořadí, ve kterém karty vybereme — 3 různé karty lze seřadit 3! různými způsoby. Pro celkový počet SETů tedy opět dostaneme:

$$\frac{81 \cdot 80}{3!} = 1080$$

Celkový počet SETů je tedy 1080.

Dle pravidel hry víme, že trojice karet je SET, pokud se v daném atributu všechny karty buď liší, nebo všechny shodují. Není možné, aby se trojice shodovala úplně ve všech atributech – to by se muselo jednat o 3 stejné karty. Trojice se může tedy shodovat ve třech, dvou, jednom nebo žádném atributu. Nabízí se tedy otázka, jaké procento SETů má tu vlastnost, že karty se liší v 1, 2, 3 nebo všech atributech.

Ve všech atributech. Z předchozích úvah víme, že každý SET je určen už dvěma kartami – těmito dvěma kartami je určeno také to, v jakých atributech se budou všechny karty lišit nebo shodovat. První kartu vybereme z 81 karet; nyní chceme, aby se od ní druhá karta ve všech atributech lišila. U každého atributu máme tedy na výběr ze 2 možností – např. pokud námi zvolená karta je červená, barva druhé karty bude fialová nebo zelená. K naší první kartě můžeme tedy přiřadit celkem:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16 \text{ karet}$$

Celkový počet opět musíme kvůli záměně pořadí karet vydělit 3!. Počet SETů, kde se karty liší ve všech atributech, je tedy

$$\frac{81 \cdot 16}{3!} = 216$$

Ve třech atributech. Pro SET, kde se karty liší ve 3 vlastnostech, je tedy jeden atribut jednoznačně určen. Přitom musíme započítat všechny případy stejných atributů, tj. trojice shodující se v barvě, počtu, tvaru a výplni. Jeden atribut je pevně dán, u ostatních třech opět vybíráme ze 2 možností. Jako 2. kartu tedy volíme z

$$1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = \binom{4}{1} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32 \text{ karet}$$

Zbavíme se SETů lišících se pouze pořadím a dostáváme celkový počet SETů lišících se jedním atributem:

$$\frac{81 \cdot 32}{3!} = 432$$

Ve dvou atributech. Dva atributy jsou určeny jednoznačně, vybíráme pouze u dvou atributů. Počet různých způsobů, jaké 2 ze 4 atributů mít zvoleny, je dán kombinačním číslem $\binom{4}{2}$. Jako adepty na druhou kartu tedy máme celkem

$$\binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 24 \text{ karet}$$

Počet SETů lišících se ve 2 atributech je tedy:

$$\frac{81 \cdot 24}{3!} = 324$$

V jednom atributu. V tomto případě máme dány 3 atributy jednoznačně, vybíráme pouze u jednoho atributu. Které atributy budou dány je určeno kombinačním číslem $\binom{4}{3}$. Druhou kartu tedy vybíráme z různých

$$\binom{4}{3} \cdot 2 = 8 \text{ karet}$$

Počet SETů lišících se v 1 atributu je tedy:

$$\frac{81 \cdot 8}{3!} = 108$$

Pro výpočet pravděpodobnosti, že se daný SET bude lišit v 1, 2, 3 nebo všech atributech potom získáme jako podíl počtu SETů daného typu s celkovým počtem SETů v balíčku. Vypočtené pravděpodobnosti jsou zaznamenány v tabulce 2.1.

Typ SETu	Počet SETů	Zlomek	Procento
liší se ve všech atributech	216	$\frac{216}{1080}$	20 %
liší se ve 3 atributech	432	$\frac{432}{1080}$	40 %
liší se ve 2 atributech	324	$\frac{324}{1080}$	30 %
liší se v 1 atributu	108	$\frac{108}{1080}$	10 %

Tabulka 2.1: Procento SETů lišících se v daném počtu atributů

Představme si situaci, kdy z balíčku náhodně vybereme 3 karty. Jaká je šance, že se bude jednat o SET? Jak už víme, celý balíček obsahuje 81 karet. Tři karty z něj tedy můžeme vybrat $\binom{81}{3}$ způsoby. V celém balíčku je celkem 1080 SETů.

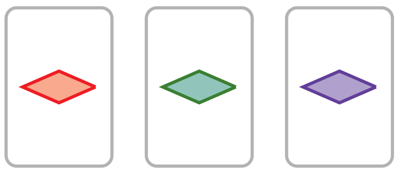
$$\frac{1080}{\binom{81}{3}} = \frac{1080}{85320} \approx 1{,}266\ \%$$

Tedy šance, že tři náhodně vybrané karty budou SET, je přibližně 1,266 %.

2.2 SET s n atributy

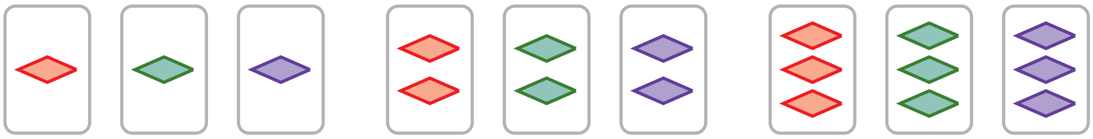
Zatím jsme se zabývali klasickou verzí hry SET s kartami majícími 4 atributy, kde u každého z nich je na výběr ze 3 možností. Můžeme si ale zavést i obecnější verzi hry, která bude mít n atributů. Možnosti výběru u každého atributu ponecháme 3. Balíček bude tím pádem tvořen 3^n kartami.

Pro hru pouze s 1 atributem bychom vybrali např. jen karty se stejným počtem, tvarem i výplní a sledovali bychom pouze měnící se barvu. Tím pádem by v balíčku byly pouze 3 karty, jelikož vybíráme pouze ze 3 různých možností (červená, zelená, fialová). Tyto karty by zároveň tvořily jediný SET. Takový balíček by mohl vypadat jako ten na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Balíček karet s jedním atributem

Pro vytvoření balíčku karet se dvěma atributy vybereme karty se stejným tvarem a výplní a budeme měnit pouze barvu a počet. U každé karty tedy vybíráme z barev červená, zelená a fialová a z počtů 1, 2 nebo 3. To nám dává celkem $3 \cdot 3$ možností pro vytvoření karty, tj. v takovém balíčku bude 9 karet.



Obrázek 2.2: Balíček karet se dvěma atributy

Zajímavou vlastností je, že vybereme-li jakékoli 2 karty z tohoto balíčku, vždy v balíčku najdeme také kartu, která je doplňuje do SETu. Kolik SETů se bude nacházet v takovém balíčku?

První kartu vybíráme z 9 karet, druhou kartu ze zbývajících 8 karet. Třetí karta už je tímto výběrem jednoznačně určena. Jelikož ale nezáleží na pořadí karet, musíme tuto hodnotu vydělit ještě počtem permutací 3 karet:

$$\frac{9 \cdot 8}{3!} = 12$$

V balíčku se 2 atributy, kde u každého z nich vybíráme ze 3 možností, se nachází 12 SETů.

