Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Eliška Hejlová

Systém pro podporu výuky kuželoseček

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Petra Surynková
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání v kombinaci s deskriptivní geometrií

Praha 2011

Můj vřelý dík patří mé vedoucí práce RNDr. Petře Surynkové za čas věnovaný konzultacím a mnohé cenné rady. A dále děkuji všem ostatním, kteří mě u psaní této práce podporovali.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Systém pro podporu výuky kuželoseček

Autor: Eliška Hejlová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petra Surynková, katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Práce představuje vlastní software pro rýsování na počítači zaměřený na konstrukci kuželoseček. Je určena především středoškolským studentům a jejich učitelům pro použití při výuce deskriptivní geometrie a matematiky. Obsahuje několik příkladů s řešením pro rýsování v tomto programu. Další částí práce je teorie o kuželosečkách. Je ukázáno několik definic, konstrukcí a základních vlastností kuželoseček. Také je ukázána konstrukce a vlastnosti tečny v bodě kuželosečky. Teorie je doplněna názornými animacemi a obrázky vytvořenými v programu GeoGebra. Také jsou předvedeny důkazy ekvivalencí jednotlivých definic.

Klíčová slova: kuželosečky, rýsovací software, definice kuželoseček, konstrukce kuželoseček

Title: System for support of conic sections teaching

Author: Eliška Hejlová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Petra Surynková, Department of Mathematics Education

Abstract: The work presents own software for geometric drawing aimed to construction of conic sections. It's designed for high school students and their teachers, to use in lessons of descriptive geometry and mathematics. It contains a number of exercises with solutions which are prepared to solve in the program. Next part of this work is a theory about conic sections. We show various definitions, constructions and some basic properties. We also show a construction and properties of tangent in the point of conic section. Theory is supplemented by animations and pictures made in program GeoGebra. There are also proofs of equivalence of presented definitions.

Keywords: conic sections, drawing software, definition conic of sections, construction of conic sections

Obsah

Úvod

Hlavním cílem této bakalářské práce je vytvoření programu na rýsování, který by se mohl použít při hodinách deskriptivní geometrie na středních školách a pomocí nějž by bylo možno seznámit studenty s rýsováním na počítači. Přestože je sice důležité, aby studenti uměli rýsovat na papír, v dnešní době je stejně důležité seznámit se s rýsovacím softwarem, neboť ten je v praxi často využíván. Program je zaměřený na řešení příkladů na sestrojení kuželoseček. Jedná se vlastně o jednoduchý grafický editor, který obsahuje nástroje pro vykreslování základních geometrických objektů. Tato práce by měla přispět k rozvoji využití počítače při výuce deskriptivní geometrie a matematiky na střední škole.

Součástí práce je i sada příkladů, které lze řešit v programu. Pro každý příklad existuje soubor se zadáním, který si uživatel otevře v programu a může jej řešit. Také je u každého příkladu přiložen i soubor s ukázkovým řešením.

Práce si dále klade za cíl seznámit středoškolskou veřejnost s různými definicemi a konstrukcemi kuželoseček, které nejsou běžně používány, přesto jsou velmi zajímavé a často i jednoduché. A jistě by bylo pro studenty zajímavé jim je předvést na hodinách deskriptivní geometrie nebo matematiky. Každá definice a konstrukce je proto doplněna názornou animací v programu Geogebra[1], obrázkem z této animace, symbolickým zápisem konstrukce a stručným popisem konstrukce.

Uvedeme i důkazy ekvivalence prezentovaných definic.

V následující kapitole jsou uvedeny tři různé definice jednotlivých kuželoseček a jejich základní vlastnosti.

V druhé kapitole jsou pak popsány různé konstrukce kuželoseček.

Třetí kapitola se zabývá konstrukcemi tečen ke kuželosečkám a popisem dalších vlastností jednotlivých kuželoseček.

Ve čtvrté kapitole jsou uvedeny důkazy ekvivalencí definic uvedených v první kapitole. Důkazy jsou provedeny početně, pomocí středové, resp. vrcholové rovnice jednotlivých kuželoseček.

Dokumentaci a nápovědu k používání programu naleznete v páté kapitole.

V poslední, šesté kapitole najdeme dva řešené příklady. První příklad slouží k seznámení uživatele se samotným programem, druhý je již více zaměřen na samotné řešení příkladu.

[1] www.geogebra.org

1. Definice kuželoseček

V této kapitole si ukážeme různé definice kuželoseček[1].

Kuželosečky mohou být zadány pomocí různých definic. V matematice se vyskytují v mnoha oborech, v analytické geometrii, syntetické geometrii, deskriptivní geometrii, ale najdeme je i u grafického řešení rovnic nebo soustav rovnic, u grafu funkcí, atd. Všude se vyskytují kuželosečky, ale pokaždé v trochu jiné podobě.

Kdybyste se ptali, co je to kuželosečka, dostali by jste asi takovéto odpovědi:

Matematik by řekl: Kuželosečka? To je bilineární forma.

Geometr by namítl: Kuželosečka je křivka druhého stupně.

Deskriptivář by definoval: Křivka, která vzniká průnikem kužele a roviny.

Jiný by použil definici: To je množina bodů, které mají od přímky a bodu stejný poměr vzdáleností.

A kdybyste se ptali dál, dostali byste další a jiné odpovědi. Ale kdo má pravdu?

Pravdu mají všichni. Kuželosečky lze definovat různými způsoby. Podívejme se na jednoduché příklady, se kterými jsme se setkávali na střední škole v hodinách matematiky.

Každý jistě umí zakreslit graf funkce $y = \frac{1}{x}$, která představuje vztah nepřímé úměry, ale tato křivka je jen speciální případ hyperboly, která má kolmé asymptoty. Jiný příklad je nerovnice $0 < ax^2 + bx + c$, která se řeší pomocí funkce $y = ax^2 + bx + c$, jejíž graf lehce nakreslíme. Předpis této funkce je shodný i s implicitní rovnicí paraboly, která také patří mezi kuželosečky.

Nahlédli jsme, že existuje mnoho definic kuželoseček a pořád nevíme mnoho o nich samotných, proto si nyní ukážeme nejznámější definice a odvodíme si jejich základní vlastnosti.

1.1 Ohnisková definice

Ohnisková definice kuželoseček je jedna z nejčastějších a nejjednodušších na představivost. Proto i zde ji uvedeme jako první a odvodíme si z ní základní vlastnosti. Z této definice vyplývá i jedna z konstrukcí kuželoseček tzv. bodová konstrukce.

1.1.1 Elipsa

Definice 1.1. *Elipsa*[2] *je množina všech bodů* M*, které mají od dvou pevných (navzájem různých) bodů* E*,* F *konstantní součet vzdáleností* $2a$*. [1]*

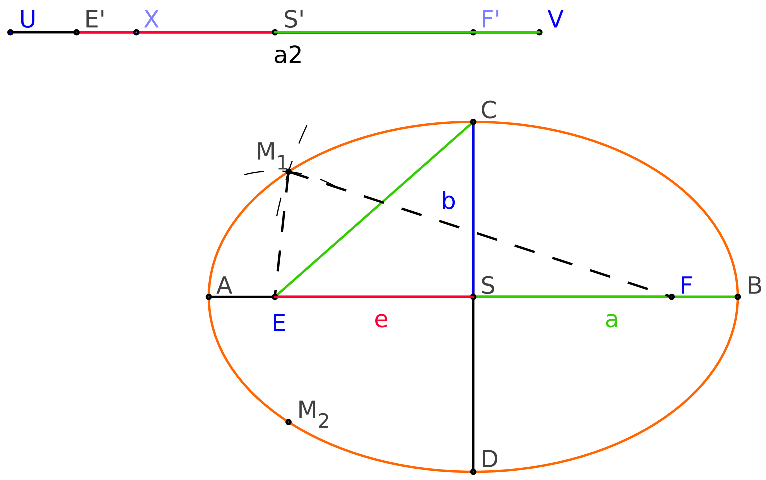
Zapsáno symbolicky:

$$\mathcal{E} = \{\forall M \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |ME| + |MF| = 2a\}$$

Body E, F z definice nazýváme ohniska. Úsečky ME a MF nazýváme průvodiči. Pokud bychom zvolili body E, F tak, aby splynuly, pak dostaneme kružnici. Tedy kružnice je speciálním případem elipsy.

[1] Dříve též nazývané sečky nebo řezy kuželné [4]

[2] Dříve též nazývaná schodnice, hlavní a vedlejší osu označovali jako velká a malá osa a její hlavní vrcholy nazývali pouky [4]



Obrázek 1.1: Bodová konstrukce elipsy, platí $|UV| = |AB| = 2a$

Z této definice přímo vyplývá následující tzv. bodová konstrukce. Proč se nazývá bodová je asi zcela jasné, konstruuje elipsu bod po bodu, právě dle definice.

Zapsáno symbolicky:

Máme zadány body E, F a vzdálenost $2a$ zadanou úsečkou UV

$$\begin{array}{ll} 1) & X; X \in \overleftrightarrow{UV}, \text{libovolně} \\ 2) & k_1; k_1(E, |UX|) \\ 3) & k_2; k_2(F, |XV|) \\ 4) & M; M \in k_1 \cap k_2 \end{array}$$

Pokusíme se nyní narýsovat elipsu a zároveň si odvodíme její základní vlastnosti. Víme, že elipsa je množina bodů, které mají konstantní vzdálenost od dvou pevně zvolených různých bodů. Zvolíme libovolně dva různé body v rovině (ohniska) a nazveme je E a F. Dále zvolíme vzdálenost $2a$ a zobrazíme ji jako úsečku UV. Pokusíme se najít významné body elipsy. Pokud vyneseme z každého z ohnisek stejnou vzdálenost a, pak vzniknou 2 body, které leží na elipse. Tyto body leží na ose úsečky EF. Tedy jejich spojnice je kolmá na úsečku EF a prochází bodem S, $|ES| = |FS|$. Tyto body nazýváme vedlejší vrcholy elipsy a značíme C, D. Vzdálenost bodů C , resp. D od úsečky EF značíme b (tj. $|CS| = |DS| = b$) a nazýváme ji velikost vedlejší poloosy.

Dále zvolíme bod X na přímce UV a pokusíme se nalézt bod M, další bod elipsy. Jelikož vzniká jako průnik dvou kružnic, dostaneme buď dva, jeden nebo žádný bod. Zamysleme se teď, kdy nám vznikne právě jeden průsečík. Jelikož je vzdálenost $2a$ větší než $|EF|$, musí nastat vnitřní dotyk kružnic, které jsou určeny vzdálenostmi $|XU|$ a $|XV|$ a středy v ohniskách, pro X libovolné. Tedy pro poloměry hledaných kružnic musí platit $r_1 = |EF| + r_2$. Pak ale nutně musí být $r_2 = \frac{2a-|EF|}{2}$. Pokud sestrojíme kružnice s právě nalezenými poloměry, tedy $k_1(E, r_1)$ a $k_2(E, r_2)$, vznikne nám další významný bod elipsy, bod A, hlavní vrchol elipsy. Pokud zaměníme středy kružnic, analogicky nám vyjde druhý bod, druhý hlavní vrchol, bod B. Lehce nahlédneme, že body A a B leží na přímce určené body EF a střed úsečky AB splývá s bodem S, vzdálenost $|AS| = |BS| = a$, a nazýváme ji velikost hlavní poloosy.

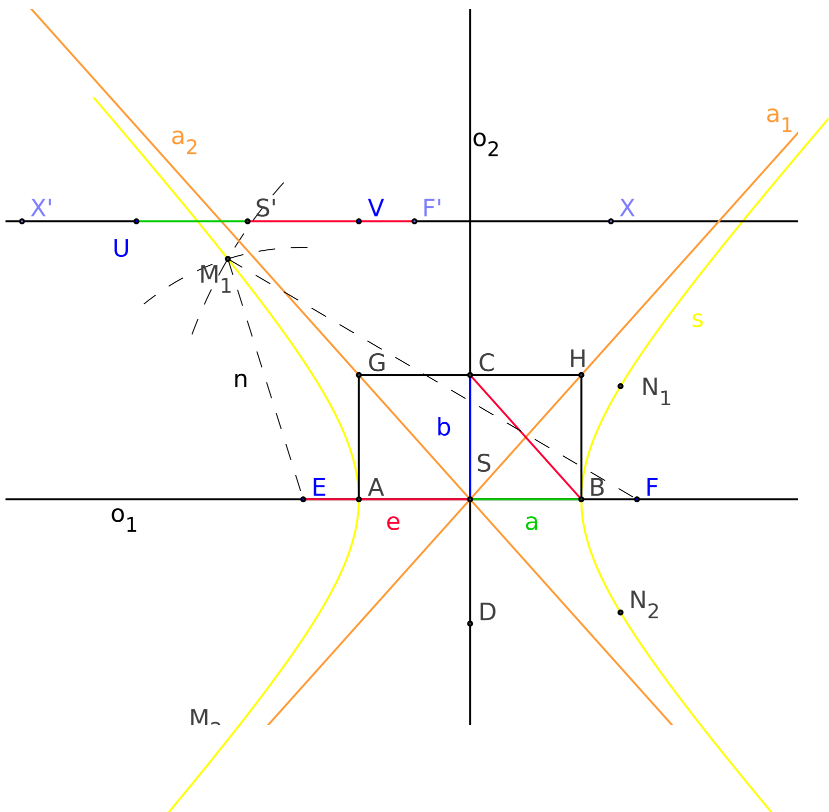
Pokud budeme volit bod X na přímce UV tak, aby poloměry kružnic byly menší než r_1 a zároveň větší než r_2, tedy volíme bod X mezi body E' a F', viz obrázek 1.1, vzniknou nám tak další body elipsy. Pro body E', F' platí $|E'F'| = |EF|$. Čím více bodů sestrojíme tím přesněji lze elipsa vyrýsovat.

Vzdálenost $|ES| = |FS|$ značíme e a nazýváme excentricitou, nebo-li lineární výstředností. Platí pro ni vztah $e^2 = a^2 - b^2$.

Dále plyne z této konstrukce, že bod S, střed úsečky EF, AB i CD, je středem celé kuželosečky. Elipsa se díky této vlastnosti řadí mezi středové kuželosečky. Navíc je elipsa symetrická jak podle své hlavní osy tak i podle vedlejší osy a také podle středu S.

Celou konstrukci si pro lepší názornost můžete prohlédnout v animaci I, kde je postupně rýsován celý postup této konstrukce.

1.1.2 Hyperbola



Obrázek 1.2: Bodová konstrukce hyperboly, platí $|UV| = |AB| = 2a$

Definice 1.2. *Hyperbola*[3] *je množina všech bodů M, které mají od dvou pevných (navzájem různých) bodů E, F konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností $2a$. [1]*

Zapsáno symbolicky:

$$\mathcal{H} = \{\forall M \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : ||ME| - |MF|| = 2a\}$$

[3]Dříve též nazývaná zbytnice a větve se nazývaly hyperbolické oblouky [4]

Pokud se podíváme na symbolický zápis, můžeme si všimnout, že vzdálenosti $|ME|$ a $|MF|$ jsou neomezené, rostou nade všechny meze. Musí potom existovat nějaký bod této křivky, který leží v nekonečnu, tzv. nevlastní bod. Z toho plyne, že hyperbola není uzavřená křivka, tak jako je elipsa. Stejně jako u elipsy se body E, F nazývají ohniska a úsečky XE a XF jsou průvodiče.

I pro hyperbolu můžeme definovat bodovou konstrukci.

Pokud její konstrukci opět zapíšeme symbolicky:

Máme zadány body E, F a vzdálenost $2a$ zadanou úsečkou UV

$$\begin{array}{ll} 1) & X; X \in \overleftrightarrow{UV}, \text{libovolně} \\ 2) & k_1; k_1(E, |UX|) \\ 3) & k_2; k_2(F, |XV|) \\ 4) & M; M \in k_1 \cap k_2 \end{array}$$

Všimněme si, že konstrukce je velmi podobná bodové konstrukci elipsy, proto ji zde nebudeme tak rozepisovat jako u elipsy. Pokud zvolíme bod X jako střed úsečky UV, pak nezískáme jako u elipsy vedlejší vrcholy. Nezískáme žádný bod, neboť rozdíl $|XU| - |XV|$, kde $|XU| = |XV| = a$, je roven nule. (Což by se rovnalo $2a$ pouze tehdy, pokud by $a = 0$, tedy velikost hlavní osy by byla nulová, pak ale nezískáme hyperbolu.) Vedlejší vrcholy přesto u hyperboly existují a mají své uplatnění, i když hyperbola jimi neprochází[4]. Označme bod S jako střed úsečky EF. Nalezneme je na průsečíku kolmice vedené bodem S na hlavní osu, vedlejší osa, a kružnici se středem v jednom hlavním vrcholu a poloměrem o délce vzdálenosti $|ES| = |FS|$. Opět platí rovnost $|CS| = |DS| = b$ a tuto vzdálenost nazýváme velikostí vedlejší osy.

Pokusíme se nalézt body, které leží na hlavní ose, tedy hlavní vrcholy. Jak bylo řečeno u elipsy, jsou to body, které vznikají, pokud se pomocné kružnice se středy v ohniskách a poloměry rovnými $|UX|$ a $|VX|$, pro danou volbu X protínají v jediném bodě. Jelikož je hyperbola množinou bodů, které mají konstantní rozdíl vzdáleností, pak musí nutně nastat vnější dotyk. Musí tedy platit, že poloměr jedné kružnice r_1 je roven $2a + r_2$ a zároveň poloměr druhé $r_2 = \frac{|EF|-2a}{2}$. Tedy pro volbu těchto poloměrů získáváme kružnice $k_1(E, r_1)$ a $k_2(F, r_2)$ tedy jeden z hlavních vrcholů, prohozením středů kružnic bychom dostali druhý vrchol.

Nyní si ukážeme konstrukci obecného bodu hyperboly. Nalezli jsme opět krajní meze pro volbu bodu X na pomocné přímce UV. Budeme tedy volit bod X tak, že poloměry kružnic se středy v ohniskách budou větší jak r_1 i r_2, dostaneme další body hyperboly. Platí tedy, že musíme bod X volit na přímce UV, ale vně úsečky $E'F'$, které opět představují ohniska, tj. $|E'F'| = |EF|$.

Můžeme si všimnout na obrázku 1.2, že je hyperbola tvořena dvěma větvemi, které jsou zdánlivě odděleny, ale jak jsme již říkali v úvodu, hyperbola má dva nevlastní body, kde se právě tyto dvě větve protínají. Pro větší názornost, jak hyperbola vypadá se konstruují tzv. asymptoty, nebo-li asymptotické přímky. K těmto přímkám se větvě hyperboly blíží, ale nikdy je neprotnou[5]. Tyto přímky nalezneme tak, že v bodě C vedeme rovnoběžku s hlavní poloosou a v bodě A

[4] Proto se vedlejší ose někdy říká imaginární, pomyslná[3]

[5] Asymptoty jsou ve skutečnosti tečny hyperboly v nevlastních bodech.

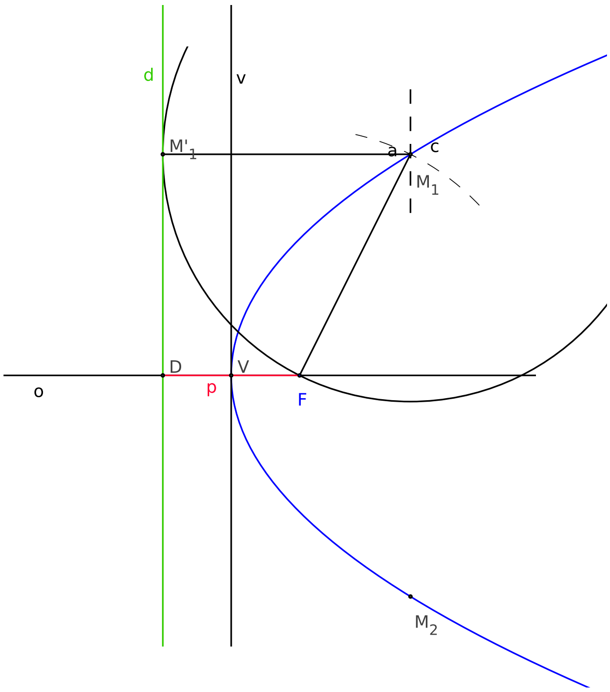
vedeme rovnoběžku s vedlejší poloosou. Průsečík těchto přímek nazveme bodem H. Asymptota je pak přímka, která prochází středem hyperboly (bodem S) a bodem H.

Hyperbola se spolu s elipsou řadí mezi středové kuželosečky. Tedy bod S popisovaný v konstrukci je středem celé hyperboly a hyperbola je podle tohoto bodu souměrná. Navíc je souměrná i podle hlavní a vedlejší osy.

Vzdálenost $|ES| = |FS|$ označujeme jako excentricita a značíme ji e. Platí vztah $e^2 = a^2 + b^2$.

Opět si celou konstrukci můžeme prohlédnout v animaci II

1.1.3 Parabola



Obrázek 1.3: Základní vlastnosti paraboly

Definice 1.3. *Parabola*[6] *je množina všech bodů M, které mají od pevného bodu F a dané přímky d, která tímto bodem neprochází, stejné vzdálenosti. [2]*

Zapsáno symbolicky:

$$\mathcal{P} = \{\forall M \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |Md| = |MF|\}$$

Když se podíváme na definici, můžeme si všimnout, že se značně liší od elipsy a hyperboly. Parabola je definována pomocí bodu a přímky, tento bod se nazývá, stejně jako u elipsy a hyperboly, ohnisko F a je pouze jedno. Proto není tak těžké odhadnout, že parabola již nebude patřit mezi středové kuželosečky. Přímka se nazývá řídicí a značí se d.

I pro parabolu definujeme bodovou konstrukci.

