



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Jiří Frantál

Podivné funkce v matematické analýze

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D.

Studijní program: Učitelství matematiky pro střední
školy

Studijní obor: MIUPN

Praha 2022

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Největší poděkování patří samozřejmě mému vedoucímu, RNDr. Martinu Rmoutilovi, Ph.D., a to nejen za výborné a obětavé vedení po celou dobu práce a odborné rady, které mi rozšířily obzory i mimo vlastní téma práce, ale i za pečlivou korekturu mého textu a překlady francouzských textů, z nichž bych jinak mohl čerpat jen těžko.

Vzhledem k tomu, že velkou část práce tvoří obrázky grafů funkcí, nemohu zapomenout poděkovat doc. RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D., který mě naučil pracovat se softwarem *Wolfram Mathematica*.

Mimo akademické prostředí bych chtěl poděkovat své rodině za to, že mě po celou dobu práce vytrvale podporovala jak po materiální, tak po duševní stránce — a možná i celkově za to, že to se mnou vydrželi.

Název práce: Podivné funkce v matematické analýze

Autor: Bc. Jiří Frantál

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato práce obsahuje kolekci podivných funkcí, které svými vlastnostmi nějakým způsobem narušují školní intuici žáků. V první části práce je provedena analýza dostupných výukových materiálů (učebnic, souhrnných sbírek a výukových videí), jejíž výsledky jsou pak vodítkem pro výběr konkrétních funkcí v části druhé. Funkce jsou rozděleny do tří částí podle toho, jestli jsou jejich vlastnosti v rozporu s intuicí o spojitosti, derivaci nebo integrálu. Významnou částí práce jsou rovněž grafy jednotlivých funkcí vykreslované programem *Wolfram Mathematica*.

Klíčová slova: reálná funkce reálné proměnné spojitost derivace monotonie

Title: Strange functions in mathematical analysis

Author: Bc. Jiří Frantál

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: This work contains a collection of strange functions that, with their properties, break the school intuition of students in some way. In the first part of this work, an analysis of the available teaching materials (textbooks, summary collections and educational videos) is carried out. The results of this analysis are subsequently a guide for the selection of specific functions in the second part. Functions are divided into three groups according to whether their properties contradict the intuition of continuity, derivative or integral. Important part of the work are graphs of the functions drawn by the *Wolfram Mathematica*.

Keywords: real function of one real variable continuity differentiation monotonicity

Obsah

Seznam použitých zkratk	3
Úvod	4
1 Analýza výukových materiálů	9
1.1 Funkce	10
1.1.1 Motivace zavedení funkce	10
1.1.2 Definice funkce	11
1.1.3 Zadání funkce	12
1.1.4 Graf funkce	14
1.2 Spojitost	17
1.2.1 Definice spojitosti	17
1.2.2 Příklady spojitých a nespojitých funkcí	19
1.3 Derivace	21
1.3.1 Motivace derivace	21
1.3.2 Definice derivace	21
1.3.3 Základní věty o derivacích	23
1.4 Integrál	29
1.4.1 Neurčitý integrál	29
1.4.2 Určitý integrál	30
2 Teoretická příprava	33
2.1 Shrnutí důležitých výsledků z matematické analýzy	33
2.1.1 Spojitost	33
2.1.2 Posloupnosti a řady funkcí	34
2.2 Metrické prostory	36
2.2.1 Cantorova množina	40
2.2.2 Baireova kategorie	41
2.3 Lebesgueova míra	44
2.3.1 Pojem <i>skoro všude</i>	45
2.4 Řetězové zlomky	46
2.5 Enumerace racionálních čísel	49
2.5.1 Fareyovy posloupnosti	49
2.6 Poznámka o „malých“ množinách	51
3 Podivnosti se spojitostí	52
3.1 Funkce spojité na konkrétní množině	52
3.1.1 Dirichletova funkce (1829)	52
3.1.2 Funkce spojitá právě v racionálních bodech	57
3.2 Funkce spojité, ale ne absolutně spojité	59
3.2.1 Cantorova funkce (1883)	59
4 Podivnosti s derivací	68
4.1 Spojité funkce s nespojitou derivací	68
4.2 Funkce spojité nemající derivaci	73
4.2.1 Bolzanova funkce (1834)	80

4.2.2	Weierstrassova funkce (1872)	96
4.2.3	Petrova funkce (1920)	105
4.2.4	Cellérierova funkce (před 1889)	112
4.2.5	Peanovy funkce (1890)	114
4.2.6	Takagiho funkce (1901)	117
4.2.7	Kochova funkce (1906)	120
4.2.8	Jarníkova funkce (1953)	123
4.3	Rostoucí funkce s nulovou derivací na velké množině	125
4.3.1	Minkowského funkce (1904)	125
4.3.2	Pompeiiova funkce (1906)	137
4.4	Nikde monotónní funkce mající všude derivaci	143
5	Podivnosti s integrálem	148
5.1	Riemannovsky integrovatelné funkce nespojité na husté množině	148
5.1.1	Thomaeova funkce (1875)	150
5.1.2	Monotónní funkce nespojitě na husté množině	156
5.2	Funkce s riemannovsky neintegrovatelnou derivací	162
5.2.1	Volterrova funkce (1881)	162
	Závěr	168
	Seznam použité literatury	169
	Seznam obrázků	178
	Seznam tabulek	180

Seznam použitých zkratek

$\mathbb{N}$	přirozená čísla (tj. $1, 2, 3, \dots$)
$\mathbb{N}_0$	přirozená čísla s nulou (tj. $0, 1, 2, 3, \dots$)
$\mathbb{Z}$	celá čísla
$\mathbb{Q}$	racionální čísla
$\mathbb{I}$	iracionální čísla
$\mathbb{R}$	reálná čísla
$\langle a, b \rangle$	uzavřený interval
(a, b)	otevřený interval
$\langle a, b \rangle$	zleva uzavřený, zprava otevřený interval
(a, b)	zleva otevřený, zprava uzavřený interval
$A \subseteq B, B \supseteq A$	A je podmnožinou B
$A \subsetneq B, B \supsetneq A$	A je vlastní podmnožinou B (tj. $A \neq B$)
$[x_1, \dots, x_n]$	upořádaná n -tice / konečná posloupnost
$[x_1, x_2, \dots]$	nekonečná posloupnost
$[x_0; x_1, \dots, x_n]$	konečný řetězový zlomek
$[x_0; x_1, x_2, \dots]$	nekonečný řetězový zlomek

Úvod

Během základní, střední a vysoké školy se člověk při studiu matematiky setkává s nepřeberným množstvím funkcí — od jednoduché přímé a nepřímé úměrnosti až po nejruznější složitě konstruované funkce. Během školní docházky si také žáci budují představu, jak má vypadat „normální“ funkce a jaké má mít vlastnosti. Pokud se pak žák setká s nějakou „podivnou“ funkcí, jedná se zpravidla o ojedinělý případ a zpravidla následuje návrat do světa „normálních“ funkcí. V této práci se naopak zaměříme právě na tyto „podivné“ funkce, které nějakým způsobem narušují školní představu o tom, jak by se měla správná funkce chovat.

V kapitole 1 se podíváme na to, jak přistupují právě výukové materiály k tématu funkcí. Zaměříme se na tři základní pojmy matematické analýzy — spojitost, derivaci a integrál.

V kapitole 2 si připomeneme důležité teoretické výsledky, které bude absolvent základního kurzu pravděpodobně znát. Protože jsme však tuto práci pojali jako průvodce zejména pro studenty bakalářského studia, a to zejména učitelských oborů — aby budoucí pedagogové mohli získat lepší představu o rozmanitých funkcích, které často mohou sloužit jako protipříklad při otázkách žáků — považujeme za užitečné shrnout základní poznatky, abychom se na ně mohli během práce odkazovat.

V kapitolách 3, 4 a 5 už se budeme věnovat samotným „podivným“ funkcím. Konkrétně v kapitole 3 funkcím, které jsou spojitě či nespojitě na dané množině bodů (zejména tedy bude řeč o Dirichletově funkci a jejích modifikacích) a funkcím, které jsou spojitě, ale ne absolutně spojitě (tedy Cantorova funkce a její modifikace).

V kapitole 4, nejrozsáhlejší kapitole této práce, si představíme funkce, které mají nespojitou derivaci, funkce, které jsou spojitě a v žádném bodě nemají derivaci (zde si také ukážeme, že tyto funkce nejdou nakreslit, neboť jejich graf má nekonečnou délku), funkce s nulovou derivací na „velké“ množině, které jsou ale i přesto ve všech bodech rostoucí, a závěrem si dokážeme existenci funkcí, které sice mají ve všech bodech derivaci, ale přesto nejsou na žádném intervalu monotónní.

V kapitole 5 se zmíníme o dvou typech funkcí — funkcích, které jsou nespojitě na husté množině bodů, ale přesto mají Riemannův integrál, a naopak funkcích, které jsou nespojitě na množině kladné Lebesgueovy míry, takže nemají Riemannův integrál (přesněji řečeno budeme mluvit o funkci, jejíž derivace, ačkoli je omezená, není Riemannovsky integrovatelná).

Součástí práce jsou také grafy funkcí a další obrázky. Grafy funkcí jsou převážně kresleny pomocí softwaru *Wolfram Mathematica*.

Číslo	Název	F	S	D	I
[1]	Algebra pro devátý ročník	✓			
[2]	Matematika pro I. ročník gymnázií, Funkce I	✓			
[3]	MATEMATIKA pro 8. ročník základní školy, II. díl	✓			
[4]	MATEMATIKA pro 9. ročník základní školy	✓			
[5]	Algebra pro 9. ročník	✓			
[6]	Matematika pro 9. ročník základní školy, 2. díl	✓			
[7]	Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií, Funkce	✓	✓		
[8]	Matematika pro 9. ročník základní školy, 1. díl	✓			
[9]	Matematika: práce s daty, úměrnosti a funkce	✓			

Tabulka 1: Učebnice pro základní školy

Číslo	Název	F	S	D	I
[10]	Matematika pro gymnázia: Funkce	✓			
[11]	Matematika pro gymnázia: Diferenciální a integrální počet		✓	✓	✓
[12]	Matematika pro střední školy, 4. díl: Funkce I (učebnice)	✓	✓		
[13]	Matika pro spolužáky: Funkce	✓			
[14]	Matika pro spolužáky: Diferenciální a integrální počet		✓	✓	✓
[15]	Matematika pro střední školy: Funkce	✓			
[16]	Matematika pro střední školy — 10. díl: Komplexní čísla, polynomy, matice, základy diferenciálního a integrálního počtu		✓	✓	✓
[17]	Matematika pro střední školy: Diferenciální a integrální počet		✓	✓	✓

Tabulka 2: Učebnice pro střední školy

Číslo	Název	F	S	D	I
[18]	Učebnice matematické analýzy I	✓	✓	✓	✓
[19]	Diferenciální počet I	✓	✓	✓	
[20]	Integrální počet I				✓
[21]	Úvod do matematické analýzy pro pedagogické fakulty	✓	✓	✓	✓
[22]	MATEMATIKA II. část				✓
[23]	MATEMATIKA I. část	✓	✓	✓	
[24]	Matematika 2			✓	✓
[25]	Diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné	✓	✓	✓	
[26]	Matematika. Základy diferenciálního a integrálního počtu	✓	✓	✓	✓
[27]	Matematika pro studenty ekonomie	✓	✓	✓	✓

Tabulka 3: Učebnice pro vysoké školy

Číslo	Název	F	S	D	I
[28]	Diferenciální počet	✓	✓	✓	
[29]	Populární encyklopedie matematiky	✓	✓	✓	✓
[30]	Přehled středoškolské matematiky	✓	✓	✓	✓
[31]	Matematika v otázkách a heslech	✓			
[32]	Víš si rady s matematikou?	✓			
[33]	Přehled středoškolské matematiky	✓	✓	✓	✓
[34]	Maturitní otázky: matematika	✓		✓	✓
[35]	Přehled učiva k maturitní zkoušce z matematiky	✓			
[36]	Odmaturuj z matematiky II		✓	✓	✓
[37]	Matematika, průvodce učivem SŠ — 1. díl	✓			
[38]	Matematika, průvodce učivem SŠ — 2. díl		✓	✓	✓
[39]	Odmaturuj z matematiky I	✓			
[40]	Maturitní otázky — Matematika	✓	✓	✓	✓
[41]	Matematika v kostce pro střední školy	✓	✓	✓	✓
[42]	Matematika — přehled středoškolského učiva	✓	✓	✓	✓
[43]	Kompendium matematiky	✓	✓	✓	✓
[44]	Maturita s nadhledem, Matematika	✓			
[45]	Nová matematika v kostce pro střední školy	✓	✓	✓	✓
[46]	Matematika s nadhledem od prváku k maturitě: Funkce, 5. díl	✓			

Tabulka 4: Souhrnné publikace

Číslo	Název
[47]	Funkce 1
[48]	Funkce 2
[49]	1 - Úvod a praktické příklady (MAT - Funkce)
[50]	2 - Přechod k abstrakci (MAT - Funkce)
[51]	5 - Graf funkce (MAT - Funkce)
[52]	7 - Funkce jako zobrazení (MAT - Funkce)
[53]	Co je matematická funkce? Doučování Dr. Matika
[54]	ČVUT Matematika 1: Úvod do funkcí
[55]	Úvod do funkcí 1/34 Funkce Matematika Onlineschool.cz
[56]	Definice funkce 2/34 Funkce Matematika Onlineschool.cz
[57]	Monotónnost funkce 4/34 Funkce Matematika Onlineschool.cz
[58]	Matematika 4.C - Po 11.5.2020: Funkce - opakování
[59]	Matematika - Základní definice funkce
[60]	Funkce jedné proměnné (přednáška)
[61]	Funkce - základní pojmy (definice, zadání, def. obor a obor hodnot)

Tabulka 5: Videomateriály — funkce

Číslo	Název
[62]	21 - Spojitost v bodě a na intervalu (MAT - Limita a spojitost funkce)
[63]	Vlastnosti funkce 7 - Spojitost funkce
[64]	Limita funkce - Spojitost, Spojitá funkce
[65]	Limity - Spojitá a nespojitá funkce
[66]	MA1-27-spojitosť
[67]	Spojitosť funkce
[68]	50. Spojitosť funkce

Tabulka 6: Videomateriály — spojitost

Číslo	Název
[69]	Derivace - význam a co nám říká
[70]	Derivace - vysvětlení definice
[71]	1 - Co nám říká derivace v bodě (MAT - Diferenciální počet - derivace)
[72]	2 - Sečna, tečna a přesná definice derivace (MAT - Diferenciální počet - derivace)
[73]	4 - Derivace funkcí na celém intervalu (MAT - Diferenciální počet - derivace)
[74]	5 - Mají všechny funkce derivaci v každém bodě? (MAT - Diferenciální počet - derivace)
[75]	Matematika - Derivace 1 - Úvod
[76]	Matematika - Derivace 2 - Co je to derivace 1
[77]	Základy derivací 1/13 Derivace Matematika Onlineschool.cz
[78]	Monotónnost a extrémy funkcí 4/13 Derivace Matematika Onlineschool.cz
[79]	Diferenciální počet 12 - Derivace funkce - geometrický význam a odvození 1
[80]	Diferenciální počet 12 - Derivace funkce - geometrický význam a odvození 2
[81]	Derivace funkce v bodě 01
[82]	Derivace - Definice, derivace základních funkcí, součtu, rozdílu a součinu čísla a funkce
[83]	Aplikovaná matematika 4.A - St 11.11.2020: Derivace funkce
[84]	Jak že je to s tou derivací? - Definice derivace a užití v praxi

Tabulka 7: Videomateriály — derivace

Číslo	Název
[85]	Určitý integrál
[86]	27 - Přesná definice Riemannova integrálu (MAT - Integrální počet - integrace)
[87]	Určitý integrál a plocha pod křivkou 13/20 Integrály Matematika Onlineschool.cz
[88]	Určitý integrál - Velmi stručné zavedení určitého integrálu
[89]	RRMAT 8.1. Určitý integrál
[90]	Určitý integrál (přednáška)
[91]	Integrální počet - určitý integrál
[92]	Integrály - Určitý integrál

Tabulka 8: Videomateriály — integrály

1. Analýza výukových materiálů

Chceme-li se zabývat podivnými funkcemi, musíme si nejdříve ujasnit, které funkce bychom označili za „podivné“ a které jsou naopak „normální“.

Základní představu o funkcích a o tom, které funkce a jejich vlastnosti jsou „normální“, získává člověk v průběhu vzdělávání na základní, střední a vysoké škole, přičemž v průběhu času se postupně normálními stává stále více typů funkcí. Podíváme se tedy, jak jsou funkce a jejich vlastnosti vykládány v dostupných učebnicích pro základní (tabulka 1), střední (tabulka 2) a vysoké školy (tabulka 3), jaké intuitivní pojetí funkcí a jejich vlastností může žák získat, případně jaké miskoncepce se v nich (zpravidla vinou snahy zpřístupnit žákům složité pojmy) vyskytují.

Dále provedeme analýzu souhrnných publikací (tabulka 4) — můžeme si všimnout, že většinu z nich tvoří opakovací souhrny k maturitě — a internetových výukových videí (tabulky 5, 6, 7 a 8). Ta sice nejsou oficiálními materiály, ale často jsou vytvářena právě učiteli, žáky nebo studenty, a mohou tedy poskytnout alespoň částečnou představu o reálné výuce. Navíc díky nedávné distanční podobě výuky mohla právě tato videa sloužit řadě žáků jako studijní materiál a některá videa mají tisíce či dokonce desetitisíce shlédnutí, tudíž nemůžeme jejich vliv zcela zanedbat.

Pokud nebudeme rozlišovat mezi jednotlivými skupinami, budeme hovořit o *výukových materiálech*, případně stručněji jen o *materiálech*.

Poznamenejme pro vysvětlení, že materiály jsou v tabulkách řazeny podle data vydání, a to podle data vydání konkrétních výtisků, z nichž bylo čerpáno (proto je občas i pomícháno pořadí dílů jedné série).

V textu dále se nebudeme na výukové materiály odkazovat přímo, ale pouze skrze čísla uvedená v příslušných tabulkách (jedná se o stejná čísla, která mají jednotlivé materiály i v bibliografii na konci práce). Jednak není naším cílem hodnotit konkrétní studijní materiály, ale spíše myšlenky a přístupy v nich obsažené, jednak nechceme zahltnout text odkazy na jednotlivé materiály. Z toho důvodu také v případě, že budeme odkazovat na více materiálů v kontextu určité skupiny, přesuneme jejich seznam do poznámky pod čarou.

1.1 Funkce

V dalších kapitolách budeme studovat funkce a jejich vlastnosti. Podívejme se tedy nejprve na to, co je (podle výukových materiálů) funkce, s jakými funkcemi se mohou žáci při výuce potkat a jakým jejich vlastnostem se věnují.

1.1.1 Motivace zavedení funkce

Některé učebnice, ať už vysokoškolské¹, středoškolské² nebo i základoškolské³ prezentují pojem funkcí jako už z dřívějška známý. Pojetí funkce se obecně napříč jednotlivými stupni rozšiřuje, prohlubuje a zpřesňuje.

V řadě výukových materiálů je však pojem funkce nový (nebo alespoň v té podobě, v níž k němu chce daný materiál přistupovat). Většina z nich proto přibližuje pojem funkce pomocí příkladů jejich praktických aplikací, ať už fyzikálních⁴, biologických⁵, geometrických⁶, demografických⁷ nebo jako závislost ceny na množství zboží⁸. Vysokoškolské učebnice zpravidla začínají výklad funkcí formální definicí bez hlubší motivace⁹, případně analytickými příklady¹⁰ — tento přístup zaujímá i značné množství souhrnných publikací¹¹.

Ve většině materiálů jsou paralelně s funkcemi probírány i jejich grafy (o nichž si podrobněji povíme v sekci 1.1.4), v některých materiálech jsou však grafy výrazně použity pro výklad a motivaci pojmu — zejména se jedná o učebnice pro základní školu¹², nebo videa¹³.

V některých materiálech ale můžeme narazit i na různé kreativní či jinak zajímavé příklady, jak žákům přiblížit či motivovat pojem funkce:

- [5] závislost doby, za kterou se postaví zeď, na počtu lidí (zároveň je připojena poznámka, že nelze počet lidí donekonečna zvyšovat),
- [12] telefonním číslem jsou přiřazováni lidé, kterým se dovoláme (jedno číslo je vždy přiřazeno pouze jednomu člověku, ale jeden člověk může mít více telefonních čísel),
- [12] vysvědčení je funkce, která přiřazuje každému předmětu známku (s poznámkou, že „je pro žáky výhodné nevyužít celý obor hodnot od 1 do 5“),
- [13] automat na žvýkačky — když do něj vložíme desetikorunu, vypadne žvýkačka za deset korun, když do něj dáme korunu, vypadne koruna zpět, protože žvýkačka za korunu není (není zmíněna možnost, že jsou různé žvýkačky za stejnou cenu),

¹[19, 27]

²[10]

³[2, 4]

⁴[1, 2, 3, 4, 5, 21, 29, 30, 31, 53]

⁵[4, 6, 8]

⁶[2, 1, 3, 7, 10, 12, 15, 18, 26, 29, 30, 32, 40, 49]

⁷[4, 9]

⁸[1, 5, 49]

⁹[23, 25, 26, 27]

¹⁰[19]

¹¹[28, 30, 33, 34, 35, 39, 42, 45, 46]

¹²[3, 4, 6, 8, 9]

¹³[59]

- [13] reakce konkrétního člověka na facku v závislosti na jeho charakteru,
- [28] sedadlům ve vyprodaném kině jsou přiřazeni návštěvníci,
- [47] volenka v tanečních (klukům jsou přiřazovány holky, může se stát, že více kluků bude chtít tančit se stejnou holkou),
- [55] intenzita šlapání do pedálů kola (vstupní hodnota) je převodovkou (funkce) převáděna na rychlost jízdy (výstupní hodnota),
- [56] předmětu je přiřazena jeho hmotnost (jeden předmět má vždy stejnou hmotnost, ale různé předměty mohou mít stejnou hmotnost).

Najdeme i paralelu, v níž je funkce prezentována jako stroj, do kterého něco hodíme a něco jiného nám z něj vypadne¹⁴.

Jako zajímavost uveďme, že už v jedné z učebnic pro základní školu [4] můžeme najít parametrické funkce, a to hned jako úvodní příklad. Konkrétně se jedná o závislost hydrostatického tlaku na hloubce, kde parametrem je hustota kapaliny (zde na tento fakt ovšem není explicitně upozorňováno) a dále rychlost fotosyntézy na intenzitě světla, kde parametrem je teplota, při níž reakce probíhá (zde jsou uvedeny i grafy této funkce pro různé teploty).

Pojmem funkce se zpravidla myslí reálná funkce jedné reálné proměnné (tedy zobrazení z množiny $\mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$), a ačkoli je v některých učebnicích pojem funkce prezentován obecněji, nakonec se všechny zdroje věnují téměř výhradně právě tomuto typu funkcí. Neuvedeme-li jinak, budeme v této práci slovem *funkce* rozumět reálnou funkci jedné reálné proměnné.

1.1.2 Definice funkce

V této práci budeme funkcí rozumět následující (definice podle [19]).

Definice 1 (Funkce). Funkcí f rozumíme množinu uspořádaných dvojic reálných čísel $[x, y]$, jež má tuto vlastnost: Ke každému číslu x_0 existuje nejvýše jedno (tj. buďto žádné nebo právě jedno) číslo y takové, že dvojice $[x_0, y]$ patří k množině f .

Toto číslo y nazýváme pak hodnotou funkce f v bodě x_0 a značíme je značkou $f(x_0)$.