Analogickým způsobem bychom vytořili balíček karet se 3 atributy – zachováme stejnou výplň a budeme měnit barvu, počet a tvar. Takový balíček by obsahoval $3 \cdot 3 \cdot 3$, tj. 27 karet.

Počet SETů v takovém balíčku opět vypočteme pomocí představy, že první kartu vybíráme z 27 karet, druhou z 26 karet a třetí už je určena jednoznačně. Zbavíme se závislosti na pořadí a získáváme počet:

$$\frac{27 \cdot 26}{3!} = 117$$

V balíčku se 3 atributy, kde u každého z nich vybíráme ze 3 možností, se nachází 117 SETů.

Kapitola 3

SET a afinní geometrie

Jak už víme z pravidel, hra začíná vyložením 12 karet na stůl. Tím se přirozeně nabízí otázka, proč je zvolen právě počet 12. Po odehrání několika her si všimneme, že mezi začátečními 12 kartami ne vždy najdeme SET. Jaký by byl tedy minimální počet karet, aby byla existence SETu zaručena? Právě touto problematikou se budeme zabývat v této kapitole. Nejdříve ale budeme muset na karty na chvíli zapomenout a naši otázku zobecnit na geometrický problém.

3.1 Co je afinní geometrie

Afinní geometrie, nebo speciálně konečná afinní geometrie (se kterou zde budeme pracovat), je geometrie operující pouze s body, přímkami, rovinami a nadrovinami. Není v ní možno měřit vzdálenosti, nebo například odchylky úhlů – jediné, čím se zabývá, je incidence. To znamená, zda se například rovina a přímka protínají, případně v kolika bodech. (viz [2])

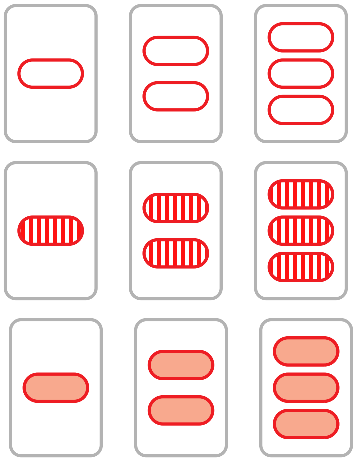
Jak je ale možné, že nějaká zvláštní geometrie souvisí s karetní hrou? Zmíněné body a přímky nemusíme chápat pouze jako čistě geometrické útvary, ve skutečnosti může jít o zcela libovolné objekty. V našem případě bude každý bod v prostoru reprezentovat nějakou kartu.

3.2 Popis balíčku karet pomocí afinní geometrie

Budeme pracovat v konečné afinní geometrii. Afinní geometrie (konečná i nekonečná) je dle [2] dána následujícími axiomy:

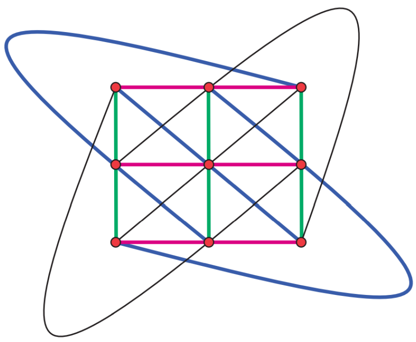
1. Existují alespoň 3 nekolineární body.
2. Každá přímka obsahuje nejméně 2 body.
3. Každé 2 body jednoznačně určují přímku.
4. Pro libovolnou přímku l a bod P, který na ní neleží, existuje přesně jedna přímka, která obsahuje P a zároveň neprotíná l. Tuto přímku nazveme paralelní k l.

V předchozí kapitole jsme si ukázali, že hru SET lze zobecnit na verzi s n atributy. Pojďme se podívat na to, jak bude vypadat balíček pro $n = 2$. Budeme měnit pouze počet a výplň; barva (červená) a tvar (ovál) budou na všech kartách stejné – takový balíček je ukázán na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Balíček karet se 2 atributy

Balíček je tvořen 3^2, tedy 9 kartami. Další zajímavou vlastností je, že pokud vybereme libovolné 2 karty, v balíčku vždy existuje třetí karta doplňující SET. Všimněme si nyní, kde všude se v takovém uspořádání SETy nacházejí. SETy jsou zároveň v každém řádku a sloupci, ale také na diagonálách – i na těch, které vpravo končí a prodloužili bychom je o řádek níž opět vlevo. Pokud bychom karty nahradili body a spojili vždy ty trojice, které tvoří SET, vzniklo by nám schéma jako na obrázku 3.2.



Obrázek 3.2: Schéma afinní roviny AG(2,3)
(obrázek převzat z [6])

A toto je shodou okolností také příklad konečného afinního prostoru! Jedná se konkrétně o afinní rovinu AG(2,3). První číslo v zápisu AG(2,3) značí dimenzi a druhé počet bodů na každé přímce. Budeme tedy pracovat v rovině, kde na každé přímce leží právě 3 body. Nyní už víme, jak je možné použít geometrii k popisu této hry.

Axiomy afinní geometrie tedy můžeme snadno přeložit do jazyka hry SET – stačí pouze nahradit slova „body“ a „přímky“ z původních axiomů. Body pro nás totiž reprezentují jednotlivé karty a přímky jsou SETy. Axiomy dle [2] by tedy vypadaly následovně:

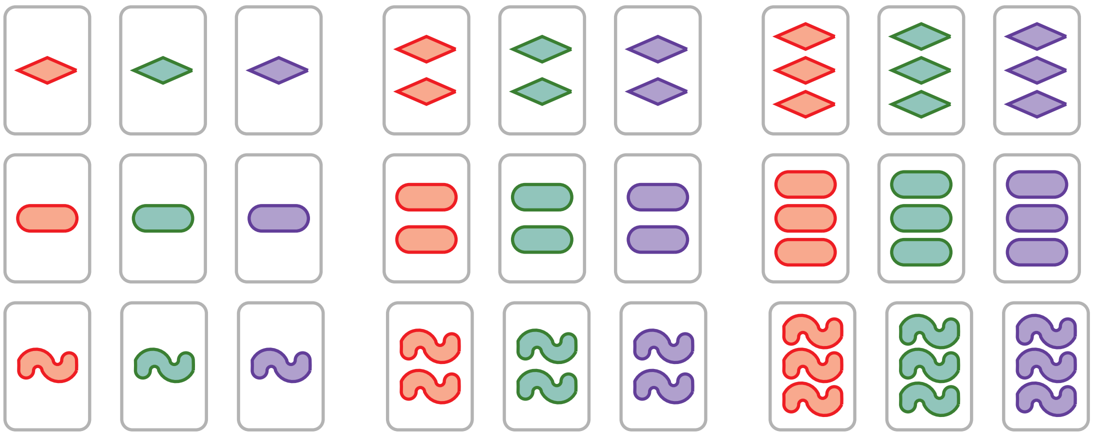
1. Existují alespoň 3 karty, které netvoří SET.
2. Každý SET obsahuje nejméně 2 karty.
3. Každý SET je jednoznačně určen dvěma kartami.
4. Pro libovolný SET a kartu nepatřící do tohoto SETu existuje právě jeden SET obsahující tuto kartu, který je k původnímu SETu paralelní.