Pokud její konstrukci opět zapíšeme symbolicky:

[6] Dříve též nazývaná stejnice a řiditelka či řaditelka byla označována řídicí přímka [4]

Máme zadán bod F a přímku d a nechť o je osa paraboly, tj. kolmice na přímku d vedená bodem F

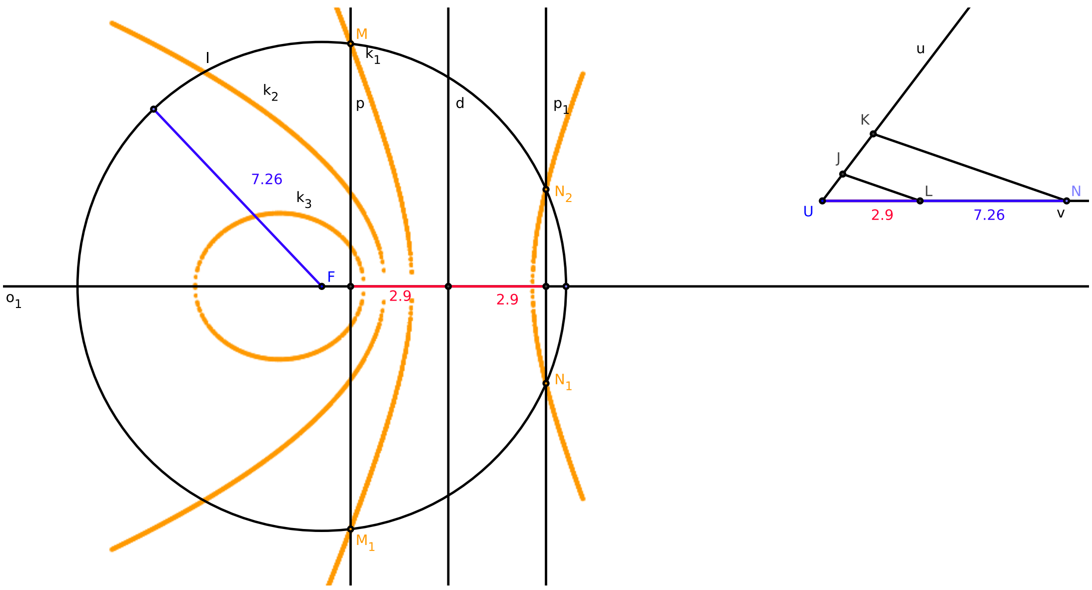
$$\begin{array}{ll} 1) & X; X \in o, \text{libovolně} \\ 2) & x; X \in x \wedge x \parallel d \\ 3) & k; k\ (F, |xd|) \\ 4) & M; M \in x \cap k \end{array}$$

Opět zkusíme pomocí této konstrukce najít významné vlastnosti paraboly. Sestrojíme kolmici na přímku d bodem F tuto přímku nazýváme osou paraboly, značíme o. Pokud sestrojíme střed úsečky vymezené bodem F a průsečíkem přímek o a d, nazveme jej V, pak musí tento bod být bodem paraboly, neboť platí $|FV| = |dV|$. Tento bod nazýváme vrcholem paraboly. Označíme-li vzdálenost bodů $|FV|$ jako $\frac{p}{2}$, potom $|Fd| = p$, tuto vzdálenost nazýváme parametr paraboly. Další bod získáme tak, že zvolíme libovolný bod X na ose, viz animace, tímto bodem vedeme rovnoběžku s řídicí přímkou x. Dále sestrojíme kružnici se středem v bodě F a poloměrem, který je roven vzdálenosti přímek d a x. Tuto kružnici nazveme k. Průnik přímky x a kružnice k jsou dva body ležící na hledané parabole.

Parabola je souměrná podle své osy, což plyne z konstrukce.

Viz obrázek 1.3 nebo animace III.

1.2 Definice kuželoseček pomocí podílů vzdáleností



Obrázek 1.4: Podílová definice kuželoseček s volbou koeficientu $k_1 = 2.5, k_2 = 1$ a $k_3 = 0.5$, přímky p, p' jsou množiny bodů, které mají danou vzdálenost od přímky d

Další často zmiňovaná definice je definice pomocí podílů vzdáleností. Je velice zajímavá, protože ji lze formulovat obecně pro všechny tři kuželosečky. Ukazuje, že parabola, která není středová kuželosečka jako elipsa a hyperbola a má dle ohniskové definice jiné vlastnosti, je elipse a hyperbole blízká, což plyne z obrázku 1.4 nebo animace IV.

Definice 1.4. *Kuželosečka je množina všech bodů M v rovině, které mají konstantní poměr vzdáleností od pevného bodu F a přímky d daným bodem neprocházející.*

Zapsáno symbolicky:

$$\mathcal{K} = \{\forall M \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \frac{|MF|}{|Md|} = k\ \}, k\ \in (0, \infty)$$

Jak se později u konktrétních případů přesvědčíme, konstanta k nabývá všech kladných reálných čísel. Záporných nabývat nemůže, jelikož se jedná o poměr vzdáleností a ty jsou vždy kladné. Dokážeme, že definuje právě nám známé kuželosečky, elipsu, hyperbolu a parabolu, které jsme definovali výše.

Symbolický zápis konstrukce:

Mějme bod F, přímku d a koeficient k:

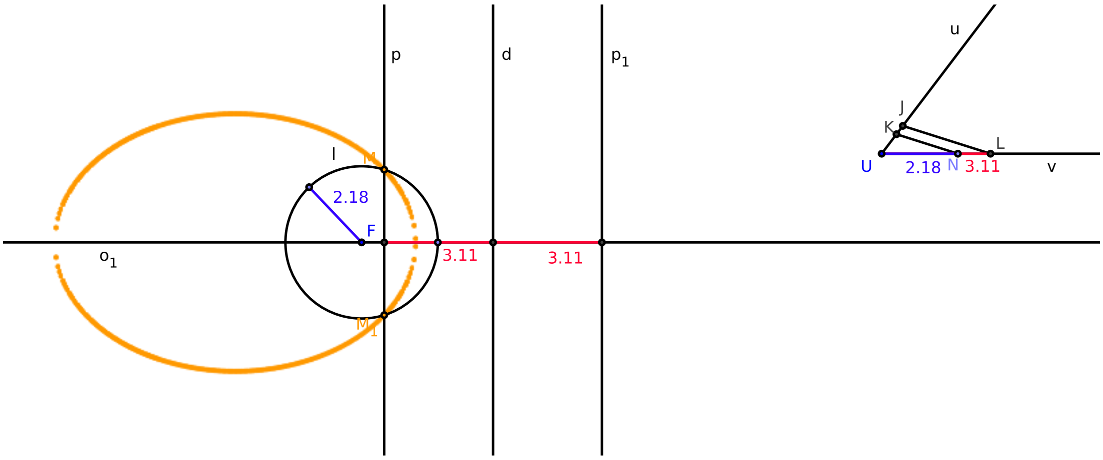
1) α; libovolně pevně, zadá přímkami u, v
2) V; vrchol úhlu α
3) $J; J \in u\ \wedge |JU| = 1$
4) $K; K\ \in u\ \wedge |KU| = k$
5) $L; L \in v$ libovolně
6) $x; x \parallel \overline{JL}$
7) $N; N = x \cap v$
8) $l; l(F, |UL|)$
9) $p; |pd| = |UN|$
10) $M; M = l \cap p$

Jak konstruujeme jednotlivé body? Máme dán bod F, přímku d a koeficient k. Nejdříve si vytvoříme pomocnou konstrukci pro hledání vzdáleností s daným poměrem, kde využijeme podobnosti trojúhelníků. Tedy volíme libovolný úhel daný bodem U a přímkami u, v, na rameno u od vrcholu úhlu U vyneseme jednotkovou vzdálenost, bod J, a opět od vrcholu na stejné rameno i vzdálenost rovnou koeficientu k, K. Na rameno v budeme vynášet libovolnou vzdálenost, L. Pak bod N nalezneme jako průsečík druhého ramene úhlu a přímky x vedené bodem K rovnoběžné s přímkou danou body JL. Dostáváme vzdálenosti $|UL|$ a $|UN|$, které nám již po řadě určují vzdálenosti od ohniska F a přímky d. Nyní sestrojíme kružnici $l(F, |UL|)$ a přímku p, resp. p' pro které platí, že jejich vzdálenost od přímky d je rovna $|UN|$. Průsečík l a p, resp. p' je bod kuželosečky.

Tento postup je shodný pro všechny tři kuželosečky, proto dále uvedeme pouze krátký popis jednotlivých kuželoseček.

1.2.1 Elipsa

Definice 1.5. *Elipsa je množina všech bodů M v rovině, které mají konstantní poměr vzdáleností od pevného bodu F a přímky d daným bodem neprocházející, pro který platí $k < 1$.*



Obrázek 1.5: Podílová definice pro elipsu s koeficientem k = 0.7

Zapsáno symbolicky:

$$\mathcal{E} = \{\forall M \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \frac{|MF|}{|Md|} = k\ \}, k\ < 1$$

Celou situaci si prohlédněte na animaci IV, v ní si lze nastavit parametr k z intervalu $(0, 1)$, aby výsledná kuželosečka byla elipsa. Nebo na obrázku 1.5, kde je volen koeficient $k = 0.7$.

1.2.2 Hyperbola

Definice 1.6. *Hyperbola je množina všech bodů M v rovině, které mají konstantní poměr vzdáleností od pevného bodu F a přímky d daným bodem neprocházející, pro který platí $k > 1$.*

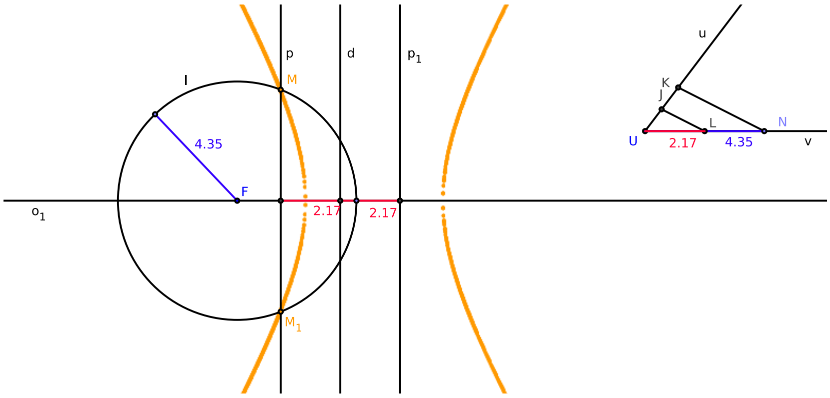
Zapsáno symbolicky:

$$\mathcal{H} = \{M \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \frac{|MF|}{|Md|} = k\ \}, k\ > 1$$

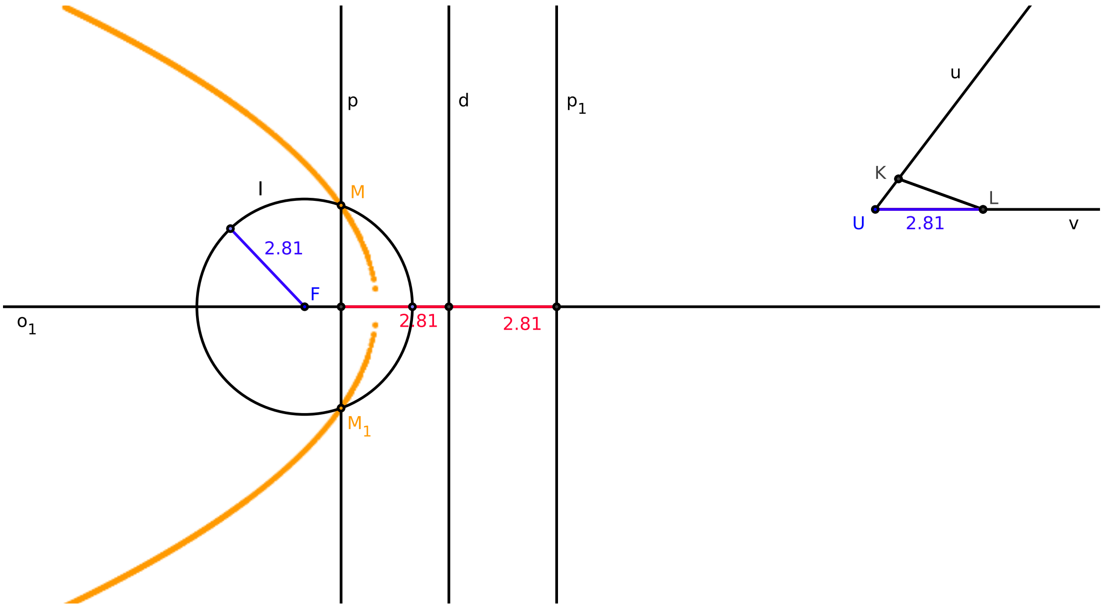
Celou situaci si můžete prohlédnout v na obrázku 1.6, $k = 2$, na animaci IV. Lze si nastavit parametr k z intervalu $(1, 5]$, aby výsledná kuželosečka byla hyperbola.

1.2.3 Parabola

Definice 1.7. *Parabola je množina všech bodů M v rovině, které mají konstantní poměr vzdáleností od pevného bodu F a přímky d daným bodem neprocházející, pro který platí $k = 1$.*



Obrázek 1.6: Podílová definice pro hyperbolu s koeficientem $k = 2$



Obrázek 1.7: Podílová definice pro parabolu s koeficientem $k = 1$

Zapsáno symbolicky:

$$\mathcal{P} = \{M \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \frac{|MF|}{|Md|} = k\ \}, k\ = 1$$

Celou situaci si prohlédněte na obrázku 1.7 nebo na animaci IV, pro $k = 1$.

Všimněme si, že pro parabolu je tato definice velmi podobná definici ohniskové. Ohnisková definice říká, že parabola je křivka bodů, které mají stejnou vzdálenost od pevného bodu a přímky, tj. $|MF| = |Md|$. Tento vztah můžeme podělit vzdáleností $|Md|$ za podmínky $|Md| \neq 0$ a dostaneme rovnost $\frac{|MF|}{|Md|} = 1$. Pokud by $|Md| = 0$, pak by nutně musel bod F být totožný s bodem M a oba by leželi na přímce d. Tedy existoval by pouze jeden bod, který by splňoval tuto rovnost, tedy nejednalo by se o parabolu. Podíl $\frac{|MF|}{|Md|} = 1$ je již podílová definice paraboly. Ukázali jsme, že tato definice je ekvivalentní s ohniskovou definicí a definuje stejnou křivku.

1.3 Definice kuželoseček pomocí středů kružnic

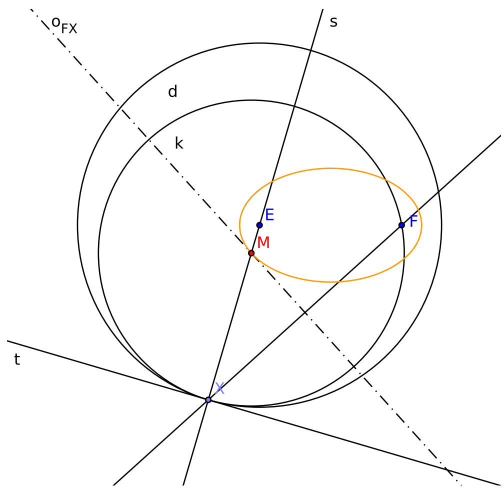
Nyní si ukážeme další definice kuželoseček, která není tolik známá, je ale velice názorná a jednoduchá.

Tato definice využívá vlastností tečny ke kuželosečce (řídicí a vrcholovou kružnici, resp. řídící a vrcholovou tečnu), které jsou podrobně popsány ve 4. kapitole, proto zde jen nastíníme, jak tato definice vypadá. Zbytek necháme na čtenáři.

1.3.1 Elipsa

Definice 1.8. *Elipsa je množina všech středů M_i kružnic k_i, které se dotýkají uvnitř dané kružnice $d(E, 2a)$ a procházejí jejím vnitřním bodem F. [1]*

Kružnice d je řídicí kružnice a daný bod F je jedno ohnisko. Druhé ohnisko elipsy je střed kružnice d, tedy bod E a její poloměr je roven $2a$ tedy velikosti hlavní osy.



Obrázek 1.8: Definice elipsy pomocí středů kružnic

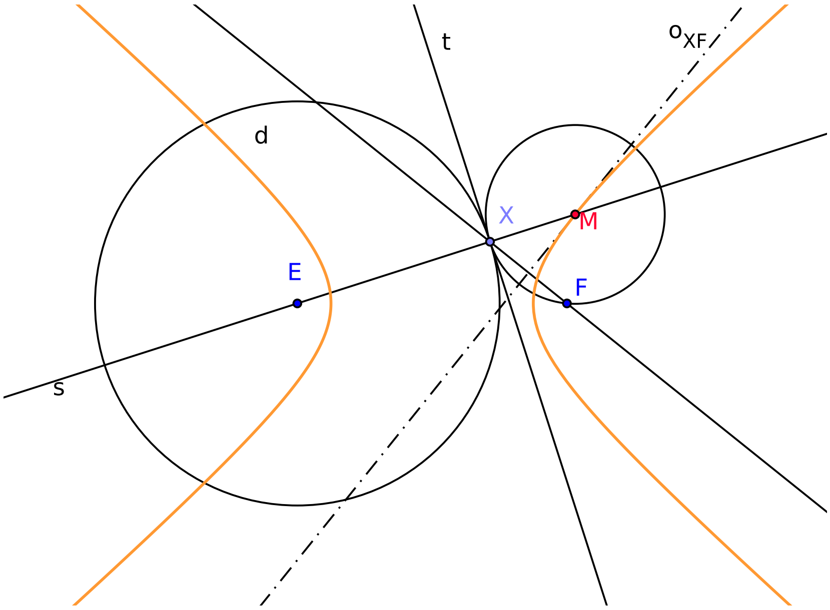
Pokud zapíšeme postup symbolicky, dostáváme následovné:
Mějme kružnici $d(E, 2a)$ a bod F

$$\begin{array}{ll} 1) & X;\ X \in d, \text{libovolně} \\ 2) & s;\ s\ = \overleftrightarrow{EX} \\ 3) & o;\ o\ je\ osa\ \overline{XF} \\ 4) & M;\ M = o\ \cap s \end{array}$$

Co vlastně říká tato definice? Je dána kružnice d se středem E a bod F, který leží uvnitř kružnice d, viz obrázek 1.8 nebo animace V. Na kružnici d volíme bod X libovolně. Bodem X a F proložíme kružnici tak, aby se dotýkala kružnice d v bodě X. Tyto dvě kružnice budou tedy mít v bodě X společnou tečnu. Pro libovolnou volbu bodu X nám vznikne jiná kružnice, tedy i jiný střed. Množina těchto středů pak tvoří hledanou elipsu.

1.3.2 Hyperbola

Definice 1.9. *Hyperbola je množina všech středů M_i kružnic k_i, které se dotýkají vně dané kružnice $d(E, 2a)$ a procházejí jejím vnějším bodem F. [1]*



Obrázek 1.9: Definice hyperboly pomocí středů kružnic

Body E, F jsou ohniska hyperboly a kružnice d je řídicí kružnicí jejíž poloměr je roven $2a$, tedy velikosti hlavní osy hyperboly.

Tato definice se příliš neliší od definice elipsy. Jediným rozdílem je poloha bodu F, který tentokrát leží vně kružnice d. Tedy postup konstrukce je shodný s postupem u elipsy, což je zřejmé z obrázku 1.9, proto jej zde nebudeme opět zmiňovat. Rozdíl je v umístění bodu F, který leží vně kružnice d. Protože kružnice k_i je definována tak, že má společnou tečnu s kružnicí d, pak její poloměr může růst nade všechny meze. Opět proto získáváme body v nekonečnu, které tvoří hyperbolu.

Můžete si opět spustit animaci VI pro pochopení postupu.

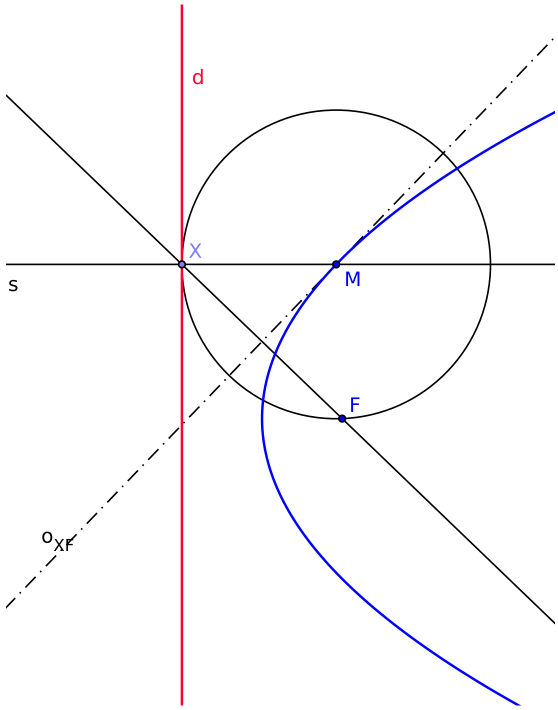
1.3.3 Parabola

Definice 1.10. *Parabola je množina středů M_i kružnic k_i, které procházejí bodem F a dotýkají se dané přímky d. [1]*

Symbolický popis konstrukce:
Mějme přímku d a bod F

$$\begin{array}{ll}
1) & X;\ X \in d, \text{libovolně} \\
2) & s;\ s\ \perp d \wedge X \in s \\
3) & o_{XF};\ o\ je\ osa\ \overline{XF} \\
4) & M;\ M = o_{XF} \cap s
\end{array}$$

Bod F je ohniskem paraboly a přímka d je řídicí přímkou. Parabola má opět trochu jinou definici než elipsa a hyperbola. Místo dané kružnice d, která se



Obrázek 1.10: Definice paraboly pomocí středů kružnic

objevovala v předešlých definicích, zde figuruje přímka. Proto i konstrukce je jiná, jak je vidět na obrázku 1.10. Lze lehce nahlédnout, že se jistě jedná o stejnou křivku, jako v předešlých definicích. Bod M leží na parabole. Opět musí platit, že vzdálenost bodu M od přímky d musí být shodná se vzdáleností od ohniska, tj. od F. To ale evidentně platí, neboť hledaná kružnice k_i z definice musí procházet bodem F a přímka d je její tečna.