Ona čísla x , k nimž existuje číslo y tak, že dvojice $[x, y]$ patří k množině f , tvoří jistou množinu M reálných čísel, kterou nazýváme (definičním) oborem funkce f .

Tato formální definice se v některých materiálech vyskytuje¹⁵, není však příliš běžná — zejména mluvíme-li o učebnicích pro základní a střední školy. Obvyklá definice funkce je taková, že funkce vyjadřuje závislost jedné proměnné na druhé¹⁶, jedná se o zobrazení množiny čísel do množiny čísel¹⁷, nebo ještě častěji o přiřazení¹⁸, pravidlo¹⁹ nebo předpis²⁰, který každému prvku z jedné množiny přiřadí

¹⁴[13, 46, 47, 53]

¹⁵[19, 21, 23, 27, 30, 33, 34, 39, 40, 41, 42, 59, 49]

¹⁶[5, 7, 29, 32, 55]

¹⁷[13, 18, 25, 52]

¹⁸[1, 3, 30]

¹⁹[9, 27, 28, 43, 60]

²⁰[2, 4, 6, 8, 10, 12, 15, 21, 26, 27, 28, 35, 45, 46, 47, 56, 59, 61]

právě jeden prvek druhé množiny. Právě posledně jmenovaný a nejčastěji užívaný *předpis* bývá v řadě materiálů užíván nejednoznačně: na jednu stranu je funkce sama předpisem, na druhou stranu funkce má předpis, kterým je zadána²¹.

Můžeme si všimnout, že v řadě materiálů je funkce definována různými způsoby a různými pojmy, aby žákům přiblížila co nejjasněji koncept funkce. Některé materiály však funkci naopak nedefinují vůbec a věnují se pouze jejím vlastnostem²².

Většina zdrojů se shoduje v tom, že funkce je zadána jednak způsobem, kterým jsou prvky jedné množiny přiřazeny prvkům druhé množiny, jednak množinou, na které je funkce definována, tj. definičním oborem; explicitně to ale zmiňují jen některé²³, přičemž toto upozornění bývá spojeno často s tím, že funkce s různými definičními obory jsou vždy různé (i kdyby bylo pravidlo přiřazení prvků stejné). Není-li definiční obor funkce uveden, pak materiály uvažují maximální možný definiční obor, zvláště pak v souvislosti se zadáním funkce vzorcem (o tom se více zmíníme v následující části textu). V této práci chceme předejít nejasnostem, proto v každé definici uvádíme, pro které body je funkce definována.

1.1.3 Zadání funkce

Co se způsobu zadání funkce týče, uvádějí některé materiály kromě vzorce i tabulku²⁴, graf²⁵ či slovní popis²⁶. Zadání vzorcem bývá vždy upřednostňováno, v následujících kapitolách však uvidíme funkce, které jsou zadány primárně grafem (Bolzanova funkce v sekci 4.2.1, Kochova funkce v sekci 4.2.7), slovním popisem, iterativně z dříve spočítaných funkčních hodnot (Peanovy funkce v sekci 4.2.5, Minkowského funkce v sekci 4.3.1) či jinými zvláštními způsoby.

Příklad. Zajímavý způsob zadání funkce slovním popisem najdeme v [18]. Každému nezápornému reálnému číslu $x = N.p_1p_2p_3p_4p_5 \dots$ (kde N je celá část a p_i jsou příslušné číslice za desetinnou čárkou) přiřadíme číslo $y = 0.p_1p_3p_5 \dots$, tj. ze zápisu desetinného čísla vyškrtneme všechny číslice na sudých pozicích. Například tedy

$$\begin{aligned} 1,23456789 &\mapsto 0,2468, \\ \frac{2}{9} = 0,\bar{2} &\mapsto 0,\bar{2} = \frac{2}{9}, \\ \frac{4}{11} = 0,\overline{36} &\mapsto 0,\bar{3} = \frac{1}{3}, \\ \pi &\mapsto 0,119638 \dots \end{aligned}$$

Graf této funkce můžeme vidět na obrázku 1.1.

Hovoří-li materiály o zadání funkce pomocí vzorce (či také rovnice), myslí tím buď výhradně nebo alespoň z velké většiny pouze elementární funkce a jejich

²¹[6, 8, 10, 21, 26, 27, 45, 47, 58, 59, 61]

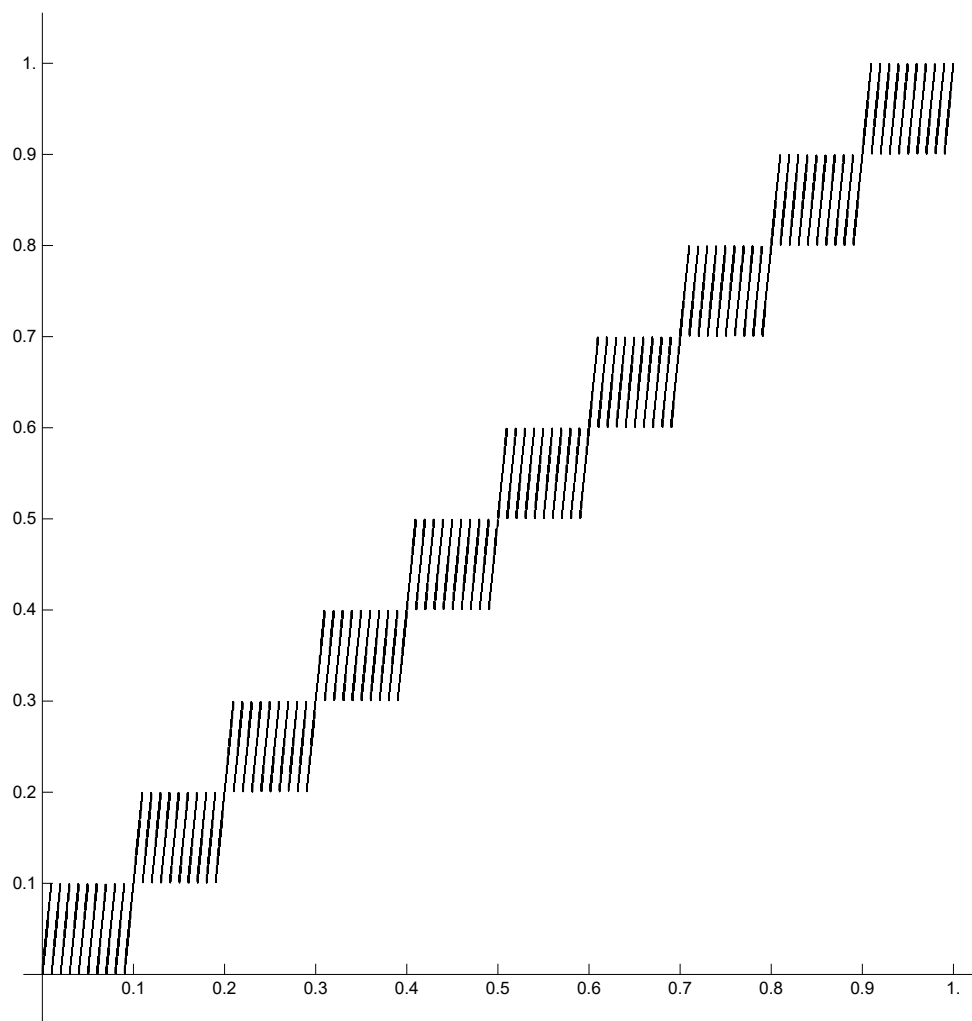
²²[37, 44, 53, 54]

²³[1, 3, 4, 7, 12, 18, 31, 41, 50]

²⁴[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 21, 23, 26, 30, 32, 37, 40, 41, 42, 45, 47, 53, 55, 61]

²⁵[3, 5, 9, 12, 23, 30, 32, 37, 41, 45, 47, 61]

²⁶[12, 42, 61]



Obrázek 1.1: Graf funkce, kde funkční hodnotu v bodě x získáme tak, že celou část x nahradíme nulou a z desetinné části vyškrtneme číslice na sudých pozicích.

součty, rozdíly, součiny, podíly a konstantní násobky. V učebnicích pro základní školy, kde se žáci s těmito funkcemi poprvé setkávají, jsou to zejména přímá a nepřímá úměrnost²⁷, lineární funkce²⁸, kvadratická funkce²⁹, případně odmocnina³⁰, absolutní hodnota³¹ či dokonce goniometrické funkce³². V učebnicích pro střední školy jsou buď jednotlivé typy uváděny jako opakování ze základní školy, nebo je jim věnována samostatná publikace, proto zde neuvádíme odkazy na konkrétní materiály.

Některé učebnice však popisují zadání funkce vzorcem obecněji, a to jako jakýkoli vzorec, kde na pravé straně nějakým způsobem figuruje nezávisle proměnná³³. Uvědomme si, že tomuto pojetí neodporuje konstantní funkce, neboť např. $f(x) = 1 = x^0$ (pro $x \neq 0$).

I pokud se tedy omezíme pouze na zadání funkce vzorcem (v tomto obecném významu), máme stále značný počet zajímavých funkcí. V této práci budeme často zadávat funkce pomocí vzorců (nebo chceme-li předpisů), které se v učebnicích pro základní a střední školy příliš nevyskytují, a sice pomocí limit posloupností funkcí (Dirichletova funkce v sekci 3.1.1, Bolzanova funkce v sekci 4.2.1), nekonečných součtů (Weierstrassova funkce v sekci 4.2.2, Cellérierova funkce v sekci 4.2.4, Jarníkova funkce v sekci 4.2.8, funkce v sekci 5.1.2), desetinných rozvojų (Cantorova funkce v sekci 3.2.1, Petrova funkce v sekci 4.2.3, Peanovy funkce v sekci 4.2.5) či dokonce řetězových zlomků (Minkowského funkce v sekci 4.3.1). Často také budeme využívat definice funkcí různými předpisy na různých podmnožinách definičního oboru.

1.1.4 Graf funkce

Graf funkce uvádí řada materiálů v souvislosti s tzv. empirickými funkcemi³⁴, tj. funkcemi, jejichž graf vzniká zakreslováním empiricky získávaných dat (například seismograf, termograf, spotřeba elektřiny, vývoj ceny či počtu obyvatel apod.).

V této práci budeme grafem funkce rozumět množinu všech bodů v rovině, které mají souřadnice $[x, f(x)]$ [19]. Formálně je tedy graf funkce to stejné, jako funkce samotná; mění se pouze způsob, kterým je na danou definici pohlíženo — zatímco na funkci se díváme jako na množinu uspořádaných dvojic, graf chápeme jako množinu bodů v rovině.

Jak tedy uvádí [5], graf funkce má právě tolik bodů, kolik prvků má definiční obor; chybnou terminologii zaujímá např. [13], kde se dočteme: „Pokud funkce je konečná, můžeš vidět konec její křivky. Je často potřeba určit, zda tento konec ještě patří do funkce, či nikoliv.“ Vzhledem k tomu, že funkce je jistá množina, je grafem konečné funkce množina diskrétních bodů, nikoli křivka.

Výše uvedenou definici nalezneme i ve většině výukových materiálů³⁵. Můžeme

²⁷[1, 3, 5, 6, 8]

²⁸[1, 3, 4, 5, 6, 8, 7]

²⁹[1, 3, 4, 5]

³⁰[2]

³¹[3]

³²[1, 3]

³³[1, 53, 50]

³⁴[3, 5, 6, 8, 10, 12, 26, 30]

³⁵[1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 19, 21, 23, 25, 26, 27, 28, 30, 33, 35, 36, 40, 41, 42, 43,

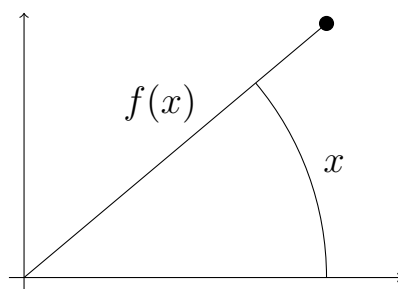
se však setkat například i s pojetím, v němž je za graf funkce označována dvojice os x a y a počátek soustavy souřadnic, konkrétně v [54] — zde je navíc toto pojetí grafu zaměňováno s body křivky (přičemž jeden z příkladů křivky, která může být grafem funkce, ve skutečnosti grafem funkce není).

Některé další materiály buď graf funkce vůbec nedefinují³⁶ a pouze s ním pracují, nebo graf funkce a funkci samotnou nerozlišují³⁷.

Konstrukci grafu funkce provedeme podle řady materiálů tak, že vykreslíme „dostatečný počet“ bodů grafu, které následně spojíme křivkou³⁸. Tento postup se na první pohled může zdát chybný (a v teoretickém smyslu samozřejmě je, protože nemusíme předem vědět, jak ona křivka vypadá — dokonce jsou funkce, u nichž tento postup selže, zejména ty, které jsou nespojité na „velké“ množině — ty si ukážeme například v sekcích 3.1.1 a 5.1), ale tento způsob konstrukce je používán například v počítačovém vykreslování grafů; jen pro pořádek uvedme, že většina grafů, které v této práci uvádíme, je kreslena tak, že vyneseme „dostatečný počet“ bodů grafu, které spojíme úsečkami — rozdíl je pouze v tom, že počet bodů, které můžeme vynést s pomocí počítače, je mnohem větší než počet bodů, které typicky vynáší žák (vynášíme však vždy takový počet bodů grafu, aby aproximace tímto způsobem získaná byla pokud možno okem nerozeznatelná od skutečného grafu funkce).

Některé materiály uvádí poznámku, že existují funkce s tak složitými grafy, že nejsme schopni je nakreslit³⁹ — toto bývá často uváděno u příkladu Dirichletovy funkce (kterou si podrobněji ukážeme v sekci 3.1.1), tato funkce však není jediná s takovouto vlastností. V sekci 5.1 uvidíme další příklady funkcí, které jsou nespojité na husté množině a v sekci 4.2 se budeme věnovat funkcím, jejichž graf má na libovolně malém intervalu nekonečnou délku, což znamená, že nejsme schopni žádnou jeho část v konečném čase nakreslit.

Dovolme si na závěr ještě jednu zajímavou poznámku. Většina výukových materiálů vykresluje grafy funkcí v pravoúhlé kartézské soustavě souřadnic. Grafy funkcí však můžeme vykreslovat např. i v polární soustavě souřadnic (jak uvádí například [18]), kde x je úhel, který svírá spojnice bodu grafu a počátku soustavy souřadnic s kladnou poloosou x (v radiánech) a $f(x)$ je (orientovaná) vzdálenost bodu grafu od počátku soustavy souřadnic. Tento princip lépe pochopíme z následujícího obrázku.



Grafy některých funkcí v polárních souřadnicích můžeme vidět na obrázku 1.2 — v grafech jsou zobrazeny pouze funkční hodnoty pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

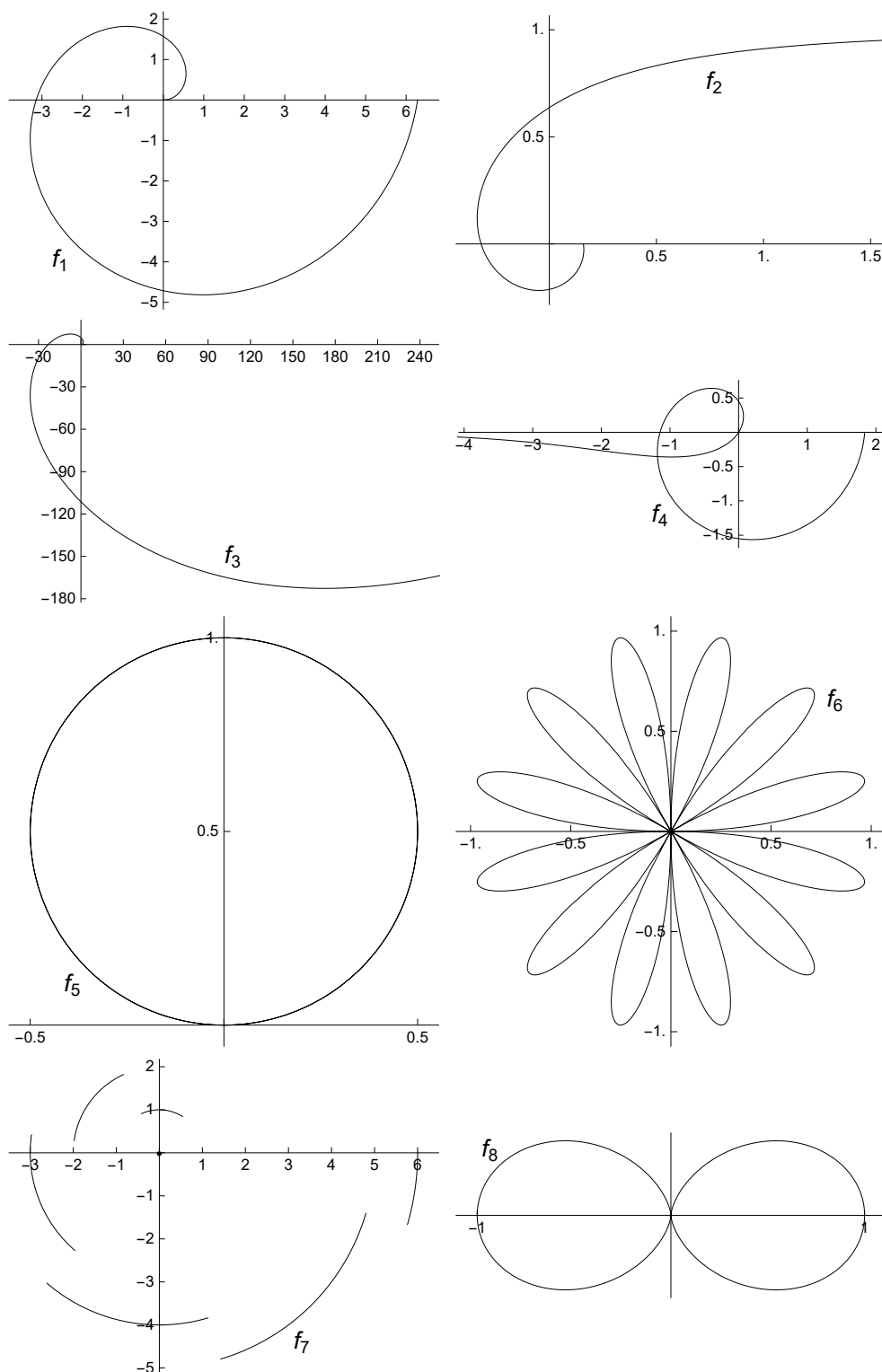
45, 46, 51, 58, 60, 61]

³⁶[5, 13, 29, 32, 37, 44, 48, 55, 59]

³⁷[13, 57, 59]

³⁸[1, 4, 21, 28, 30, 51, 55, 56, 58]

³⁹[7, 12, 18, 19, 25, 28, 32, 43]



Obrázek 1.2: Příklady grafů funkcí v polárních souřadnicích; po řádcích: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = e^x$, $f_4(x) = \ln(x)$, $f_5(x) = \sin(x)$, $f_6(x) = \sin(6x)$, $f_7(x) = \lfloor x \rfloor$, $f_8(x) = \cos^2(x)$.

1.2 Spojitost

První skupinou funkcí, které v naší práci prozkoumáme, jsou funkce podivné ve smyslu spojitosti. Podívejme se tedy, jak přistupují výukové materiály k pojmu spojitosti a s jakými podivnostmi se mohou žáci při výuce potkat.

1.2.1 Definice spojitosti

První náznaky pojmu *spojitost* můžeme nalézt už v učebnicích pro základní školu, a sice v [1], kde je mezi grafy funkcí uveden graf nespojitě funkce, konkrétně závislost ceny za posílání balíku na jeho hmotnosti (kde je funkce po částech konstantní a mění se skokově v určených hmotnostních hranicích) a v [7], kde je pojem spojitosti použit ne zcela správně. Konkrétně se jedná o poznámku u grafu vykresleného z dat termografu, který „měří a zapisuje teplotu ‚spojitě‘, tj. v každém okamžiku“. To evokuje spíše rozdíl mezi grafem funkce definované na intervalu a grafem funkce definované v diskretních bodech. K tomu nás vede i následná věta: „Kdybychom měřili teplotu jen každou celou sudou hodinu, dostali bychom ‚chudší‘ obrázek.“

Ve výukových materiálech se vyskytují následující formální definice: Cauchyho definice spojitosti⁴⁰, definice spojitosti pomocí limity⁴¹ a Heineho definice spojitosti⁴².

Některé materiály, které definují spojitost pomocí limity, zmiňují explicitně podmínky, že funkce musí být v daném bodě definována, musí v něm existovat limita a tato funkční hodnota a limita se musí rovnat⁴³.

Definice 2 (Cauchyho definice spojitosti). *Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě c , jestliže*

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in \mathbb{R}) (|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon).$$

Definice 3 (Definice spojitosti pomocí limity). *Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě c , jestliže*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Definice 4 (Heineho definice spojitosti). *Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě c , jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c).$$

Cauchyho definice a definice pomocí limity jsou převzaty z [19], Heineho definice pak z [93].

Dá se dokázat, že všechny uvedené definice jsou ekvivalentní. Některé materiály pak uvádí ostatní z těchto definic jako věty či ekvivalentní formulace definice (Cauchyho definice⁴⁴, definice pomocí limity⁴⁵, Heineho definice⁴⁶). Učeb-

⁴⁰[11, 14, 17, 19, 23, 30, 36, 38, 63, 66]

⁴¹[16, 17, 18, 21, 25, 26, 27, 28, 33, 40, 41, 42, 45, 62, 64, 65, 68]

⁴²[43]

⁴³[16, 18, 21, 64]

⁴⁴[18, 21, 28, 43]

⁴⁵[14, 19, 23, 29, 63]

⁴⁶[25, 28]

nice [18] také uvádí reformulaci, že funkce je spojitá, pokud

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Všechny tyto definice (snad až na poslední) mluví o spojitosti funkce v bodě. Spojitost na intervalu je pak definována pomocí spojitosti v bodě a jednostranných spojitostí.

Definice 5 (Jednostranná spojitost).

1. Řekneme, že funkce f je spojitá zprava, resp. zleva, v bodě c , jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in \mathbb{R}) (c \leq x < c + \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon),$$

resp.

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (x \in \mathbb{R}) (c - \delta < x \leq c \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon).$$

2. Řekneme, že funkce f je spojitá zprava, resp. zleva, v bodě c , jestliže

$$\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = f(c),$$

resp.

$$\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = f(c).$$

3. Řekneme, že funkce f je spojitá zprava, resp. zleva, v bodě c , jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $x_n > c$, resp. $x_n < c$, platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c).$$

Definice 6 (Spojitost na intervalu). Řekneme, že funkce je spojitá na intervalu I , pokud

1. je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I ,
2. patří-li počáteční bod intervalu I k intervalu I , pak je funkce spojitá zprava v tomto bodě,
3. patří-li koncový bod intervalu I k intervalu I , pak je funkce spojitá zleva v tomto bodě.

Definice jsou převzaty z [19].

Tyto nebo podobné definice najdeme ve většině učebnic a dalších materiálů, které se těmto pojmům věnují⁴⁷, některé další pracují pouze se spojitostí na otevřeném intervalu⁴⁸. Například [26] definuje jednostrannou spojitost, aniž by definovala spojitost na intervalu. Učebnice [14] pak pojem spojitosti na intervalu nedefinuje, pouze s ním intuitivně pracuje. Ve videopřednášce [67] je vysvětlována jednostranná spojitost intuitivně a objevuje se zde dokonce definice kruhem —

⁴⁷[11, 17, 18, 19, 21, 25, 27, 36, 62]

⁴⁸[16, 29, 38]

funkce je spojitá v bodě, pokud je spojitá na nějakém jeho okolí (tj. intervalu) a dále je spojitá na intervalu, pokud je spojitá v každém jeho bodě (a příslušně jednostranně spojitá).