Karty tedy tvoří SET v případě, kdy leží na jedné přímce. Jelikož každá přímka obsahuje 3 body, nemůže se stát, že by byl SET tvořen např. 4 kartami. Nebo naopak, že by ke 2 kartám neexistovala třetí, která je doplní na SET.

Co znamená, že jsou SETy paralelní, je také dobře vidět z obrázku 3.2. Jde o SETy, které nemají společnou kartu. Spočteme-li počet přímek, dostaneme se k číslu 12. Tyto karty tedy tvoří 12 různých SETů, což souhlasí s výsledkem ze sekce 2.2. V obrázku jsou vzájemně paralelní SETy vyznačeny stejnou barvou. Jelikož rovnoběžnost je relace ekvivalence, můžeme si všimnout, že se tím 12 SETů rozdělilo do čtyř tříd ekvivalence, každá obsahuje 3 SETy.

3.3 Afinní prostory AG(3,3) a AG(4,3)

Nyní se pokusme stejným způsobem popsat balíček karet se 3 atributy – zde počet, barva a tvar. Karty ve hře je možné uspořádat do krychle, která vznikne položením 3 čtverců na obrázku 3.3 na sebe. Karty budeme opět považovat za body a SETy za přímky. Tímto vznikne 3-dimenzionální afinní prostor, kde se na každé přímce nacházejí 3 body. Takový prostor značíme AG(3,3). (viz [6])



Obrázek 3.3: Afinní prostor AG(3,3)

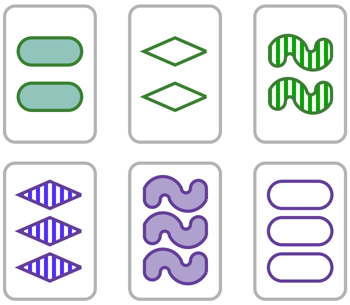
Vidíme, že taková struktura obsahuje celkem 27 karet. Bude v ní celkem 117 SETů, jak jsme již vypočítali v sekci 2.2. Opět platí, že k libovolným 2 kartám z tohoto balíčku lze najít kartu třetí doplňující je do SETu.

I ve trojrozměrném prostoru samozřejmě můžeme mluvit o paralelnosti SETů. Zatímco ve 2D platí již zmíněné jednoduché pravidlo – SETy jsou paralelní, pokud nemají žádnou společnou kartu – v dimenzi 3 a výše by tuto definici splňovaly nejen paralelní, ale i mimoběžné SETy.

Paralelní SETy v dimenzi vyšší než 2 tedy budeme muset definovat přesněji. Všimněme si, že pro paralelní SETy platí dle [6] následující pravidla:

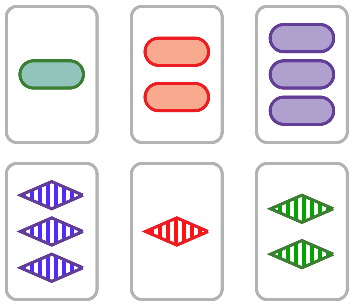
1. Pokud je nějaký atribut stejný v prvním SETu, je stejný také ve druhém SETu.
2. Pokud se nějaký atribut liší v prvním SETu, liší se také ve druhém SETu.
3. Pro odlišné atributy se zachovává cyklické pořadí. Např. pokud v prvním SETu bylo pořadí tvarů (1,2,3), ve druhém SETu můžou být tvary v pořadí (3,1,2), nebo (2,3,1). Jedná se totiž pouze o cyklickou záměnu.

Vzájemně paralelní SETy jsou ukázány na obrázku 3.4 . Vidíme, že u prvního SETu se zachovávají 2 atributy – počet (2) a barva (zelená). Proto se tyto atributy zachovávají i u druhého SETu (3 a fialová). Tvar a barva se u prvního SETu mění, proto se mění i u druhého. Pořadí je dáno cyklickou záměnou – u tvaru je druhý SET vlastně posunut o jednu kartu doleva, zatímco u výplně o jednu kartu doprava.



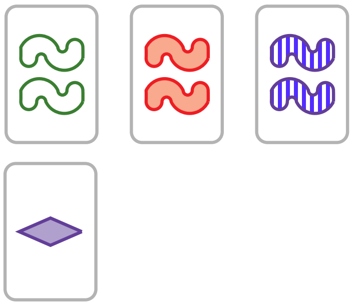
Obrázek 3.4: Příklad paralelních SETů

Na obrázku 3.5 je ukázka dvou SETů, které nejsou paralelní. Sice je splněna první a druhá podmínka – stejné atributy se zachovávají (tvar, výplň) a mění (barva, počet) v obou SETech. Také je splněno, že pořadí počtu znaků ve druhém SETu je cyklickou záměnou počtu znaků v prvním SETu. Toto pravidlo ale není splněno pro barvu – pořadí barev ve druhém SETu není cyklickou záměnou pořadí barev v prvním SETu.



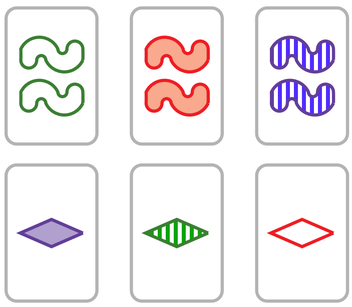
Obrázek 3.5: SETy, které nejsou paralelní

Při této definici paralelních SETů je splněn 4. axiom z definice afinního prostoru, který říká, že, máme-li daný SET, tak SET k němu paralelní je jednoznačně určen jednou kartou. Taková situace je ukázána na obrázku 3.6 . Ověřme, že paralelní SET je touto kartou skutečně určen jednoznačně.



Obrázek 3.6: Jednoznačné určení paralelního SETu

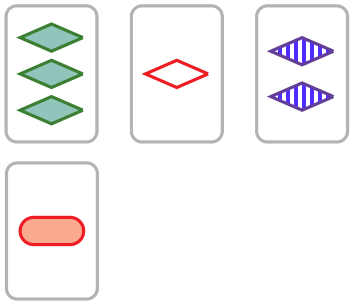
V prvním SETu se zachovává počet a tvar. Na každé kartě ve druhém SETu tedy bude 1 diamant. Stačí tedy cyklicky zaměnit barvy a výplně. Existuje více možností, jak toto udělat – vždy nám ale vznikne stejná trojice karet. Z toho plyne, že paralelnost je vlastnost dvou SETů, nezáleží na uspořádání karet.