Konstrukci si můžete ověřit v animaci VII.

2. Konstrukce kuželoseček

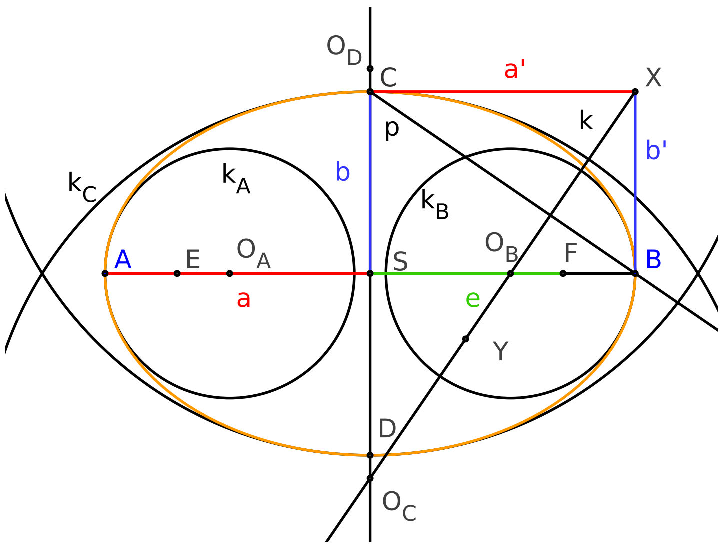
V první kapitole jsme ukázali bodovou konstrukci kuželoseček vycházející z ohniskové definice, ale to není jediná konstrukce, proto si nyní uvedeme, jak jinak lze kuželosečky zadat a jaké existují jiné konstrukce. Některé konstrukce kuželoseček pouze přibližně aproximují (tj. přibližně napodobují tvar), jiné konstruují kuželosečky bod po bodu jako již zmiňovaná bodová konstrukce.

2.1 Hyperoskulační kružnice

Tato pomocná konstrukce využívá toho, že každá křivka lze v každém bodě nahradit částí kružnice, která ji v blízkém okolí tohoto bodu aproximuje (napodobuje). Tyto kružnice se nazývají oskulační kružnice. Jejich speciálním případem jsou tzv. hyperoskulační kružnice, které se sestrojují speciálně pro vrcholy kuželoseček.

Tato konstrukce se využívá pro zpřesnění vykreslení kuželoseček, jelikož je velice náročné sestrojit dostatečné množství bodů, aby bylo možné kuželosečku vyrýsovat. Proto použijeme právě hyperoskulační kružnice, které nám naznačí, jak se kuželosečka v okolí vrcholu chová.

2.1.1 Elipsa



Obrázek 2.1: Konstrukce hyperoskulačních kružnic pro elipsu

Nejdříve se situaci ukážeme u elipsy. Jak je vidět na obrázku 2.1, hyperoskulační kružnice opravdu dobře vystihují, aproximují elipsu ve vrcholech.

Postup sestrojení těchto kružnic lze zapsat symbolicky:

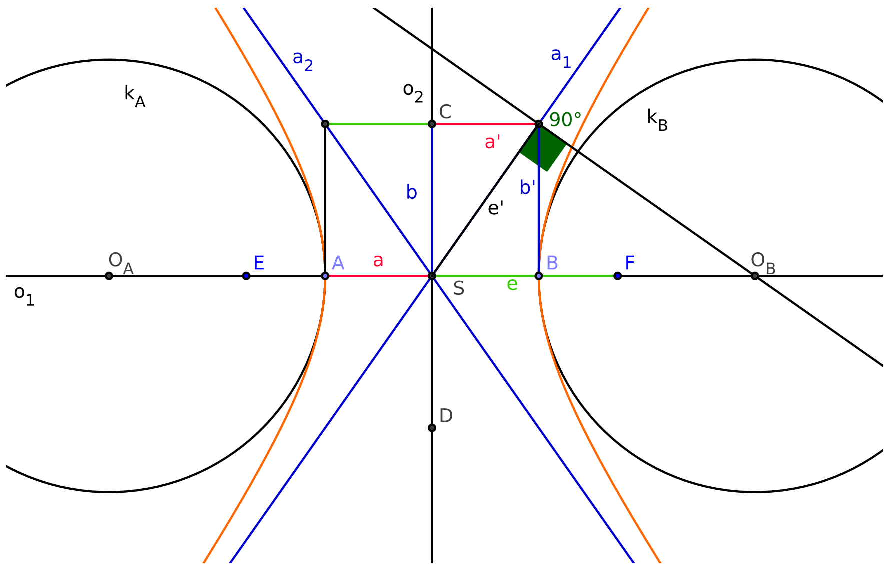
$$
\begin{array}{ll}
1) & a'; a' \parallel AB \wedge C \in a' \\
2) & b'; b' \parallel CD \wedge B \in b' \\
3) & X; X = a' \cap b' \\
4) & p; p = BC \\
5) & k; k \perp p \wedge X \in k \\
6) & O_B; O_B = k \cap AB \\
7) & O_C; O_C = k \cap CD \\
8) & k_B; k_B(O_B, |O_B B|) \\
9) & k_C; k_C(O_C, |O_C C|)
\end{array}
$$

Nejdříve sestrojíme přímku a', která je rovnoběžná s hlavní osou elipsy a prochází bodem C, a přímku b', která je rovnoběžná s vedlejší osou a prochází bodem B. Průsečík těchto přímek nazveme X. Sestrojíme kolmici k bodem X na přímku danou body BC. Průsečík přímky k s hlavní osou je bod O_B střed hyperoskulační kružnice pro vrchol B a průsečík přímky k s vedlejší osou je bod O_C střed hyperoskulační kružnice pro vrchol C.

Analogicky by se sestrojily středy pro vrcholy A a D. Jelikož je elipsa symetrická, pak pro střed hyperoskulační kružnice v bodě A platí: $|AO_A| = |BO_B|$ tedy i poloměr kružnice k_A bude shodný s poloměrem k_B. Analogicky sestrojíme kružnici k_D.

Postup si můžete projít v animaci VIII.

2.1.2 Hyperbola



Obrázek 2.2: Konstrukce hyperoskulačních kružnic pro hyperbolu

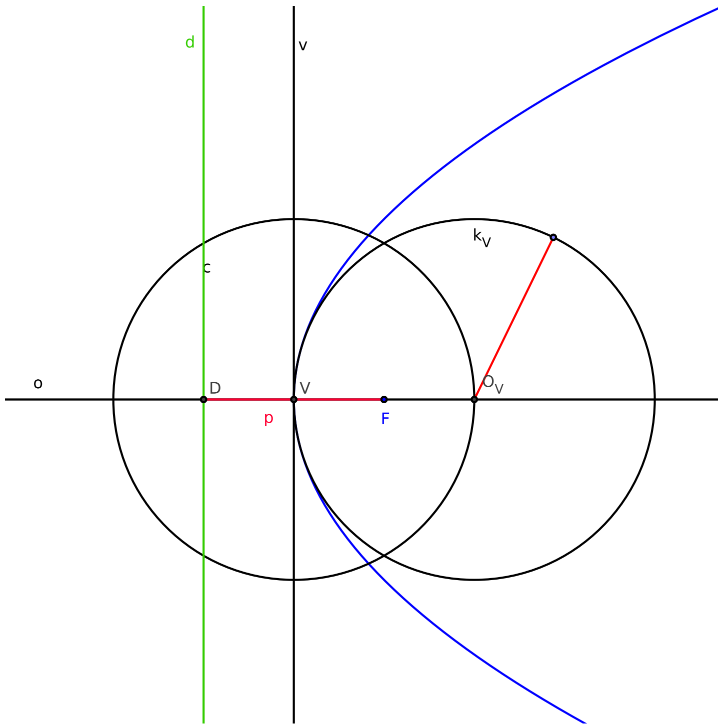
Symbolický zápis sestrojení hyperoskulačních kružnic hyperboly:

1)	$b'; b' \perp o_1$(hlavní osa) $\wedge B \in k$
2)	$X; X = k \cap a_1$asymtota
3)	$k; k \perp a_1 \wedge X \in k$
4)	$O_B; O_B = k \cap o_1$
5)	$k_B; k_B(O_B, \|O_B B\|)$

Hyperoskulační kružnice hyperboly jsou pouze dvě, jelikož hyperbola svými vedlejšími vrcholy neprochází. Střed hyperoskulační kružnice pro vrchol B sestrojíme tak, že vedeme kolmici b' bodem B. Průsečík s asymptotou a_1 nazveme bod X a platí $|XS| = e$. Tímto bodem vedeme kolmici na asymptotu a_1, přímka k. Pak bod O_B leží na průsečíku hlavní osy hyperboly a přímky k.

Konstrukce je opět symetrická jako u elipsy. Tedy sestrojíme bod na asymptotě, který má od středu vzdálenost e, v tomto bodě vedeme kolmici na tuto asymptotu a průsečík je bod O_A, resp. sestrojíme-li analogicky pro druhou asymptotu, bod O_B. Hledané kružnice zapíšeme $k_A(O_A, |AO_A|), k_B(O_B, |BO_B|)$, viz obrázek 2.2, nebo animaci IX.

2.1.3 Parabola



Obrázek 2.3: Konstrukce hyperoskulační kružnice pro parabolu

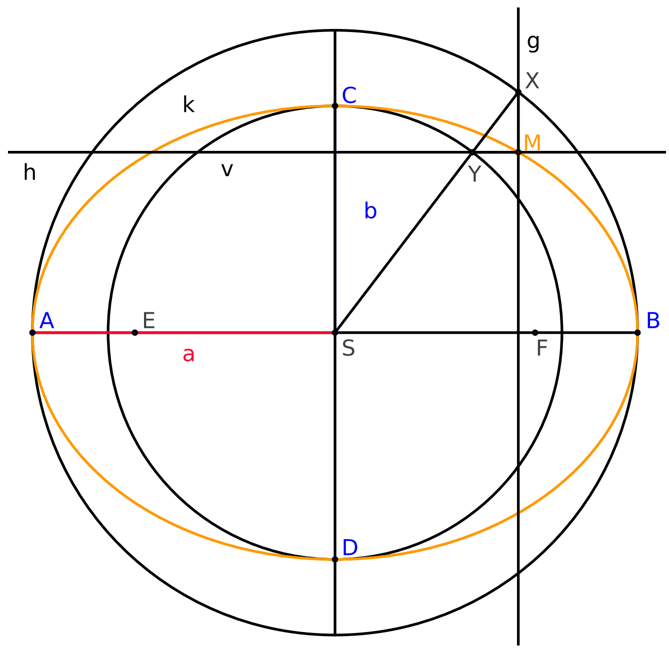
U paraboly je pouze jedna hyperoskulační kružnice, neboť parabola má pouze jeden vrchol. Konstrukce hyperoskulační kružnice u paraboly je velice snadná. Poloměr této kružnice je roven parametru, tj. p. Střed této kružnice je bod O_V, který nalezneme ve vzdálenosti p od vrcholu paraboly, tj. $|VO| = p$, hyperoskulační kružnice má proto předpis $k_V(O, p)$.

Konstrukci můžete nalézt v animaci X.

2.2 Trojúhelníková konstrukce

Tuto konstrukci si ukážeme pouze pro elipsu a parabolu. Je to jednoduchá konstrukce, která konstruuje elipsu, parabolu bod po bodu.

2.2.1 Elipsa



Obrázek 2.4: Trojúhelníková konstrukce elipsy

Opět uvedeme symbolický zápis této konstrukce:
Máme dány hlavní a vedlejší osy, střed a konstanty a a b.

$$
\begin{array}{ll}
1) & v; v(S,a), \text{vrcholová kružnice} \\
2) & k; k(S,b) \\
3) & X; X \in v, \text{libovolně} \\
4) & p; p = XS \\
5) & Y; Y = p \cap k \\
6) & h; h \parallel CD \wedge X \in h \\
7) & g; g \parallel AB \wedge Y \in g \\
8) & M; M = g \cap h
\end{array}
$$

Tuto konstrukci si můžete názorně prohlédnout na obrázku 2.4 nebo v animaci XI.

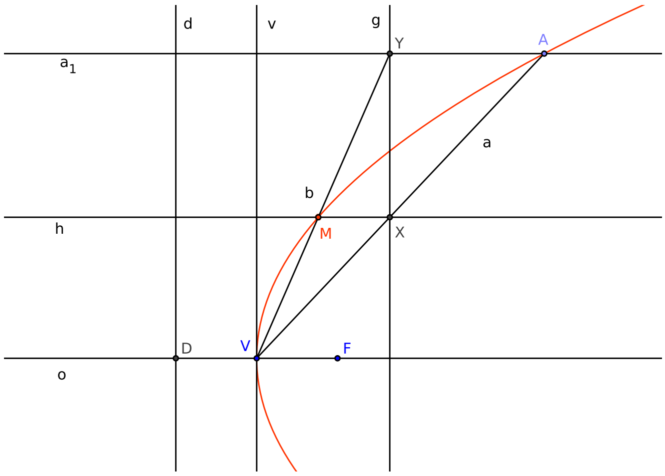
Mějme bod S a dvě soustředné kružnice $v(S,a)$ a $k(S,b)$. Nyní volíme bod X libovolně na kružnici v a sestrojíme přímku p, která spojuje střed S s bodem X. Průsečík přímky p s druhou kružnicí k nazveme Y. Hledaný bod elipsy M nalezneme na průsečíku přímek h a g, které sestrojíme tak, že po řadě body X, Y vedeme rovnoběžky s hlavní a vedlejší sou. Tedy přímka h prochází bodem X

a je rovnoběžná s hlavní osou a přímka g prochází bodem Y a je rovnoběžná s vedlejší osou.

Pro jinou volbu bodu $X \in v$ získáme jiný bod M.

Důkaz této konstrukce plyne z afinity vrcholové kružnice na kuželosečku.

2.2.2 Parabola



Obrázek 2.5: Trojúhelníková konstrukce paraboly

Opět uvedeme symbolický zápis této konstrukce:

Máme dánu osu o, vrchol V a jeden bod paraboly A.

$$
\begin{array}{ll}
1) & a; a = AV \\
2) & X; X \in a, \text{libovolně} \\
3) & g; g \perp o \ \wedge X \in g \\
4) & a_1; a_1 \parallel o \ \wedge A \ \in a_1 \\
5) & Y; Y = a_1 \cap g \\
6) & h; h \parallel o \ \wedge X \in h \\
7) & b; b = YV \\
8) & M; M = b \cap h
\end{array}
$$

Tuto konstrukci si můžete názorně prohlédnout na obrázku 2.5 nebo v animaci XII.

Mějme vrchol V paraboly, osu o a jeden bod A ležící na parabole. Sestrojíme úsečku a jako spojnici bodů AV a přímku a_1, která je rovnoběžná s osou o a prochází bodem A. Na této úsečce a volíme bod X libovolně. Sestrojíme nyní přímku g, která prochází bodem X a je kolmá na osou o. Průsečík přímky g s přímkou a_1 nazveme Y. Bodem X dále vedeme rovnoběžku h na osu o. Úsečka b je definovaná body VY. Vznikl nám trojúhelník, viz obrázek 2.5, s dvěma známými vrcholy X, Y a třetím vrcholem je průsečík b a h, který nazveme bodem M. Bod M leží na hledané parabole.

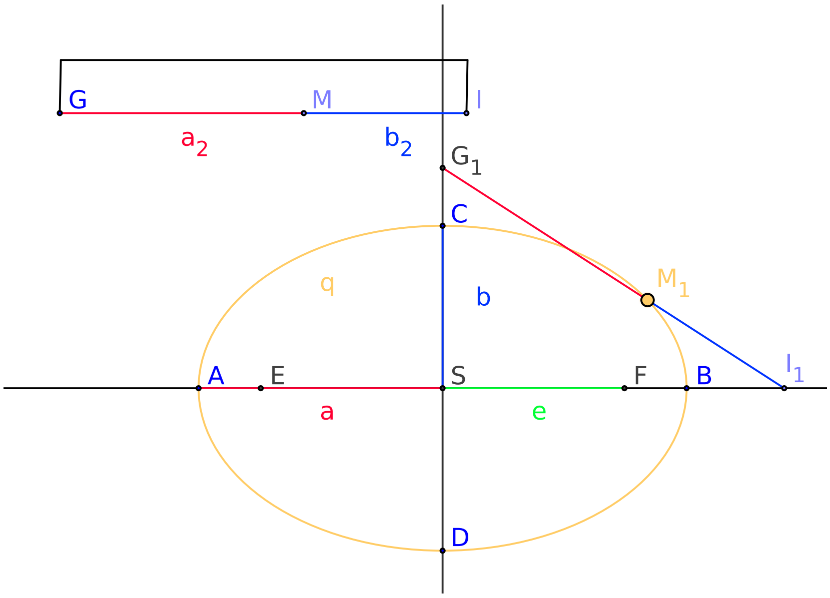
Pro jinou volbu bodu $X \in a$ získáme jiný bod M.

2.3 Proužková konstrukce

Tato konstrukce elipsy se nejmenuje proužková náhodou, ale nazývá se tak podle toho, že ke konstrukci využíváme proužek papíru.

Rozlišujeme dvě varianty této konstrukce – součtovou a rozdílovou. Jak napovídá název, rozdělujeme je podle toho, jak umisťujeme body na proužek papíru.

2.3.1 Součtová proužková konstrukce



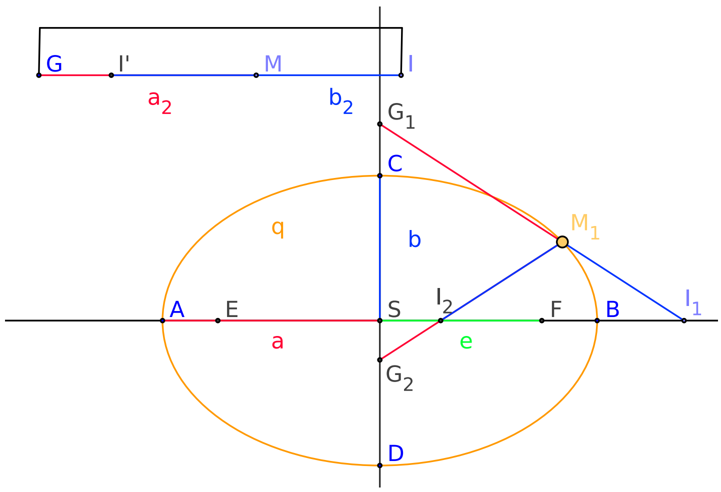
Obrázek 2.6: Proužková konstrukce elipsy součtová

Na tuto konstrukci pomocí proužku papíru potřebujeme znát velikost hlavní a vedlejší osy a jejich polohu. Pak vezmeme proužek papíru a začátek označíme bodem G, od tohoto bodu naneseme vzdálenost a a koncový bod nazveme M. Poslední bod nazveme I a najdeme jej ve vzdálenosti b od bodu M, viz obrázek 2.6 nebo animace XIII resp. XIV, rozdíl těchto animací je, že v první může uživatel sám pohybovat s proužkem. Ve druhé je tato činnost animována pro každý kvadrant zvlášť.

Nyní přiložíme připravený proužek papíru tak, aby bod I ležel na hlavní ose a bod G na vedlejší ose. V místě, kde na proužku papírku leží bod M, leží i bod elipsy. Pokud budeme pohybovat proužkem papírku tak, aby stále příslušné body ležely na osách, sestrojujeme další body.

2.3.2 Rozdílová proužková konstrukce

Rozdílová varianta proužkové konstrukce je velice obdobná, opět využijeme proužku papírku, a stejně na něm sestrojíme bod G a bod M, pouze bod I sestrojíme tak, že vzdálenost b vyneseme na opačnou stranu od bodu M, tedy směrem k bodu G. Body tedy leží v pořadí G , I a M. Opět přikládáme bod G na vedlejší osu a bod I na hlavní osu a bod M ukazuje, kde leží bod elipsy, viz obrázek 2.7 nebo animace XV, na které naleznete jak součtovou tak i rozdílovou proužkovou konstrukci.



Obrázek 2.7: Proužková konstrukce elipsy součtová i rozdílová

3. Další vlastnosti kuželoseček a tečna ke kuželosečkám

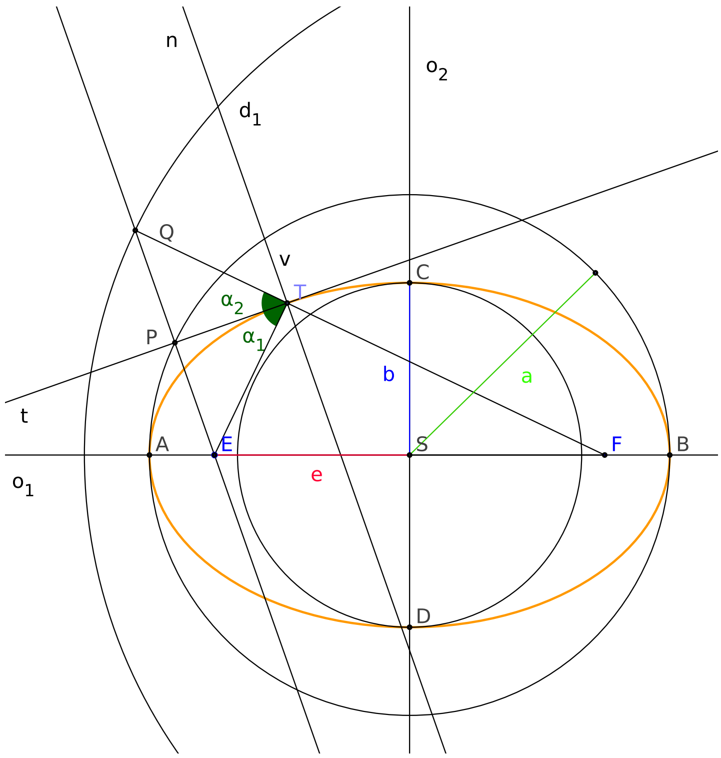
Zatím jsme ukázali základní vlastnosti kuželoseček. Nyní se zaměříme na tečny ke kuželosečkám a vlastnosti s tečnou spojené. Ukážeme, jak se tečna k jednotlivým kuželosečkám sestrojí a jaké má vlastnosti vzhledem ke kuželosečce.