Velice zřídka však narazíme na explicitní upozornění, že spojitost v bodě neimplikuje spojitost na nějakém intervalu kolem tohoto bodu⁴⁹ — Video [62] dokonce uvádí, že pokud je funkce spojitá v určitém bodě, je spojitá i na nějakém jeho okolí). Tato poznámka je přitom poměrně podstatná, v podsekcí 3.1.1 uvidíme funkce, které jsou spojité pouze v jednom bodě, v podsekcí 5.1.1 pak dokonce funkci, která je spojitá v bodech husté množiny, ale na žádném intervalu.

Řada materiálů, které zmiňují jednostrannou spojitost, také uvádí větu, že funkce je v daném bodě spojitá, je-li v něm spojitá zleva i zprava⁵⁰.

Co se týče označení dané funkce za spojitou, různí se materiály v tom, zda takto označují funkci spojitou (pouze) na definičním oboru⁵¹, nebo na celém oboru reálných čísel⁵². V prvním případě je tedy např. funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ spojitá, ve druhém případě nikoli. V této práci, pokud budeme mluvit o spojitosti funkce, budeme vždy explicitně uvádět, pro jaké body chceme, aby funkce byla či nebyla spojitá.

Intuitivní představa spojitosti

Kromě uvedených definic je často zmiňována intuitivní představa s pomocí grafu, tj. že graf spojitě funkce je nepřerušovaný nebo že jej lze nakreslit jedním tahem (jak už jsme uvedli výše, v sekci 4.2 si představíme funkce, které jsou sice spojitě, ale jejich graf má na každém intervalu nekonečnou délku — to poznamenává i [43]) a naopak graf nespojitě funkce je nějakým způsobem roztržen či přerušen. Tato představa je buď zmiňována spolu s některou formální definicí⁵³, nebo samostatně jako vlastní definice⁵⁴. Některé zdroje motivují spojitost právě tímto přístupem, tedy že chceme nakreslit graf funkce tak, že vyneseme nějaké body, které následně spojíme, a chceme vědět, jakým způsobem (např. plynulou čarou) máme tyto body spojovat⁵⁵.

Kromě nepřerušenosti grafu funkce nalezneme i jiné intuitivní přiblížení pojmu spojitosti, a sice takové, že spojitá funkce má tu vlastnost, že pokud se málo změní hodnota proměnné, pak se málo změní i funkční hodnota⁵⁶, přičemž tuto vlastnost využíváme třeba v případě, že chceme (např. pro praktické výpočty) nahradit iracionální hodnotu proměnné její racionální aproximací⁵⁷.

1.2.2 Příklady spojitých a nespojitých funkcí

Většina materiálů prezentuje příklady spojitých a nespojitých funkcí na grafu nějaké nekonkrétní funkce. Jsou-li zmiňovány konkrétní funkce, jedná se zpravi-

⁴⁹[18, 25]

⁵⁰[11, 17, 19, 23, 25]

⁵¹[14, 40, 43, 67]

⁵²[16]

⁵³[11, 14, 16, 18, 25, 27, 28, 40, 41, 42, 43, 45, 62, 64, 65, 66]

⁵⁴[12, 67]

⁵⁵[30, 36]

⁵⁶[18, 19, 21, 29, 66]

⁵⁷[18, 66]

dla o racionální lomené funkce⁵⁸, funkci signum⁵⁹, absolutní hodnotu (nebo také druhou mocninu) z funkce signum⁶⁰ nebo následující funkci⁶¹

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Obecně jde ale o funkce, které jsou nespojité jen v určitých izolovaných bodech.

V řadě materiálů (zejména ve vysokoškolských učebnicích a v souhrnných materiálech) nalezneme zmínku o Dirichletově funkci⁶², případně její modifikaci, tj. funkci, která je spojitá právě v jednom bodě. Konkrétně je zmiňována funkce

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{I}, \end{cases}$$

v [43] a

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & x \in \mathbb{I}, \end{cases}$$

v [18].

Tyto funkce jsou zpravidla nejpodivnějšími funkcemi, které ve zkoumaných výukových materiálech nalezneme, a to nejen co se týče spojitosti. My se jim budeme podrobněji věnovat v podsekcí 3.1.1.

Poznamenejme ještě na závěr, že ani spojitost na husté podmnožině intervalu (viz sekci 2.2) však neimplikuje, že je funkce spojitá na celém intervalu — protipříkladem může být Thomaeova funkce (v podsekcí 5.1.1).

⁵⁸[26, 29]

⁵⁹[14, 30, 62]

⁶⁰[18]

⁶¹[30]

⁶²[16, 17, 18, 19, 21, 25, 28, 30, 43]

1.3 Derivace

Nejrozsáhlejší skupinou podivných funkcí v naší práci jsou ty, které se nějak dotýkají derivací. Podívejme se tedy na to, jak jsou derivace probírány ve výukových materiálech a proč by funkce uvedené v této práci mohly připadat žákům podivné.

1.3.1 Motivace derivace

Motivace pojmu derivace je zpravidla dvojího druhu. Většina materiálů uvádí derivaci jako směrnici tečny ke grafu funkce v daném bodě⁶³, tedy jako „limitní polohu sečny“ (bod, ve kterém počítáme derivaci, je pevný a druhý bod na grafu se k němu přibližuje)⁶⁴, menší část pak jako okamžitou rychlost tělesa pohybujícího se po přímce, kde jeho poloha je dána funkcí⁶⁵. Řada materiálů pak motivuje derivaci oběma způsoby⁶⁶. Některé materiály uvádí jako motivaci zavedení derivace určení zrychlení ze závislosti rychlosti na čase⁶⁷. Některé materiály motivují derivaci pouze pomocí okamžitého růstu funkce⁶⁸. V učebnici [16] pak najdeme zajímavou praktickou motivaci, a sice že při pěším výletu nás zajímá nejen to, že půjdeme do kopce, ale také to, jak moc půjdeme do kopce.

Zajímavé je, že ve většině materiálů, které motivují derivaci jako směrnici tečny, můžeme na pomocných obrázcích vidět pouze sečny body blížícími se k tečnému bodu zprava⁶⁹, případně zleva⁷⁰; pouze nejstarší vysokoškolské učebnice obsahují obrázek, kde je tečna aproximována sečnami z obou stran⁷¹. Učebnice [21] k obrázku jednostranně se blížící sečny připojuje alespoň explicitní poznámku, že přírůstek hodnoty argumentu (tj. h v naší definici 7) může být i záporný.

Poměrně překvapivým poznatkem je i absence dynamického znázornění významu derivace. V tištěných materiálech samozřejmě nemůžeme dynamickou prezentaci provést, ovšem nenajdeme ji ani ve většině videomateriálů — kromě [79] a [80], kdy je přibližování se sečny k tečně prezentováno alespoň pomocí pohybu hrany pravítka.

1.3.2 Definice derivace

V této práci budeme derivací funkce rozumět následující (definice podle [19]).

Definice 7 (Derivace). Derivací funkce f v bodě c nazýváme limitu (pokud tato limita existuje)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h},$$

⁶³[24, 25, 29, 33, 36, 38, 40, 43, 71, 72, 76, 82, 79, 83, 84]

⁶⁴[77] prezentuje tečnu jako přímku, která se grafu dotýká pouze v jednom bodě, [83] tečnu ke grafu funkce blíže nedefinuje a využívá pouze obrázkové znázornění.

⁶⁵□

⁶⁶[11, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 26, 27, 28, 30, 34, 41, 42, 45]

⁶⁷[69, 71, 75]

⁶⁸[70, 77]

⁶⁹[14, 16, 17, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 33, 34, 36, 38, 40, 41, 42, 43, 45, 82, 79, 84]

⁷⁰[23]

⁷¹[18, 19]

nebo také ekvivalentně

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

a značíme $f'(c)$.

Je-li $f'(c) \in \mathbb{R}$, řekneme, že je derivace vlastní, je-li $f'(c) = \pm\infty$, řekneme, že je derivace nevlastní.

Derivace funkce v bodě je tedy číslo, případně plus, nebo minus nekonečno. Tímto způsobem k derivaci přistupuje většina zkoumaných materiálů — některé užívají z definic první⁷², některé druhou⁷³, většina však uvádí obě⁷⁴. Video [81] definuje nejdříve derivaci funkce na intervalu (pomocí tabulkových derivací a derivačních pravidel) a derivaci v bodě pomocí dosazení do výsledné funkce. Video [76] pak definuje pouze derivaci lineární funkce. Některé materiály uvádí pouze případ, kdy je limita (a tedy i derivace) vlastní⁷⁵, jiné přímo zmiňují i nevlastní derivace⁷⁶. Část materiálů konečnost či nekonečnost derivace nezmiňuje, pouze uvede, že derivace je uvedená speciální limita⁷⁷.

Definice 8 (Jednostranná derivace). Derivací funkce f v bodě c zprava, resp. zleva, nazýváme limitu (pokud tato limita existuje)

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}, \quad \text{resp.} \quad \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h},$$

nebo také ekvivalentně

$$\lim_{x \rightarrow c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Derivace zleva a zprava zavádí jen část materiálů⁷⁸. V nich často najdeme tvrzení, že funkce má derivaci právě tehdy, když má derivaci zleva i zprava a tyto derivace se rovnají⁷⁹, ovšem některé funkce s tímto faktem pouze implicitně pracují, aniž by ho výslovně uvedly⁸⁰.

Materiály dále zpravidla uvádí, že má-li funkce derivaci v každém bodě nějakého otevřeného intervalu⁸¹, uzavřeného intervalu (po zavedení jednostranných derivací)⁸², případně nějaké obecné množiny⁸³, lze derivaci chápat jako funkci proměnné x , jejíž hodnotou je derivace v daném bodě. Většina z nich pak pokračuje tím, že tato funkce může mít také derivaci, tj. druhou derivaci⁸⁴. Některé materiály pak zavádí druhou derivaci, aniž by vysvětlily přechod od derivace jako čísla k derivaci jako funkci⁸⁵.

⁷²[29, 30, 34, 36, 82, 70, 77]

⁷³[23, 33, 38, 43]

⁷⁴[11, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 40, 41, 45, 72, 80, 84]

⁷⁵[14, 21, 27, 33, 36, 38, 43]

⁷⁶[11, 17, 18, 19, 23, 24, 25, 26, 28, 74]

⁷⁷[16, 29, 34, 40, 41, 45, 72]

⁷⁸[11, 17, 14, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 42, 45, 74]

⁷⁹[14, 17, 18, 19, 23, 24, 25, 26, 74]

⁸⁰[11, 27, 28]

⁸¹[11, 16, 17, 23, 30, 33, 38, 42]

⁸²[11, 17, 24, 28, 42]

⁸³[18, 19, 21, 25, 26, 27, 36, 41, 43, 45, 73]

⁸⁴[11, 16, 23, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 33, 36, 38, 41, 42, 43, 45]

⁸⁵[14, 17, 29, 34, 40, 77, 83]

To, že má funkce derivaci v nějakém bodě, neimplikuje, že ji má i na nějakém jeho okolí (podobně jako je tomu se spojitostí). Učebnice [18] uvádí příklad funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}, \\ -x^2, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Jedná se o jednoduchou modifikaci Dirichletovy funkce. Podobné funkce si představíme v podsekcí 3.1.1. Ovšem stejně jako u spojitosti, ani fakt, že funkce má derivaci na husté podmnožině nějakého intervalu, neznamená, že ji má na celém intervalu, jak si ukážeme v případě modifikované Thomaeovy funkce v podsekcí 5.1.1.

1.3.3 Základní věty o derivacích

Derivace a spojitost

Věta 1. *Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci, pak je v bodě x_0 spojitá.*

Jedná se o základní větu, kterou najdeme ve většině materiálů⁸⁶. Encyklopedie [29] ji uvádí slovním opisem: „Nutná podmínka pro to, aby křivka měla všude tečnu, je, aby funkce byla všude spojitá.“ Souhrn [43] formuluje tuto větu tak, že má-li funkce derivaci v celém svém definičním oboru, je v celém svém definičním oboru spojitá. Souhrn [45] pak neuvádí v definici slovo *vlastní*, ač z dříve uvedené definice derivace v této publikaci nevyplývá, že by tam bylo implicitně. Učebnice [16] dokonce uvádí i poznámku, že pouhý fakt, že je funkce v daném bodě definovaná, nemusí znamenat, že v něm má derivaci. Většina z těchto materiálů pak explicitně upozorňují, že obrácená implikace neplatí, tj. funkce může být v bodě x_0 spojitá a nemít v něm derivaci⁸⁷ — většina z těchto materiálů jako příklad uvádí funkci absolutní hodnota⁸⁸, případně funkci, která má v daném bodě nevlastní derivaci⁸⁹. Skripta [25] uvádí jako příklad funkci

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

jejíž graf můžeme vidět na obrázku 1.3. Funkce podobné této, které ale mají v celém svém definičním oboru derivaci (ovšem nespojitou) si ukážeme v sekci 4.1. Že derivace funkce nemusí být všude spojitá, uvádí ze zkoumaných materiálů učebnice [18].

Jen některé materiály (převážně vysokoškolské učebnice a souhrnné publikace) pak uvádějí, že existují spojitě funkce, které nemají derivaci v žádném bodě⁹⁰. Například [27] doslova uvádí následující pěkné shrnutí: „Bolzano zkonstruoval funkci, která je spojitá na $\mathbb{R}$, ale nemá v žádném bodě vlastní derivaci. Její graf nelze nakreslit. Tvrzení, že graf spojitě funkce lze nakreslit jedním tahem tedy obecně neplatí.“ Učebnice [17] dokonce uvádí i algoritmus vzniku a graf Bolzanovy funkce, bohužel však nesprávný. V sekci 4.2 si takových zajímavých funkcí

⁸⁶[11, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 33, 36, 40, 42]

⁸⁷[14, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 36, 40, 74]

⁸⁸[14, 16, 17, 18, 21, 23, 26, 28, 36, 74]

⁸⁹[14, 36]

⁹⁰[17, 18, 19, 27, 28, 29]

ukážeme celou řadu (např. právě Bolzanovu funkci v podsekcí 4.2.1); nadto si dokážeme nejen fakt, že jejich grafy nelze nakreslit (protože mají nekonečnou délku), ale i fakt, že tyto funkce tvoří mezi spojitými funkcemi „většinu“.

Uvědomme si ale, že existence nevlastní derivace spojitost funkce neimplikuje — protipříkladem může být například funkce $\operatorname{sgn}(x)$, která má v bodě 0 nevlastní derivaci, ovšem není v něm spojitá — na tento fakt upozorňují i některé materiály⁹¹.

Derivace a monotonie

Uvedeme si pro začátek dvě definice (převzaty z [19]).

Definice 9 (Monotonie na intervalu). Řekneme, že funkce f je na intervalu I

- rostoucí, pokud $(\forall x_1, x_2 \in I) (x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2))$,
- klesající, pokud $(\forall x_1, x_2 \in I) (x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2))$,
- neklesající, pokud $(\forall x_1, x_2 \in I) (x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2))$,
- nerostoucí, pokud $(\forall x_1, x_2 \in I) (x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2))$.

Definice 10 (Monotonie v bodě). Řekneme, že funkce f je v bodě c

- rostoucí, pokud existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x_1, x_2 \in (c - \delta, c + \delta)$

$$c - \delta < x_1 < c < x_2 < c + \delta \implies f(x_1) < f(c) < f(x_2),$$
- klesající, pokud existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x_1, x_2 \in (c - \delta, c + \delta)$

$$c - \delta < x_1 < c < x_2 < c + \delta \implies f(x_1) > f(c) > f(x_2).$$

Definice monotonie funkce v bodě se příliš neobjevuje⁹², mnohem častější je monotonie na intervalu⁹³, případně na obecné množině⁹⁴. Souhrn [34] dále definuje monotonii funkce v bodě pomocí znaménka derivace (o čemž si povíme později). Menší část materiálů pak definuje pouze funkce rostoucí a klesající⁹⁵. Na tomto místě je také dobré poznamenat, že ne vždy se dá definiční obor funkce rozdělit na intervaly, ve kterých je funkce monotónní — v sekci 4.4 si dokážeme, že existují funkce, které mají sice ve všech bodech derivaci, ale nejsou v žádném intervalu monotónní.

Rozdíl mezi monotonií v bodě a na intervalu si nejlépe uvědomíme na příkladu funkce, kterou uvádí [19] — jedná se o funkci

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

jejíž graf můžeme vidět na obrázku 1.4. Tato funkce je totiž rostoucí v bodě 0, ale není rostoucí na žádném intervalu $(-\delta, \delta)$, kde $\delta > 0$.

Ve vztahu k derivaci si uvedeme následující větu (převzato z [19]).

⁹¹[19, 24, 25]

⁹²[18, 19, 21, 26, 40]

⁹³[10, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 33]

⁹⁴[28, 34, 36, 37, 40, 41, 45]

⁹⁵[10, 14, 42]

Věta 2. *Nechť má funkce f v bodě c derivaci. Pokud $f'(c) > 0$ (nebo $f'(c) = +\infty$), je funkce f v bodě c rostoucí. Pokud $f'(c) < 0$ (nebo $f'(c) = -\infty$), je funkce f v bodě c klesající.*

Tuto větu však najdeme jen v menší části materiálů⁹⁶, objevuje se spíše věta, která ze znaménka derivace na intervalu vyvozuje monotonii na intervalu⁹⁷.

Věta 3. *Funkce f je na intervalu (a,b) konstantní právě tehdy, když má ve všech jeho bodech nulovou derivaci.*

V převážné většině materiálů se dozvíme tuto větu, ovšem pouze v podobě implikace, tedy že derivace konstantní funkce je ve všech bodech rovna nule⁹⁸, v menší části pak nalezneme i opačnou implikaci, tj. že má-li funkce na intervalu (a,b) nulovou derivaci, pak je na tomto intervalu konstantní⁹⁹. Upozorníme zde, že nulová derivace pouze na „velké“ podmnožině intervalu (a,b) nestačí k tomu, aby funkce byla na tomto intervalu konstantní — v podsekcí 3.2.1 uvidíme funkci, která má *skoro všude* (viz sekci 2.3) nulovou derivaci a je neklesající, v sekci 4.3 pak dokonce funkce, které mají nulovou derivaci na husté množině nebo *skoro všude* a jsou dokonce rostoucí.

Derivace a extrémy

Než si rozebereme souvislost mezi extrémy funkce a derivací, musíme nejdříve definovat pojem extrém funkce (definice převzata z [19]).

Definice 11 (Lokální extrémy). *Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a,b) a $c \in (a,b)$. Řekneme, že funkce f má v bodě c*

- lokální maximum, *pokud* $(\exists \delta > 0) (\forall x \in (c - \delta, c + \delta)) (f(x) \leq f(c))$,
- lokální minimum, *pokud* $(\exists \delta > 0) (\forall x \in (c - \delta, c + \delta)) (f(x) \geq f(c))$,
- ostré lokální maximum, *pokud* $(\exists \delta > 0) (\forall x \in (c - \delta, c + \delta)) (f(x) < f(c))$,
- ostré lokální minimum, *pokud* $(\exists \delta > 0) (\forall x \in (c - \delta, c + \delta)) (f(x) > f(c))$.

Některé materiály uvádí takovouto definici¹⁰⁰, některé však definují pouze ostré¹⁰¹, nebo neostré¹⁰² lokální extrémy. Některé materiály definují lokální maximum jako bod, ve kterém funkce přestává být rostoucí a začíná být klesající, lokální minimum pak obdobně¹⁰³ ([14] navíc uvádí tuto definici tak, že lokální maximum a minimum jsou body z definičního oboru). Samozřejmě existují funkce, pro které neplatí, že by byly nalevo od bodu, v němž má funkce maximum, rostoucí, a napravo od tohoto bodu naopak klesající. V tuto chvíli uvedme například modifikaci funkce definované vzorcem (1.1), tj.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 3x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

⁹⁶[18, 19, 26, 40, 78, 83]

⁹⁷[11, 14, 16, 17, 21, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 33, 36, 38, 41, 42, 45]

⁹⁸[11, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 33, 34, 36, 38, 40, 41, 42, 43, 45, 82, 83, 77]

⁹⁹[11, 16, 21, 25, 28, 36]

¹⁰⁰[11, 16, 18, 19, 23, 24, 25, 29, 33, 34, 40, 42, 45]

¹⁰¹[17, 21, 27, 30, 36, 41]

¹⁰²[28, 38, 43]

¹⁰³[14, 78]

jejíž graf můžeme vidět na obrázku 1.5 — tato funkce má dokonce ve všech bodech derivaci. Ze složitějších funkcí v naší práci pak můžeme jmenovat např. Bolzanovu funkci (podsekce 4.2.1), Weierstrassovu funkci (podsekce 4.2.2) nebo Thomaeovu funkci (podsekce 5.1.1).

Věta 4. *Má-li funkce f v bodě c lokální extrém a v tomto bodě existuje derivace, pak je $f'(c) = 0$.*

Téměř všechny materiály také uvádějí tuto větu, která dává do souvislosti první derivaci a extrémy funkce¹⁰⁴, některé pak uvádějí obměněnou implikaci¹⁰⁵. Skripta [27] uvádí poněkud složitější větu, která existenci extrému podmiňuje nulovou nebo neexistující derivací a existencí a různým znaménkem na levém a pravém okolí příslušného bodu. Některé materiály podmiňují existenci extrému nulovou první a nenulovou (kladnou pro minimum a zápornou pro maximum) druhou derivací¹⁰⁶. Souhrn [34] uvádí v jedné části knihy opačnou implikaci (tj. má-li funkce v nějakém bodě nulovou derivaci, má v něm extrém), v jiné části už uvádí větu správně, a to i s důkazem.

Rovněž většina materiálů uvádí poznámku, že pokud funkce nemá v daném bodě derivaci, stále v něm může mít lokální extrém¹⁰⁷, což dokládají zpravidla na grafu funkce absolutní hodnoty¹⁰⁸, případně jiné „špičaté“ funkce. Také téměř ve všech materiálech najdeme poznámku, že nulová derivace neimplikuje extrém¹⁰⁹.