Obrázek 3.7: Doplnění paralelního SETu z obrázku 3.6

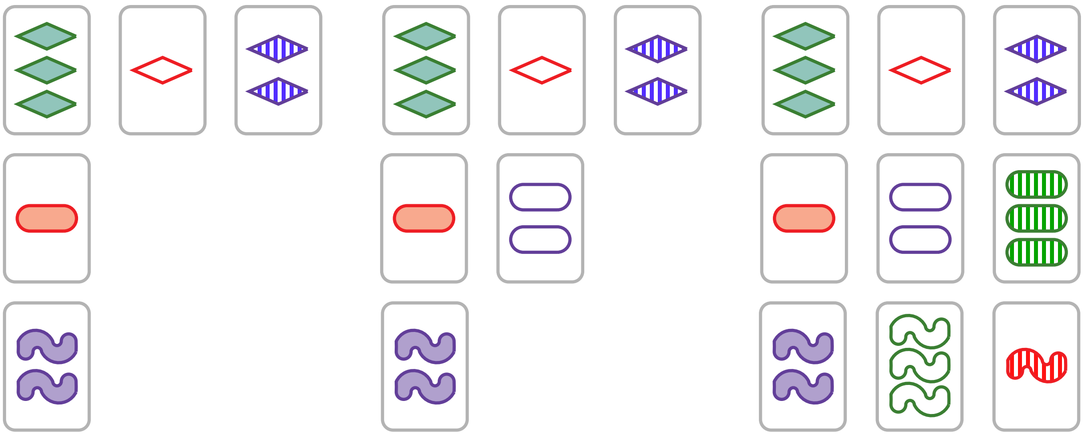
Kompletní balíček karet pro klasickou hru se 4 atributy je možné analogicky uspořádat do čtyřrozměrné krychle. Geometrická představa zde sice trochu selhává, ale SETy jsou opět reprezentovány přímkami, jako u prostorů nižších dimenzí. Stejně tak paralelní SETy jsou definovány tímtéž způsobem jako v trojrozměrném afinním prostoru. Tento prostor značíme AG(4,3). (viz [6])

Podobně jako v eukleidovské geometrii můžeme v afinních prostorech pracovat kromě bodů a přímek i s rovinami. Rovina je určena přímkou a bodem, který na ní neleží, přičemž musí obsahovat právě všechny přímky spojující daný bod s body dané přímky. V řeči hry to tedy znamená, že rovina je jednoznačně určena SETem a kartou, která není součástí tohoto SETu. Zajímavým rébusem může být právě doplnění všech karet takto určené roviny. Podobnou úlohou by bylo, jak u 9 náhodných karet poznat, zda leží v jedné rovině.



Obrázek 3.8: Rovina je jednoznačně určená přímkou a bodem

Uvažujme rovinu zadanou kartami na obrázku 3.8 – tato úloha je inspirována [6]. Všimněme si, že při volbě SETu a jedné karty máme již jednoznačně určenu kartu v dolním levém rohu. Po doplnění je opět jednoznačně určen další SET – nyní na diagonále vedoucí z horního pravého rohu do dolního levého rohu. Nyní už snadno doplníme kartu v dolním řádku uprostřed a kartu v prostředním řádku vpravo. Nakonec můžeme doplnit také kartu v dolním řádku vpravo. Celý tento postup je ukázán na obrázku 3.9.



Obrázek 3.9: Doplnění afinní roviny

Takto máme doplněny všechny karty tvořící rovinu v afinním prostoru AG(4,3).

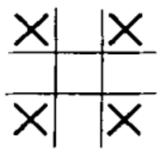
3.4 Maximální cap

Nyní si konečně můžeme zodpovědět otázky kladené na začátku této kapitoly. Jaký minimální počet karet musíme vyložit na začátku hry, aby mezi nimi s jistotou byl SET? Víme, že 12 karet na toto nestačí, ani pro 15 karet stále jistotu nemáme. Stejně tak po přidání dalších 3 karet, tedy pro 18 karet, není přítomnost SETu garantována. Jak si v této sekci ukážeme, až pro 21 karet můžeme s jistotou říci, že je mezi nimi SET.

Jako „cap“ nazýváme množinu bodů v afinním prostoru, která neobsahuje přímku. „Maximální cap“ potom nazýváme největší takovou množinu. Takových množin může být i několik – více než množiny samotné nás ale zajímá počet jejich prvků. Při otázce, při jakém počtu karet ještě není garantována existence SETu, se tedy ptáme na maximální cap příslušného balíčku. Ekvivalentní otázkou se zabýval Giuseppe Pellegrino už několik let před tím, než byla hra vůbec vytvořena. (viz [3])

Začněme nejprve jednodušším případem – vezměme balíček, kde má každá karta pouze jeden atribut, např. barvu. Za tohoto předpokladu by se balíček skládal vlastně jen ze 3 karet – červené, zelené a fialové, přičemž tyto 3 karty by dohromady tvořily SET. Je tedy zřejmé, že maximální cap pro tento balíček by byly libovolné 2 karty.

Pokud by karty měly 2 atributy, balíček by odpovídal prostoru AG(2,3) a obsahoval celkem 9 karet. Představme si, že bychom tyto karty uspořádali do čtverce, jako v předchozích kapitolách – SETy se nachází v řádcích, sloupcích a na diagonálách. Tento problém tedy můžeme převést na ekvivalentní úlohu. Budeme hledat největší počet křížků, který lze umístit do mřížky 3×3 tak, aby žádný řádek, sloupec, ani diagonála nebyly zcela zaplněny.



Obrázek 3.10: Maximální cap v AG(2,3)
(obrázek převzat z [3])

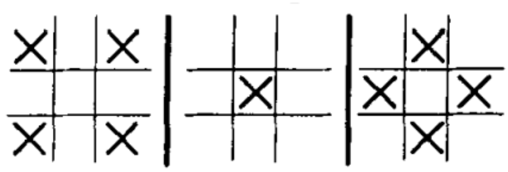
Za těchto podmínek můžeme do mřížky umístit maximálně 4 křížky, jako je ukázáno na obrázku 3.10. Nyní si toto tvrzení dokažme.

Věta 1. *Maximální cap v prostoru AG(2,3) je tvořen 4 body.*

Důkaz. Sporem. Předpokládejme, že v AG(2,3) existuje cap, který obsahuje 5 bodů x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Prostor AG(2,3) si můžeme představit jako sjednocení 3 horizontálních vzájemně rovnoběžných přímek. Aby body tvořily cap, na každé této přímce mohou ležet maximálně 2 body – to tedy vede k rozmístění, kde na 2 přímkách jsou 2 body a na zbylé přímce 1 bod. Bez újmy na obecnosti řekněme, že se jedná o bod x_5 a horizontální přímku, které náleží, označme H. Díky definici prostoru víme, že bod a_5 náleží 4 různým přímkám – ty označíme H, L_1, L_2, L_3.

Na začátku jsme řekli, že žádný z bodů x_1, x_2, x_3, x_4 nebude ležet na přímce H. Použitím Dirichletova principu je jasné, že na některé ze tří přímek L_1, L_2, L_3 leží dva různé body x_r, x_s, kde $s \in \{1,2,3,4\}$. Na stejné přímce ale zároveň leží i bod x_5. To znamená, že jsme našli 3 body na jedné přímce, které mají být součástí cap, to je ale spor s definicí cap. □

Pro karty se 3 atributy by měl balíček 27 karet a odpovídal by prostoru AG(3,3). Pomocí schématu s křížky opět můžeme najít maximální počet karet, z nichž žádné 3 netvoří SET. Tento prostor můžeme reprezentovat krychlí – představme si, že 3 mřížky z obrázku 3.11 položíme na sebe.