3.1 Elipsa

Elipsa je konečná uzavřená křivka. V každém bodě lze sestrojit tečnu, protože se jedná o regulární křivku, tečna v daném bodě existuje právě jedna.

Uvedeme některá tvrzení o tečně k elipse bez důkazu. Důkazy můžete najít v textu, ze kterého jsou tvrzení citována.

Tvrzení 3.1. *Tečna v libovolném bodě elipsy půlí úhel průvodičů, který obsahuje hlavní vrchol elipsy (tzv. vnější úhel průvodičů).[1]*



Obrázek 3.1: Tečna k elipse

Tvrzení 3.2. *Množina všech bodů Q souměrně sdružených s jedním ohniskem elipsy podle jejích tečen je kružnice d se středem v druhém ohnisku a poloměru rovném velikosti hlavní osy elipsy, tj. $2a$. [2]*

Kružnice z předchozího tvrzení se nazývají řídící. Nutně jsou dvě, neboť můžeme roli ohnisek v tvrzení prohodit, a tak získáme druhou řídící kružnici. Jejich předpisy jsou $d_1(E, 2a)$ a $d_2(F, 2a)$.

Tvrzení 3.3. *Množina všech pat kolmic P spuštěných z ohnisek elipsy na její tečny je kružnice v opsaná kolem středu elipsy poloměrem rovným velikosti hlavní poloosy, tj a. [2]*

Kružnice v z tohoto tvrzení se nazývá vrcholová a je pouze jedna. Její předpis je $v(S, a)$.

Zadefinovali jsme si nové pojmy, ukázali si, jak vypadá tečna k elipse. Jak ji najdeme? Pokusme se vyřešit úlohu sestrojení tečny k elipse daným bodem. Na pomoc si můžeme vzít animaci XVI, kde je tato konstrukce rozkrokována, případně sledujte obrázek 3.1.

Konstrukci můžeme opět zapsat symbolicky:

Mějme dánu elipsu e pomocí hlavních a vedlejších vrcholů.

$$\begin{array}{rl}
1) & k; k(C, a) \\
2) & E, F; E, F = k \ \cap o_1, \text{hlavní osa} \\
3) & T; T \in e, \text{libovolně} \\
4) & p; p = \overrightarrow{FT} \\
5) & d_1; d_1(F, 2a) \\
6) & Q; Q = p \cap d_1 \\
7) & q; q = QF \\
8) & v; v(S, a) \text{ vrcholová kružnice} \\
10) & P; P = q \cap v \\
11) & t; t = TP
\end{array}$$

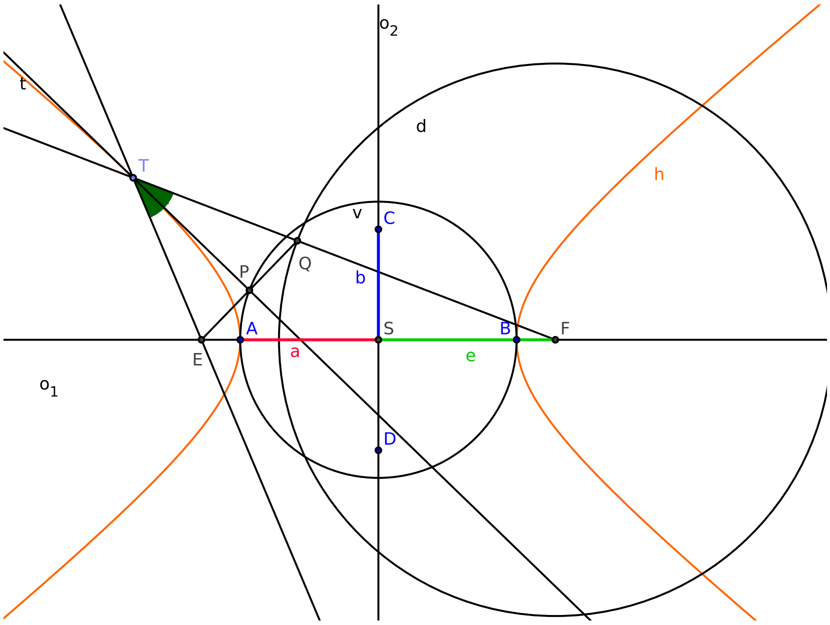
Mějme sestrojenou elipsu a určíme její ohniska. Sestrojíme její libovolný bod, dle nějaké definice či konstrukce z předešlých kapitol. Nazveme jej T, bod dotyku. Tímto bodem povedeme tečnu.

Nejdříve si sestrojíme bod souměrně sdružený s jedním ohniskem, vezměme např. ohnisko E, podle hledané tečny a tento souměrný bod nazveme Q. Jak bylo řečeno v tvrzení množina bodů Q souměrných s ohniskem F podle tečny je kružnice d se středem F a poloměrem $2a$. Sestrojíme si tedy kružnici $d_1(F, 2a)$. Bod Q nalezneme jako průsečík řídící kružnice d a přímky určené body FT, viz obrázek 3.1. Dostali jsme dva body, které jsou souměrné podle hledané tečny, tedy nutně musí tečna procházet středem úsečky QE a být na ni kolmá. Ale jak bylo uvedeno výše, množina pat kolmic P spuštěných z ohniska E je vrcholová kružnice. Proto bod P nalezneme na průsečíku úsečky QE a kružnice $v(S, a)$. Protože je bod P pata kolmice na tečnu, musí i on ležet na tečně. Nalezli jsme tedy další bod tečny, tj. tečna je dána body TP.

Ukázali jsme si jak sestrojit tečnu, a jaké vlastnosti zde platí. Získané vědomosti si můžete prověřit na příkladech, které naleznete ve složce *Příklady*.

3.2 Hyperbola

Další křivkou, ke které si ukážeme konstrukci tečny je hyperbola. V první kapitole jsme si ukázali u hyperboly dvě speciální tečny, tečny v nevlastních bodech. Tyto speciální tečny nazýváme asymptotami.



Obrázek 3.2: Tečna k hyperbole

Opět uvedeme několik vět týkajících se hyperboly a její tečny.

Tvrzení 3.4. *Tečna v bodě hyperboly půlí úhel průvodičů, který obsahuje její hlavní vrchol (tzv. vnější úhel průvodičů). [1]*

Tvrzení 3.5. *Množina všech bodů Q souměrně sdružených s jedním ohniskem podle tečen hyperboly je řídící kružnice d o středu v druhém ohnisku a poloměru rovném velikosti hlavní osy hyperboly, tj. $2a$. [2]*

Jak plyne z předchozího tvrzení jsou řídící kružnice opět dvě, neboť můžeme zaměnit roli ohnisek. Dostáváme tedy kružnice $d_1(E, 2a)$ a $d_2(F, 2a)$

Tvrzení 3.6. *Množina všech pat kolmic P spuštěných z ohnisek hyperboly na její tečny je vrcholová kružnice v hyperboly. [2]*

Vrcholová kružnice v je pouze jedna jako u elipsy a její předpis je $v(S, a)$, kde S je střed hyperboly.

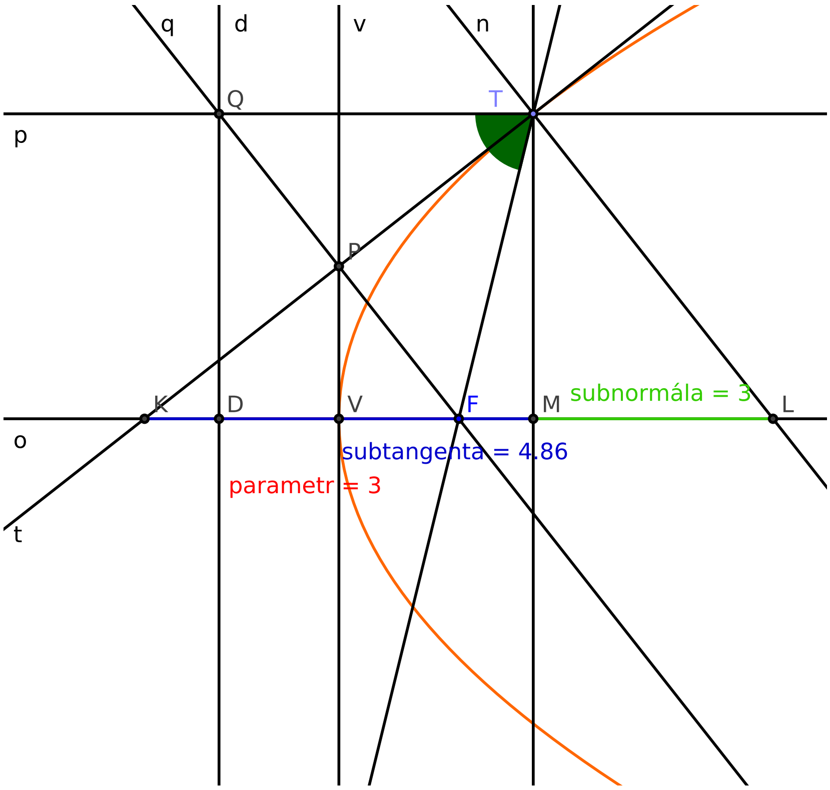
Konstrukce tečny, jak si můžete všimnout na obrázku 3.2 nebo v animaci XVII, je shodná s konstrukcí u elipsy. Z tohoto důvodu nebudeme popisovat postup této konstrukce.

3.3 Parabola

Uvedeme si opět základní věty paraboly spojené s tečnou. Uveden pouze náznaky důkazů, kompletní důkazy lze nalézt v knihách, že kterých jsou definice převzaty.

Tvrzení 3.7. *Tečna v bodě M paraboly půlí ten z obou úhlů průvodičů, který obsahuje vrchol V paraboly (tzv. vnější úhel průvodičů). [1]*

Tvrzení 3.8. *Body Q souměrně sdružené k ohnisku F paraboly podle jejích tečen leží na její řídicí přímce d. [1]*



Obrázek 3.3: Tečna k parabole

Z těchto vět vyplývá, že parabola má stejné vlastnosti jako elipsa a hyperbola, pouze místo kružnic d_1 a d_2 má jednu přímku, již zmiňovanou řídící přímku.

Tvrzení 3.9. *Paty P kolmic sestrojených z ohniska F na tečny paraboly leží na její vrcholové tečně. [1]*

Opět místo kružnice dostáváme přímku v, pro kterou platí, že je kolmá ve vrcholu paraboly a je její tečna.

Uvedli jsme si vlastnosti, které jsou podobné vlastnostem elipsy a hyperboly. Parabola má však i další speciální vlastnosti, které shrneme do následujících vět.

Tvrzení 3.10. *Spojnice průsečíků dvou různých tečen paraboly se středem úsečky určené jejich dotykovými body je rovnoběžná s osou paraboly. [2]*

Definice 3.1. *Nechť $t \neq v$ je tečna paraboly a T její dotykový bod. Označme K průsečík tečny t s osou paraboly, M patu kolmice spuštěné z T na osu a L průsečík normály n sestrojené v bodě T s osou, viz obrázek 3.3. Úsečka KL se nazývá subtangenta, úsečka ML subnormála. [2]*

K nově definovaným pojmům subtangenta a subnormála se váží vlastnosti, které jsou řečené v následujících větách.

Tvrzení 3.11. *Subtangenta je půlena vrcholem. [2]*

Poslední tvrzení plyne okamžitě z obrázku 3.3, jak si můžete všimnout, subtangenta je jedna ze stran rovnoběžníku $KFTQ$.

Tvrzení 3.12. *Délka subnormály je konstantní a rovná se parametru p. [2]*

Tvrzení plyne opět z obrázku 3.3, neboť pravoúhlé trojúhelníky FDQ a LMT jsou shodné.

Tvrzení 3.13. *Součet subtangenty a subnormály je půlen ohniskem. [2]*

Uvedli jsme si základní tvrzení o tečně k parabole a o pojmech s tečnou spojených. Nyní si ukážeme, jak sestrojíme tečnu k parabole jejím bodem. Postup můžete sledovat na obrázku 3.3 nebo v animaci XVIII.

Symbolický zápis konstrukce:

Mějme dánu řídicí přímku d a ohnisko F paraboly. Sestrojíme libovolný bod paraboly T pomocí libovolné konstrukce z předešlých kapitol.

1) $T; T \in$ parabola, libovolně
2) $p; p \parallel o$
3) $Q; Q = p \cap d$
4) $q; q = QF$
5) $v; v \perp o \wedge V \in v$ vrcholová tečna
6) $P; P = q \cap v$
7) $t; t = TP$

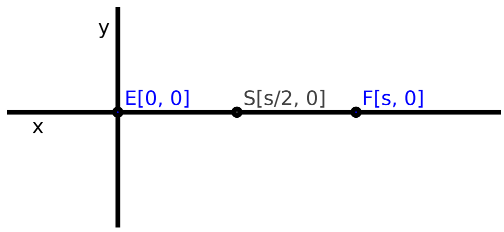
Jak si můžeme všimnout, postup konstrukce je velice analogický jako pro elipsu a hyperbolu. Pouze místo dvou řídících kružnic máme řídicí přímku d a místo vrcholové kružnice, kterou jsme potkali u elipsy a hyperboly, zde vystupuje vrcholová tečna v. Jak je patrné již z předešlých tvrzení.

Podrobný postup konstrukce zde proto nebudeme uvádět. Tuto konstrukci necháme na čtenáři, nebo ji naleznete v animaci XVIII.

4. Důkazy ekvivalence definic

Tvrzení 4.1. *Množina bodů daná ohniskovou definicí kuželoseček je podmnožinou množiny bodů dané středovou, resp. vrcholovou rovnicí jednotlivých kuželoseček pro danou volbu parametru k.*

Důkaz: Důkaz provedeme početně.



Obrázek 4.1: Volba soustavy souřadnic pro elipsu, resp. hyperbolu

Nechť máme elipsu danou rovnicí $|ME| + |MF| = k$, kde $k > 0$. Zvolíme soustavu souřadnic s počátkem v bodě E, tj. $E = [0, 0]$ a úsečku EF volíme přímo jako osou x. Tedy bod $F = [s, 0]$, kde s, je reálné číslo. Pak střed elipsy má souřadnice $S = [\frac{s}{2}, 0]$, viz obrázek 4.1 Dále pro elipsu víme, že platí $a^2 = e^2 + b^2$, kde $e = |ES| = \frac{s}{2}$.

Chceme ukázat, že platí rovnice $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x - s)^2 + y^2} = k$$

Tento výraz se pokusíme převést na podobný tvar jako má obecná rovnice elipsy.

$$\sqrt{(x - s)^2 + y^2} = k - \sqrt{x^2 + y^2}$$

Umocníme tuto rovnost.

$$x^2 - 2xs + s^2 + y^2 = k^2 - 2k\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2$$
$$\Rightarrow -2xs + s^2 - k^2 = -2k\sqrt{x^2 + y^2}$$

Opět umocníme, abychom se zbavili odmocniny.

$$\Rightarrow 4x^2s^2 - 4xs^3 + 4xsk^2 + s^4 - 2s^2k^2 + k^4 = 4k^2(x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow 4x^2s^2 - 4xs^3 + 4xsk^2 + s^4 - 2s^2k^2 + k^4 - 4k^2x^2 - 4k^2y^2 = 0$$

$$(4s^2 - 4k^2)x^2 + (-4s^3 + 4sk^2)x - 4k^2y^2 + (s^2 - k^2)^2 = 0$$

$$4(k^2 - s^2)x^2 - 4s(k^2 - s^2)x + 4k^2y^2 - (k^2 - s^2)^2 = 0$$

$$4(k^2 - s^2)\left(x^2 - \frac{2xs}{2} + \left(\frac{s}{2}\right)^2\right) + 4k^2y^2 - (k^2 - s^2)^2 - \frac{s^2}{4}4(k^2 - s^2) = 0$$

$$4(k^2 - s^2)\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 + 4k^2y^2 - (k^2 - s^2)k^2 = 0$$

Pokud $k^2 \neq s^2$

$$\frac{(x - \frac{s}{2})^2}{\frac{k^2(k^2-s^2)}{4(k^2-s^2)}} + \frac{y^2}{\frac{k^2(k^2-s^2)}{4k^2}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x - \frac{s}{2})^2}{\frac{k^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{k^2-s^2}{4}} = 1$$

Tedy $a^2 = \frac{k^2}{4}$ a $b^2 = \frac{k^2-s^2}{4}$

$\Rightarrow a = \frac{k}{2}$, nemusíme uvažovat obě možnosti, tj. $\pm k$, neboť $k \in (0, \infty)$. Dostáváme, že $k = 2a$. Nyní k dosadíme: $b^2 = \frac{4a^2-s^2}{4}$ a vyjádříme s.

$s^2 = 4b^2 - 4a^2$ a díky tomu, že víme, že se jedná o elipsu, platí $a^2 = b^2 + e^2 \Rightarrow s^2 = \frac{e^2}{4}$.

Tedy dostáváme elipsu ve tvaru

$$\frac{(x - e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dostáváme středovou rovnici elipsy a platí $s = \frac{e}{2}$

Ještě zbývá ověřit, co by se stalo, pokud by $S^2 = k^2$. Po dosazení vypočítaných údajů dostáváme $4e^2 = 4a^2 \Rightarrow e = a$. Pak by ale nutně $b = 0$ což je spor, neboť by jsme pak nedostali elipsu.

Nyní se podíváme jak se změní situace u hyperboly.

Ohnisková definice pro hyperbolu je $||ME| - |MF|| = k$, kde $k \in (0, \infty)$. Pokud by $k = 0$ pak by platilo, že $|ME| = |MF|$, tedy bychom dostali parabolu. Středová rovnice hyperboly je $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$. Pro hyperbolu také platí vztah $e^2 = a^2 + b^2$.

Zavedeme soustavu souřadnic jako u elipsy, tedy jako na obrázku 4.1.

$$|\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x - s)^2 + y^2}| = k$$

Je-li $\sqrt{x^2 + y^2} > \sqrt{(x - s)^2 + y^2}$, pak dostáváme

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x - s)^2 + y^2} = k$$

$$-\sqrt{(x - s)^2 + y^2} = k - \sqrt{x^2 + y^2}$$

Po umocnění získáváme shodnou rovnici jako pro elipsu.

Je-li $\sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{(x - s)^2 + y^2}$

$$-\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x - s)^2 + y^2} = k$$

$$\sqrt{(x - s)^2 + y^2} = k + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 - 2xs + s^2 + y^2 = k^2 + 2k\sqrt{(x^2 + y^2)} + x^2 + y^2$$

$$-k^2 - 2xs + s^2 = 2k\sqrt{(x^2 + y^2)}$$

Opět umocníme. Pro hyperbolu dostáváme stejnou rovnici jako pro elipsu.

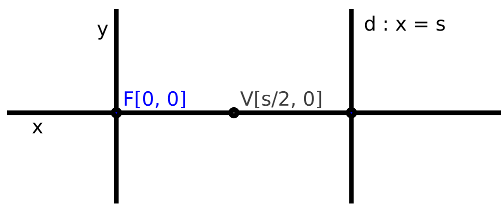
$$\frac{(x-\frac{s}{2})^2}{\frac{k^2}{4}} - \frac{y^2}{-\frac{k^2-s^2}{4}} = 1$$

Tedy $k = 2a$, ale $b^2 = -\frac{k^2-s^2}{4} \Rightarrow s^2 = 4b^2 + 4a^2 \Rightarrow s = 2e$
Výsledná rovnice pro hyperbolu tedy vypadá:

$$\frac{(x-e)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Na závěr bychom měli ověřit, co se stane, pokud platí rovnost $s^2 = k^2 \Rightarrow 4e^2 = 4a^2$, dostáváme tedy stejnou rovnost jako u elipsy. Tato situace nemůže nastat.

Na závěr nám zbývá ověřit platnost tvrzení pro parabolu. Tedy konkrétně $|XF| = |Xd|$ je podmnožinou množiny dané rovnicí $(y-n)^2 = 2p(x-m)$



Obrázek 4.2: Volba soustavy souřadnic pro parabolu

Zvolíme soustavu souřadnic s počátkem v bodě $F = [0,0]$ a přímku d volíme kolmou k ose x, tj. $d : x = s$, viz obrázek 4.2.

Dostáváme rovnici:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-s)^2}$$
$$\sqrt{x^2+y^2} = |(x-s)|$$

Umocníme, abychom se zbavili odmocniny:

$$x^2 + y^2 = x^2 - 2xs + s^2$$
$$y^2 = -2xs + s^2$$
$$y^2 = -2s\left(x - \frac{s}{2}\right)$$

Porovnáním s vrcholovou rovnicí dostáváme hodnoty koeficientů:
$p = s, V = [\frac{s}{2}, 0]$
Nalezli jsme tedy řešení i pro parabolu.

□

Ukázali jsme, že pokud máme ohniskovou definici kuželoseček, pak umíme nalézt koeficienty obecné rovnice. Nyní si ukážeme opačnou implikaci, pak budeme moci vyslovit tvrzení, že dané definice jsou ekvivalentní.