¹⁰⁴[11, 14, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 28, 30, 36, 40, 41, 42, 43, 45]

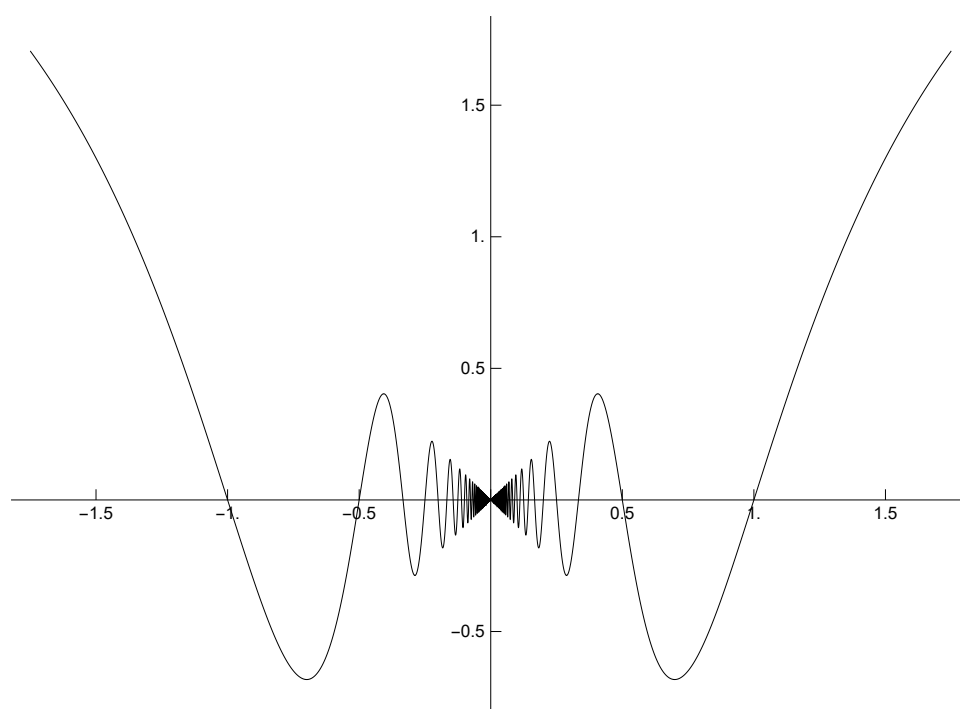
¹⁰⁵[19, 21, 29, 43]

¹⁰⁶[33, 34]

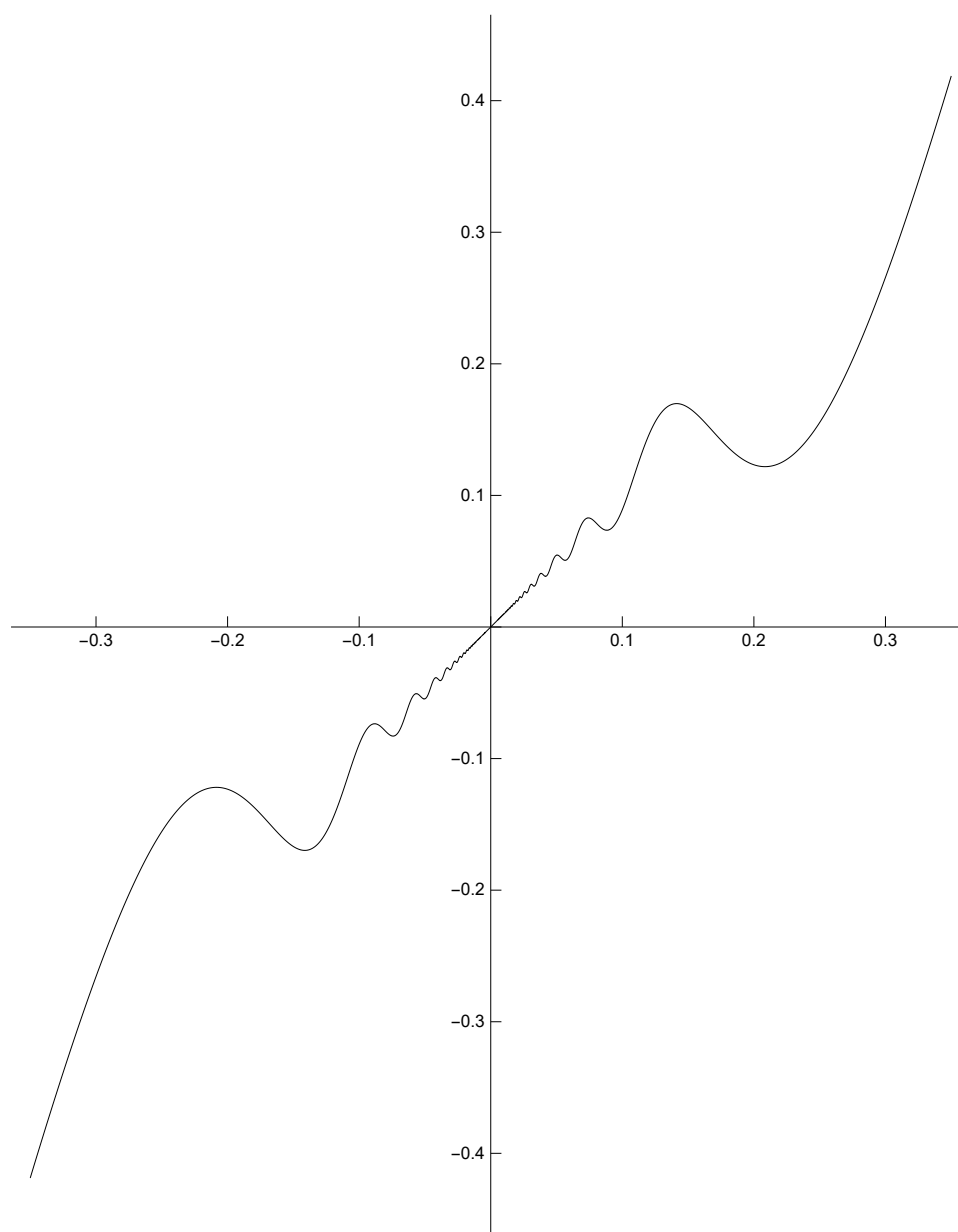
¹⁰⁷[11, 14, 16, 17, 18, 21, 23, 24, 27, 28, 29, 30, 33, 36, 38, 40, 41, 42, 45]

¹⁰⁸[14, 21, 36]

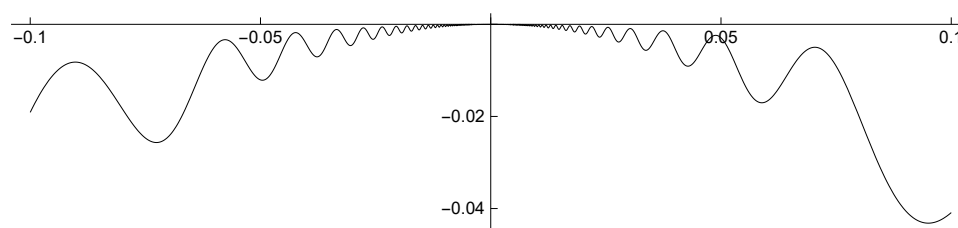
¹⁰⁹[11, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 36, 38, 41, 42, 43, 45, 78]



Obrázek 1.3: Graf spojitě funkce nemající derivaci v bodě 0.



Obrázek 1.4: Graf funkce rostoucí v nule, ale ne na žádném jejím okolí.



Obrázek 1.5: Graf funkce, která není nalevo od bodu, v němž má maximum, rostoucí, a napravo od bodu, v němž má maximum, klesající.

1.4 Integrál

1.4.1 Neurčitý integrál

Většina materiálů ještě před definicí určitého integrálu definuje tzv. neurčitý integrál, a to pomocí primitivní funkce k f (tedy takové funkce F , že $F' = f$)¹¹⁰; úkol najít takovou funkci pak využívají jako motivaci pro zavedení integrálního počtu. Sbírka [40] uvádí pro praktickou motivaci následující příklad: „Do Macochy jsi vhodil kámen z Horního můstku. Za 3,5 sekundy prolétal kolem Dolního můstku a na konci 5. sekundy dopadl na dno propasti. V jaké výšce ode dna Macochy se nachází Dolní můstek?“ Menší část materiálů probírá neurčitý integrál až po určitém¹¹¹.

Většina materiálů zmiňuje, že primitivní funkce se liší o aditivní konstantu¹¹². Neurčitý integrál funkce f pak značí v materiálech jednu z takovýchto funkcí¹¹³, množinu všech primitivních funkcí¹¹⁴ nebo jen synonymum k výrazu *primitivní funkce*¹¹⁵. Souhrnná sbírka [36] pak k pojmu neurčitý integrál pouze poznamenává následující: „Dříve se symbol $\int f(x)dx$ nazýval neurčitý integrál. Úloha najít k dané funkci primitivní je pak formulována jako výpočet neurčitýho integrálu dané funkce.“

V některých materiálech se také dozvíme, že ne každá funkce má primitivní funkci¹¹⁶; některé materiály pouze uvádí, že existují funkce, jejichž primitivní funkci nelze vyjádřit konečným počtem elementárních funkcí¹¹⁷. Řada materiálů dále uvádí postačující podmínku pro existenci primitivní funkce, tedy že každá spojitá funkce má funkci primitivní¹¹⁸. Uvědomme si ale, že se nejedná o nutnou podmínku — v sekci 4.1 a v sekci 5.2 si představíme funkce, které mají nespojitou derivaci, tedy primitivní funkce k jejich derivacím existují.

Vysokoškolské učebnice a některé souhrnné materiály uvádějí následující větu, která dává do souvislosti neurčitý a určitý integrál¹¹⁹. Text [29] dokonce přímo definuje primitivní funkci tímto vztahem.

Věta 5. *Nechť je dána spojitá funkce f v otevřeném intervalu (a,b) . Potom pro libovolné $c \in (a,b)$ je*

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt$$

primitivní funkcí k funkci f .

Většina materiálů tedy představuje integrování jako opačný proces k derivování, tedy samozřejmě každá derivace má určitý integrál. Uvědomme si ale, že pro neurčitý integrál toto neplatí tak automaticky — v sekci 5.2 se zmíníme o funkcích, jejichž derivace nemá určitý (konkrétně Riemannův) integrál. Z materiálů je ovšem patrné, že proces integrování je mnohem složitější než proces derivování.

¹¹⁰[11, 14, 16, 17, 18, 21, 22, 24, 26, 27, 30, 33, 34, 36, 38, 41, 42, 45]

¹¹¹[20, 29, 43]

¹¹²[11, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 26, 27, 30, 33, 34, 36, 38, 40, 41, 42, 45]

¹¹³[11, 20, 29, 40, 42]

¹¹⁴[11, 14, 16, 17, 18, 22, 24, 26, 27, 30, 34, 38, 41, 42, 45]

¹¹⁵[21, 33]

¹¹⁶[18, 20, 24, 43, 45]

¹¹⁷[17, 22]

¹¹⁸[11, 17, 18, 20, 21, 24, 26, 27, 30, 42, 45]

¹¹⁹[18, 20, 24, 26, 27, 29]

Skriptu [27] ostatně doslova uvádí: „Při řešení složitějších případů doporučujeme spolupráci s matematikem.“

1.4.2 Určitý integrál

V této práci nás bude zajímat především určitý integrál, konkrétně Riemannův, takže se i v této analýze zaměříme převážně na něj. Nejdříve si ujasněme definice (převzato z [20]).

Definice 12 (Dělení). *Nechť je dána funkce f a interval $\langle a, b \rangle$, na kterém je funkce f omezená.*

- Jsou-li dány body $x_0, \dots, x_n$, pro které platí

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n,$$

řekneme, že je na intervalu $\langle a, b \rangle$ definováno dělení D a body $x_0, \dots, x_n$ nazveme dělicími body tohoto dělení.

- Funkci ν definovanou předpisem

$$\nu(D) = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

nazveme normou dělení D .

- Pokud je pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$ hodnota $x_i - x_{i-1}$ stejná, řekneme, že dělení je ekvidistantní.

Definice 13 (Horní a dolní součet). *Nechť D je dělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Definujeme horní součet příslušný k dělení D jako*

$$S(D) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x)$$

a dolní součet příslušný k dělení D jako

$$s(D) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x).$$

Definice 14 (Riemannův integrál). *Nechť je dána funkce f a interval $\langle a, b \rangle$, na kterém je funkce f omezená. Definujeme horní (Riemannův) integrál funkce f od a do b jako*

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf \{ S(D) \mid D \text{ je dělení } \langle a, b \rangle \}$$

a dolní (Riemannův) integrál funkce f od a do b jako

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx = \sup \{ s(D) \mid D \text{ je dělení } \langle a, b \rangle \}.$$

Pokud je horní Riemannův integrál roven dolnímu Riemannovu integrálu, řekneme, že je funkce f riemannovsky integrovatelná a definujeme jejich společnou hodnotu jako Riemannův integrál funkce f a značíme

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Určitý integrál motivují materiály převážně přes výpočet plochy ohraničené grafem funkce, osou x a přímkami s rovnicemi $x = a$ a $x = b$ ¹²⁰. Většina z nich si pomáhá obrázkem, v [24] nalezneme dokonce obrázek s nespojitou funkcí. Některé materiály z tohoto důvodu uvádějí také jednotky za určitým integrálem¹²¹; učebnice [14] výslovně požaduje, aby byly u výsledku jednotky uvedeny, ovšem v konkrétních příkladech jsou jednotky vynechávány. Ve videu [90] najdeme jako motivaci výpočet dráhy ujeté mezi dvěma časovými okamžiky, znám-li závislost rychlosti na čase.

Ne všechny materiály samozřejmě uvádějí tak podrobnou definici, jakou jsme uvedli, ale pokud definují Riemannův integrál, pak ji alespoň myšlenkově (často za pomoci čtených slovních opisů a obrázků) následují. Riemannův integrál definuje poměrně dost tištěných materiálů¹²² i videomateriálů¹²³. Následně tyto materiály dávají „návod“, jak určitý integrál vypočítat, je-li funkce spojitá, a to pomocí Newtonovy-Leibnizovy věty (věta 6). Převážně středoškolské učebnice, ale i některé souhrnné publikace a videomateriály začínají výklad integrálu právě touto větou, kterou používají jako definici určitého (tzv. Newtonova) integrálu¹²⁴ (video [92] dokonce bez jakékoli předchozí motivace), některé další pak uvádějí i definici určitého integrálu pomocí horních a dolních součtů¹²⁵; učebnice [16] pouze zmiňuje existenci Riemannova a Lebesgueova integrálu jako příklad silnějších integrálů¹²⁶ — na rozdíl od Newtonova integrálu dokáže totiž Riemannův zintegrovat např. i „hodně nespojitě“ funkce, jak uvidíme v sekci 5.1. Zmiňme už jen pro zajímavost, že v [14] nalezneme ve vztahu k výpočtu Riemannova integrálu následující poznámku: „Pokud tedy dokážeš udělat těch obdélníčků nekonečně mnoho, tak získáš přesný výsledek a tím bude obsah S . Což ti pak v praxi neulehčí zrovna moc práce.“ My ovšem přesně tímto způsobem (tj. přímo z definice) spočítáme velmi snadno Riemannův integrál Thomaeovy funkce v podsekci 5.1.1.

Věta 6 (Newtonova-Leibnizova věta). *Nechť je dána funkce f taková, že integrál $\int_a^b f(x)dx$ existuje a F je primitivní funkce k f . Potom je*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

V definici Riemannova integrálu nalezneme napříč materiály nejružnější odchylky od naší definice, např. společnou limitu horních a dolních součtů místo suprema a infima¹²⁷, jeden součet s výběrem hodnoty (namísto maxima či minima) buď v bodě, kde je hodnota derivace rovna směrnici přímky spojující funkční hodnoty v krajních bodech intervalů dělení¹²⁸, nebo libovolně¹²⁹ s tím, že integrál existuje, pokud existuje limita s normou dělení (ač tak není nazývána) jdoucí k nule — [18] tento výběr uvádí jako další ekvivalentní možnost.

¹²⁰[11, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 30, 33, 38, 42, 43, 85, 86, 88, 89, 90, 91]

¹²¹[14, 40]

¹²²[17, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 29, 30, 33, 34, 36, 41, 43]

¹²³[86, 88, 89, 91]

¹²⁴[16, 34, 38, 40, 42, 45, 85, 87, 92]

¹²⁵[11, 14, 90]

¹²⁶Ačkoli toto není tak úplně pravda — například existují funkce integrovatelné newtonovsky, ale ne riemannovsky nebo lebesgueovsky

¹²⁷[18, 26, 43]

¹²⁸[16]

¹²⁹[22, 27, 36, 43, 86, 89, 90, 91]

Učebnice [17] uvádí i možnost aproximace obsahu pomocí lichoběžníků (namísto obdélníků). Text [29] pak povoluje pouze ekvidistantní dělení. Zajímavý přístup zaujímá [87], kde se dozvíme, že v zápise $\int f(x)dx$ můžeme $f(x)$ chápat jako výšku obdélníčku, dx jako jeho šířku a s pomocí integrálu pak nasčítáme všechny tyto obsahy (tj. „ $f(x) \cdot dx$ “) přes nekonečně malé šířky obdélníčků.

Co se týče požadavků na spojitost riemannovsky integrovatelné funkce; některé materiály výslovně uvádí, že tato funkce musí být spojitá¹³⁰, stejně tak i [41], ale ten připojuje poznámku, že integrál lze zavést i pro nespojité funkce. Jiné materiály výslovně upozorňují, že integrovaná funkce nemusí být spojitá¹³¹ a [17] naopak upozorňuje, že pokud funkce není spojitá, nemusí integrál existovat — funkce, které jsou nespojité na „příliš velké“ množině na to, aby měly Riemannův integrál, si ukážeme v sekcích 3.1.1 a 5.2.1; na počátku sekce 5.1 si pak dokážeme větu 79, která nám řekne, nakolik může být funkce nespojitá, aby ještě měla Riemannův integrál.

¹³⁰[33, 91]

¹³¹[26, 89]

2. Teoretická příprava

Ještě než se pustíme do přehledu rozličných podivných funkcí, připomeňme si základní teoretické výsledky. Tato práce není učebnicí matematické analýzy, takže neočekáváme, že by čtenář z následujících stránek získal plné pochopení zmiňovaných oborů — tedy teorie metrických prostorů, Lebesgueovy míry a řetězových zlomků. Důvodem existence této kapitoly je spíše shrnutí a ujasnění znění definic a tvrzení, které budeme v následujících kapitolách potřebovat.

Zároveň si v této kapitole ukážeme teorii, která jsou nad rámec běžného učiva; nejdůležitější je Baireova kategorie a zejména pak věta 25 (na straně 41).

2.1 Shrnutí důležitých výsledků z matematické analýzy

Čtenář, který má za sebou základní kurz matematické analýzy, jistě následující definice a věty zná. Raději si je zde ale pro přehled uvedeme, protože v dalším textu práce se na ně budeme odkazovat.

2.1.1 Spojitost

V sekci 1.2 jsme si definovali spojitost funkce v bodě a následně na intervalu. Pro připomenutí, funkce f byla na intervalu I spojitá, pokud

$$(\forall x \in I) (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall y \in I) (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Nyní si přidáme další definice, které spojitost na intervalu rozšiřují.

Definice 15 (Stejněměrná spojitost). *Řekneme, že funkce f je na intervalu I stejněměrně spojitá, pokud*

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x, y \in I) (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Definice 16 (Absolutní spojitost). *Řekneme, že funkce f je na intervalu $\langle a, b \rangle$ absolutně spojitá, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje δ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každou množinu intervalů $\langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle, \dots, \langle a_n, b_n \rangle$, pro kterou platí*

$$a \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b,$$

platí

$$\sum_{i=1}^n |a_i - b_i| < \delta \implies \sum_{i=1}^n |f(a_i) - f(b_i)| < \varepsilon.$$

Věta 7. *Nechť je funkce f spojitá na omezeném uzavřeném intervalu I . Potom je na tomto intervalu stejněměrně spojitá.*

2.1.2 Posloupnosti a řady funkcí

Definice 17 (Bodová konvergence posloupnosti funkcí). *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu I . Řekneme, že tato posloupnost na intervalu I konverguje bodově k funkci f (zapisujeme $f_n \rightarrow f$), pokud*

$$(\forall x \in I) (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Definice 18 (Stejnomořná konvergence posloupnosti funkcí). *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu I . Řekneme, že tato posloupnost na intervalu I konverguje stejnoměrně k funkci f (zapisujeme $f_n \rightrightarrows f$), pokud*

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) (\forall x \in I) (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Poznámka. Povšimněme si, že výrok v definici 18 můžeme ekvivalentně psát

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) \left(\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right),$$

neboli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Definice 19 (Konvergence řad funkcí). *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu I . Řekneme, že řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{2.1}$$

na intervalu I konverguje, jestliže posloupnost částečných součtů konverguje na I .

Řekneme, že řada (2.1) na intervalu I konverguje stejnoměrně, pokud posloupnost částečných součtů konverguje stejnoměrně na I .

Věta 8 (Weierstrassovo kritérium pro konvergenci řad funkcí). *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu I a existuje posloupnost kladných čísel $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že*

$$(a) (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in I) (|f_n(x)| \leq A_n),$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{ konverguje.}$$

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně.

Ve znění následující věty používáme pojmy ze sekce 2.2.

Věta 9 (Moorova–Osgoodova věta). *Nechť je (P, ρ) metrický prostor, $M \subseteq X$, a je hromadný bod množiny M . Nechť jsou dány funkce $f_n, f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Pokud platí*

$$(a) f_n \rightrightarrows f \text{ na } M,$$

$$(b) \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N} \text{ existuje } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f_n(x) = A_n \in \mathbb{R},$$

pak platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f_n(x) \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right).$$

Věta 10. *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost spojitých funkcí definovaných na intervalu I . Pokud $f_n \Rightarrow f$ (tedy konverguje stejnoměrně), pak f je také spojitá.*

Věta 11. *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost spojitých funkcí definovaných na intervalu I . Pokud $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně, pak je funkce f zadaná touto řadou také spojitá.*

2.2 Metrické prostory

Než přistoupíme k hlavnímu tématu této sekce, to jest k Baireově větě, připomeňme si některé základní pojmy a výsledky z teorie metrických prostorů, které budeme používat nejen pro důkaz Baireovy věty, ale i dále v této práci. Definice a tvrzení jsou převzaty z [94], kde také čtenář může najít příslušné důkazy.

Definice 20 (Metrický prostor). *Nechť P je množina. Funkci $\varrho : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme metrika na P , jestliže pro každé $x, y, z \in P$ platí následující podmínky:*

- (i) $\varrho(x, y) \geq 0$,
- (ii) $\varrho(x, y) = 0 \iff x = y$,
- (iii) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,
- (iv) $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$.

Dvojici (P, ϱ) nazýváme metrický prostor.

Definice 21 (Průměr množiny). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subseteq P$. Funkci*

$$\text{diam}(M) = \begin{cases} \sup \{ \varrho(x, y) : x, y \in M \} & M \neq \emptyset, \\ 0 & M = \emptyset \end{cases}$$

nazýváme průměr množiny M .

Definice 22 (Konvergence v metrickém prostoru). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z P je konvergentní a konverguje k bodu $x \in P$, jestliže*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(x_n, x) = 0.$$

Otevřené a uzavřené množiny

Definice 23 (Otevřená a uzavřená koule). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Množinu*

$$B(x, r) = \{y \in P : \varrho(y, x) < r\}$$

nazýváme otevřenou koulí se středem x a poloměrem r .

Množinu

$$K(x, r) = \{y \in P : \varrho(y, x) \leq r\}$$

nazýváme uzavřenou koulí se středem x a poloměrem r .

Definice 24 (Otevřená a uzavřená množina). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $M \subseteq P$ je otevřená, jestliže*

$$(\forall x \in M) (\exists r > 0) (B(x, r) \subseteq M).$$

Řekneme, že množina je uzavřená, jestliže její doplněk je otevřená množina.

Poznámka. Uvědomme si, že v otevřené množině M najdeme ke každému jejímu bodu $x \in M$ rovněž uzavřenou kouli obsaženou v této množině — stačí vzít například poloviční poloměr příslušné otevřené koule.