Obrázek 3.11: Maximální cap v AG(3,3)
(obrázek převzat z [3])

Experimentováním zjistíme, že křížků lze tímto způsobem umístit nejvýše 9, tedy ve hře se třemi atributy tedy lze vybrat maximálně 9 karet tak, aby mezi nimi nebyl žádný SET.

Věta 2. *Maximální cap v prostoru AG(3,3) je tvořen 9 body.*

Důkaz. Sporem. Předpokládejme, že v AG(3,3) existuje cap s 10 body. Prostor AG(3,3) si můžeme představit jako sjednocení 3 rovnoběžných rovin.

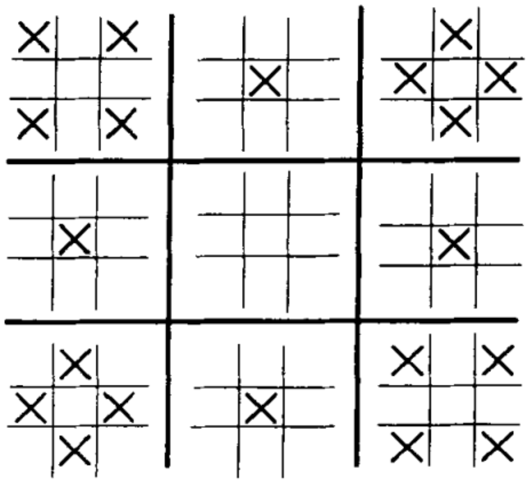
Poznámka: Cap v prostoru AG(2,3) nazveme zkráceně 2-cap; podobně cap v prostoru AG(3,3) nazveme 3-cap.

Jelikož průnikem jakékoli roviny s 3-cap je 2-cap, z věty 1 vyplývá, že žádná rovina nemůže obsahovat více než 4 body z naší cap. Tím pádem budou body mezi roviny rozděleny na 4, 4 a 2, nebo na 4, 3 a 3. V obou případech nejmenší počet bodů v jedné rovině je 2 nebo 3. Rovinu s nejmenším počtem bodů nazvěme H. Zbývá tedy minimálně 7 bodů $x_1, ..., x_7$ neležících v H.

Nechť a, b jsou dva body z cap ležící v rovině H. Existují právě 4 roviny v prostoru AG(3,3), které obsahují a i b – tyto roviny označme H, M_1, M_2, M_3.

Protože H neobsahuje body $x_1, ..., x_7$, díky Dirichletovu principu musí existovat rovina M_i, která obsahuje minimálně 3 z těchto bodů – označme je x_r, x_s, x_t. Tím pádem by ale tato rovina M_i obsahovala body a, b, x_r, x_s, x_t, tedy celkem 5 bodů náležících cap. To je ale ve sporu s vlastnostmi 2-cap – ta může obsahovat maximálně 4 body. □

A konečně, pro karty se 4 atributy, tedy celý balíček, by schéma s křížky vypadalo jako na obrázku 3.12.



Obrázek 3.12: Maximální cap v AG(4,3)
(obrázek převzat z [3])

Jelikož se jedná o 4-dimenzionální prostor, geometrická představa zde selhává. Pro umístění křížků analogicky k případům z nižších dimenzí platí, že žádné 3 křížky nejsou v jednom řádku, sloupci, nebo úhlopříčce. Maximální cap pro prostor AG(4,3) je dle obrázku 20 karet.

Nejvyšší počet karet, kde se může stát, že žádné z nich 3 netvoří SET, je tedy 20. Abychom si mohli být jisti přítomností SETu mezi kartami vyloženými na začátku hry, museli bychom vyložit 21 karet. Důkaz tohoto tvrzení je složitější, proto ho zde neuvádíme – případné zájemce odkazuji na [3].

Hledání maximální caps můžeme samozřejmě uvažovat i v prostorech AG(n,3), kde n je vyšší než 4. To by odpovídalo hře, kde by karty měly 5 a více atributů – mohli bychom např. přidat barvu pozadí nebo materiál karty apod. Velikosti maximální cap pro n od 1 do 7 jsou zaznamenány v tabulce 3.1.

Zatímco k velikosti maximální cap pro dimenzi 4 a méně je možné dojít vyzkoušením všech možností pomocí počítače, pro $n = 5$ se prostor stává nezvladatelně velkým. Výsledek pro prostor AG(5,3) byl zveřejněn v roce 2002 v článku [4]. Hodnota maximální cap pro prostor šestidimenzionální AG(6,3) byla zveřejněna

n	1	2	3	4	5	6	7
maximální cap	2	4	9	20	45	112	?

Tabulka 3.1: maximální cap v AG(n,3)

v roce 2008 v článku [8].

Pro dimenzi 7 a vyšší zůstává tento problém otevřený a s velkou pravděpodobností není možné vztah mezi dimenzí a velikostí maximální cap vyjádřit jednoduchým explicitním vzorcem. Zatím je znám pouze spodní a horní odhad velikosti cap: (viz [6])

$$(2{,}2714...)^n \leq cap(n) \leq c \cdot (2{,}756)^n,$$

kde c je konstanta nezávislá na n.

Se vším co nyní víme – proč je na začátku hry zvolen zrovna počet 12 karet? V tomto počátečním rozložení může být maximálně 14 SETů, jejich minimální počet je 0. Tabulka 3.2 ukazuje pravděpodobnosti toho, že se v počátečních 12 kartách nachází daný počet SETů. Tyto výsledky vycházejí ze simulace 10^8 náhodně vylosovaných 12 karet dle [6].

počet SETů	0	1	2	3	4	5	6	7	≥ 8
pravděpodobnost v %	3,2	14,5	26	27	18	8	2,3	0,5	$\leq 0{,}07$

Tabulka 3.2: Pravděpodobnost výskytu daného počtu SETů mezi 12 kartami

Průměrný počet SETů mezi začátečními 12 kartami je tedy přibližně 2,78. To, že se mezi nimi žádný SET nenachází, nastane jen v 3,2 % případů.

3.5 Karty zbývající na konci hry

Další otázkou, která nám během hry může přijít na mysl je, zda je jisté, že vždy sebereme všechny karty, nebo jestli mohou na konci hry některé karty zůstat na stole. Celý balíček obsahuje 81 karet a postupně se z něj odebíráme trojice. Počet, který zbyde na konci hry, tedy musí být určitě dělitelný třemi.