Tvrzení 4.2. *Množina bodů dána středovou, resp. vrcholovou rovnicí jednotlivých kuželoseček je podmnožinou množiny bodů dané ohniskovou definicí pro danou volbu parametru k.*

Důkaz: Mějme dánu kuželosečku, elipsu nebo hyperbolu obecnou rovnicí, tj.:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} \pm \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow ||ME| \pm |MF|| = 2a$$

Volíme soustavu souřadnic s počátkem ve středu kuželosečky a hlavní osou rovnoběžnou s osou x. Tedy $S = [0, 0]$ a ohniska mají souřadnice $E = [-e,\ 0]$, $F = [e,\ 0]$. Upravené rovnice vypadají:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow |\sqrt{(x+e)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-e)^2 + y^2}| = 2a$$

Pro elipsu konkrétně dostáváme:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Platí, že $b^2 = a^2 - e^2$

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$$
$$a^2(x^2 - 2ex + e^2) + a^2y^2 = a^4 + e^2x^2 - 2ea^2x$$
$$a^2[(x-e)^2 + y^2] = (ex - a^2)^2$$

Nyní se podíváme, co získáme upravíme-li rovnici pro hyperbolu.

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Platí, že $b^2 = e^2 - a^2$

$$(e^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(e^2 - a^2)$$
$$e^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2e^2 - a^4$$
$$a^2[(x-e)^2 + y^2] = (ex - a^2)^2$$

Dostáváme stejnou rovnici jako pro elipsu. Dále tedy budeme pokračovat pro obě kuželosečky společně.

Můžeme rovnici odmocnit:

$$\pm a\sqrt{[(x-e)^2 + y^2]} = |ex - a^2|$$

Nechť $ex \geq a^2$, pokud by platilo $ex < a^2$, analogicky dostaneme stejnou rovnici:

$$\pm 4a\sqrt{[(x-e)^2 + y^2]} = 4(ex - a^2)$$
$$4a^2 \pm 4a\sqrt{[(x-e)^2 + y^2]} + (x-e)^2 + y^2 = 4xe + x^2 + e^2 + y^2$$
$$(2a \pm \sqrt{[(x-e)^2 + y^2]})^2 = (x+e)^2 + y^2$$

Opět můžeme odmocnit:

$$\pm(2a \pm \sqrt{[(x-e)^2 + y^2]}) = \pm\sqrt{(x+e)^2 + y^2}$$

Můžeme výraz pro zjednodušení přepsat pomocí symbolického zápisu:

$$\pm(2a \pm |EM|) = \pm|FM|$$

$$\pm 2a \mp |EM| = \pm |FM|$$
$$\pm 2a = \pm |FM| \pm |EM|$$

Stačí uvažovat znaménko $+$ u konstanty $2a$. Dostáváme tedy možnosti:

$$2a = |FM| + |EM|$$

Dostáváme elipsu.

$$2a = |FM| - |EM|$$

Dostáváme hyperbolu.

$$2a = -|FM| - |EM|$$

a je nezáporná konstanta a vzdálenosti jsou také kladné, tedy tato rovnice je splněna pouze je-li $0 = -0 - 0$, tedy dostáváme jeden jediný bod počátek.

Ještě nám zbývá ověřit platnost tvrzení pro parabolu. Volíme soustavu souřadnic s počátkem ve vrcholu V a osou o v ose x. A přímka d je daná rovnicí $x = \frac{p}{2}$. Ohnisko F má souřadnice $[\frac{-p}{2}, 0]$.

Dostáváme tedy:

$$y^2 = -2px \Rightarrow |MF| = |Md|$$

Upravujeme pravou stranu implikace:

$$x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} + y^2 = -2px + x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}$$
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 - px + \frac{p^2}{4}$$
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$$

Odmocníme:

$$\pm\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x - \frac{p}{2}\right|$$

Pokud zapíšeme tento vztah symbolicky:

$$\pm|FM| = |dM|$$

Jelikož na obou stranách máme vzdálenosti, které jsou vždy kladné, pak pokud bychom uvažovali vztah $-|FM| = |dM|$, řešení dostáváme pokud $F \in d$ a množina řešení je pak bod F.

$\square$

Důkaz je dokončen. Ukázali jsme tvrzení pro všechny tři typy kuželoseček. Můžeme tedy vyslovit tvrzení:

Tvrzení 4.3. *Množina bodů dána ohniskovou definicí je shodná s množinou bodů dané středovou, resp. vrcholovou rovnicí jednotlivých kuželoseček pro danou volbu parametru k.*

Nyní se pokusíme dokázat ekvivalenci definice středové, resp vrcholové rovnice kuželoseček a podílové definice. Díky tomu budeme schopni vyslovit ekvivalenci ohniskové a podílové definice.

Tvrzení 4.4. *Množina bodů definovaná předpisem* $\{M \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \dfrac{|MF|}{|Md|} = k,$ $k \in (0, \infty)\}$ *je podmnožinou množiny bodů dané středovou, resp. vrcholovou rovnicí jednotlivých kuželoseček, pro danou volbu parametru* k.

Důkaz: Důkaz provedeme opět početně.

Mějme bod F a přímku d z podílové definice kuželoseček. Zvolíme soustavu souřadnic. Bod F volíme jako počátek souřadnic a přímku d volíme kolmou na osu x a platí $|Fd| = s$, $s \in (0, \infty)$, viz obrázek 4.2. Pokud by $s = 0$, pak by hledaná kuželosečka degenerovala na přímku d, pro volbu s < 0 se důkaz provede analogicky.

Mějme všechna M pro která platí $|MF| = K|Md|$, množinu si upravme tak, že $K = \frac{1}{k}$ a $F = [0, 0], d : x = s$.

Vzdálenost počítáme euklidovsky tj. $|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$, proto rovnici umocníme na druhou.

Tedy platí:

$$K^2|MF|^2 = |Md|^2$$
$$K^2(x^2 + y^2) = (x - s)^2$$
$$k^2x^2 + K^2y^2 - x^2 + 2xs - s^2 = 0$$
$$x^2(K^2 - 1) + K^2y^2 + 2xs - s^2 = 0$$

Kdyby se $K = 1$, pak by koeficient u x^2 byl nulový, jednalo by se o kuželosečku?

$$0x^2 + 1y^2 + 2xs - s^2 = 0$$
$$y^2 = -2xs + s^2$$
$$y^2 = -2s(x - \frac{s}{2})$$

Dostali jsme tedy vrcholovou rovnici paraboly s vrcholem $V = [\frac{s}{2}, 0]$ a parametr je $p = s$.

Dále uvažujeme $K \in (0, 1) \cup (1, \infty)$

$$(K^2 - 1)[x^2 + \frac{2xs}{K^2 - 1} + (\frac{s}{K^2 - 1})^2] + K^2y^2 - s^2 - \frac{s^2}{K^2 - 1} = 0$$

$$(K^2 - 1)(x + \frac{s}{K^2 - 1}) + K^2y^2 = s^2 + \frac{s^2}{K^2 - 1}$$

$$\frac{(x + \frac{s}{K^2-1})^2}{\frac{s^2+s^2(K^2-1)}{K^2-1} \cdot \frac{1}{K^2-1}} + \frac{y}{\frac{s^2+s^2(K^2-1)}{K^2-1} \cdot \frac{1}{K^2}} = 1$$

Tato poslední rovnice nám již velice připomíná obecnou rovnici pro elipsu nebo hyperbolu.

tj. rovnice:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} \pm \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

souřadnice středu kuželoseček je pak roven $S = [m, n]$, v našem případě tedy $S = [\frac{s}{k^2-1}, 0]$ dále platí:

$$a^2 = \frac{s^2 + s^2(K^2-1)}{(K^2-1)^2} = \frac{s^2}{(K^2-1)^2}(1 + (K^2-1)) = \frac{s^2}{(K^2-1)^2}K^2$$

$$b^2 = \frac{s^2 + s^2(K^2-1)}{k^2(K^2-1)} = \frac{s^2K^2}{K^2(K^2-1)} = \frac{s^2}{K^2-1}$$

Dostáváme tedy rovnici:

$$\frac{(x - \frac{s}{K^2-1})^2}{\frac{s^2 \cdot K^2}{(K^2-1)^2}} + \frac{y^2}{\frac{s^2}{K^2-1}} = 1$$

kde $s > 0, K > 0 \Rightarrow$ jediný výraz, který může být záporný, je $(K^2 - 1)$
Je-li $(K^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow K > 1 \Leftrightarrow k < 1$
v tomto případě dostáváme elipsu tj.:

$$\frac{(x - \frac{s}{K^2-1})^2}{\frac{s^2 \cdot K^2}{(K^2-1)^2}} + \frac{y^2}{\frac{s^2}{K^2-1}} = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{sK}{K^2-1}, b = \frac{s}{\sqrt{K^2-1}}$$

Je-li $(K^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow 0 < K < 1 \Leftrightarrow k > 1$
v tomto případě dostáváme hyperbolu tj.:

$$\frac{(x - \frac{s}{1-K^2})^2}{\frac{s^2 \cdot K^2}{(1-K^2)^2}} - \frac{y^2}{\frac{s^2}{1-K^2}} = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{sK}{1-K^2}, b = \frac{s}{\sqrt{1-K^2}}$$

□

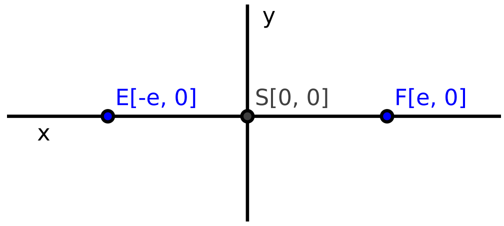
Ukázali jsme, že pokud máme kuželosečku danou podílovou definicí, její množina bodů je podmnožinou množiny bodů, které splňují obecnou rovnici kuželosečky. Nyní se pokusíme dokázat opačnou implikaci. Tedy ukážeme, že tyto dvě definice kuželoseček jsou ekvivalentní, určují stejné křivky.

Tvrzení 4.5. *Množina bodů dána středovou, resp. vrcholovou rovnicí jednotlivých kuželoseček je podmnožinou množiny bodů dané předpisem* $\{M \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \frac{|MF|}{|Md|} = k, k \in (0, \infty)\}$, *pro danou volbu parametru* k.

Důkaz: Máme ukázat, že platí implikace

$$\frac{(x-n)^2}{a^2} \pm \frac{(y-m)^2}{b^2} = 1 \vee y^2 = -2px$$
$$\Rightarrow \frac{|XF|}{|Xd|} = \frac{1}{k}$$

(uvažujeme elipsu a hyperbolu)



Obrázek 4.3: Volba soustavy souřadnic pro elipsu a parabolu

Zvolíme soustavu souřadnic s počátkem ve středu kuželosečky, viz obrázek 4.3, tj. $S = [0,0]$ a tedy ohniska mají souřadnice $E = [-e, 0]$ a $F = [e, 0]$, kde platí $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ pro elipsu a $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ pro hyperbolu. Bod M má obecné souřadnice $x, y \in \mathbb{R}$ a přímka d je kolmá na osu x, tedy je dána rovnicí $x = s, s \in \mathbb{R}$, dále předpokládejme, že $k \neq 0$, kladné.

Nyní budeme upravovat středovou rovnici elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

parametr b můžeme rozepsat podle vzorce $b = \sqrt{a^2 - e^2}$. Dostáváme tedy:

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2e^2$$
$$a^2(x^2 - 2ex + e^2) + 2ea^2x - e^2x^2 + a^2y^2 - a^4 = 0$$
$$a^2[(x-e)^2 + y^2] = (ex - a^2)^2$$
$$a^2[(x-e)^2 + y^2] = e^2\left(x - \frac{a^2}{e}\right)^2$$
$$\frac{a^2}{e^2}[(x-e)^2 + y^2] = \left(x - \frac{a^2}{e}\right)^2$$

Nyní můžeme odmocnit.

$$\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \frac{e}{a}\left|x - \frac{a^2}{e}\right|$$

Dostáváme tedy podílovou definici elipsy. Porovnáním koeficientů dostáváme, že $k = \frac{e}{a}$ a rovnice řídicí přímky d je $x = \frac{a^2}{e}$ tj, parametr $s = \frac{a^2}{e}$.

Dále se podíváme jaká je situace pro hyperbolu.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A chceme ukázat, že platí vztah

$$\frac{|MF|}{|Md|} = k$$

Upravujeme opět středovou rovnici:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

U hyperboly, ale platí, že $b^2 = e^2 - a^2$.

$$(e^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(e^2 - a^2)$$
$$a^2[(x-e)^2 + y^2] = \left(ex - a^2\right)^2$$
$$(x-e)^2 + y^2 = \frac{e^2}{a^2}\left(x - \frac{a^2}{e}\right)^2$$

Pokud umocníme dostáváme rovnost:

$$\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \frac{e}{a}\left|x - \frac{a^2}{e}\right|$$

Opět dostáváme, že $k = \frac{e}{a}$ a parametr $s = \frac{a^2}{e}$.

Dostali jsme, ale pro elipsu a parabolu shodné rovnice. Což je v pořádku neboť tyto definice se liší pouze v intervalu, ze kterého volíme konstantu k.

Pro elipsu víme, že platí $a^2 = e^2 + b^2 \Rightarrow e < a \Rightarrow \frac{e}{a} < 1$

Pro hyperbolu platí $e^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow e > a \Rightarrow \frac{e}{a} > 1$

V postupu jsme, ale neuvažovali tu skutečnost, že pokud odmocňujeme musíme počítat jak s kladným tak ale i se záporným znaménkem.

Pokud bychom tedy volili záporné znaménko u odmocniny tj.

$$-\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \frac{e}{a}\left|x - \frac{a^2}{e}\right|$$
$$\Rightarrow -|FM| = k|Md|$$

kde k je kladná konstanta, pak dostáváme spor, neboť vzdálenosti jsou vždy kladné.

Pokud budeme uvažovat parabolu a její vrcholovou rovnici, pak dostáváme:

$$-2px = y^2 \Rightarrow \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = |x - s|$$

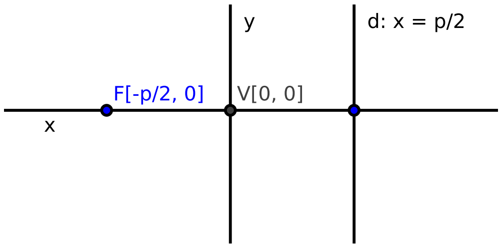
kde s je parametr stejný jako u elipsy a paraboly a soustavu souřadnic volíme s počátkem ve vrcholu V, ohnisko F má souřadnice $[-\frac{p}{2}]$ a řídicí přímka d je dána rovnicí $x = s$, viz obrázek 4.4.

$$x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} + y^2 = -2px + px + x^2 + \frac{p^2}{4}$$
$$(x + \frac{p}{2})^2 + y^2 = (x - \frac{p}{2})^2$$

Odmocníme:

$$\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2+y^2} = |x-\frac{p}{2}|$$

Dostáváme vrcholovou rovnici paraboly. Hodnota parametru s je tedy $\frac{p}{2}$, jedná se tedy o řídicí přímku, kterou jsme uvažovali v ostatních definicích.



Obrázek 4.4: Volba soustavy souřadnic pro parabolu

Ukázali jsme, že pokud zadáme kuželosečku středovou, resp. vrcholovou rovnicí, lze nalézt přímka d a parametr k tak, že platí podílová definice.

$\square$

Můžeme vyslovit tvrzení:

Tvrzení 4.6. *Definice kuželoseček pomocí podílové definice je ekvivalentní s definicí pomocí středové, resp. vrcholové rovnice.*

Dále si ukážeme ekvivalenci ohniskové definice a definice pomocí středů kružnic.

Tvrzení 4.7. *Definice kuželoseček pomocí středů kružnic je ekvivalentní s definicí ohniskovou.*

Důkaz: Nejdříve dokážeme ekvivalenci pro elipsu. Mějme kružnici d danou středem E a poloměrem r, dále mějme bod F tak, že platí $|EF| < r$, tedy bod leží uvnitř kružnice d.

Nyní volíme bod $X \in d$ pevně a sestrojíme kružnici k, pro kterou platí, že $F \in k \wedge k$ se dotýká kružnice d právě v bodě X. Nalezneme její střed, bod M.

Pro bod M, pak nutně platí:

$$|EX| = |EM| + |MX| \Rightarrow |EX| = |FM| + |EM| = r$$

Potom z této implikace plyne, že body X a F leží na stejné kružnici k se středem právě v bodě M.

Jelikož jsme bod X volili libovolně, pak součet $|FM|+|EM| = r$, tedy součet vzdáleností od dvou pevných bodů je konstantní. Tedy platí je ohnisková definice elipsy. Označíme-li poloměr kružnice d $r = 2a$, velikosti hlavní osy. Kružnice d je řídící kružnice a bod X nazýváme Q, bod souměrně sdružený s druhým ohniskem pomocí tečny, jejichž množina je právě kružnice d. Pro sestrojení bodu M, jsme konstruovali osu úsečky FX, ale tato osa není nic jiného než tečna k elipse v bodě M. Situaci si můžete prohlédnout na obrázku 1.8.

Pro hyperbolu volíme bod F tak, aby platilo: $|FE| > r$. Ostatní platí stejně jako u elipsy. Opět volíme bod X na kružnici d a bod M najdeme jako střed kružnice procházející body F, X, který je dotykový bod s kružnicí d.

Pak platí:

$$|EX| = |EM| - |MX| \Rightarrow |EX| = |EM| - |FM| = r$$

Ukázali jsme, že ať volíme bod X jakkoliv, stále je rozdíl od dvou pevných bodů konstantní. Množina bodů M je tedy hyperbola.

Analogicky jako u elipsy by jsme odůvodnili, že osa úsečky XF je tečna hyperboly v bodě M.

Poslední kuželosečka je parabola. Definice paraboly pomocí středů kružnic:

Mějme přímku d a bod F. Opět volíme bod X, který leží na přímce d a sestrojíme střed M kružnice, která prochází bodem F a dotýká se přímky d. Ale pak nutně musí platit $|Md| = |MF|$, neboť tyto body leží na jedné kružnici se středem M. Jedná se proto o ohniskovou definici paraboly.

Dokázali jsme jednu implikaci, ale druhá je již zřejmá.

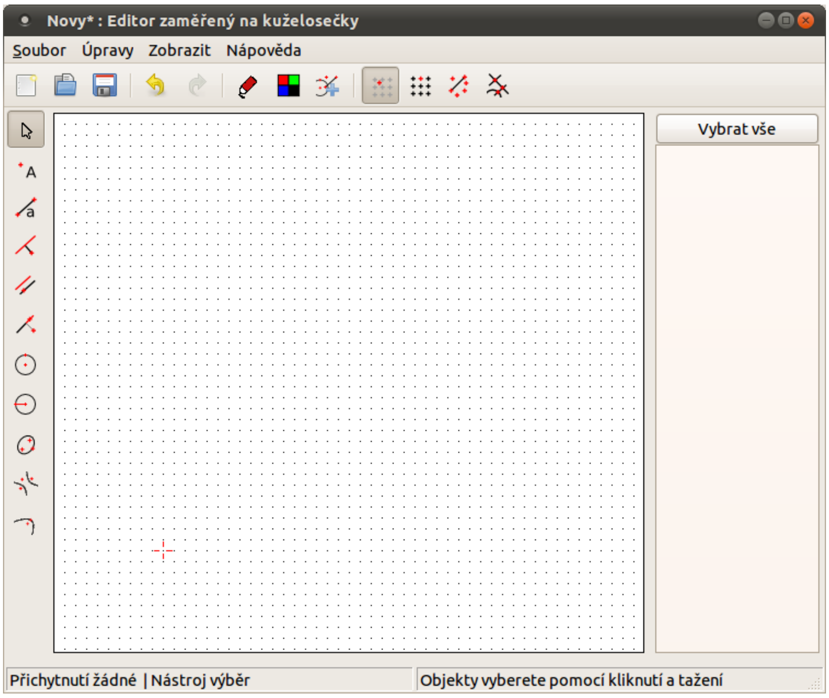
Definice pomocí středů kružnic a ohnisková definice jsou ekvivalentní.

$\square$

5. Editor zaměřený na kuželosečky

5.1 Uživatelská příručka

Editor je navržen tak, aby byl uživatelsky přívětivý a mohl být využit při výuce na středních školách. Je zaměřen na příklady na sestrojení kuželoseček, proto jsou funkce na zadání kuželoseček omezeny a kuželosečky se dají zadat pouze pomocí ohnisek a vedlejšího vrcholu. Toto omezení vychází z nutnosti najít základní prvky jednotlivých kuželoseček v řešeném příkladu.



Obrázek 5.1: Hlavní okno editoru

Prvky hlavního okna

Základní okno je zobrazeno na obrázku 5.1. Skládá se z několika částí:

Rýsovací plocha

Základní část editoru. Vykreslují se zde všechny geometrické objekty.

Levý panel

Panel s ovládacími prvky editoru. Zde si uživatel vybírá typ nástroje, tj. *Bod, Úsečka, Rovnoběžka, Kolmice, Kružnice* a nebo *Kružítko*. Jsou tu i nástroje na vytvoření kuželoseček, tj. *Elipsa, Hyperbola* a *Parabola*. Pokud uživatel podrží myš na libovolné ikoně zobrazí se nápověda k danému objektu.

Pravý panel

Obsahuje soupis všech vytvořených objektů, jejich názevy a bližší popis. Výběr objektů v tomto seznamu je svázán s objekty, které jsou vyrýsované, a tedy pokud uživatel vybere příslušný objekt na rýsovací ploše, vybere se i zde a naopak.

Spodní lišta

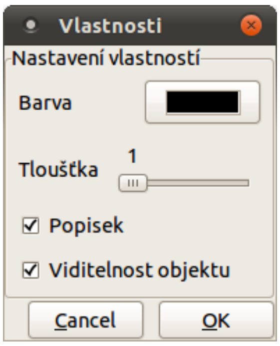
Uvádí aktuální typ přichytávání a typ nástroje. Zobrazuje se zde malá nápověda ke zvolenému nástroji.

Vrchní lišta

Tato lišta je tvořena panelem se základním ovládáním okna, vytvoření nového dokumentu, uložení, otevře-ní, zpět a dopředu v konstrukci. Jsou zde ikony pro volbu typu přichytávání kurzoru na nákresně nebo zde může uživatel vyvolat dialogy pro úpravu objektů, tj. měnit barvu, tloušťku, viditelnost popisku nebo viditelnost celého objektu. Je zde i dialog pro vytvoření nového objektu pomocí zadání souřadnic.