Tvrzení 12. *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor.*

1. *Každá otevřená koule $B(x, r) \subseteq P$ je otevřená množina.*
2. *Každá uzavřená koule $K(x, r) \subseteq P$ je uzavřená množina.*

Tvrzení 13. *Nechť X a Y jsou otevřené množiny. Pak $X \cap Y$ je otevřená množina.*

Tvrzení 14. *Nechť I je libovolná indexová množina. Nechť pro všechna $i \in I$ jsou množiny X_i otevřené. Pak $\bigcup_{i \in I} X_i$ je otevřená množina.*

Definice 25 (Vnitřní, vnější, hraniční, izolovaný a hraniční bod množiny). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subseteq P$. Řekneme, že bod $x \in M$ je*

- *vnitřním bodem množiny M , pokud existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subseteq M$,*
- *vnějším bodem množiny M , pokud existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subseteq P \setminus M$,*
- *hraničním bodem množiny M , pokud pro každé $r > 0$ je $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap P \setminus M \neq \emptyset$,*
- *izolovaným bodem množiny M , pokud existuje $r > 0$ takové, že $M \cap B(x, r) = \{x\}$,*
- *hromadným bodem množiny M , pokud pro každé $r > 0$ je množina $M \cap B(x, r)$ nekonečná.*

Dále označíme

- M° *vnitřek množiny M , tj. množinu všech jejích vnitřních bodů,*
- ∂M *hranici množiny M , tj. množinu všech jejích hraničních bodů,*
- $\overline{M}$ *uzávěr množiny M , tj. množinu $M \cup \partial M$.*

Tvrzení 15. *Množina M je uzavřená právě tehdy, když $\overline{M} = M$.*

Tvrzení 16. *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subseteq P$. Pokud pro libovolnou konvergentní posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ takovou, že $a_n \in M$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in M$, pak je M uzavřená množina.*

Definice 26 (Spojité zobrazení). *Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory. Řekneme, že zobrazení $f : P \rightarrow Q$ je spojité v bodě $x_0 \in P$, jestliže*

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in P) (\varrho(x_0, x) < \delta \implies \sigma(f(x_0), f(x)) < \varepsilon).$$

Řekneme, že zobrazení $f : P \rightarrow Q$ je spojité, pokud je spojité ve všech bodech $x \in P$.

Tvrzení 17. *Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory. Následující výroky jsou ekvivalentní.*

- *Zobrazení $f : P \rightarrow Q$ je spojité.*
- *Je-li $M \subseteq Q$ otevřená, pak $f^{-1}(M) = \{x \in P \mid f(x) \in M\}$ je otevřená.*

Husté a řídké množiny

Definice 27 (Hustá a řídká množina). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor.*

Řekneme, že množina $M \subseteq P$ je hustá v prostoru (P, ϱ) , jestliže

$$(\forall x \in P) (\forall r > 0) (M \cap B(x, r) \neq \emptyset).$$

Řekneme, že množina $M \subseteq P$ je řídká v prostoru (P, ϱ) , jestliže¹

$$(\overline{M})^\circ = \emptyset.$$

Poznámka. Je zřejmé, že je-li množina M řídká, je i množina $\overline{M}$ řídká.

Poznámka. Není těžké si rozmyslet, že řídká množina nemůže být hustá a naopak hustá množina nemůže být řídká.

Tvrzení 18. *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Je-li množina M řídká, pak množina $P \setminus M$ je hustá.*

Tvrzení 19. *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Je-li množina M hustá a otevřená, pak množina $P \setminus M$ je řídká.*

Poznámka. Obecně neplatí, že doplňkem husté množiny je řídká — např. množina $\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$ a její doplněk, tedy $\mathbb{I}$ je rovněž hustá v $\mathbb{R}$.

Tvrzení 20. *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Je-li $M \subseteq P$ uzavřená a neobsahuje žádnou otevřenou kouli, pak je řídká.*

Tvrzení 21. *Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a zobrazení $f : P \rightarrow Q$ je spojité. Pokud je $M \subseteq P$ hustá, pak je $\{f(x) \in Q \mid x \in M\}$ hustá.*

Úplné prostory

Definice 28 (Limita posloupnosti). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost bodů $x_n \in X$. Jestliže existuje bod $x \in X$ takový, že*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(x_n, x) = 0,$$

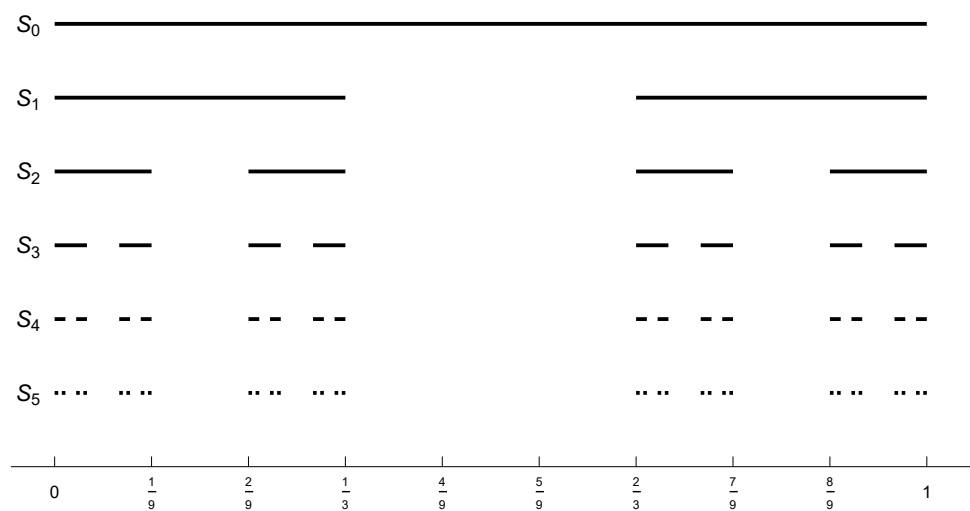
říkáme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je konvergentní a bod x nazýváme limita posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$.

Definice 29 (Cauchyovská posloupnost). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská, jestliže*

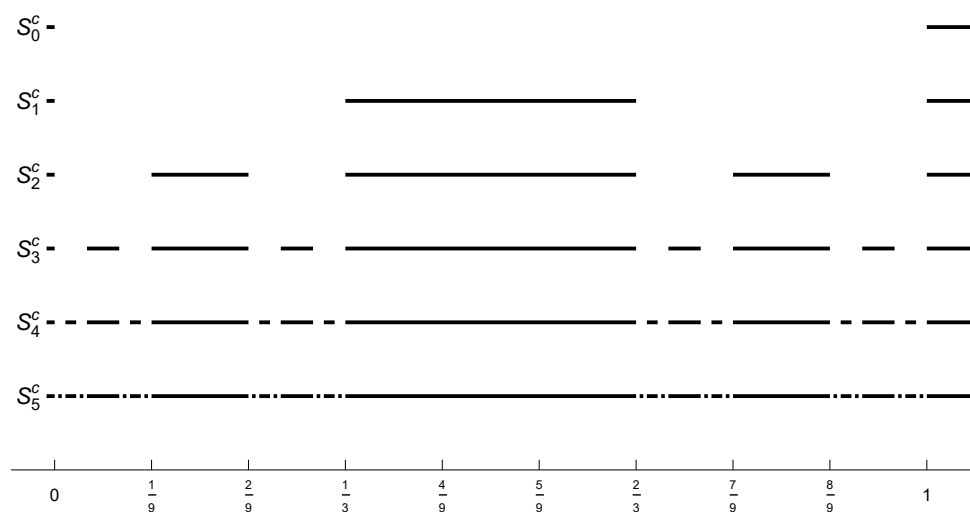
$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists k \in \mathbb{N}) (\forall m, n \geq k) (\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon).$$

Definice 30 (Úplný metrický prostor). *Řekneme, že metrický prostor (X, d) je úplný, pokud každá cauchyovská posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ($x_n \in X$) je konvergentní.*

Tvrzení 22. *Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor a $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost neprázdných uzavřených množin v prostoru (P, ϱ) takových, že $\forall n \in \mathbb{N} : A_{n+1} \subseteq A_n$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(A_n) = 0$. Potom existuje právě jeden bod $x \in P$ takový, že $\{x\} = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$.*



Obrázek 2.1: Nultá až pátá iterace vzniku Cantorovy množiny.



Obrázek 2.2: Nultá až pátá iterace vzniku doplňku Cantorovy množiny.

2.2.1 Cantorova množina

Uveďme si na tomto místě jeden zajímavý příklad — tzv. Cantorovu množinu. Cantor ji definoval v poznámkách na konci svého článku *Fondements d'une théorie générale des ensembles*², a to jako množinu bodů

$$x = \frac{c_1}{3^1} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{c_3}{3^3} + \dots + \frac{c_k}{3^k} + \dots,$$

kde $c_n \in \{0, 2\}$ — jinými slovy, jedná se o všechny body intervalu $(0, 1)$, pro něž existuje zápis v trojkové soustavě, který obsahuje pouze číslice 0 a 2 [95]. Snadno bychom dokázali, že tato množina je nespočetná (např. Cantorovou diagonální metodou, tedy stejně jako pro množinu reálných čísel).

Cantor ve své další práci [96] poznamenává jednoduchý fakt, totiž že doplněk této množiny tvoří spočetné sjednocení intervalů $\langle a_n, b_n \rangle$, jejichž hraniční body a_n a b_n můžeme spočítat následovně:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{c_1}{3^1} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{c_3}{3^3} + \dots + \frac{c_{k-1}}{3^{k-1}} + \frac{0}{3^k} + \frac{2}{3^{k+1}} + \frac{2}{3^{k+2}} + \frac{2}{3^{k+3}} + \dots \\ &= \frac{c_1}{3^1} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{c_3}{3^3} + \dots + \frac{c_{k-1}}{3^{k-1}} + \frac{1}{3^k}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$b_n = \frac{c_1}{3^1} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{c_3}{3^3} + \dots + \frac{c_{k-1}}{3^{k-1}} + \frac{2}{3^k}. \quad (2.3)$$

Jednoduchým výpočtem dostáváme posloupnost intervalů $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^\infty$, jejichž body tato posloupnost neobsahuje, avšak obsahuje jejich hraniční body.

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right), \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right), \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right), \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right), \dots \quad (2.4)$$

Graficky si tento postup můžeme představit následovně. V nulté iteraci máme množinu $S_0 = \langle 0, 1 \rangle$. V první iteraci odebereme z tohoto intervalu jeho prostřední třetinu, tj. interval $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, čímž dostaneme $S_1 = \langle 0, \frac{1}{3} \rangle \cup \langle \frac{2}{3}, 1 \rangle$. Tento algoritmus aplikujeme dále na každý z intervalů, z nichž se skládá množina S_1 , tj. odebíráme intervaly $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ a $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, tzn., že množina S_2 se skládá ze čtyř intervalů.

Takto pokračujeme dále — obecně se množina S_n skládá z 2^n intervalů, množinu S_{n+1} vytvoříme odebráním prostřední třetiny (otevřeného intervalu) z každého intervalu. Cantorovu množinu tedy definujeme následovně.

Definice 31 (Cantorova množina). *Nechť jsou pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ zkonstruovány množiny S_n jako výše. Potom definujeme Cantorovu množinu jako*

$$S = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n. \quad (2.5)$$

Snadno si rozmyslíme, že množina S je doplňkem ke sjednocení všech odebíraných intervalů, tj. členů posloupnosti (2.4) a intervalů $(-\infty, 0)$ a $(1, \infty)$ [97]. Tuto množinu označíme

$$S^c = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n^c, \quad (2.6)$$

¹Jiří Veselý definuje řídkou množinu vlastností $\overline{P \setminus \overline{M}} = P$ a uvedenou definici uvádí jako lemma (Lemma 13.2.27). Pro naše potřeby však bude jednodušší definovat řídkou množinu rovnou takto.

²Základy obecné teorie množin

kde $S_n^c = P \setminus S_n$ (a samozřejmě z De Morganových pravidel je $S^c = P \setminus S$). Náznak postupného vzniku Cantorovy množiny S můžeme vidět na obrázku 2.1, náznak postupného vzniku doplňku Cantorovy množiny S^c pak na obrázku 2.2.

Následující jednoduché tvrzení ukazuje vlastnosti Cantorovy množiny.

Tvrzení 23. *Cantorova množina S je uzavřená a řídká v $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Množiny S_n^c jsou otevřené a $S^c = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n^c$. Podle tvrzení 14 je tedy množina S^c otevřená. Množina S je pak doplňkem množiny S^c , tudíž je uzavřená.

Jednoduše nahlédneme, že délka intervalů, ze kterých se skládá množina S_n , je rovna $\frac{1}{3^n}$, tedy pro $n \rightarrow \infty$ se délky těchto intervalů blíží nule. Množina S tedy neobsahuje žádný nedegenerovaný interval (tj. interval kladné délky). Podle tvrzení 20 je množina C řídká. $\square$

Na závěr si ještě spočítáme Lebesgueovu míru Cantorovy množiny. Té se budeme věnovat v sekci 2.3, takže potřebné definice a tvrzení najde čtenář tam.

Tvrzení 24. *Míra Cantorovy množiny je nulová.*

Důkaz. Podle tvrzení 27 je míra množiny $\langle 0,1 \rangle \setminus S$ rovna součtu délek odstraňovaných intervalů S_n^c , tedy

$$\lambda(\langle 0,1 \rangle \setminus S) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Podle tvrzení 28 je tedy

$$\lambda(S) = \lambda(\langle 0,1 \rangle) - \lambda(\langle 0,1 \rangle \setminus S) = 1 - 1 = 0. \quad \square$$

2.2.2 Baireova kategorie

Teorie Baireovy kategorie nabízí další pohled na klasifikaci množin. Hlavně ale můžeme tuto teorii použít k existenčním důkazům — o tom bude ještě řeč později. Tato sekce byla zpracována podle [98].

Definice 32 (Množiny 1. a 2. kategorie). *Nechť (P, ρ) je metrický prostor.*

Množinu M nazveme množinou 1. kategorie v (P, ρ) , jestliže existují řídké množiny $M_n \subseteq P$ takové, že

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Množinu M nazveme množinou 2. kategorie v (P, ρ) , pokud není množinou 1. kategorie v (P, ρ) .

S množinami 1. kategorie v úplném metrickém prostoru se pak pojí následující věta.

Věta 25 (Baireova věta o kategoriích). *Nechť (P, ρ) je neprázdný úplný metrický prostor.*

1. *Jestliže $U_n \subseteq P$ ($n \in \mathbb{N}$) jsou husté otevřené množiny, pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ je hustá množina.*

2. Množina P není 1. kategorie v (P, ρ) .

Důkaz. 1. Spočetným sjednocením hustých otevřených množin je hustá množina
Mějme libovolné $x \in P$ a $r > 0$. Ukážeme, že

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n \cap B(x, r)) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right) \cap B(x, r) \neq \emptyset.$$

Protože U_1 je hustá, je $U_1 \cap B(x, r)$ neprázdná a protože U_1 i $B(x, r)$ (podle tvrzení 12) jsou otevřené, je podle tvrzení 13 množina $U_1 \cap B(x, r)$ otevřená. Podle poznámky za definicí 24 existují $x_1 \in X$ a $r_1 \in (0, r)$ takové, že

$$K(x_1, r_1) \subseteq U_1 \cap B(x, r).$$

Posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ budeme dále definovat induktivně. Předpokládejme, že máme definované členy x_n a r_n . Množina $U_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$ je ze stejných důvodů jako v předchozím odstavci neprázdná otevřená, můžeme tedy najít $x_{n+1} \in X$ a $r_{n+1} \in (0, \frac{r}{n})$ takové, že

$$K(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq U_{n+1} \cap B(x_n, r_n).$$

Zkonstruovali jsme tedy posloupnost uzavřených množin $K(x_n, r_n)$, které jsou neprázdné, pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$K(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq K(x_n, r_n)$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(K(x_n, r_n)) = 0.$$

Podle tvrzení 22 tedy existuje právě jeden bod x' takový, že

$$\{x'\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} K(x_n, r_n).$$

Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$x' \in K(x_n, r_n) \subseteq U_n \cap B(x, r),$$

Což znamená, že

$$x' \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n \cap B(x, r)) \neq \emptyset.$$

Protože x a r byly zvoleny libovolně, dostáváme, že množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ je hustá.

2. Množina P není 1. kategorie v (P, ρ)

Chceme dokázat, že množina P není spočetným sjednocením řídkých množin. Mějme tedy libovolnou posloupnost $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je M_n řídká množina. Z definice uzávěru množiny a De Morganových pravidel víme, že

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{M_n} = P \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} (P \setminus \overline{M_n}).$$

Víme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je M_n řídká množina. Podle poznámky za definicí 27 je i $\overline{M_n}$ řídká. Podle tvrzení 18 je pak $P \setminus \overline{M_n}$ hustá množina a protože se jedná o doplněk uzavřené množiny, je i otevřená. Podle části 1 je speciálně

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (P \setminus \overline{M_n}) \neq \emptyset,$$

z čehož je zřejmé, že

$$P \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} (P \setminus \overline{M_n}) \neq P,$$

tedy

$$P \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} (P \setminus \overline{M_n}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P \setminus P \setminus \overline{M_n}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{M_n} \neq P. \quad \square$$

Tuto větu můžeme využít při existenčních důkazech. Chceme-li totiž dokázat, že existují funkce, které mají nějakou vlastnost φ , můžeme postupovat tak, že najdeme vhodný úplný metrický prostor funkcí (P, ρ) a dokážeme, že množina funkcí M , které danou vlastnost φ nemají, je v tomto prostoru množinou 1. kategorie. Že existuje funkce s danou vlastností φ pak říká následující jednoduché lemma.

Lemma 26. *Necht (P, ρ) je neprázdný úplný metrický prostor a M je množina 1. kategorie v (P, ρ) . Pak*

$$P \setminus M \neq \emptyset.$$

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $P \setminus M = \emptyset$. To znamená, že $P = M$, a tedy P je 1. kategorie v (P, ρ) . To je ale spor s částí 2 věty 25. $\square$

2.3 Lebesgueova míra

Další důležitou oblastí matematiky, jejíž výsledky budeme v naší práci využívat, je teorie míry, a to na množině reálných čísel. Nebudeme tedy jednotlivé výsledky formulovat obecně, ale pouze pro množinu $\mathbb{R}$. Definice a tvrzení jsou převzaty z [99], kde je opět možné nalézt i příslušné důkazy.

Definice 33 (Lebesgueova míra). *Nechť je dána libovolná množina $A \subseteq \mathbb{R}$.*

- Vnější Lebesgueovu míru této množiny definujeme jako

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) \mid \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \supseteq A \right\}.$$

- Řekneme, že množina A je lebesgueovsky měřitelná, pokud pro každý omezený interval $I \subseteq \mathbb{R}$ platí

$$\lambda^*(I) = \lambda^*(A \cap I) + \lambda^*(I \setminus A).$$

- Je-li množina A měřitelná, definujeme její Lebesgueovu míru jako

$$\lambda(A) = \lambda^*(A).$$

Poznámka. Všechny „normální“ množiny jsou měřitelné, takže tuto vlastnost nebudeme ověřovat. Speciálně jsou měřitelné všechny otevřené množiny, a vzhledem k níže uvedeným tvrzením i jejich doplňky (tj. uzavřené množiny) a spočetná sjednocení (tedy i průniky).

Poznámka. Míra je zobecněním délky — jedná se tedy o funkci, která množině přiřazuje nezáporné číslo. Kromě Lebesgueovy míry existují i jiné míry, ovšem v této práci se jimi nebudeme zabývat. Budeme-li tedy někdy mluvit pouze o míře, budeme tím vždy myslet právě Lebesgueovu míru.

Tvrzení 27 (Míra sjednocení). *Nechť $I \subseteq \mathbb{N}$ je libovolná indexová množina a A_i jsou měřitelné množiny. Potom*

$$\lambda \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \leq \sum_{i \in I} \lambda(A_i).$$

Pokud jsou navíc A_i po dvou disjunktní, pak platí

$$\lambda \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \sum_{i \in I} \lambda(A_i).$$

Tvrzení 28 (Míra doplňku). *Nechť jsou $A, B \subseteq \mathbb{R}$ libovolné měřitelné množiny a platí $A \subseteq B$. Potom*

$$\lambda(B \setminus A) = \lambda(B) - \lambda(A).$$

Tvrzení 29 (Monotonie míry). *Nechť jsou $A, B \subseteq \mathbb{R}$ libovolné měřitelné množiny a platí $A \subseteq B$. Potom*

$$\lambda(A) \leq \lambda(B).$$

2.3.1 Pojem *skoro všude*

Z důvodů, které si osvětlíme v sekci 2.6 nás v některých případech nebudou zajímat množiny nulové míry (jakožto „malé“). Pokud má tedy funkce nějakou vlastnost ve všech bodech svého definičního oboru vyjma jeho podmnožiny s mírou nula, řekneme, že má tuto vlastnost *skoro všude*. Například v podsekcí 3.2.1 uvidíme funkci, která má nulovou derivaci *skoro všude*, v podsekcí 4.3.1 pak funkci, která má nulovou derivaci *skoro všude*, ale není na žádném intervalu konstantní — obě tyto funkce mají tuto vlastnost *skoro všude*, ale ne všude, což jim umožňuje nebýt konstantní na celém definičním oboru.

Tvrzení 30. *Nechť $I \subseteq \mathbb{N}$ je libovolná indexová množina a A_i jsou množiny míry nula. Potom*

$$\lambda \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = 0.$$

Příklad. Triviálně vidíme přímo z definice, že míra jednobodové množiny je nulová. Podle tvrzení 30 má tedy i libovolná spočetná množina míru nula. Například $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$. Zároveň ale existují nespočetné množiny, které mají míru 0 (viz například Cantorovu množinu v podsekcí).

Na závěr si připomeňme ještě jeden klasický výsledek, který v této práci několikrát použijeme.

Věta 31 (Lebesgueova věta). *Nechť je funkce f monotónní na intervalu I . Potom f má vlastní derivaci skoro všude na intervalu I .*

2.4 Řetězové zlomky

Ačkoli se v naší práci věnujeme matematické analýze, nevyhneme se alespoň základním poznatkům z teorie kolem řetězových zlomků, které patří spíše do aritmetiky — řetězové zlomky totiž využijeme v podsekcí 4.3.1, v níž se budeme věnovat Minkowského funkci. Definice a tvrzení jsou převzaty z [100], ovšem v této práci uvádíme pouze stručný výtah, který bude důležitý pro tuto práci.

Definice 34 (Řetězové zlomky). *Nechť je dáno číslo $x \in \mathbb{R}$*

- Konečný řetězový zlomek čísla x je výraz

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}},$$

kde $a_n \neq 0$, který zapisujeme také jako $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$.

- Nechť je dáno číslo $x = [a_0; a_1, \dots, a_k, \dots, a_n]$. Číslo $u_k = [a_0; a_1, \dots, a_k]$ nazveme k -tým konvergentem čísla x .
- Nekonečný řetězový zlomek čísla x je výraz

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\dots + \frac{1}{\dots}}}}}}.$$

který zapisujeme také jako $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ a chápeme jako limitu konvergentů $u_n = [a_0; a_1, \dots, a_n]$.

Tvrzení 32. 1. Každému racionálnímu číslu odpovídá právě jeden konečný řetězový zlomek a každému konečnému řetězovému zlomku odpovídá právě jedno racionální číslo.

2. Každému iracionálnímu číslu odpovídá právě jeden nekonečný řetězový zlomek a každému nekonečnému řetězovému zlomku odpovídá právě jedno iracionální číslo.

Důkaz. Toto tvrzení plyne z řady úvah a vět uvedených v [100], které jsou následně shrnuty do věty IV.6 (strana 165) a IV.45 (strana 184). $\square$

Příklad. Číslo $\frac{25}{9}$ můžeme rozepsat do podoby řetězového zlomku

$$\frac{25}{9} = 2 + \frac{7}{9} = 2 + \frac{1}{\frac{9}{7}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{7}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}},$$

což můžeme rovněž zapsat jako $\frac{25}{9} = [2; 1, 3, 2]$.