Jedna možnost je, že na konci hry žádné karty nezbydou. Jako další možnost by se nabízely 3 karty, ale to nemůže nastat – tyto 3 karty by totiž s jistotou musely tvořit SET (podrobněji zdůvodněno v sekci 4.4). Pokud nějaké karty zbydou, musí jich tedy být minimálně 6. Možný je taky zbytek 9, nebo 12 karet. Je velice nepravděpodobné, aby zbylo více než 12 karet. Nemůže zbýt více než 18 karet,

Počet zbylých karet	Procento takových her
0	1,22 %
3	0 %
6	46,8 %
9	44,5 %
12	7,37 %
15	0,077 %
18	$5{,}4 \cdot 10^{-5}$ %

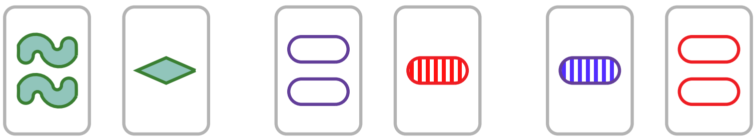
Tabulka 3.3: Počet karet zbývajících na konci hry

protože při počtu 21 už je jisté, že mezi kartami bude SET. Tabulka 3.3 ukazuje, jaká je šance, že na konci hry zbyde daný počet karet. Byla vytvořena na základě simulace 10^8 her podle [6].

Věta 3. *Rozdělme 6 karet zbývajících na konci hry libovolně do dvojic a ke každé dvojici doplňme kartu tvořící s nimi SET. Potom tyto 3 doplněné karty spolu buď tvoří SET, nebo jsou všechny stejné.*

Věta je převzata z [6]. Představme si tedy, že nám na konci hry zbylo 6 karet. Z nich vytvoříme libovolně dvojice. Nyní jsou 2 možnosti, které mohou nastat:

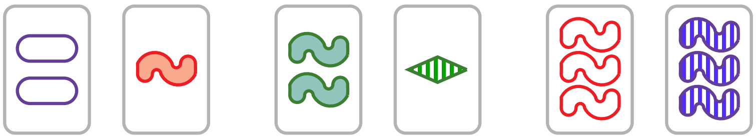
1. Tyto dvojice karet tvoří trojitý průsečík, tj. všechny tři dvojice potřebují stejnou kartu jako doplněk do SETu.

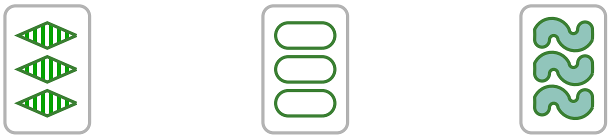
   Obrázek 3.13: Tři dvojice karet s trojitým průsečíkem

   Na obrázku 3.13 je ukázána taková šestice karet. Pro všechny 3 dvojice je doplňkem do SETu stejná karta – 3 zelené plné ovály. Geometricky si toto můžeme představit jako 3 na sebe kolmé přímky protínající se v jednom bodě; podobně jako osy x, y, z v kartézském systému. Aby toto moho nastat, všech 6 karet musí ležet v jedné nadrovině.

2. Tyto dvojice karet netvoří trojitý průsečík, tj. každá dvojice potřebuje jinou kartu, aby z ní byl vytvořen SET. Toto nastává, když těchto 6 karet neleží v jedné nadrovině.



Obrázek 3.14: Tři dvojice karet netvořící trojitý průsečík



Obrázek 3.15: Karty doplňující dvojice na 3.14 do SETů

Na obrázku 3.14 je ukázána taková šestice karet. Jak vidíme, každá dvojice potřebuje jako doplněk do SETu jinou kartu. Na obrázku 3.15 je pro každou dvojici karta, která ji doplní do SETu. Jak je vidět, i tyto 3 karty společně tvoří SET.

Kapitola 4

SET a lineární algebra

Následující čtyři sekce jsou zpracovány na základě [6].

4.1 Vektorový prostor F_4^3

Dle definice z lineární algebry je vektorový prostor určitý matematický objekt, který splňuje dané axiomy. Díky obecnosti této definice můžou být prvky vektorového prostoru nejen klasické vektory z analytické geometrie, ale například polynomy, spojité funkce, matice, posloupnosti atd. A jak si v této kapitole ukážeme, takový vektorový prostor mohou tvořit i zcela nematematické objekty, jako třeba karty z naší známé hry SET.

Jak lze karty popsat pomocí vektorů – respektive přiřadit každé kartě jednoznačně určitý vektor? Každá karta ve hře má unikátní kombinaci čtyř atributů – počtu symbolů, barvy, výplně a tvaru. V každém tomto atributu je na výběr ze 3 možností.

Tyto možnosti můžeme tedy reprezentovat čísly 0, 1, 2. Takže například 1 u barvy znamená červená, 2 u tvaru znamená klikatka atd. Jak ale dáme najevo, ke kterému atributu dané číslo patří? Chtělo by je nějak seřadit... Toho právě dosáhneme tím, že čísla zapíšeme vedle sebe jako souřadnice. Přitom první souřadnice reprezentuje počet, druhá barvu, třetí výplň a čtvrtá tvar. Toto seřazení je ukázáno v tabulce 4.1.

Souřadnice	**Počet**	**Barva**	**Výplň**	**Tvar**
0	3	červená	prázdná	ovál
1	1	zelená	pruhovaná	diamant
2	2	fialová	plná	klikatka

Tabulka 4.1: Přiřazení jednotlivých atributů k souřadnicím

Poznámka: Počet 3 reprezentujeme souřadnicí 0, jelikož máme k dispozici pouze čísla 0, 1, 2. Píšeme tedy počet symbolů mod 3.

Získali jsme tedy nástroj, kterým lze karty popisovat mnohem úsporněji. Místo 2 zelené pruhované ovály stačí napsat (2, 1, 1, 0); jeden fialový prázdný diamant popíšeme jako (0, 2, 0, 1) atd. Ke každé kartě je tedy jednoznačně přiřazena čtveřice souřadnic, která se dá chápat i jako vektor.

Jelikož jsou tyto vektory 4-složkové a u každé složky máme na výběr ze 3 čísel, jedná se o 4-dimenzionální vektorový prostor F_4^3. Horní index tedy reprezentuje, kolik atributů u karet sledujeme. Dolní index říká, z kolika možností u každého atributu vybíráme.

4.2 SETy ve vektorové reprezentaci

Věta 4. *Trojice karet je SET, pokud součet vektorů opovídajících kartám je roven nulovému vektoru (mod 3).*

Důkaz. Aby tři karty tvořily SET, musí se v daném atributu buď všechny lišit, nebo být všechny stejné. Jaký součet souřadnic dostaneme pro jednotlivé případy?