Hlavní nabídka

Shrnuje základní funkce k ovládání programu. Ve složce soubor je základní ovládání celého programu, ve složce úpravy nalezneme funkce na změnu geometrických objektů, tedy zpět a dopředu, nový objekt a samozřejmě i změnu objektu. Další položka je zobrazit, kde najdeme ovládání mřížky, tedy její zapnutí a nastavení, a také zapnutí zobrazení os. Mřížka i osa jsou při spuštění vypnuty. Poslední složkou je nápověda, zde uživatel může najít nápovědu k programu, řešené příklady nebo teorii ke kuželosečkám.

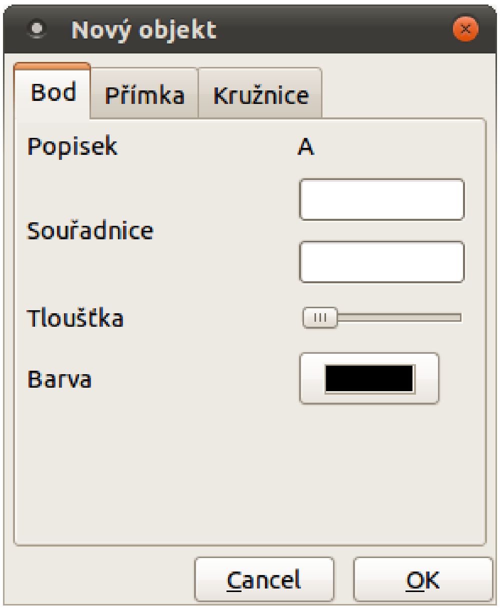


Obrázek 5.2: Dialog na úpravu vybraných objektů

Prvky hlavního okna

Dialog pro úpravu objektu

Uživatel jej může vyvolat buď kliknutím na ikonu v horní liště nebo z menu v záložce úpravy. Tento dialog slouží k úpravám vybraných objektů, tedy změně barvy, tloušťky, viditelnosti popisku a viditelnosti celého objektu. Tyto změny se projeví u všech vybraných objektů.



Obrázek 5.3: Dialog pro vytvoření nového bodu pomocí zadání souřadnic

Dialog pro vytvoření nového objektu

Uživatel jej může vyvolat opět buď kliknutím na ikonu v horní liště nebo jej také nalezne v záložce úpravy. V tomto dialogu, viz obrázky 5.3, 5.4 a 5.5, jsou tři záložky pro vytvoření bodu, přímky nebo kružnice. Uživatel si zvolí, který objekt chce vytvořit, a zadá souřadnice. Může zvolit i barvu objektu a jeho tloušťku.

Další dialogy

Dalšími dialogy, které jsou užity v programu, jsou jednoduché dialogy pro načtení, uložení souboru nebo dialog pro volbu barvy. Tyto dialogy jsou vytvořeny jako standardní systémové dialogy, a díky tomu jsou shodné se stejnými dialogy v jiných programech.

Nástroje

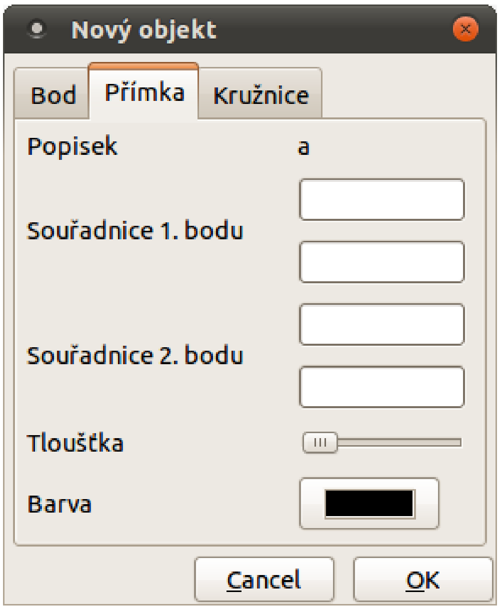
V této podkapitole jsou popsány jednotlivé nástroje, které lze použít k rýsování a nastavení rýsovací plochy.

Bod

Bod lze sestrojit kliknutím na nákresnu nebo pomocí dialogu nového okna po zadání souřadnic.

Přímka / Úsečka

Přímku, neboli úsečku, sestrojíte pomocí zadání dvou krajních bodů úsečky nebo opět v dialogu pro nový objekt, kde zadáme souřadnice krajních bodů, mezi kterými je přímka viditelná.



Obrázek 5.4: Dialog pro vytvoření nové přímky pomocí zadání souřadnic

Kolmice

Kolmice je speciální případ přímky, která je kolmá na vybranou přímku. Pro vytvoření kolmice klikněte na přímku, na kterou má být nová přímka kolmá, a bod v nárysně, kterým prochází. Úsečka je pak určena bodem v nárysně a průsečíkem kolmic.

Rovnoběžka

Rovnoběžka je speciální případ přímky, která je rovnoběžná s vybranou přímkou. Pro vytvoření rovnoběžky klikněte na přímku, na kterou má být nová přímka rovnoběžná, a bod v prostoru, kterým prochází. Úsečka je pak určena krajními body, které jsou spočítány tak, že se vektor kolmý spuštěný ze zvoleného bodu na vybranou přímku, přičte ke krajním bodům vybrané přímky.

Kružnice

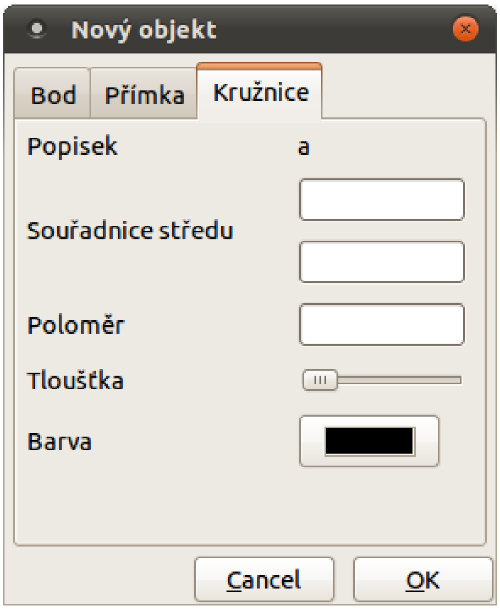
Kružnice se sestrojí pomocí dvou bodů. Nejdříve zadáme střed kružnice a poté bod na obvodu kružnice. Jiný způsob sestrojení je opět v dialogu nového objektu, kdy zadáte souřadnice středu a poloměr kružnice.

Kružítko

Nástroj pro vytvoření kružnice dané středem a poloměrem, který je zadán vzdáleností dvou bodů různých od středu kružnice. Zadejte první krajní bod poloměru, poté druhý a na závěr střed kružnice.

Elipsa

Elipsu setrojíte pomocí tří speciálních bodů, obou ohnisek a jednoho vedlejšího vrcholu. Tedy musí platit, že kolmý průmět vedlejšího vrcholu do úsečky ohnisek



Obrázek 5.5: Dialog pro vytvoření nové kružnice pomocí zadání souřadnic

splyne se středem této úsečky.

Hyperbola

Hyperbolu sestrojíte pomocí tří speciálních bodů, obou ohnisek a jednoho vedlejšího vrcholu. Tedy musí platit, že kolmý průmět vedlejšího vrcholu do úsečky ohnisek splyne se středem této úsečky. Vzdálenost musí být vedlejšího vrcholu od středu menší než polovina vzdálenosti úsečky ohnisek.

Parabola

Parabolu sestrojíte pomocí dvou bodů paraboly, a to ohniska a vrcholu.

Prodlužování úseček

Tento nástroj prodlouží, resp. zkrátí vybranou úsečku. Klikněte pro výběr úsečky v té části přímky, kde chcete prodlužovat, resp. krátit, a poté bod v nárysně, který určuje o kolik se úsečka zkrátí či prodlouží. Tedy se tímto bodem vede kolmice ke krácené úsečce a průsečík je nový krajní bod této úsečky.

Výběr

Nástroj výběr slouží k vybrání jednoho nebo více objektů. Vybírat můžeme dvěma způsoby, buď pomocí výběru v seznamu objektů v pravé liště nebo kliknutím a tažením myši, tedy vytvoření obdélníka přes objekty, které chceme vybrat.

Typy přichytávání

Další nástroj je volba přichytávání kurzoru. Jak a jestli se bude kurzor, a pak následně i vytvářené objekty, přichytávat nebo nebudou. Můžete zvolit bez přichytávání, přichytávání k mřížce, přichytávání ke krajním bodům nebo k průsečíkum.

Jaké je aktuálně vybrané přichytávání můžete zjistit buď podle zamáčknuté ikony nebo v dolní liště okna.

Ovládání rýsovací plochy

Funkce pro manipulaci s rýsovací plochou:

K přiblížení nebo oddálení rýsovací plochy použijte kolečko myši.

Pro posunutí počátku stačí kliknout a táhnout pravým tlačítkem myši.

Pokud chcete zrušit aktuální nástroj, klikněte pravým tlačítkem myši. Nástroj se nastaví na *Výběr*.

Pokud máte nástroj kreslení *Kolmice*, *Rovnobežky* nebo *Krácení* po prvním stisknutí pravého tlačítka myši se odvybere vybraná přímka, po druhém se nástroj změní na *Výběr*.

5.2 Programátorská část

Editor je psán v jazyce C++ s využitím knihovny wxWidgets, která je uspůsobena pro tvorbu okýnkových aplikací. Tato knihovna je multiplatformní, lze tedy přeložit program jak na linuxu tak i na Windows, což bylo hlavní kritérium, proč jsem si vybrala zrovna tuto knihovnu.

Primárně je program uzpůsoben pro operační systém linux, ale měl by bez problémů fungovat i v operačním systému Windows.

5.2.1 Struktura programu

Program je psán, jak bylo napsáno výše, v jazyce C++, což je objektově orientovaný jazyk. Každý objekt je reprezentován určitým druhem objektu.

Seznam nejdůležitějších tříd:

MainWin

Tato třída hlavního okna zajišťuje vytvoření a správné umístění všech ostatních prvků. Zachytávává stisknutí tlačítek na jednotlivých panelech a zajišťuje volání příšlušných funkcí.

EditPanel

Třída rýsovacího panelu, která zajišťuje ovládání rýsovací plochy, vykreslování objektů a jejich správu. Je zde soustředěna většina funkcí na ovládání celého programu. Zachytává kliknutí myši na rýsovací plochu a volá příslušné funkce. Vytváří nové geometrické objekty, které jsou zde uloženy.

GeomObj

Je to abstraktní třída, která sjednocuje všechny třídy geometrických objektů. Vytváří rozhraní, které obsahuje funkce pro vykreslení geometrických objektů, změnu jejich parametrů a zjištění hodnoty atributů. Ostatní třídy geometrických objektů dědí definici rozhraní z této třídy, tedy dědí hlavičky funkcí, ale kód těchto funkcí je pro každou třídu specifický. Každý objekt si uchovává informaci o své barvě, tloušťce, viditelnosti popisku, viditelnosti celého objektu a názvu a také samozřejmě informaci o své poloze.

Point

Třída, která reprezentuje geometrický bod, obsahuje jedinou informaci, kromě společných informací, obsahuje pouze souřadnice svého umístění. Bod se vykresluje jako kružnice o jednopixelovém poloměru se středem na souřadnicích tohoto bodu.

Line

Třída reprezentující geometrickou přímku, která je uložena pomocí souřadnic dvou bodů. Tyto body reprezentují krajní body úsečky, pomocí které se přímka vykresluje.

Circle

Circle je třída pro kružnici. Kružnice se vytváří pomocí středu a poloměru.

Elipse

Třída Elipse představuje elipsu. Je vytvářena pomocí třech bodů, ze kterých se spočítají parametry elipsy, kterými je reprezentována. Jsou to souřadnice středu elipsy, velikosti hlavní a vedlejší osy, úhel mezi hlavní osou a jednotkovým vektorem osy x, tj vektorem $(1, 0)$.

Hyperbole

Třída představující hyperbolu má podobné parametry jako třída pro elipsu. Také se vytváří pomocí tří bodů, ze kterých se spočítají parametry, které jsou shodné s parametry elipsy, pouze výpočty jsou odlišné.

Parabola

Třída reprezentující poslední kuželosečku je opět uložena pomocí souřadnic jednoho bodu, vrcholu paraboly, parametru p a úhlu mezi osou paraboly a osou x, které jsou počítány ze souřadnic ohniska a vrcholu.

Coord

Třída Coord reprezentuje souřadnice jednoho bodu, tedy jejich číselné vyjádření. Sjednocuje hodnoty souřadnic x a y. Obsahuje funkce pro převod souřadnic z tzv. obrazovkových na tzv. skutečné. Tedy převod ze souřadnic v pixelech na souřadnice vzhledem k počátku, který je uložen pomocí jeho obrazovkových souřadnic.

Name

Třída Name je malá třída, která se stará o přiřazování popisků k novým objektům. Body jsou popisovány velkými písmeny, ostatní objekty jsou společně popisovány malými. Popisky jsou generovány tak, že nejdříve se přiřazují písmena, pokud dojde na konec abecedy opět se vrátí na začátek a za název přídá konstantu, která je určena počtem projdutí celé abecedy. Při generování nového názvu se projde seznam objektů, postupuje se od začátku popisků, dokud nenajde popisek, který ještě žádný objekt nemá.

5.2.2 Popis nejdůležitějších funkcí

Jednoduchý popis vybraných funkcí z programu a jejich matematický základ.

OnMouseLeftClickUp

Funkce třídy EditPanel, která je volána při každém kliknutí levého tlačítka myši na rýsovací ploše, resp. při každém jejím uvolnění.

Nejdříve zjistí obrazovkové souřadnice kurzoru při uvolnění tlačítka myši, které jsou převedeny na skutečné souřadnice. Poté podle typu přichytávání a typu nástroje se přepočítají souřadnice, aby odpovídal nastavení. Další část funkce je rozdělena podle typu nástroje, který je aktuálně vybrán.

Pokud je vybrán nástroj pro tvorbu bodu, pak se vygeneruje popisek, vytvoří se nový objekt typu Point a uloží se do seznamu objektů.

Pokud je vybrán nástroj přímky, kružnice nebo paraboly, pak se nejprve uloží souřadnice prvního bodu, neboť tyto objekty jsou zadávány dvojicí bodů, podruhé se již vytvoří objekt, a opět se uloží do seznamu objektů. V případě kružnice se ze zadaných bodů spočítá poloměr pomocí klasické euklidovské normy.

Pro nástroj kolmice, rovnoběžka nebo krácení funkce nejdříve čeká na výběr přímky a poté zadání bodu, následně ze zadaných objektů vytvoří novou přímku.

Při nástroji elipsa nebo hyperbola čeká na vstupu tři body, které jsou ve speciální poloze dle zadaného vstupu.

Nástroj kružítko čeká na vstupu tři body, poté spočítá poloměr kružnice a vytvoří nový objekt.

Pokud je nástrojem výběr, pak zavolá jednotlivé funkce pro výběr geometrických objektů. Tyto funkce jsou popsány níže.

Render

Tato fuknce, která je volána automaticky kdykoliv dostane program zprávu, aby se překreslil rýsovací panel. Volá funkce pro vykreslení jednotlivých geometrických objektů. Pokud jsou některé objekty vybrány vykreslí je červeně. Dále vykresluje počátek, osy, jsou-li zapnuty, a kurzor, pokud není zapnuto bez přichytávání. V tomoto případě se kurzor nekreslí, jinak se vykreslí dle zadaného přichytávání. Pokud je zapnutá mřížka, zavolá funkcimu k její vykreslení.

Intersection

Tato funkce počítá průsečík dvou přímek. Bere čtyři krajní body a vrací průsečík. Pokud tento průsečík neexistuje vrací nekonečné souřadnice. Ve výpočtu je zohledněno, že přímky reprezentují úsečky.

IntersectionCircle

Tato funkce si bere souřadnice tří bodů, jedné přímky a středu kružnice a číslo, tj. poloměr kružnice. Spočte pro danou kružnici a přímku jejich průsečík. Přímka je dána svoji paramatrizací, kružnice středovou rovnicí. Algoritmus počítá koeficienty u parametru t z parametrizace přímky, která je dosazena do obecné rovnice kružnice. Tato rovnice je kvadratická, má tedy dvě, jedno nebo žádné řešení, proto funkce vrací vektor bodů, průsečíků.

IntersectionElipse

Podobná funkce jako *IntersectionCircle*, jen elipsa je zadána středem, velikostmi hlavní a vedlejší poloosy, tj. a a b, a úhlem α, který svírá osa x s hlavní osou elipsy. Pomocí těchto parametrů je spočítána středová rovnice, do které se dosazuje parametrické vyjádření přímky a stejným algoritmem se spočítají průsečíky.

IntersectionHyperbole

Analogie funkce *IntersectionCircle* nebo *IntersectionElipse*. I funkce *Intersection-Parabola*, je velice podobná, neboť ve všech se jedná o průsečík křivky druhého stupně s přímkou.

IntersectionCircles

Tato funkce počítá průsečík dvou kružnic. Na vstupu dostává dva středy a dva poloměry. Sestaví si středové rovnice obou kružnic, a obě posune do počátku první z těchto kružnic. Pak si vyjádří z první x^2, který dosadí do druhé rovnice. Dostává kvadratickou rovnici pro y. Z této rovnice můžeme poté spočítat průsečíky zadaných kružnic.

SelectPoint

Na vstupu dostane souřadnice bodu. Funkce projde seznam objektů a pokud je objektem bod, porovná jeho souřadnice se zadaným bodem. Výstupem je první nalezený bod, pokud nějaký existuje.

SelectPoints

Analogická funkce funkci SelectPoint pouze s tím rozdílem, že na vstupu dostává souřadnice dvou bodů, ze kterých si vytváří obdélník. Vzhledem k tomuto obdélníku pak porovnává body ze seznamu objektů. Výstupem této funkce je seznam bodů, které náleží do daného obdélníka.

Pro každý typ geometrických objektů existují oba typy těchto fukncí, dále popíšeme pouze jednu z nich.

SelectLines

Jedná se o funkci pro výběr obdélníkem pro přímky, úsečky. Prochází celý seznam objektů a pro každou přímku, úsečku zjišťuje zda leží celá v obdélníku, nebo zda protíná alespoň jednu jeho stranu. Pokud nastane alespoň jedna z těchto možností, přímka se vybere. Výstupem této funkce je seznam vybraných objektů. Analogicky fungují i funkce pro ostatní objekty. Pro konečné křivky zkusí, jestli celá leží v obdélníku. U nekonečných, tj. hyperboly, a paraboly to nemá smysl a volá tedy pouze jednotlivé funkce pro nalezení průsečíku přímky a daného objektu.

Funkce pro výpočet souřadnic při přichytávání

Pokud je zapnuto jedno z přichytávání, pak se souřadnice, které získáme z umístění myši na obrazovce, přepočítávají dle typu tohoto přichytávání. V případě koncových bodů a průsečíků vždy nalezne nejbližší bod ze seznamu koncových bodů nebo průsečíků.

Program si vždy při vytvoření nového objektu spočítá průsečíky tohoto objektu s ostatními a vytváří si seznam průsečíků a koncových bodů, ke kterým si pamatuje i ukazatele na objekty, na kterých leží. Tyto informace ulehčují aktualizaci těchto seznamů při změně seznamu objektů.

Save, Open

Funkce pro práci se souborem, tedy ukládání a načítání aktuální rýsovací plochy. Při ukládání si program pamatuje poslední název souboru, do kterého ukládal. Pokud žádný název uložen není, nebo uživatel chce uložit jinam, pak se zobrazí systémové okno pro výběr umístění. Stejně jako v případě otevření uloženého souboru. Názvy souborů jsou formátu *.obr.

Formát ukládání je velice jednoduchý, program si ukládá všechna důležitá data od každého objektu. Tedy souřadnice, název, barvu, tloušťku, viditelnost popisku, viditelnost, možnost mazání objektu.

Vykreslení kuželoseček

Kuželosečky jsou vykreslovány bod po bodu pomocí parametrické rovnice jednotlivých kuželoseček. Pro elipsu to jsou rovnice:

$$x = a * \cos(t)$$
$$y = b * \sin(t)$$

Toto jsou ale parametrické rovnice pro elipsu se středem v počátku a hlavní osou totožnou s osou x. Proto jsou tyto rovnice pronásobeny maticí rotace a je přičtena matice posunutí. Tj.:

$$\mathrm{X} = \mathrm{R}(\alpha) * \mathcal{K} + \mathrm{P}$$

kde $\mathrm{R}(\alpha)$ je matice rotace o úhel α, $\mathcal{K}$ je parametrizace příslušné kuželosečky a P je matice posunutí, která v tomto případě reprezentována souřadnicemi středu kuželosečky. Dále v textu je značeno trans.

Tedy pro elipsu dostáváme rovnici:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a * \cos(t) \\ b * \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{trans.x} \\ \text{trans.y} \end{pmatrix}$$

Po roznásobení dostáváme rovnice:

$$x = a * \cos(t) * \cos(\alpha) - b * \sin(t) * \sin(\alpha) + \text{trans.x}$$
$$y = a * \cos(t) * \sin(\alpha) + b * \sin(t) * \cos(\alpha) + \text{trans.y}$$

kde úhel α je úhel, který elipsa svírá s kladnou částí osy x a t je parametr, $t \in [0, 2\pi)$.

Parametrizace hyperboly je :

$$x = a * \cosh(t)$$
$$y = b * \sinh(t)$$

kde $t \in \mathbb{R}$ je parametr volby bodu na hyperbole, a je velikost hlavní poloosy a b velikost vedlejší poloosy. Souřadnice bodu hyperboly se vypočítají analogicky jako pro elipsu.