Tvrzení 33. *Nechť je dáno číslo x dané konečným či nekonečným řetězovým zlomkem. Pro jeho konvergenty $u_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}$ platí*

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, & p_1 &= a_0 \cdot a_1 + 1, & \text{pro } k \geq 2: & p_k &= p_{k-1} \cdot a_k + p_{k-2}, \\ q_0 &= 1, & q_1 &= a_1, & \text{pro } k \geq 2: & q_k &= q_{k-1} \cdot a_k + q_{k-2}, \end{aligned}$$

Důkaz. Větu dokážeme pomocí matematické indukce. Nejdříve spočítáme první tři konvergenty, tj. $u_0 = [a_0]$, $u_1 = [a_0; a_1]$, $u_2 = [a_0; a_1, a_2]$.

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{a_0}{1} \\ u_1 &= a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 \cdot a_1 + 1}{a_1} \\ u_2 &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 \cdot a_2 + 1} \\ &= \frac{a_0 \cdot (a_1 \cdot a_2 + 1) + a_2}{a_1 \cdot a_2 + 1} = \frac{(a_0 \cdot a_1 + 1) \cdot a_2 + a_0}{a_1 \cdot a_2 + 1} \end{aligned}$$

Dále předpokládejme, že tvrzení platí pro $k = n$ a dokážeme ho pro $k = n + 1$. Můžeme psát, že $u_{n+1} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}]$. Podle indukčního předpokladu tedy

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{p_{k-1} \cdot \left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) + p_{k-2}}{q_{k-1} \cdot \left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) + q_{k-2}} = \frac{(p_{k-1} \cdot a_n + p_{k-2}) + p_{k-1} \cdot \frac{1}{a_{n+1}}}{(q_{k-1} \cdot a_n + q_{k-2}) + q_{k-1} \cdot \frac{1}{a_{n+1}}} \\ &= \frac{p_k + p_{k-1} \cdot \frac{1}{a_{n+1}}}{q_k + q_{k-1} \cdot \frac{1}{a_{n+1}}} = \frac{\frac{p_k \cdot a_{n+1} + p_{k-1}}{a_{n+1}}}{\frac{q_k \cdot a_{n+1} + q_{k-1}}{a_{n+1}}} = \frac{p_k \cdot a_{n+1} + p_{k-1}}{q_k \cdot a_{n+1} + q_{k-1}} \end{aligned}$$

□

Tvrzení 34.

- Pro číslo $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ dané konečným řetězovým zlomkem platí

$$u_0 < u_2 < \dots < x = u_n < \dots < u_3 < u_1.$$

- Pro číslo $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ dané nekonečným řetězovým zlomkem platí

$$u_0 < u_2 < \dots < x = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n < \dots < u_3 < u_1.$$

Důkaz. Matematickou indukcí dokážeme následující dvě rovnosti, a sice pro $k \geq 1$ rovnost

$$u_k - u_{k-1} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k \cdot q_{k-1}} \quad (2.7)$$

a pro $k \geq 2$ rovnost

$$u_k - u_{k-2} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \frac{(-1)^k \cdot a_k}{q_k \cdot q_{k-2}}. \quad (2.8)$$

Z rovnosti (2.7) vyplývá, že pokud je k sudé, je $u_k - u_{k-1} < 0$, tj. $u_k < u_{k-1}$. Pokud je k liché, je $u_k - u_{k-1} > 0$, tj. $u_k > u_{k-1}$. Tedy všechny sudé konvergenty jsou menší než všechny liché konvergenty

Z rovnosti (2.8) vyplývá, že pokud je k sudé, je $u_k - u_{k-2} > 0$, tj. $u_k > u_{k-2}$. Pokud je k liché, je $u_k - u_{k-2} < 0$, tj. $u_k < u_{k-2}$. $\square$

Poznámka. Z rovnosti (2.7) je také vidět korektnost definice nekonečného řetězového zlomku. Z tvrzení 33 je zřejmé, že $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_k - u_{k-1}| = 0$.

2.5 Enumerace racionálních čísel

U řady funkcí budeme potřebovat nějakým způsobem seřadit do posloupnosti (tj. enumerovat) racionální čísla z intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Že to jde, víme z faktu, že racionální čísla jsou spočetnou množinou. Konkrétní příklad takového seřazení nám pak dávají například Fareyovy posloupnosti.

2.5.1 Fareyovy posloupnosti

Prvním, kdo pracoval s tzv. Fareyovými posloupnostmi, byl francouzský matematik Charles Haros, který v roce 1802 dokázal větu 35 [101]. V roce 1816 zmiňuje tuto větu anglický geolog John Farey ve svém dopise Alexanderu Tillochovi, a žádá jej o důkaz. Ten dopis uveřejnil ve svém časopise *The Philosophical Magazine*³ pod názvem *On a curious Property of vulgar Fractions*⁴ [102], kde jej následně objevil francouzský matematik Augustin Louis Cauchy a větu dokázal [101].

Definice 35 (Fareyovy posloupnosti). Fareyovy posloupnosti F_n jsou konečné posloupnosti vzestupně seřazených racionálních čísel z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ ve tvaru $\frac{a}{b}$, kde a, b jsou nesoudělná a platí

$$0 \leq a \leq b \leq n.$$

Tedy například $F_5 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right]$. Postupný vznik Fareyových posloupností můžeme vidět na následujícím obrázku.

$\frac{0}{1}$									$\frac{1}{1}$	
$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{2}$					$\frac{1}{1}$	
$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$			$\frac{1}{1}$	
$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{1}$	
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$

Poznámka. Každé racionální číslo z intervalu $(0,1)$ můžeme napsat ve tvaru $\frac{m}{n}$, kde m, n jsou nesoudělná. Je tedy zřejmé, že pro všechna $k \geq n$ bude $\frac{m}{n}$ prvkem posloupnosti F_k .

Pro Fareyovy posloupnosti platí zajímavá věta 35. Pro snazší použití v dalším textu práce si ale nejdříve definujeme tzv. mediant.

Definice 36 (Mediant). Necht jsou dána dvě racionální čísla $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$ (zlomky jsou v základním tvaru). Jejich mediant definujeme jako

$$\frac{a+c}{b+d}.$$

³Filozofický časopis

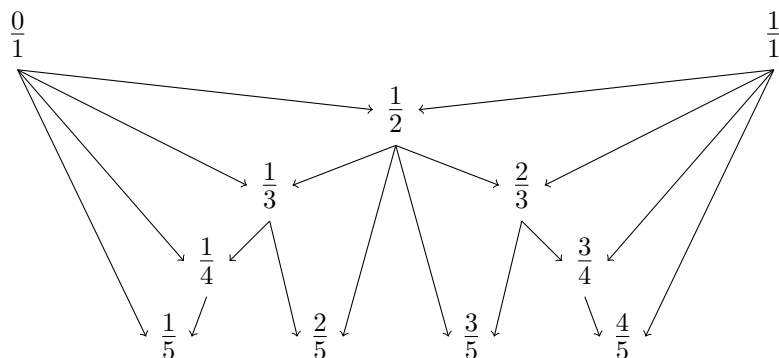
⁴O zvláštní vlastnosti zlomků

Věta 35. *Nechť jsou čísla $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}$ tři po sobě jdoucí prvky nějaké Fareyovy posloupnosti. Pak platí*

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 + a_3}{b_1 + b_3}.$$

Důkaz. Důkaz nalezneme v [101], kapitola III, věta 29 (strana 23 a dále). $\square$

Každý člen libovolné Fareyovy posloupnosti (kromě 0 a 1) je tedy mediantem dvou vedlejších hodnot. Postupné přibývání členů do Fareyových posloupností tedy můžeme zaznamenat v následujícím grafu.



Čteme-li tento strom po řádcích, dostáváme posloupnost $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ všech racionálních čísel z intervalu $\langle 0,1 \rangle$, tj.

$$\{q_i\}_{i=1}^{\infty} = \left[0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots \right] \quad (2.9)$$

2.6 Poznámka o „malých“ množinách

V této práci bude řeč především o nekonečných množinách — i ty ale můžeme rozlišovat na „malé“ a „velké“. Čtenář jistě ví, že racionální čísla, či dokonce algebraická čísla (kořeny polynomiálních rovnic s celočíselnými koeficienty), tvoří spočetnou množinu, zatímco reálná čísla jsou nespočetná, tj. jejich mohutnost je větší. Z toho mimo jiné víme, že kromě algebraických čísel existují i jiná reálná čísla (tzv. transcendentní čísla), a to aniž bychom nějaké takové číslo zkonstruovali.

Podobný princip můžeme aplikovat dále. Vzpomeňme si, že v lemmatu 26 (na straně 43) jsme dokázali, že úplný metrický prostor obsahuje kromě množiny 1. kategorie ještě i jiné prvky. Pokud tedy dokážeme, že je nějaká množina v úplném metrickém prostoru množinou 1. kategorie, víme, že tento prostor obsahuje kromě prvků této množiny i nějaké další prvky, a to — stejně jako u čísel transcendentních — aniž bychom nějaký takový prvek zkonstruovali. Toho využijeme v sekcích 4.2 a 4.4, abychom dokázali, že existují funkce určitých typů.

Podobně je tomu s množinami nulové Lebesgueovy míry. Má-li množina A kladnou míru a množina $B \subseteq A$ nulovou míru, víme podle tvrzení 28 (na straně 44), že míra množiny $A \setminus B$ je kladná, tedy zřejmě $A \setminus B \neq \emptyset$. Z toho je mimo jiné vidět, že platí-li nějaká vlastnost *skoro všude*, pak jistě platí alespoň v jednom bodě.

Spočetné množiny, množiny první kategorie a množiny nulové míry mají ještě jednu zajímavou společnou vlastnost. Vezměme například spočetně mnoho množin $M_n \subseteq X$, které jsou spočetné, zatímco X je nespočetná. Pak je zřejmé, že i $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_n$ je spočetná. Pokud tedy sjednotíme spočetně mnoho spočetných množin, výsledná množina stále nevyplní celou nespočetnou nadmnožinu.

Z definice množiny 1. kategorie je zřejmé, že vezmeme-li spočetně mnoho množin $M_n \subseteq X$, které jsou množinami 1. kategorie, zatímco (X, ρ) je úplný metrický prostor, je i $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_n$ množinou 1. kategorie, tedy množina M nevyplní celou množinu X (podle Baireovy věty). Stejně je tomu s množinami nulové míry — vezmeme-li spočetně mnoho množin $M_n \subseteq X$, které mají nulovou míru, zatímco X má kladnou míru, podle tvrzení 30 víme, že i $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_n$ má nulovou míru, a tedy nevyplní množinu kladné míry.

Tuto vlastnost mají v úplném metrickém prostoru i řídké množiny — spočetným sjednocením je totiž množina 1. kategorie (zároveň je zřejmé, že každá řídká množina je rovněž množinou 1. kategorie). Ta ovšem nemusí být řídká. Jako příklad vezmeme množinu racionálních čísel, kterou, jak víme, můžeme seřadit do posloupnosti $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$; definujme tedy jednobodové množiny $\{q_i\}$ — ty jsou jistě řídké, ale $\bigcup_{i=1}^{\infty} \{q_i\} = \mathbb{Q}$, tedy jde o hustou množinu.⁵

O množinách, které jsou spočetné, 1. kategorie, nulové míry nebo řídké, tedy řekneme, že jsou „malé“, o množinách nespočetných, reziduálních, plné míry nebo hustých pak řekneme, že jsou „velké“. Uvědomme si ale, že daná množina může být „malá“ z jednoho hlediska a „velká“ z jiného hlediska. Například Cantorova množina je sice řídká (tedy i 1. kategorie) a má nulovou míru, ale je nespočetná.

⁵Naopak tuto vlastnost nemají např. otevřené množiny. Spočetným sjednocením otevřených množin je sice otevřená množina (podle tvrzení 14), ale např. $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n) = \mathbb{R}$.

3. Podivnosti se spojitostí

V této části práce se podíváme na funkce, jejichž podivnost tkví v jejich spojitosti, případně nespojitosti. Konkrétně se zde budeme věnovat zejména Dirichletově a Cantorově funkci a jejich modifikacím, které z už tak podivných funkcí dělají funkce ještě o něco podivnější.

3.1 Funkce spojitě na konkrétní množině

V podsekcí 1.2.2 jsme viděli, že většina funkcí, s nimiž se žáci setkávají, jsou spojitě ve všech bodech vyjma konkrétních bodů. V této funkci budeme zkoumat funkce s přesně opačnou vlastností, tj. nespojitě ve všech bodech vyjma konkrétních bodů.

Do této sekce by bylo možné zařadit i Thomaeovu funkci, která je spojitá právě ve všech iracionálních bodech. Ta má však i další zajímavé vlastnosti, takže se s ní seznámíme až v kapitole o integrálech, konkrétně v podsekcí 5.1.1.

3.1.1 Dirichletova funkce (1829)

Jak jsme viděli v podsekcí 1.2.2, bývá Dirichletova funkce častým příkladem podivné funkce v mnohých vysokoškolských i některých středoškolských učebnicích. Náznak jejího grafu můžeme vidět na obrázku 3.1. Pro připomenutí uvedme její definici, s níž budeme pracovat.

Definice 37 (Dirichletova funkce). *Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme funkci ϕ předpisem*

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Tuto funkci poprvé zmínil Lejeune Dirichlet v roce 1829, kdy na konci článku *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*¹ [103] (v anglickém překladu [104]), v němž se věnuje konvergenci řad komplexních goniometrických funkcí, poznamenává možnost definování funkce takové, že pro racionální body má hodnotu nějaké konstanty, kdežto pro iracionální body má hodnotu odlišné konstanty. Nepoužívá tedy přímo hodnoty 1 a 0, nebylo by ale obtížné modifikovat následující výsledky pro jakékoli jiné dvě hodnoty.

To, že se Dirichletova funkce objevuje v článku, který se věnuje posloupnostem goniometrických funkcí, není náhoda. V podsekcí 1.1.3 jsme viděli, že řada výukových materiálů uvádí jako hlavní (či dokonce jediný) způsob, jak zadat funkci, nějaký její předpis pomocí vzorce — takový předpis pro Dirichletovu funkci také existuje (např. [105]), zda je však takovéto zadání výhodnější než původní definice, ponecháváme na čtenáři.

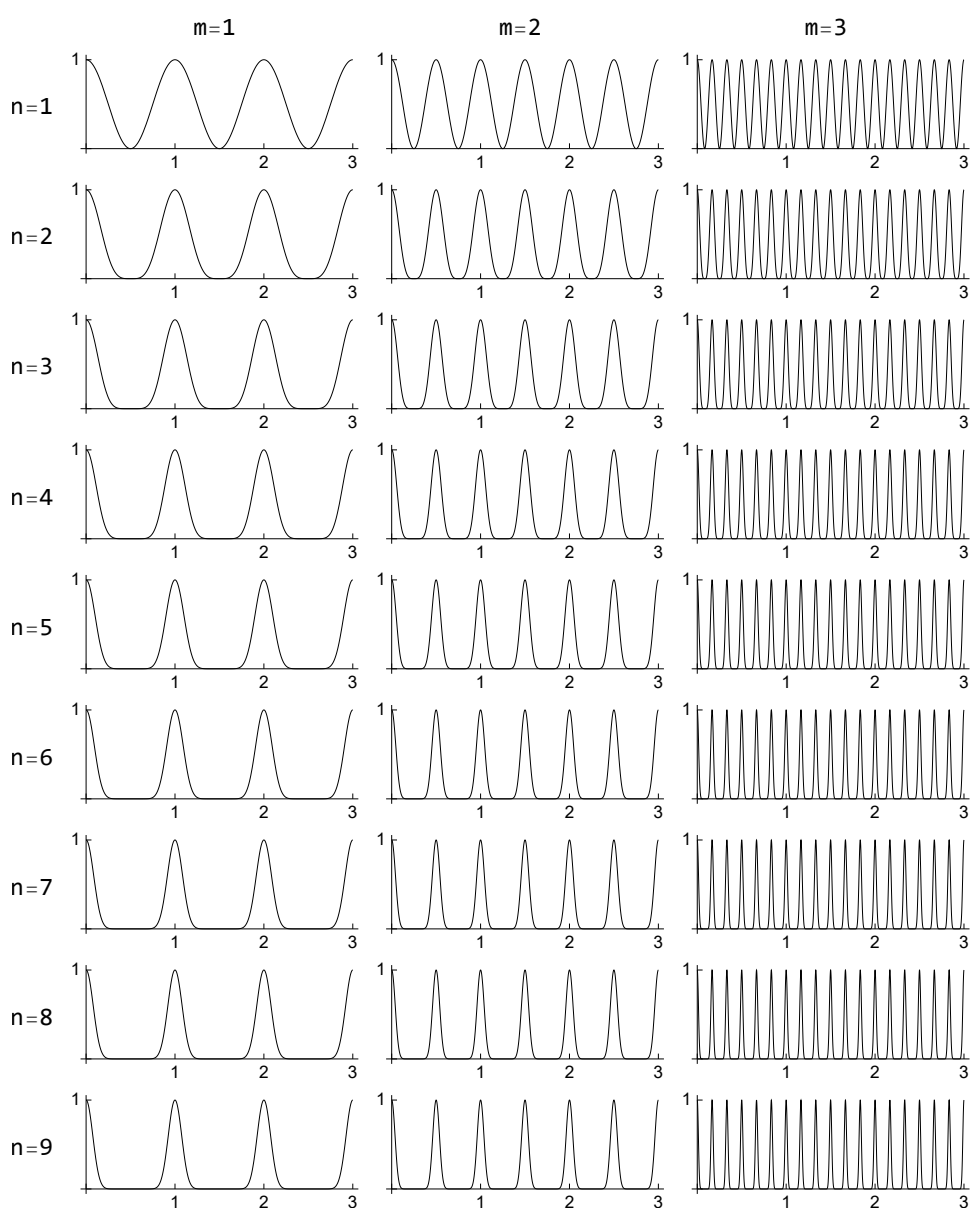
Věta 36. *Dirichletovu funkci ϕ lze zapsat ve tvaru*

$$\phi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n}(m!\pi x).$$

¹O konvergenci goniometrických řad, které slouží k reprezentaci libovolné funkce mezi danými limity.



Obrázek 3.1: Dirichletova funkce.



Obrázek 3.2: Ukázka konvergence funkce $\cos^{2n}(m!\pi x)$ k Dirichletově funkci.

Důkaz. Je-li ve funkci

$$g_m(x) = \cos(m!\pi x)$$

číslo $m!x$ celé, pak je $g_m(x) = \pm 1$, v ostatních případech je $-1 < x < 1$.

Funkce

$$f_m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n}(m!\pi x)$$

má hodnotu 1, je-li $m!x \in \mathbb{Z}$ (protože funkci $g_m(x)$ umocňujeme na sudý exponent), a hodnotu 0, je-li $m!x \notin \mathbb{Z}$.

Pro $x \in \mathbb{Z}$ je jistě $m!x \in \mathbb{Z}$, a tedy $f_m(x) = 1$. Obecně pro $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ najdeme vždy takové m_0 , že pro všechna $m \geq m_0$ je $m!$ dělitelné číslem q (stačí vzít $m_0 = q$), tedy $m!x = m!\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$.

Je-li $x \in \mathbb{I}$, nelze x napsat jako podíl dvou celých čísel, což znamená, že pro žádné m není $m!x$ celé číslo.

Tedy

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{I}, \end{cases}.$$

□

Způsob, jakým tyto funkce konvergují k Dirichlerově funkci, je naznačen na obrázku 3.2.

Dirichletova funkce má pro nás tu zajímavou vlastnost, že není v žádném bodě spojitá. Toto tvrzení plyne z faktu, že $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{I}$ jsou množiny husté v $\mathbb{R}$ — při důkazu nespojitosti přímo z definice 2 stačí zvolit $\varepsilon < 1$.

Další zajímavou vlastností Dirichletovy funkce je to, že není riemannovsky integrovatelná (očividně $\int_0^1 \phi(x) dx = 0$, ale $\overline{\int_0^1 \phi(x) dx} = 1$, tedy Riemannův integrál podle definice 14). V sekci 5.1.1 si ukážeme modifikaci Dirichletovy funkce, která má Riemannův integrál, ačkoli je nespojitá ve všech racionálních číslech.

Modifikace Dirichletovy funkce

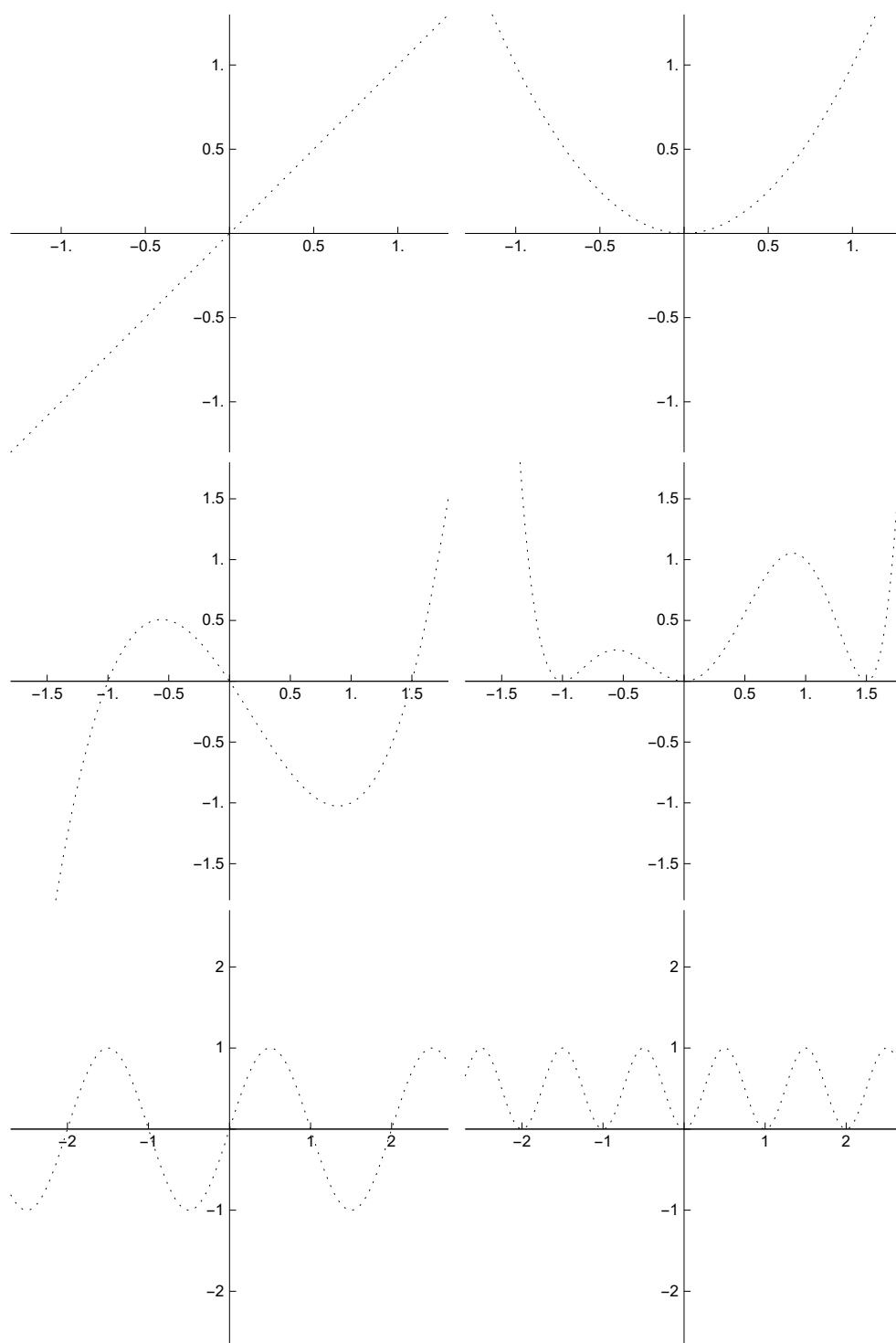
Nejznámějším příkladem modifikované Dirichletovy funkce, který jsme viděli už v podsekci 1.2.2, je funkce spojitá právě v jednom bodě:

$$\phi_1(x) = x \cdot \phi(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{I}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Náznak grafu funkce ϕ_1 můžeme vidět na obrázku 3.3 vlevo nahoře. Tato funkce je, jak snadno ověříme, spojitá pouze v bodě 0.