1. V daném atributu se liší:

$$S = 0 + 1 + 2 = 0 \pmod 3$$

2. V daném atributu jsou stejné:

$$S = 0 + 0 + 0 = 0 \pmod 3$$
$$S = 1 + 1 + 1 = 0 \pmod 3$$
$$S = 2 + 2 + 2 = 0 \pmod 3$$

Vidíme, že pro jakýkoli z případů je součet vždy 0 (mod 3). Sečteme-li vektory tvořící SET, dostaneme vždy vektor (0,0,0,0). □

4.3 Paralelní SETy

V předchozí kapitole jsme si ukázali, co jsou to paralelní SETy z hlediska afinní geometrie. Nyní si ukážeme, že ekvivalentním způsobem lze paralelní SETy definovat za použití souřadnic. Paralelní SETy mají tu vlastnost, že leží v jedné rovině, ale neprotínají se, tj. nemají žádnou společnou kartu. Nejprve zvolme SET, ke kterému budeme paralelní SET tvořit a přiřaďme jednotlivým kartám souřadnice podle dřívější dohody:

$$\text{1 zelený plný diamant} \longmapsto (1,1,2,1)$$
$$\text{3 zelené prázdné klikatky} \longmapsto (0,1,0,2)$$
$$\text{2 zelené pruhované ovály} \longmapsto (2,1,1,0)$$

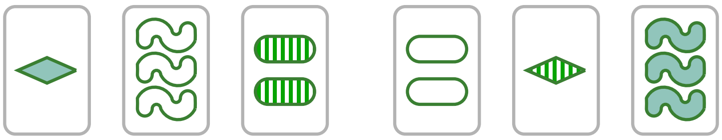
K tomuto SETu samozřejmě existuje více paralelních SETů – musíme tedy jednoznačně určit, který z nich vybereme. Zvolíme tedy libovolný vektor $\vec{w}$, který nyní přičteme ke 3 vektorům odpovídajícím našim 3 kartám. Tím vlastně posuneme 3 body přímky ve stejném směru, čímž vznikne přímka paralelní k té původní, tedy SET paralelní k tomu původnímu. Zvolme např. $\vec{w}$ = (1,0,1,2). Posunutí bude vypadat následovně:

$$\begin{aligned}(1,1,2,1) + (1,0,1,2) &= (2,1,0,0)\\ (0,1,0,2) + (1,0,1,2) &= (1,1,1,1)\\ (2,1,1,0) + (1,0,1,2) &= (0,1,2,2)\end{aligned}$$

Takto vytvořené vektory tedy odpovídají následujícím kartám:

$$\begin{aligned}(2,1,0,0) &\longmapsto \text{ 2 zelené prázdné ovály}\\ (1,1,1,1) &\longmapsto \text{ 1 zelený pruhovaný diamant}\\ (0,1,2,2) &\longmapsto \text{ 3 zelené plné klikatky}\end{aligned}$$

Původní SET a vytvořený SET k němu paralelní jsou ukázány na obrázku 4.1.



Obrázek 4.1: Paralelní SETy vytvořené posunutím

Ukázali jsme si dva různé způsoby, jak definovat paralelní SETy. SETy jsou paralelní, když se stejné atributy zachovávají a stejné atributy liší v obou SETech. Pro odlišné atributy se zachovává cyklické pořadí. Druhá možnost definice je, že paralelní SET vznikne tím, že každou kartu posuneme o stejný vektor.

Nyní ukažme, že obě tyto definice jsou ekvivalentní, tedy, jak spolu souvisí posunutí o vektor a zachovávání cyklického pořadí. Představme si, že máme 3 karty tvořící SET, které jsou reprezentovány vektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$.

$$\vec{v_1} = (a_1, b_1, c_1, d_1) \quad \vec{v_2} = (a_2, b_2, c_2, d_2) \quad \vec{v_3} = (a_3, b_3, c_3, d_3)$$

Paralelní SET nyní vytvoříme tím, že každý z těchto vektorů posuneme o vektor $\vec{w} = (r, s, t, u)$.

Pokud byl daný atribut v SETu stejný pro všechny karty, tj. platilo by např. $a_1 = a_2 = a_3$, bude tento atribut stejný i v paralelním SETu, jelikož přičtením konstanty se rovnost zachová: $a_1 + r = a_2 + r = a_3 + r$.

Pokud se daný atribut v SETu lišil, přičtením konstanty k dané souřadnici zůstanou hodnoty odlišné, přičemž cyklické pořadí bude zachováno. Pro názornou ukázku si zvolme:

$$b_1 = 1 \quad b_2 = 2 \quad b_3 = 0 \quad s = 2$$

Posunutím dostaneme tyto nové souřadnice:

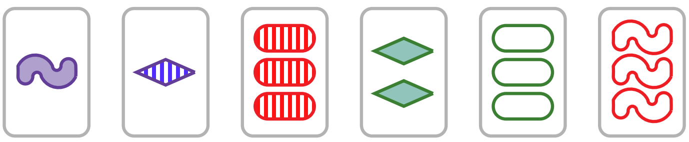
$$b_1^{'} = b_1 + 2 = 0 \quad b_2^{'} = b_2 + 2 = 1 \quad b_3^{'} = b_3 + 2 = 2$$

Vidíme, že přičtením vektoru se trojice (1, 2, 0) transformovala na (0, 1, 2). Jedná se o ten stejný cyklus. Jelikož počítáme modulo 3, přičítáním konstanty mění jednotlivé souřadnice svou hodnotu cyklicky – zvětšují se, ale při překročení určité hodnoty „začínají opět od začátku“. Nabývají tedy těch stejných hodnot stále dokola.

4.4 Konec hry

Aby tři karty tvořily SET, musíme součtem jejich vektorů dostat nulový vektor. Balíček všech 81 karet se dá různými způsoby rozdělit na 27 SETů – z toho plyne, že i součet vektorů všech karet v balíčku musí být nulový vektor. Tím, že z balíčku odstraníme SET, zůstává součet zbylých karet stále nulový vektor.

Jak už víme z minulé kapitoly, může se stát, že na konci hry nějaké karty zbydou. Protože během hry jsme z balíčku odstraňovali pouze SETy, součet zbylých karet je kdykoli během hry nulový vektor. To znamená, že také součet karet zbylých na úplném konci je nulový vektor – i když v těchto kartách už není možné najít SET. Pokud se vektory zbylých karet nesečtou na nulový vektor, znamená to, že někde během hry se stala chyba – některý z hráčů vzal ze stolu trojici, která nebyla SET.



Obrázek 4.2: Karty na konci hry

Představme si situaci, kde nám na konci hry zbydou karty na obrázku 4.2. Těmto kartám odpovídají souřadnice (zprava):

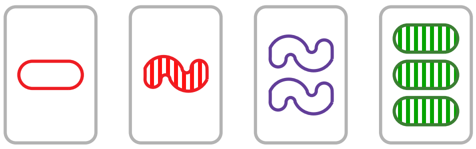
$$(1{,}2{,}2{,}2) \quad (1{,}2{,}1{,}1) \quad (0{,}0{,}1{,}0) \quad (2{,}1{,}2{,}1) \quad (0{,}1{,}0{,}0) \quad (0{,}0{,}0{,}2)$$

Sečtením všech těchto vektorů dostaneme vektor (1,0,0,0). Vidíme, že součet nesedí v první souřadnici – na pozici určující počet symbolů. Z toho plyne, že během hry musel některý hráč za SET označit trojici karet, kde však nebyly správné počty symbolů na jednotlivých kartách. Chyba se totiž projeví vždy jen na příslušné souřadnici.