Po pronásobení dostáváme rovnice:

$$x = a * \cosh(t) * \cos(\alpha) - b * \sinh(t) * \sin(\alpha) + \text{trans.x}$$
$$y = a * \cosh(t) * \sin(\alpha) + b * \sinh(t) * \cos(\alpha) + \text{trans.y}$$

Parabola je opět analogická. Její parametrizace je:

$$x = \frac{p}{2} * t^2$$
$$y = p * t$$

kde $t \in \mathbb{R}$ je opět parametr volby bodu na parabole a p je parametr paraboly.

$$x = \frac{p}{2} * t^2 * \cos(\alpha) - p * t * \sin(\alpha) + \text{trans.x}$$
$$y = \frac{p}{2} * t^2 * \sin(\alpha) + p * t * \cos(\alpha) + \text{trans.y}$$

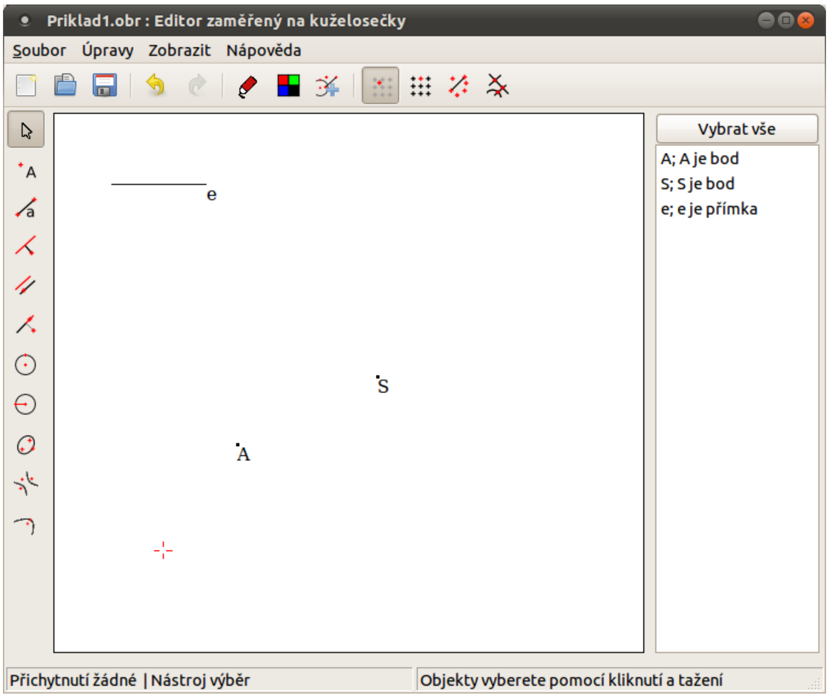
Dostáme pro každou jednotlivou kuželosečku souřadnice, které se vloží do funkce pro vykreslení jednoho pixelu.

6. Příklady z programu

V této kapitole si ukážeme vzorové řešení některých příkladů v navrženém editoru. Jsou to vybrané příklady ze sady úloh, které můžete řešit v tomto editoru. Ke každému příkladu je přiloženo řešení.

První příklad má ukázat práci s programem, druhý je naopak zaměřen na předvedení klasického příkladu na kuželosečky.

6.1 1. příklad



Obrázek 6.1: Zadání prvního příkladu

Tento příklad má za úkol seznámit uživatele s ovládáním editoru, proto je zde popsán každý krok postupu včetně změny nastavení v programu.

Zadání:

Sestrojte elipsu, je-li dán hlavní vrchol A, střed S a excentricita e, viz obrázek 6.1.

Řešení:

1. Načtení zadání:

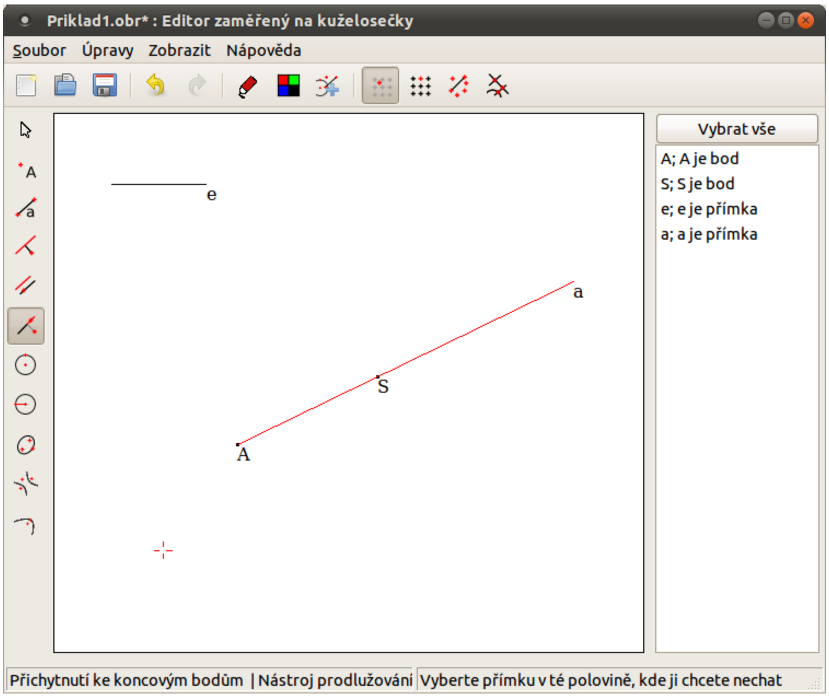
   Klikneme buď na ikonku *Otevřít* nebo v menu *Soubor* na *Otevřít* a z nabídky vybereme soubor *Priklady/Priklad1.obr*. Na rýsovací ploše se nám objeví zadání jako na obrázku 6.1.

2. Nalezení vrcholu B:

   Tento bod nalezneme tak, že od středu elipsy vyneseme stejnou vzdálenost, jako je od bodu S k bodu A, nebo-li velikost a.

   (a) Sestrojení úsečky AS:
   Zapneme přichytávání *ke koncovým bodům* a vybereme nástroj *Přímka*. Pokud se nyní kurzorem přiblížíme k bodům A nebo S bude na ně kurzor ukazovat. Klikneme na bod A a poté na bod S.

   (b) Prodloužení úsečky AS:



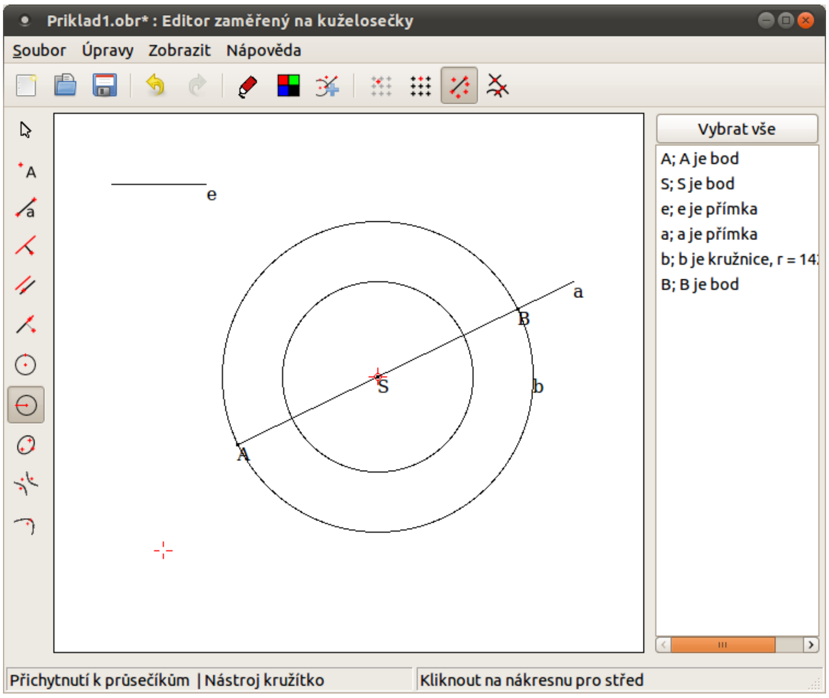
Obrázek 6.2: Prodloužení úsečky AS

   Nyní úsečku prodloužíme o libovolnou vzdálenost za bod S, tj. aby obsahovala celou úsečku AS. Zvolte nástroj *Krácení*. V toto okamžiku nám zmizí kurzor a program čeká dokud nevyberete úsečku, kterou chcete zkrátit nebo prodloužit. Klikněte proto na úsečku AS v okolí bodu S. Tímto program ví, který krajní bod úsečky si přejete změnit. Opět se vám objevil kurzor, který stále ukazuje na body, proto musíme změnit typ přichytávání na *bez přichytávání*. Nyní klikněte do prostoru za bod S. Úsečka by se prodlouží, viz obrázek 6.2

   (c) Sestrojení kružnice o poloměru vzdálenosti $|AS|$:
   Nyní sestrojíme kružnici se středem v bodě S procházející bodem A. Opět budeme chtít, aby tento objekt procházel danými body, proto zapneme přichytávání *ke krajním bodům*. Nástroj nastavíme na *Kružnice*. Klikneme na bod S a poté na bod A. Vykreslí se nám kružnice b se středem v bodě S. Měla by protínat prodlouženou úsečku AS ve dvou bodech pokud ne, úsečku prodloužíme, viz výše.

Nyní máme vše připraveno, abychom vykreslili bod B. Tento bod leží na průsečíku prodloužené úsečky AS a kružnice b. Zapneme tedy přichytávání *k průsečíkům* a klikneme na tento průsečík.

3. Nalezení ohnisek elipsy:



Obrázek 6.3: Nalezení ohnisek elipsy

Ohniska leží na hlavní ose ve vzdálenosti e od středu elipsy. Vzdálenost e máme danou ze zadání, stačí ji tedy pouze vynést, resp. sestrojit kružnici se středem S a poloměrem e. K tomu slouží nástroj *Kružítko*, kterému nejdříve zadáme pomocí dvou bodů vzdálenost a poté střed. Tedy zapneme přichytávání *ke krajním bodům*, abychom vybrali krajní body úsečky e. Klikneme na bod S. viz obrázek 6.3. Nyní stačí přepnout nástroj *Bod*, přichytávání *k průsečíkům* a kliknout na průsečíky úsečky AS a právě nakreslené kružnice c. Vzniknou nám body s názvy C, D.

4. Nalezení vedlejších vrcholů:

Vedlejší vrcholy elipsy, leží na vedlejší ose, která je kolmá na hlavní osu. Vzdálenost bodů od středu je velikost b, tu však neznáme, ale z bodové konstrukce elipsy víme, že tyto body také leží ve vzdálenosti a od ohnisek.

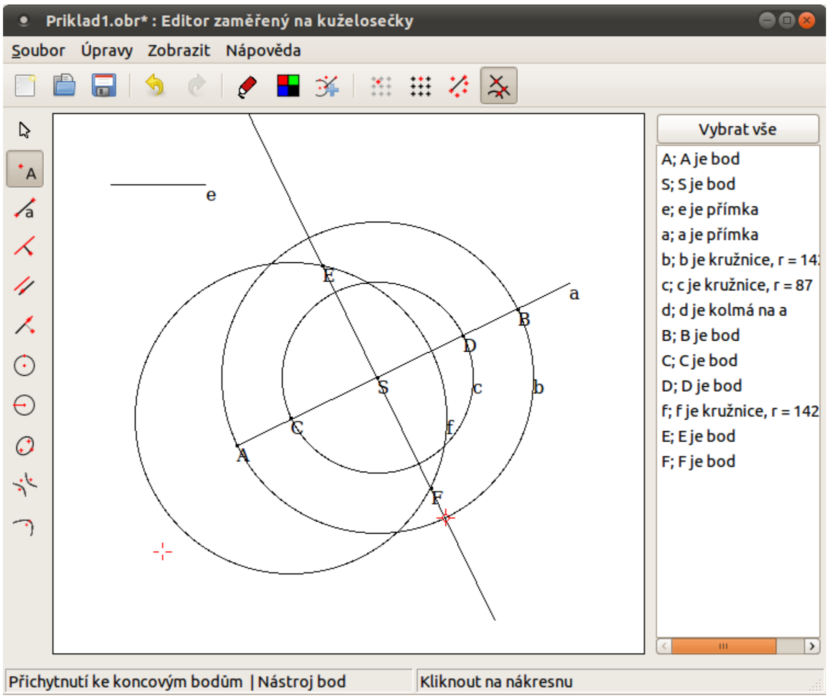
(a) Sestrojení vedlejší poloosy:

Tato přímka prochází bodem S a je kolmá na úsečku AS, proto nastavíme nástroj na *Kolmice*. Opět nám zmizel kurzor, protože program čeká na výběr přímky (úsečky), na kterou bude nová přímka kolmá. Chceme vést kolmici bodem S, proto přichytávání přepneme na *ke krajním bodům* a klikneme na tento bod. Nyní se nám vykreslila kolmice d, která je ale pouze v jedné polorovině dané úsečkou AS, proto tuto přímku prodloužíme dle stejného postupu popsaného výše.

(b) Vynesení vzdálenosti a:

Tuto situaci jsme již řešili, tedy přichytávání máme nastavené dobře tedy stačí použít nástroj *Kružítko* kliknout na bod A, bod S (vzdálenost a) a střed této kružnice f je ohnisko, tedy buď bod C nebo D.

Nyní vytvoříme hledané body, tj. nastavíme přichytávání *k průsečíkům* a pomocí nástroje *Bod* vytvoříme body E F, jako průsečíky přímky d a kružnice f. Získali jsme vedlejší vrcholy. Měli bychom být v situaci, jako je na obrázku 6.4



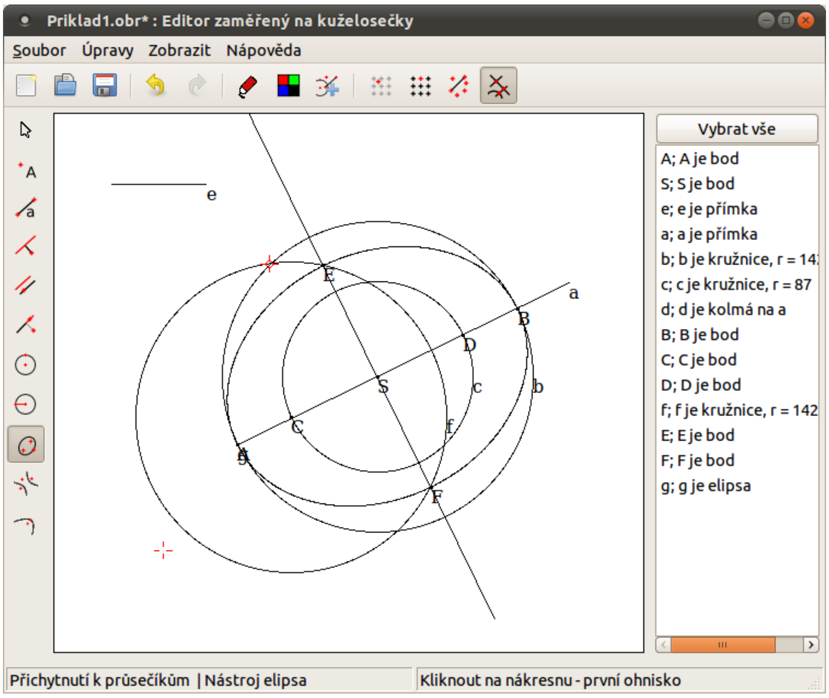
Obrázek 6.4: Nalezení vedlejších vrcholů a ohnisek elipsy

5. Sestrojení elipsy:

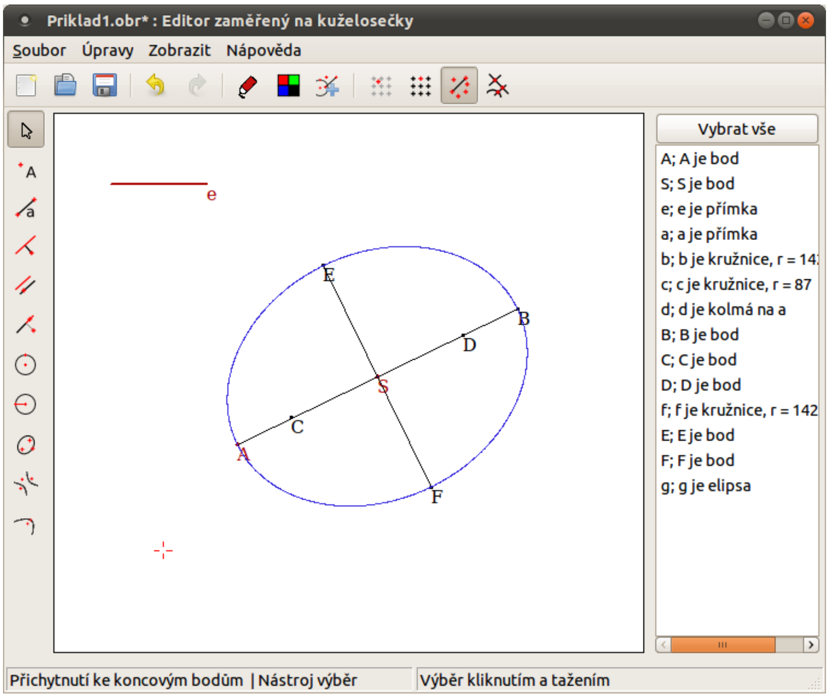
   Nyní máme všechny nutné objekty sestrojeny. Jediné co nám zbývá je vykreslit elipsu. Proto zvolíme nástroj *Elipsa* a přichytávání *k průsečíkům*. Vybereme nejdříve ohniska, body C a D a jeden vedlejší vrchol, bod E, případně bod F. Poté se vyrýsuje elipsa a dostáváme výsledek, viz obrázek 6.5.

Řešení tohoto příkladu bez pomocných konstrukcí si můžete prohlédnout na obrázku 6.6. Příklad máme vyřešený, ale ukážeme si ještě další funkce programu, které zpřehlední rýsování.

Nejdříve změníme barvu elipsy. Nastavíme nástroj na *Výběr*, tento nástroj slouží k výběru jednoho nebo více objektů. Objekty se vybírají podržením levého tlačítka myši a následným tažením. Na rýsovací ploše se nám vykreslí obdélník, a vše co leží uvnitř nebo protíná obdélník, se vybere. Stejně tak můžeme využít seznam objektů v pravé části okna. Vybereme elipsu tak, že klikneme na její popisek v seznamu objektů. Nyní chceme změnit její barvu, proto klikneme na ikonku *Úprava vybraných objektů*. Zobrazí se nám dialog, viz obrázek 5.2, kde můžeme upravovat vlastnosti objektu. Změníme barvu a potvrdíme *OK*.



Obrázek 6.5: Vyřešený 1. příklad

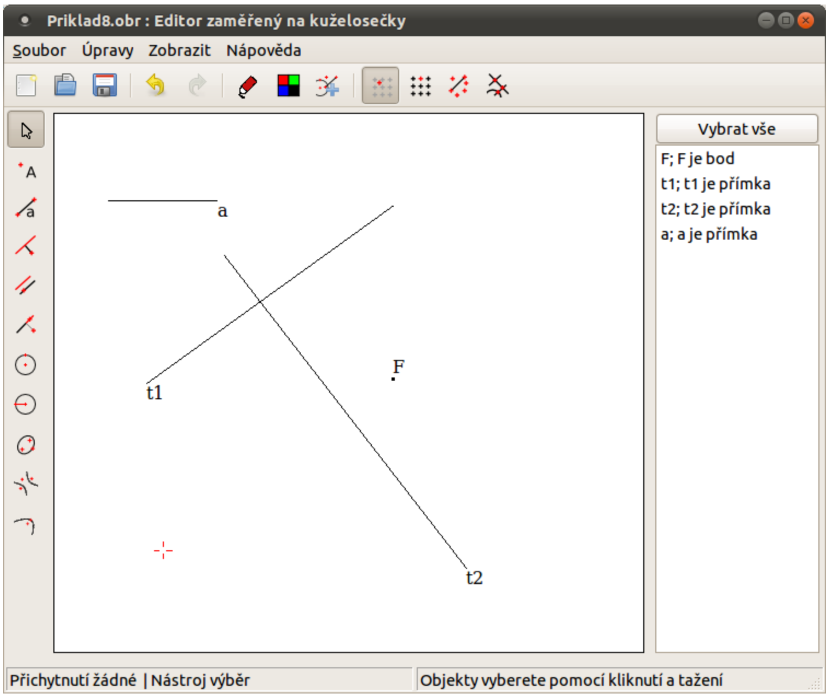


Obrázek 6.6: Zobrazení výsledné elipsy z 1. příkladu a jejích základních prvků, zvýrazněné zadání a výsledek

Ukázali jsme si základní práci s programem a narýsovali si v něm první příklad. V druhém příkladu se více zaměříme na kuželosečky a ukážeme, že v tomto programu lze vyrýsovat i složitější příklady.

6.2 2. příklad

V tomto příkladu si ukážeme konstrukci kuželosečky zadané dvěmi tečnami, jedním ohniskem a velikostí hlavní osy a.



Obrázek 6.7: Zadání druhého příkladu

Zadání:

Sestrojte kuželosečku, je-li dáno jedno ohnisko F a dvě tečny t_1, t_2 a velikost hlavní osy a, viz obrázek 6.7.