Limita v nule je pro obě funkce (x a 0) rovna nule, budeme-li se tedy k nule blížit libovolným způsobem, vždy budeme konvergovat k hodnotě 0.

V ostatních bodech se k danému bodu x můžeme blížit buď posloupností racionálních čísel, tj. limita je x nebo posloupností iracionálních čísel, tj. limita je 0 — tím dokážeme nespojitost v tomto daném bodě.



Obrázek 3.3: Modifikace Dirichletovy funkce.

Obdobně můžeme sestavit funkci, která je v bodě 0 (a pouze v něm) nejen spojitá, ale má v něm i derivaci:

$$\phi_2(x) = x^2 \cdot \phi(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Náznak grafu funkce ϕ_2 můžeme vidět na obrázku 3.3, vpravo nahoře. Důkaz zmíněné vlastnosti lze provést podobně jednoduše jako u funkce ϕ_1 .

Obecně můžeme sestavit funkci spojitou pouze na dané konečné množině M . Stačí sestavit polynom P , jehož kořeny jsou právě body množiny M a vynásobit jím funkci ϕ :

$$\phi_3(x) = P(x) \cdot \phi(x) = \begin{cases} P(x), & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Chceme-li, aby byla funkce v bodech množiny M i diferencovatelná, stačí umocnit polynom $P(x)$ na druhou:

$$\phi_4(x) = P(x)^2 \cdot \phi(x) = \begin{cases} P(x)^2, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Grafy funkcí ϕ_3 a ϕ_4 , kde $M = \{-1; 0; \frac{3}{2}\}$, tj. $P(x) = (x+1) \cdot x \cdot (x - \frac{3}{2})$, můžeme vidět na obrázku 3.3 v prostředním řádku vlevo a vpravo.

Podobné funkce spojitě na různých zajímavých množinách jistě čtenář sestaví sám. Za všechny uvádíme ještě například funkci

$$\phi_5(x) = \sin(\pi x) \cdot \phi(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

resp.

$$\phi_6(x) = \sin^2(\pi x) \cdot \phi(x) = \begin{cases} \sin^2(\pi x), & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{I}, \end{cases}$$

které jsou spojitě (a funkce ϕ_6 i diferencovatelná) právě ve všech celých číslech. Náznaky jejich grafů můžeme opět vidět na obrázku 3.3 vlevo a vpravo dole.

3.1.2 Funkce spojitá právě v racionálních bodech

Poté, co jsme v minulé sekci viděli funkci spojitou právě ve všech celých číslech (a uvědomíme-li si, že množiny $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ mají stejný počet prvků), bychom mohli chtít zkonstruovat funkci, která je spojitá právě ve všech racionálních číslech.

Tyto myšlenky by pak mohly zesílit zvláště ve chvíli, kdy v sekci 5.1.1 uvidíme Thomaeovu funkci, která je spojitá právě ve všech iracionálních bodech (a tedy nespojitá ve všech racionálních bodech). Ukážeme si ale, že právě existence této funkce znemožňuje existenci funkce spojitě právě ve všech racionálních bodech (tj. nespojitě v iracionálních bodech).

Italský matematik Vito Volterra totiž dokázal v roce 1881 následující větu [106].

Věta 37. *Neexistují dvě funkce f, g definované na intervalu (a,b) a spojitě na množině husté v tomto intervalu takové, že body, v nichž je f spojitá, jsou body, v nichž je g nespojitá, a naopak.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existuje dvojice funkcí f a g s uvedenými vlastnostmi. Označme

$$C_f = \{x \in (a,b) \mid f \text{ je spojitá v } x\},$$

$$C_g = \{x \in (a,b) \mid g \text{ je spojitá v } x\}.$$

Podle předpokladu věty je $C_f \cup C_g = (a,b)$ a $C_f \cap C_g = \emptyset$.

Vezměme nějaký bod $x_0 \in C_f$ a číslo $\alpha_1 = 1$. Protože funkce f je v x_0 spojitá, máme nějaké $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a,b)$ je $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{2}$. Můžeme tedy najít body a_0, b_0 takové, že $\langle a_0, b_0 \rangle \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a pro jakákoli $x, y \in \langle a_0, b_0 \rangle$ je

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \alpha_1.$$

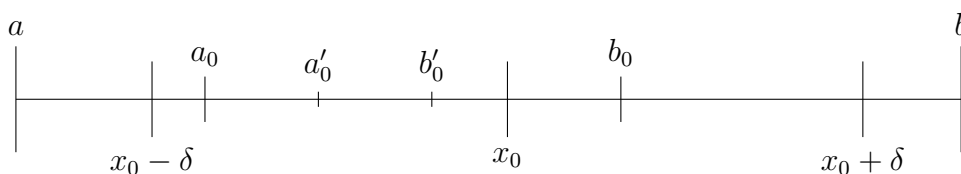
Protože g je spojitá na husté množině, existuje bod $x'_0 \in (a_0, b_0)$, ve kterém je funkce g spojitá. Můžeme tedy aplikovat stejný argument jako výše, tedy existuje interval $\langle a'_0, b'_0 \rangle \subseteq (a_0, b_0)$, že pro jakákoli $x, y \in \langle a'_0, b'_0 \rangle$ je

$$|g(x) - g(y)| < 1 = \alpha_1.$$

Dohromady tedy platí, že pro všechna $x, y \in \langle a'_0, b'_0 \rangle$ je

$$|f(x) - f(y)| < \alpha_1,$$

$$|g(x) - g(y)| < \alpha_1.$$



Tento postup můžeme opakovat pro $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{4}$, obecně pro $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$. Tím dostáváme posloupnost do sebe vnořených uzavřených intervalů

$$(a, b) \supset \langle a'_0, b'_0 \rangle \supset \langle a'_1, b'_1 \rangle \supset \langle a'_2, b'_2 \rangle \supset \dots \supset \langle a'_n, b'_n \rangle \supset \dots, \quad (3.2)$$

přičemž pro všechna $x, y \in \langle a'_n, b'_n \rangle$ je

$$|f(x) - f(y)| < \alpha_n, \quad (3.3)$$

$$|g(x) - g(y)| < \alpha_n. \quad (3.4)$$

Ale protože (3.2) je posloupnost do sebe vnořených uzavřených omezených intervalů, je

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \langle a'_n, b'_n \rangle \neq \emptyset.$$

Existuje tedy alespoň jeden bod A ležící ve všech intervalech $\langle a'_n, b'_n \rangle$, ve kterém jsou funkce f i g spojité (což plyne z nerovností (3.3) a (3.4)), tzn., že $A \in C_f$ a současně $A \in C_g$, a tedy $C_f \cap C_g \neq \emptyset$ — což je spor s naším předpokladem, že $C_f \cap C_g = \emptyset$. $\square$

Důsledek. Protože existuje Thomaeova funkce, která je spojitá právě ve všech iracionálních bodech (tedy na husté množině), nemůže existovat funkce, která by byla spojitá právě ve všech racionálních bodech (tedy by musela být spojitá na husté množině).

Poznámka. Uvědomme si, že věta není v rozporu například s existencí dvojice funkcí $\text{sgn}(x)$ a funkce ϕ_1 (definována rovností (3.1)) — funkce ϕ_1 totiž není spojitá na husté množině a tato dvojice tedy nesplňuje předpoklad věty.

3.2 Funkce spojité, ale ne absolutně spojité

V podsekcí 2.1.1 jsme si definovali absolutní spojitost (definice 16). Ve výukových materiálech tento typ spojitosti nenalezneme, považujeme ale za zajímavé tento typ funkcí do naší práce zařadit, a to i pro jejich jiné zajímavé vlastnosti.

3.2.1 Cantorova funkce (1883)

Ve výťahu z dopisu z 15. listopadu 1883, jehož autorem je Georg Cantor a který později vyšel pod názvem *De la puissance des ensembles parfaits de points*², nalezneme následující úvahu [96].

Mějme nějakou dokonalou (tj. uzavřenou a bez izolovaných bodů) řídkou množinu S — viz definice 24, 25 a 27. Dále uvažujme posloupnost navzájem disjunkt-ních intervalů

$$\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty} \quad (3.5)$$

takových, že žádný vnitřní bod těchto intervalů není bodem S , ale jejich krajní body a_n a b_n ano; dále mají být intervaly (a_n, b_n) seřazeny sestupně podle své délky (tj. délka $(n+1)$ -tého intervalu je menší nebo rovna délce n -tého intervalu), a pro libovolnou dvojici intervalů (a_i, b_i) , (a_j, b_j) , kde $b_i < a_j$, obsahuje interval (b_i, a_j) nekonečně mnoho dalších intervalů (a_n, b_n) .

Z předložené abstraktní definice si jen těžko uděláme představu o podobě takové množiny. Vezměme tedy konkrétní příklad a nadále budeme pracovat s ním. Naším příkladem takové množiny S tedy bude Cantorova množina, kterou jsme si ukázali v sekci 2.2.1 (viz definici 31). Pro tuto množinu máme zkonstruovanou posloupnost (3.5), která tuto množinu definuje (sjednocení všech jejích členů je doplněk Cantorovy množiny, tedy množina S^c) a splňuje požadované vlastnosti; rovněž jsme ukázali, že tato množina je uzavřená a řídká. Není těžké si rozmyslet poslední požadovanou vlastnost, tedy absenci izolovaných bodů.

Máme tedy množinu S . Vraťme se nyní zpět ke Cantorově úvaze [96]. Mějme nějakou spočetnou hustou množinu $\Phi \subseteq (0,1)$, jejíž prvky seřadíme do posloupnosti

$$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \quad (3.6)$$

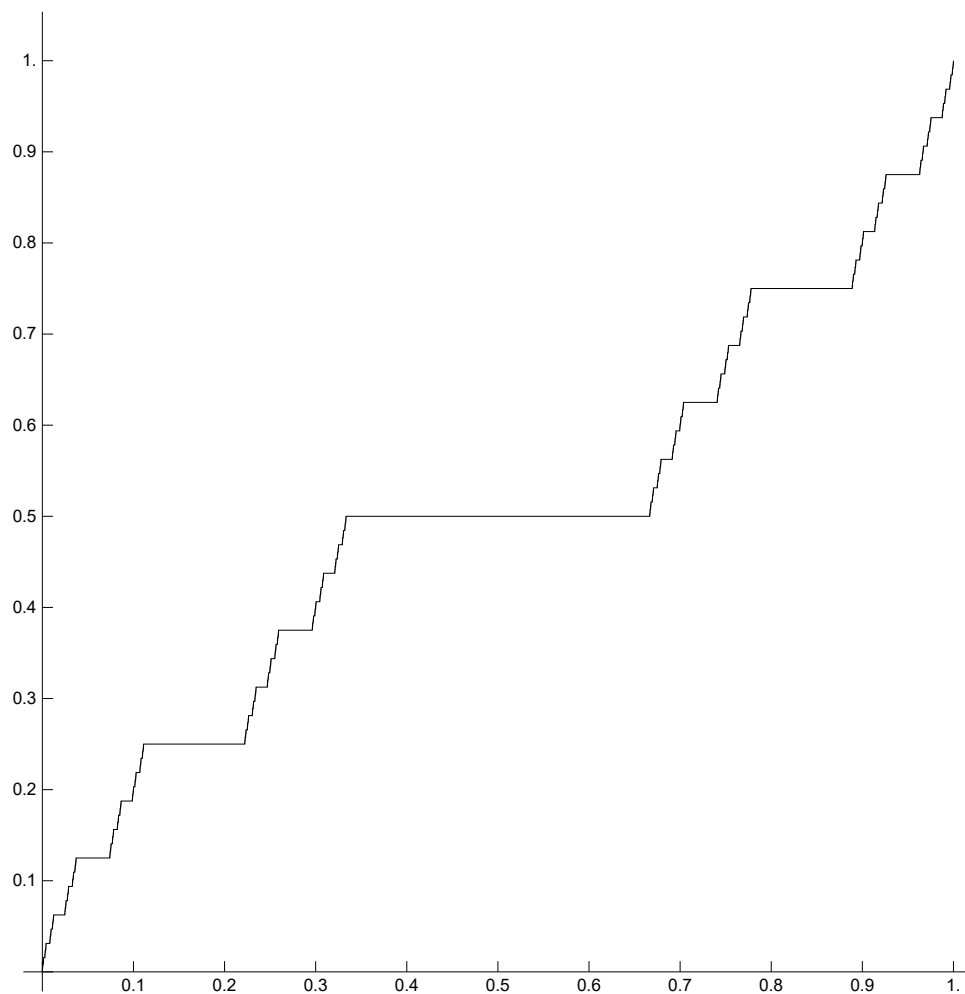
takové, že pokud pro členy posloupnosti intervalů (3.5) platí $a_i < a_j$ (a tedy i $b_i < b_j$), je i $\varphi_i < \varphi_j$.

Posloupnost (3.6) můžeme vytvořit například takto: Začneme s dvojicí bodů 0 a 1. Vezmeme jejich průměr, tj. $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ a položíme $\varphi_1 = \frac{1}{2}$. Dále vezmeme aritmetický průměr z těchto dělicích bodů, tj. $\frac{0+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ a $\frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}$ a položíme $\varphi_2 = \frac{1}{4}$ a $\varphi_3 = \frac{3}{4}$. Podobně pokračujeme dále a dostaneme tedy celkem posloupnost

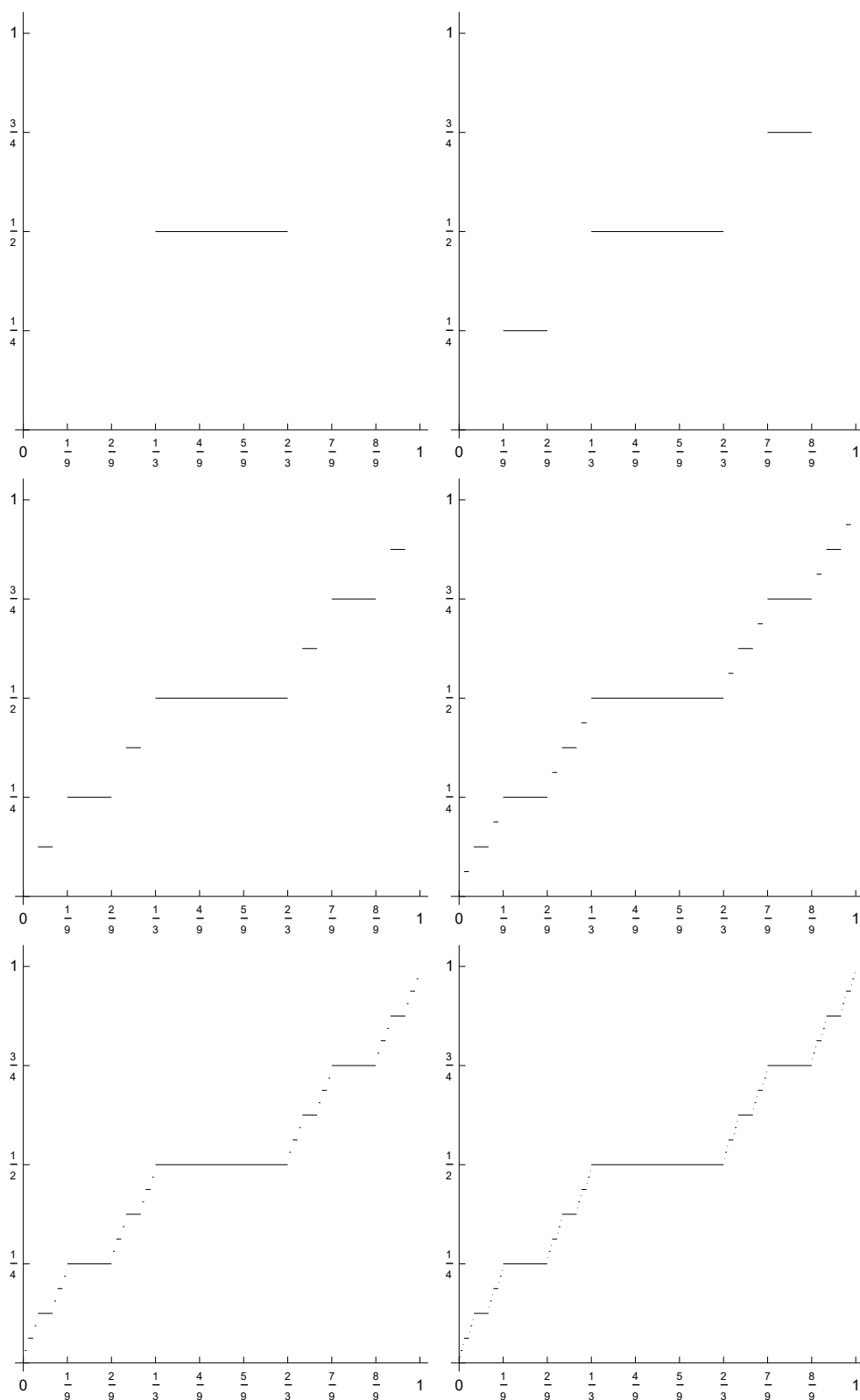
$$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \dots \right].$$

Nyní můžeme Cantorovu funkci definovat pro všechny body intervalů (a_n, b_n) , a to tak, že všem bodům z intervalu (a_n, b_n) přiřadíme funkční hodnotu φ_n . Budeme-li tedy zvyšovat číslo n , budeme mít Cantorovu funkci definovanou pro stále více a více bodů, jak můžeme vidět na obrázku 3.5 (v jedné iteraci přidáváme vždy všechny intervaly (a_n, b_n) se stejnou délkou).

²O mohutnosti dokonalých množin bodů



Obrázek 3.4: Cantorova funkce.



Obrázek 3.5: Prvních šest iterací vzniku Cantorovy funkce (pouze pro intervaly (a_n, b_n)).

Grafy těchto postupných iterací doplníme o spojnice krajních bodů sousedních vodorovných úseček (a bodů $[0,0]$ a $[1,1]$) a dostaneme grafy funkcí, které si označíme c_k (v k -té iteraci přidáváme definici pro všechny intervaly délky $\frac{1}{3^k}$). Tyto grafy můžeme vidět na obrázku 3.6. Nyní už můžeme definovat Cantorovu funkci.

Definice 38 (Cantorova funkce). *Pro $x \in (0,1)$ definujeme funkci ψ předpisem*

$$\psi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k(x).$$

Cantorova funkce je tedy definována jako bodová limita (graf její funkce můžeme vidět na obrázku 3.4). Korektnost této definice bude dokázána následujícím tvrzením.

Tvrzení 38. *Posloupnost $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ k funkci ψ .*

Důkaz. Necht' je dáno $\varepsilon > 0$. Najdu $n_0 \in \mathbb{N}$ tak velké, že $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Pro jaká $m, n \geq n_0$ jsou si funkce c_m, c_n a c_{n_0} rovny na všech intervalech (a_i, b_i) , pro něž je $b_i - a_i \geq \frac{1}{3^{n_0}}$.

Protože hodnoty c_{n_0} na dvou sousedních z těchto intervalů se liší přesně o $\frac{1}{2^{n_0}}$, je zřejmé z konstrukce funkcí c_k , že $\varrho_{\infty}(c_m, c_n) \leq \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Tedy $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ je Cauchyovská v supremové metrice, z čehož plyne, že konverguje ke své bodové limitě ψ .

Protože je ale prostor $(\mathcal{C}(\langle 0,1 \rangle), \varrho_{\infty})$ úplný, konverguje posloupnost $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ stejnoměrně, a to ke své bodové limitě ψ . $\square$

Vlastnosti Cantorovy funkce

Cantorova funkce má řadu zajímavých vlastností [107]. Uvedme alespoň několik, které jsou pro nás nejzajímavější.

Tvrzení 39. *Funkce ψ je neklesající, nabývá minima 0 v bodě 0, maxima 1 v bodě 1 a je konstantní na intervalech $\langle a_n, b_n \rangle$.*

Důkaz. Že je funkce ψ neklesající je zřejmé — jedná se totiž o limitu neklesajících funkcí. Z toho je také zřejmé, že funkce nabývá minima 0 v bodě 0 a maxima 1 v bodě 1 — pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je totiž $c_k(0) = 0$ a $c_k(1) = 1$.

Zbývá dokázat konstantnost na intervalech (a_n, b_n) . Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že funkce c_{k_0} je na $\langle a_n, b_n \rangle$. Pro tyto body se v dalších iteracích (tj. pro $k \leq k_0$) hodnota funkce c_k nemění, tedy

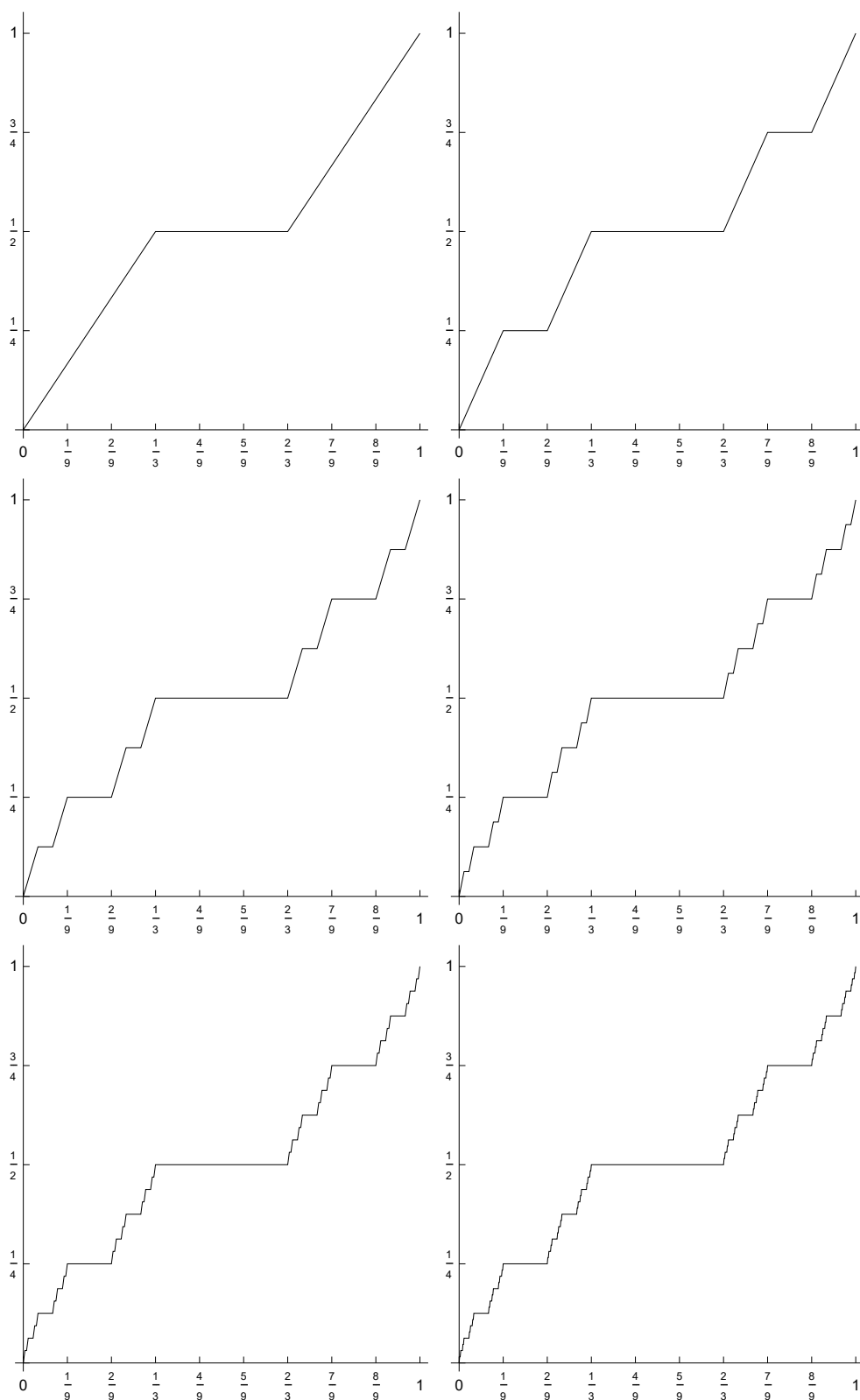
$$\psi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k(x) = c_{k_0}. \quad \square$$

Hlavní vlastností, kvůli které zde Cantorovu funkci uvádíme, je skutečnost, že je sice spojitá, ale není absolutně spojitá.