4.5 Další uskupení karet ve hře

Za účelem dalšího zkoumání matematických vlastností hry SET byly pojmenovány i nové skupiny karet daných vlastností. Mohou být také využity v alternativních verzích hry SET – místo klasických SETů můžeme soutěžit právě v jejich hledání.

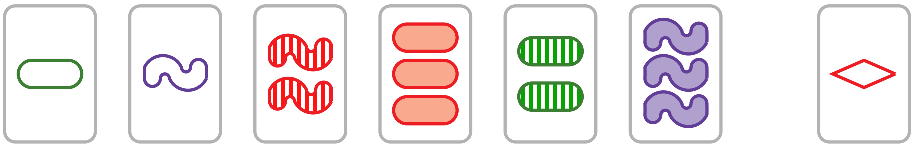
Jako *planetu* chápeme skupinu 4 karet, kterou když rozdělíme do 2 dvojic, tak obě dvě potřebují stejnou kartu jako doplněk do SETu. Jedná se tedy o 2 dvojice karet, kde každá leží na přímce, přičemž tyto 2 přímky jsou různoběžné a karta průsečíku chybí. Příklad planety je na obrázku 4.3. (viz [1])



Obrázek 4.3: Planeta

Ekvivalentním vyjádřením je, že se jedná o 2 dvojice karet, kde každá dvojice leží na přímce a tyto 2 přímky jsou rovnoběžné. Rovnoběžné přímky ale průsečík nemají – jak toto tedy odpovídá původní definici? Označíme-li si karty na jedné přímce A, B a na druhé C, D, můžeme uvažovat také přímky definované dvojicemi A, C a B, D, nebo A, D a B, C. Jedna z těchto dvojic přímek již určitě tvoří průsečík, jedná se totiž o různoběžné přímky. Průsečík je společný a mezi naší čtveřicí karet chybí. Dalším způsobem vytvoříme planetu pokaždé, když vezmeme SET a k němu libovolnou kartu. (viz [1])

Jako *UFO* nazveme skupinu 6 karet, které můžeme rozdělit do 3 dvojic tak, že každou tuto dvojici je možné do SETu doplnit pomocí stejné karty. Tuto kartu označíme V a říkáme jí špička UFO. Na obrázku 4.4 je ukázáno, jak může UFO vypadat. (viz [7])



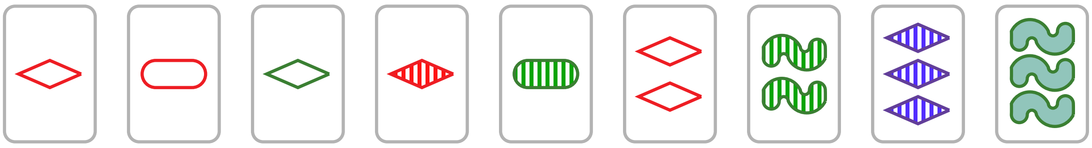
Obrázek 4.4: UFO a jeho špička

Špička doplní do SETu všechny 3 dvojice, to znamená, že špička je společným průsečíkem 3 přímek určených dvojicemi karet. Nyní jsou dle [7] dvě možnosti:

1. Tyto 3 přímky leží v jedné rovině. Poté toto UFO nazveme *letadlem.* Je zajímavé, že UFO je letadlem právě tehdy, když obsahuje SET. Přesněji, každé letadlo obsahuje 2 disjunktní SETy.

2. Tyto 3 přímky leží v prostoru. Potom toto UFO nazveme *vesmírnou lodí.*

Názvem *kometa* označíme 9 karet jejichž součtem je nulový vektor. Může se tedy jednat o skupinu 3 disjunktních SETů; nemusí ale obsahovat vůbec žádný SET. Platí zajímavé pravidlo, že pro jakoukoli skupinu 8 karet existuje karta, která je doplní na kometu. Na obrázku je ukázána kometa, která neobsahuje žádné SETy. (viz [1; 5])



Obrázek 4.5: Kometa neobsahující žádné SETy

Pro tyto objekty si pak můžeme klást podobné otázky, jako výše ohledně SETů – kolik je třeba karet, abychom si byli jistí, že obsahují vesmírnou loď? Kolik maximálně SETů, planet a UFO může existovat v daném počtu karet? Vybereme-li náhodných 9 karet, jaká je šance, že to bude kometa? Odpovědi na tyto a další otázky čtenář nalezne ve článcích [1; 5; 7].

Závěr

Matematický rozbor her je pěkným příkladem toho, jak lze i zábavným způsobem seznámit veřejnost s významem matematiky. Motivace, tj. jak postupovat, abychom hráli co nejlépe, je totiž velmi přímočará. V této bakalářské práci se čtenář nedozvěděl, jak hru SET hrát co nejefektivněji – to už musí zjistit sám. Za to se seznámil se zajímavými aplikacemi afinní geometrie a lineární algebry, což věřím, že je dostatečná motivace sama o sobě.

Pro čtenáře, kteří by se chtěli dále o toto téma zajímat, vřele doporučuji knihu [6]. Nejen, že je velmi čtivě psaná a vše je intuitivně vysvětleno, ale hra je v ní rozebrána snad ze všech možných úhlů pohledů. Navíc obsahuje i různé logické úlohy s využitím karet ze hry SET, jež mohou sloužit jako dobrá inspirace. Pro další studium skupin karet jako jsou planety, komety a UFO odkazuji na články [1; 5; 7] .

Literatura

[1] Baker, M., Beltran, J., Buell, J., Conrey, B., Davis, T., Donaldson, B., Detorre-Ozeki, J., Dibble, L., Freeman, T., Hammie, R., Montgomery, J., Pickford, A., and Wong, J. Sets, Planets, and Comets. *The College Mathematics Journal 44* (2013), 258–264.

[2] Bickel, A., and Szaniszlo, Z. SET, Affine Planes and Latin Squares. *Math Horizons 14* (2007), 36–38.

[3] Davis, B. L., and Maclagan, D. The Card Game SET. *The Mathematical Intelligencer 25* (2003), 33–40.

[4] Edel, Y., Ferret, S., I., L., and Storme, L. The classification of the largest caps in AG (5,3). *Journal of Combinatorial Theory Series A 99* (2002), 95–110.

[5] May, D., and Swenson, D. The Proportion of Comets in the Card Game SET. *The College Mathematics Journal 51* (2020), 162–172.

[6] McMahon, L., Gordon, G., Gordon, H., and Gordon, R. *The Joy of SET*. Princeton University Press, Princeton, 2017.

[7] Needleman, J., and Sciortino, F. UFOs in the game SET: Looking for Airplanes and Spaceships. *The College Mathematics Journal 48* (2017), 249–257.

[8] Potechin, A. Maximal caps in AG (6,3). *Designs, Codes and Cryptography 46* (2008), 243–259.

Seznam obrázků

Seznam tabulek