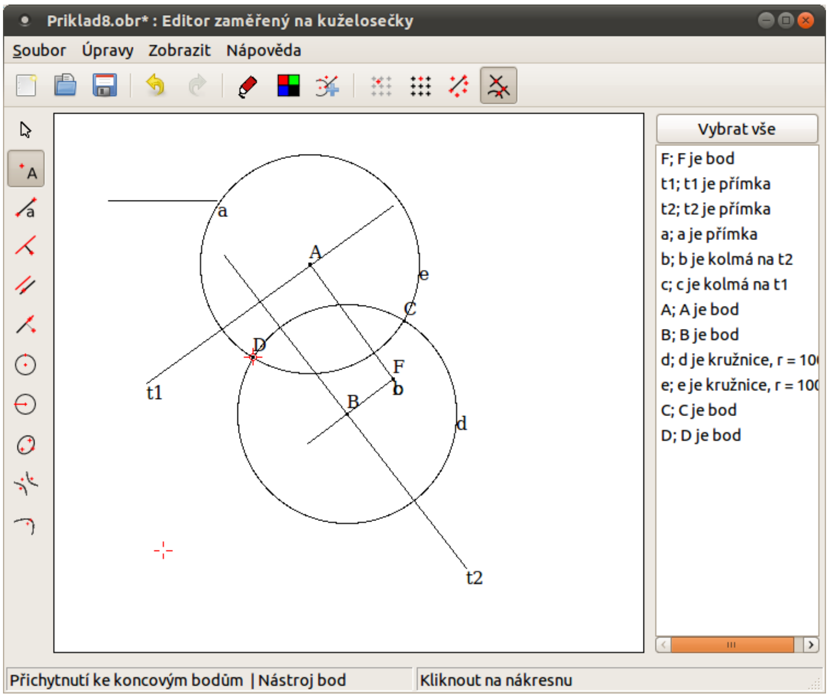
Řešení:

1. Načtení zadání:

   Tento příklad je opět ve složce *Priklady/Priklad8.obr*. Po otevření se objeví zadání jako na obrázku 6.7.

2. Nalezení středu kuželosečky:

   Zde máme volbu zda budeme využívat řídící kružnice d nebo vrcholové kružnice v. Pokud bychom sestrojovali řídící kružnici $v(S, 2a)$, pak sestrojíme body Q_1, Q_2, tj. body souměrně sdružené s ohniskem F podle jednotlivých tečen. My ale zde zvolíme druhý postup.



Obrázek 6.8: Nalezení středů hledaných kuželoseček

(a) Sestrojení pat kolmic spuštěných z bodu F na tečny:

Vedeme kolmice bodem F na obě tečny. Nalezneme průsečíky těchto kolmic s jednotlivými tečnami, tj. vzniknout nám dva body A, B, viz obrázek 6.8. Získali jsme hledané body, které leží na vrcholové kružnici.

(b) Sestrojení vrcholové kružnice v:

Hledáme kružnici, pro kterou platí, že její střed je střed kuželosečky, elipsy nebo hyperboly, a její poloměr je roven velikosti hlavní osy a. Na této kružnici leží průsečíky tečen a kolmic z bodu F na tečny, proto zde leží i právě nalezené body A, B.

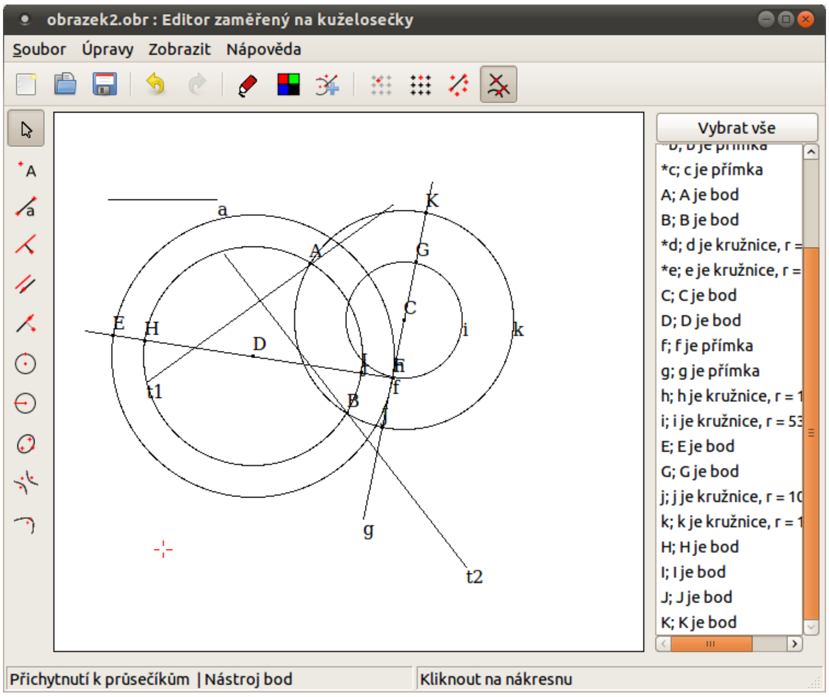
Nyní máme tedy úlohu nalézt kružnici, která prochází body A, B a má daný poloměr a. Sestrojíme kružnici $d(B, a)$ a kružnici $e(A, a)$. Na průsečíku kružnic d, e nalezneme hledané středy vrcholových kružnic. Tyto body jsou dva, jak je vidět i na obrázku 6.8. Nalezli jsme středy vrcholových kružnic a máme tedy i střed dvou kuželoseček.

3. Sestojení druhého ohniska:

Sestrojení druhého ohniska je jednoduché, stačí pouze prodloužit hlavní osu a sestrojit kružnici se středem ve středu kuželosečky o poloměru $|CF|$, resp. $|DF|$, tj. excentricita. Průsečík této kružnice a hlavní osy je druhé ohnisko.

4. Sestrojení hlavních vrcholů:

Sestrojení hlavních vrcholů, je také poměrně jednoduché, neboť leží na již nalezené vrcholové kružnici. Sestrojíme tedy kružnice $j(D, a)$ a $k(C, a)$, viz obrázek 6.9. Na průsečíku kružnice j a f, hlavní osy první kuželosečky dostáváme body H, I. Analogicky pro druhou kuželosečku dostáváme body K, J, které vznikají jako průsečíky kružnice k a hlavní osy g.



Obrázek 6.9: Nalezení druhého ohniska a hlavníchvrcholů

5. Sestrojení vedlejších vrcholů:

   Nalezli jsme hlavní vrcholy a můžeme tedy diskutovat jaké jsme získali kuželosečky, neboť pro sestrojení vedlejších vrcholů potřebujeme znát typ kuželosečky.

   (a) První kuželosečka:

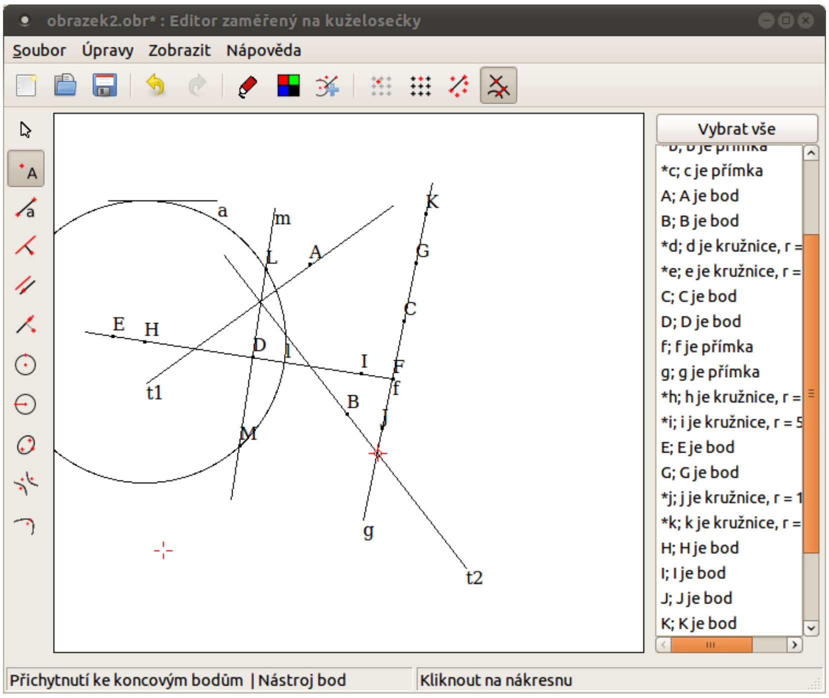
   Pokud se podíváme na první kuželosečku, na obrázku 6.9 tu více vlevo, všimneme si, že hlavní vrcholy, tj. body H, I leží blíže středu než ohniska, tj. body E, F. Platí $a < e$. První kuželosečka je tedy hyperbola.

   Vedlejší vrcholy, tedy sestrojíme pomocí kružnice $l(H, |ED|)$, tj. kružnice se středem v jednom z vrcholů a poloměrem velikosti excentricity. Nyní sestrojíme vedlejší osu hyperboly, která je kolmá na hlavní osu a prochází středem kuželosečky. Sestrojíme přímku m. Vedlejší vrcholy nyní nalezneme jako průsečíky kružnice l a přímky m, dostáváme body M, L, viz 6.10.

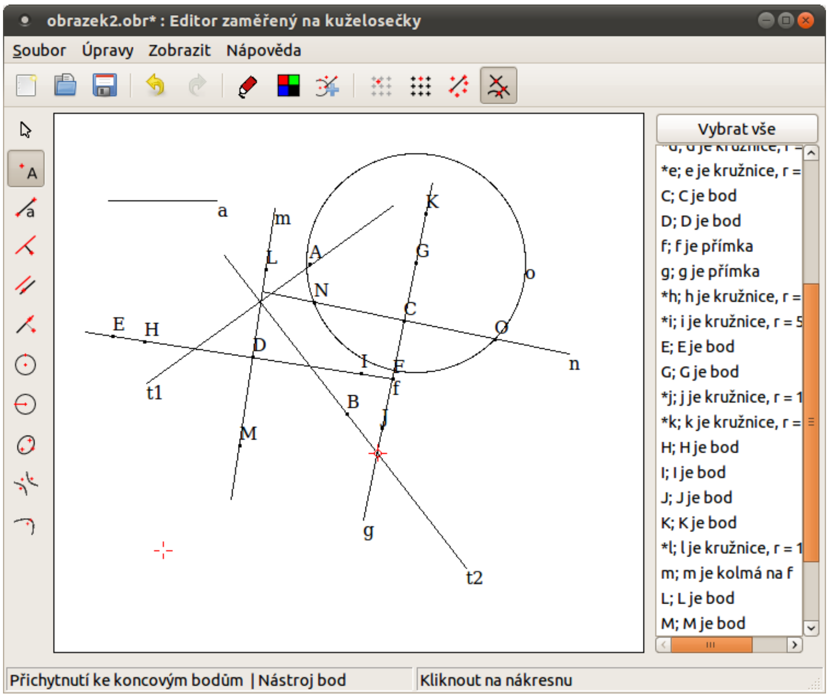
   (b) Druhá kuželosečka:

   Nyní se podíváme na druhou kuželosečku, která je na obrázku 6.9 více v pravo. Zde jsou hlavní vrcholy J, K a ohniska F, G v opačném pořadí, než u hyperboly. Platí, že $|FC| < |JC|$, tj $e < a$. Dostáváme v tomto případě elipsu.

   Pro sestrojení vedlejších vrcholů použijeme přímku n a kružnici $o(G, a)$. Vedlejší vrcholy, pak leží na průsečíku přímky n a kružnice o, viz obrázek 6.11. Dostáváme body N, O.



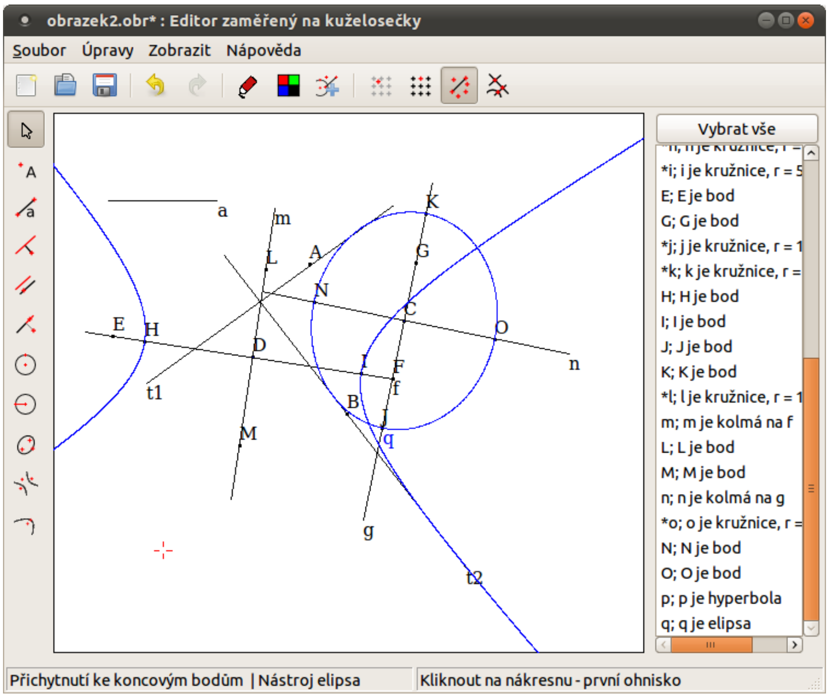
Obrázek 6.10: Nalezení hlavních prvků hyperboly



Obrázek 6.11: Nalezení hlavních prvků elipsy

6. Vyrýsování kuželoseček:

   Můžeme tedy vykreslit samotné kuželosečky, elipsu a hyperbolu, viz obrázek 6.12.



Obrázek 6.12: Vyrýsované řešení, hyperbola a elipsa

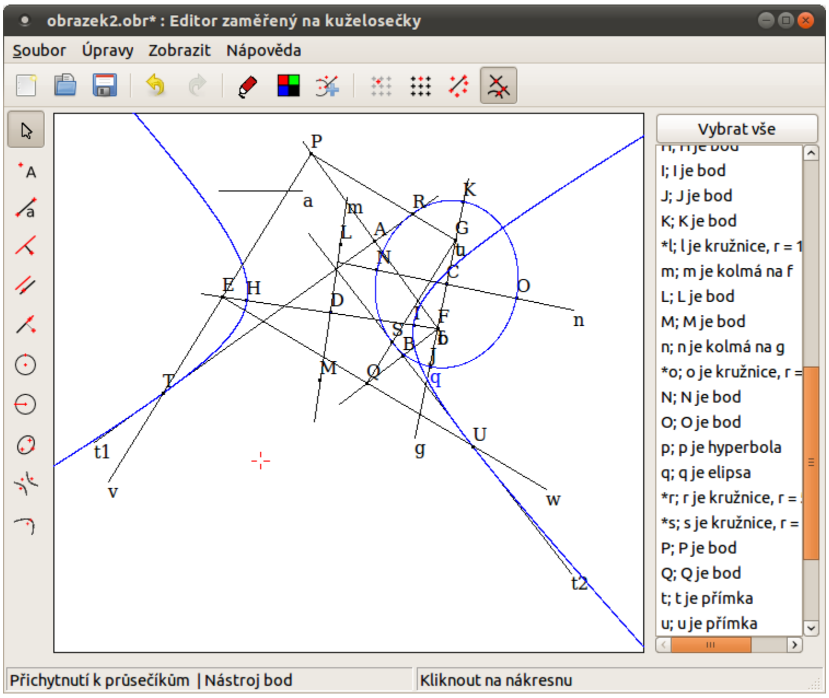
7. Sestrojení bodů dotyku tečny a jednotlivých kuželoseček:

   Nyní zbývá pouze sestrojení bodů dotyku, které se sestrojují u elipsy a hyperboly shodně. Nalezneme je na průsečíku příslušné tečny a přímky spojující druhé ohnisko s bodem Q z definice řídící kružnice.

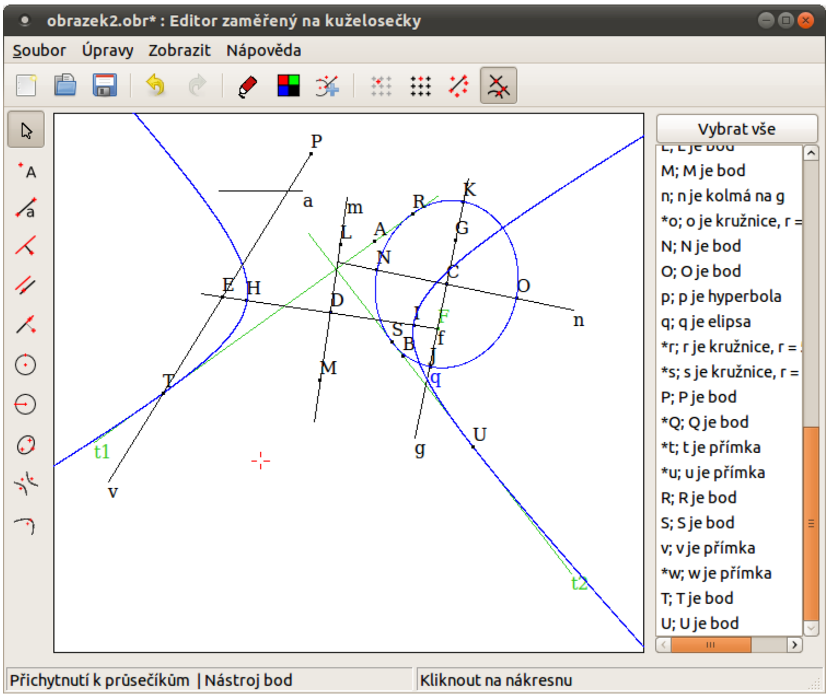
   (a) Sestrojení bodů souměrných podle ohniska F:
   Využijeme přímek b, c, pomocí kterých jsme sestrojovali paty kolmic. Tyto přímky prodloužíme do druhé poloroviny dané tečnami. Sestrojíme bod P tak, aby platilo $|PA| = |FA|$ a analogicky bod Q, že platí $|QB| = |BF|$. Body P, Q jsou hledané body souměrně sdružené podle tečen s ohniskem F.

   (b) Nalezení bodů dotyku elipsy:
   Sestrojíme přímku u danou body P, G a přímku v danou body Q, G. Průsečík přímky u a tečny $t1$ je bod R, bod dotyku tečny $t1$ s elipsou. Bod dotyku S tečny $t2$ získáme jako průsečík této tečny a přímky v. Jako je na obrázku 6.13.

   (c) Nalezení bodů dotyku hyperboly:
   Jak již bylo řečeno, body dotyku hyperboly se hledají stejně jako u elipsy. Proto sestrojíme přímky V, W procházející bodem E a po řadě body P, Q. Na průsečíku přímky v a tečny $t1$ leží bod T, bod dotyku tečny $t1$. Dotykový bod U tečny $t2$ s hyperbolou nalezneme jako průsečík přímky w a této tečny, viz obrázek 6.13. Nyní bychom měli mít na rýsovací ploše to co je na obrázku 6.14.



Obrázek 6.13: Nalezení bodů dotyku tečen $t1$ a $t2$ s elipsou a hyperbolou



Obrázek 6.14: Řešení druhého příkladu

Závěr

V bakalářské práci jsme uvedli tři různé definice kuželoseček a také čtyři konstrukce jednotlivých kuželoseček, které jsou doplněny o názorné obrázky a animace v programu Geogebra. Tyto obrázky a animace podporují názornost uváděné látky.

Hlavní součástí práce je mnou navržený program pro rýsování na počítači, který je zaměřen na konstrukci kuželoseček. K tomuto programu je přiložena sada řešených příkladů, které jsou určeny pro řešení (rýsování) v tomto programu.

Práce je určena pro výuku deskriptivní geometrie a matematiky na středních školách a má za cíl ukázat studentům, jak lze využít počítače při studiu této látky.

Seznam použité literatury

[1] Drábek, Karel, Harant, František, Setzer, Ota. *Deskriptivní geometrie I*. Praha: SNTL–Nakladatelství technické literatury a Alfa, Vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1978. str. 25–31.

[2] Urban, Alois. *Deskriptivní geometrie I*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1965. str. 263–289.

[3] Šmejkal, J. *Technické křivky geometrické v praxi*. Praha: Česká grafická Unie a.s., 1946. str. 114–140.

[4] Kadlecova, Alena. *Geometrická terminologie ve starších českých učebnicích*. Diplomová práce, Praha, MFF UK. str. 44–45.

Seznam animací

Seznam jednotlivých animací vytvořených v programu Geogebra.

I Bodová konstrukce elipsy:
`Animace/ElipsaVlastnosti.html`

II Bodová konstrukce hyperboly:
`Animace/HyperbolaVlastnosti.html`

III Bodová konstrukce paraboly:
`Animace/ParabolaVlastnosti.html`

IV Podílová definice pro všechny tři typy kuželoseček:
`Animace/KuzeloseckyPodilVzdalenosti.html`

V Definice elipsy jako množiny středů kružnic:
`Animace/ElipsaPomociStreduKruznic.html`

VI Definice hyperboly jako množiny středů kružnic:
`Animace/HyperbolaStredyKruznic.html`

VII Definice paraboly jako množiny středů kružnic:
`Animace/ParabolaStredyKruznic.html`

VIII Konstrukce hyperoskulačních kružnic pro elipsu:
`Animace/ElipsaHyperoskulacniKruznice.html`

IX Konstrukce hyperoskulačních kružnic pro hyperbolu:
`Animace/HyperbolaHyperoskulacniKruznice.html`

X Konstrukce hyperoskulační kružnice pro parabolu:
`Animace/ParabolaHyperoskulacniKruznice.html`

XI Trojúhelníková konstrukce elipsy:
`Animace/ElipsaTrojuhelniky.html`

XII Trojúhelníková konstrukce paraboly:
`Animace/ParabolaTrojuhelniky.html`

XIII Proužková konstrukce elipsy, součtová, ovládaná uživatelem:
`Animace/ElipsaProuzkovaKonstrukce.html`

XIV Proužková konstrukce elipsy, součtová, animovaná:
`Animace/ElipsaProuzkovaKonstrukce2.html`

XV Proužková konstrukce elipsy, součtová i rozdílová:
`Animace/ElipsaProuzkovaKonstrukce3.html`

XVI Konstrukce tečny z bodu elipsy:
`Animace/ElipsaTecna.html`

XVII Konstrukce tečny z bodu hyperboly:
`Animace/HyperbolaTecna.html`

XVIII Konstrukce tečny z bodu paraboly:
`Animace/ParabolaTecna.html`