Věta 40. *Funkce ψ je ve všech bodech intervalu $(0,1)$ spojitá.*

Důkaz. Tato věta plyne z tvrzení 38 a věty 10. $\square$

Věta 41. *Funkce ψ není na intervalu $(0,1)$ absolutně spojitá.*



Obrázek 3.6: Prvních šest iterací vzniku Cantorovy funkce (pro celý interval $\langle 0,1 \rangle$).

Důkaz. Potřebujeme dokázat, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro všechna $\delta > 0$ existuje množina intervalů

$$\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle, \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle, \dots, \langle \alpha_n, \beta_n \rangle,$$

kde

$$0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \alpha_2 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq 1,$$

taková, že $\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta$ a současně $\sum_{i=1}^n |\psi(\beta_i) - \psi(\alpha_i)| \geq \varepsilon$.

Zvolíme $\varepsilon = 1$. Z definice Cantorovy funkce je zřejmé, že funkce ψ roste na intervalech, které jsou součástí některé z množin S_n , a to vždy o $\frac{1}{2^n}$. Těchto intervalů je v S_n celkem 2^n , funkce tedy vyroste na těchto intervalech celkem o $2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1$.

Konkrétní příklad: Množina S_1 se skládá z intervalů $\langle 0, \frac{1}{3} \rangle$ a $\langle \frac{2}{3}, 1 \rangle$. Na prvním z nich vyroste funkce ψ z 0 do $\frac{1}{2}$, na druhém od $\frac{1}{2}$ do 1, celkem tedy naroste o 1 (jednoduše řečeno: vynechali jsme konstantní úsek).

Délka jednoho intervalu v množině S_n je $\frac{1}{3^n}$ a počet intervalů je 2^n . Celková délka všech intervalů v množině S_n je $\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Pro dané δ tedy stačí vzít $n \in \mathbb{N}$ tak velké, že platí nerovnost $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \delta$ a množinu intervalů množiny S_n — na těchto intervalech pak funkce ψ naroste o 1 $\geq \varepsilon = 1$. $\square$

Věta 42. *Funkce ψ má nulovou derivaci skoro všude na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ k funkci ψ .*

Důkaz. Funkce je konstantní (a tedy má nulovou derivaci) ve všech bodech množiny $\langle 0, 1 \rangle \setminus S$, tedy všude, až na množinu S — což je podle tvrzení 24 množina míry nula. $\square$

Modifikace Cantorovy funkce

Jiným způsobem, jak zadat Cantorovu funkci, je pomocí rozvoju čísel v trojkové soustavě. Tento způsob uvádí Cantor ve svém článku [96], a to pro případ, kdy je funkce zkonstruována právě pro posloupnosti $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, které jsme použili my výše.

Definice 39 (Cantorova funkce, pomocí rozvoju). *Vyjádříme každé $x \in S$ (S je Cantorova množina) řadou*

$$x = \frac{c_1}{3^1} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{c_3}{3^3} + \dots + \frac{c_k}{3^k} + \dots, \quad (3.7)$$

kde $c_k \in \{0; 2\}$.

Pro body $x \in S$ definujeme funkci ψ v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ následujícím předpisem

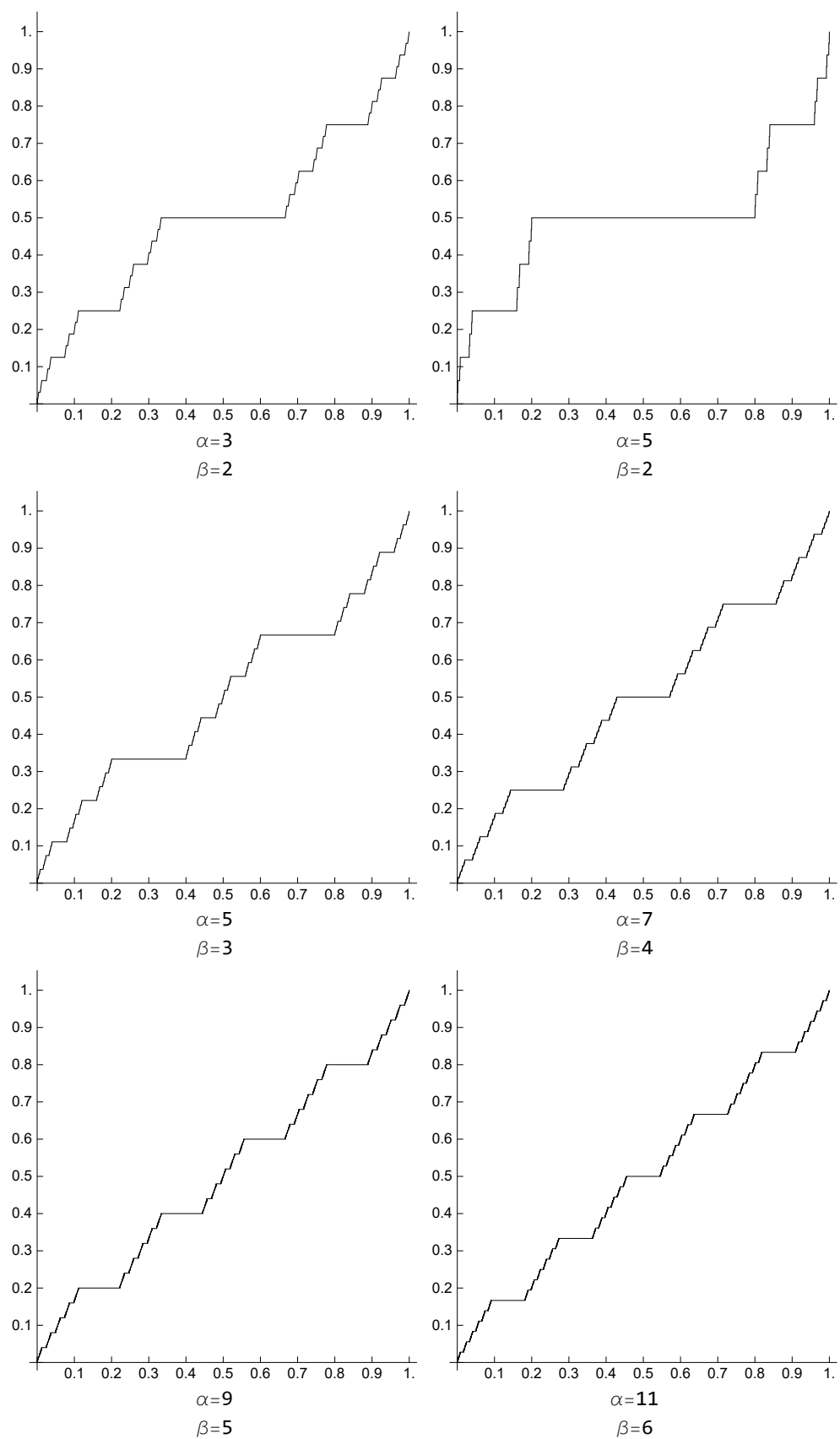
$$\psi(x) = \frac{d_1}{2^1} + \frac{d_2}{2^2} + \frac{d_3}{2^3} + \dots + \frac{d_k}{2^k} + \dots,$$

kde

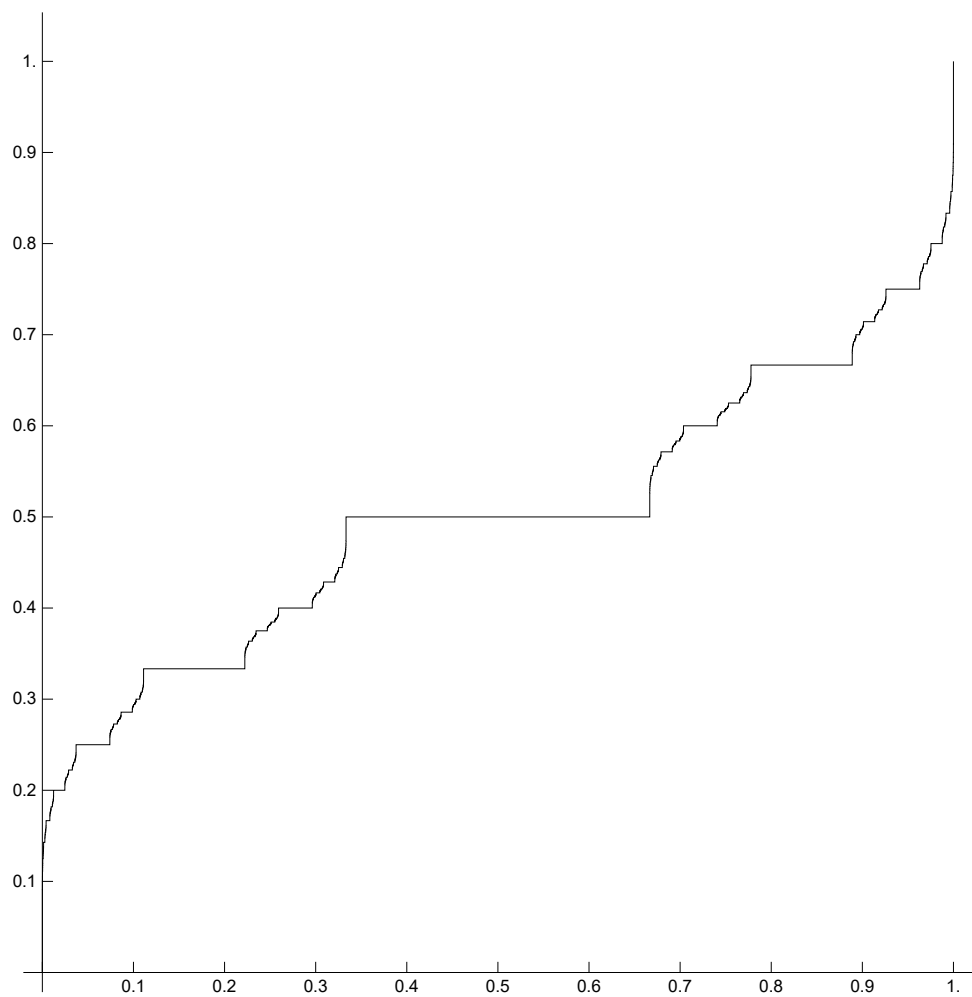
$$d_k = \frac{c_k}{2} = \begin{cases} 0 & c_k = 0 \\ 1 & c_k = 2 \end{cases}.$$

Pro ostatní body, tj. pro body x libovolného intervalu (a_n, b_n) definujeme

$$\psi(a_n) = \psi(x) = \psi(b_n). \quad (3.8)$$



Obrázek 3.7: Cantorova funkce pro různé číselné soustavy.



Obrázek 3.8: Modifikace Cantorovy funkce pro posloupnost $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ vytvořenou pomocí mediantů.

Tedy každé číslo množiny S napíšeme ve trojkové soustavě, každou číslici 2 v ternárním rozvoji změním na číslici 1 a výsledek interpretujeme jako číslo ve dvojkové soustavě.

Tuto definici můžeme zobecnit [108]. Mějme nějaké přirozené číslo $\alpha > 2$. Nyní můžeme číslo $\alpha - 1$ zapsat jako součin dvou přirozených čísel:

$$\alpha - 1 = q \cdot (\beta - 1),$$

kde $q \geq 2$ a $\beta \geq 2$. Ne pro všechny dvojice čísel α a β lze tedy tuto množinu definovat. Množinu S nyní tvoří čísla z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, která lze zapsat v soustavě o základu α a jejíž rozvoj obsahuje pouze číslice, které jsou celočíselnými násobky čísla q .

Funkci $\psi_{\alpha, \beta}$ definujeme tak, že všechny číslice rozvoje čísla $x \in S$ vydělíme číslem q a výsledek interpretujeme jako číslo v soustavě o základu β . Na intervalech mimo množinu S je funkce opět konstantní a její hodnota je rovna funkční hodnotě v krajních bodech intervalu.

Snadno nahlédneme, že

$$\psi(x) = \psi_{3,2}(x).$$

Graf funkcí pro různé zajímavé hodnoty parametrů α a β můžeme vidět na obrázku 3.7.

Dá se dokázat [108], že funkce $\psi_{\alpha, \beta}$ má vlastnosti uvedené u funkce ψ . Důkazy jsou myšlenkově obdobné jako ty, které jsme uvedli, pouze obecnější.

Další zajímavá modifikace souvisí s volbou posloupnosti $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Můžeme například generovat její členy ne pomocí aritmetických průměrů, ale pomocí tzv. mediantu (definice 36 na straně 49). Začneme body $\frac{0}{1}$ a $\frac{1}{1}$. První člen posloupnosti, φ_1 , definujeme jako jejich mediant, tj. $\varphi_1 = \frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Dále pokračujeme podobně jako u tvorby posloupnosti (3.2.1) a dostáváme

$$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \dots \right].$$

Množina $\Phi = \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je pak množina $\mathbb{Q}$, která je samozřejmě spočetná a hustá.

Graf funkce ψ_F můžeme vidět na obrázku 3.8.

4. Podivnosti s derivací

Nejrozsáhlejší část této práce je věnována funkcím, jejichž podivnost nějakým způsobem souvisí s derivací. Stěžejním tématem jsou funkce spojité, které nemají v žádném bodě vlastní derivaci — tato část rozebírá podrobně tři funkce (Bolzanovu, Weierstrassovu a Petrovu), které představují základní či jinak zajímavé postupy, jak vytvořit takovéto funkce a dokázat jejich vlastnosti. Poté uvádíme přehled dalších funkcí tohoto druhu.

Následují funkce, jejichž derivace je nulová na „velké“ množině, ale tyto funkce přesto nejsou konstantní (dokonce jsou ostře rostoucí). Druhá z nich, Pompeiova funkce, je pak základem důkazu existence tzv. köpckeovských funkcí, tj. funkcí, které mají ve všech bodech derivaci, ale nejsou na žádném intervalu monotónní.

4.1 Spojité funkce s nespojitou derivací

O tom, že derivace může být nespojitá, se většina výukových materiálů nezmiňuje, považujeme proto za zajímavé alespoň stručně existenci takovýchto funkcí připomenout. Navíc nám pak budou myšlenky z této sekce užitečné v sekci 5.2.

Poznamenejme ještě, že v této sekci bude v grafech měřítko osy y pro lepší přehlednost často upraveno — zmíněné funkce mají totiž funkční hodnoty většinou buď tak malé, nebo velké (na to, jakou část definičního oboru budeme zpravidla zobrazovat), že by v jejich grafu nebylo téměř nic vidět.

Jednoduchým příkladem může být funkce

$$\mathbf{n}_{\{0\}}(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

která je spojitá, ovšem její derivace již spojitá není. Tento fakt bude důležitý dále, formulujeme si ho do následujícího tvrzení.

Tvrzení 43. *Funkce $\mathbf{n}_{\{0\}}$ je spojitá ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$, ale její derivace $\mathbf{n}'_{\{0\}}$ je nespojitá v bodě 0.*

Důkaz. Co se spojitosti týče, funkce je mimo nulu definována spojitou funkcí, zajímavým bodem je tedy pouze nula. Důkaz, že je funkce $\mathbf{n}_{\{0\}}$ spojitá v samotném bodě 0, je jednoduchý: funkce $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ je omezená a $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, takže

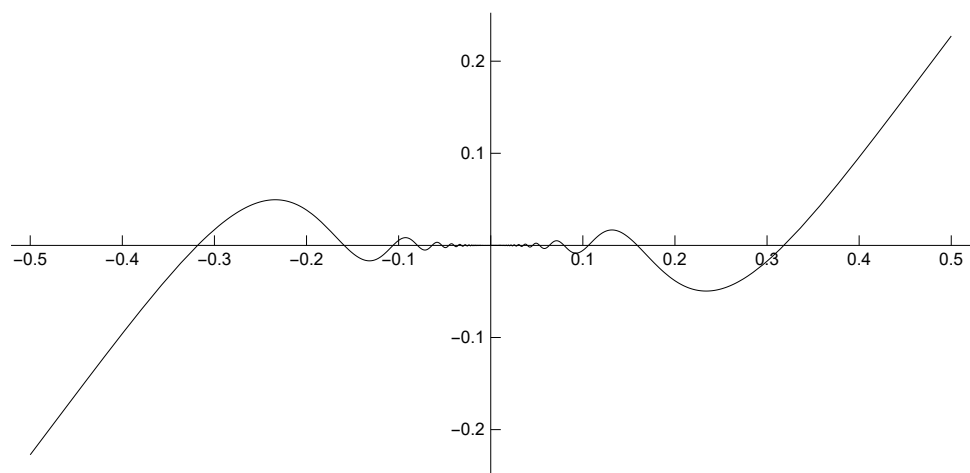
$$\lim_{x \rightarrow 0} \mathbf{n}_{\{0\}}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = \mathbf{n}_{\{0\}}(0).$$

Derivaci funkce $\mathbf{n}_{\{0\}}$ mimo nulu můžeme spočítat pomocí tabulkových vzorců pro derivace:

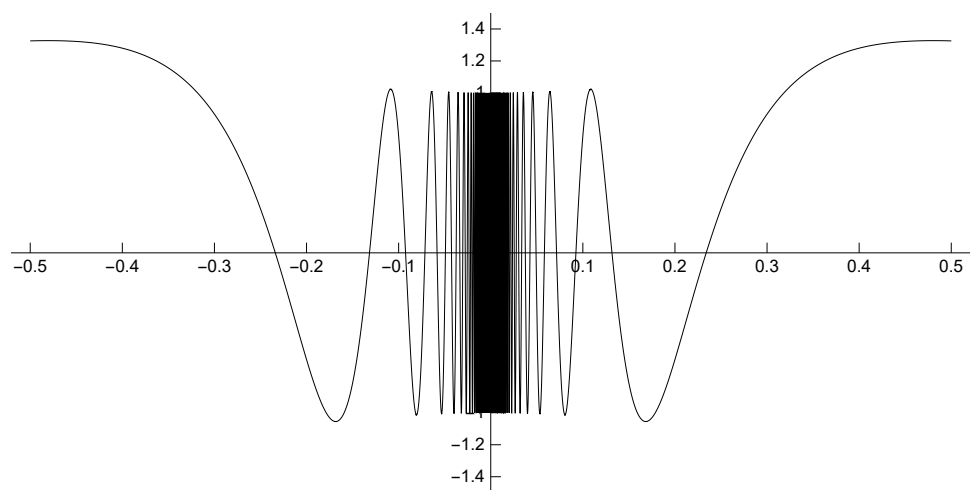
$$\left(x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right). \quad (4.2)$$

Derivaci v nule spočítáme přímo z definice derivace (definice 7):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{n}_{\{0\}}(x) - \mathbf{n}_{\{0\}}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$



Obrázek 4.1: Funkce $n_{\{0\}}$ (spojitá).



Obrázek 4.2: Derivace funkce $n_{\{0\}}$ (nespojité v 0).

A protože sice $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, ale $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ neexistuje, nemá derivace funkce $\mathbf{n}_{\{0\}}$ (odvozená v (4.2)) v bodě 0 limitu. Proto $\mathbf{n}'_{\{0\}}$ není v bodě 0 spojitá. $\square$

Graf funkce $\mathbf{n}_{\{0\}}$ můžeme vidět na obrázku 4.1, graf její derivace pak na obrázku 4.2.

Podobně jako jsme to udělali u Dirichletovy funkce (sekce 3.1.1), můžeme i funkci $\mathbf{n}_{\{0\}}$ různě modifikovat.

Uvědomme si například, že funkce

$$\mathbf{n}_{\{1\}}(x) = \mathbf{n}_{\{0\}}(1 - x)$$

má nespojitou derivaci v bodě 1.

Můžeme dále definovat funkci

$$\mathbf{n}_{\{0;1\}}(x) = \mathbf{n}_{\{0\}}(x) \cdot \mathbf{n}_{\{1\}}(x),$$

která má nespojitou derivaci v bodech 0 a 1. Graf této funkce můžeme vidět na obrázku 4.3, graf její derivace pak na obrázku 4.4.

Tento postup můžeme dále zobecnit a definovat funkci

$$\mathbf{n}_{\{a;b\}}(x) = \mathbf{n}_{\{0\}}(x - a) \cdot \mathbf{n}_{\{0\}}(b - x),$$

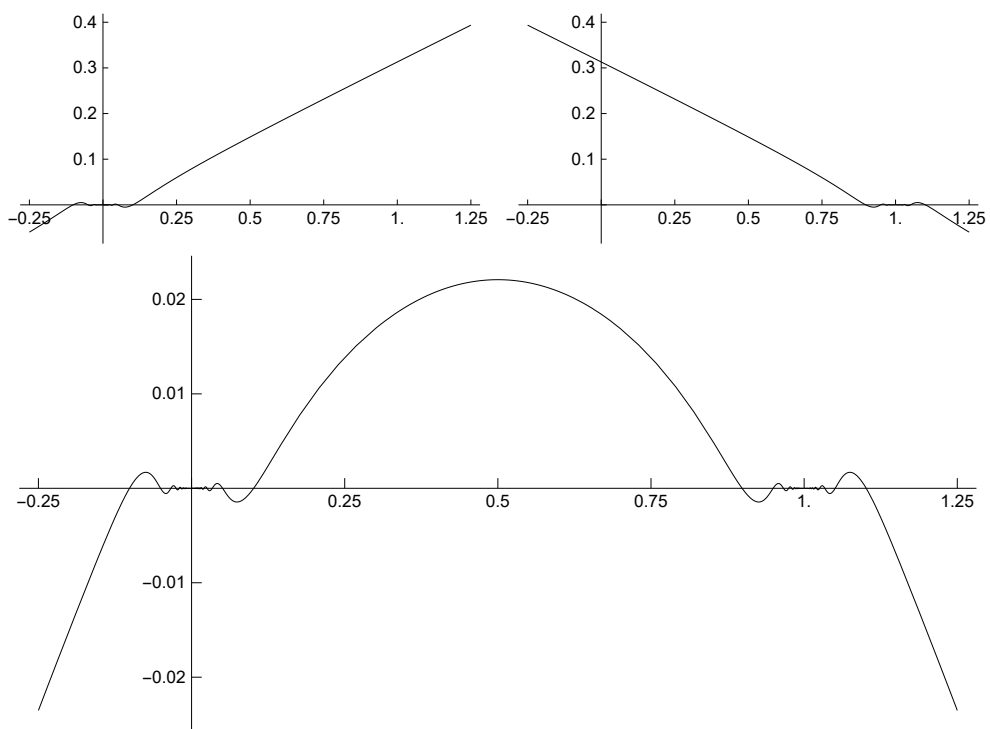
jejíž derivace je nespojitá v bodech a a b .

S pomocí této funkce můžeme definovat funkce, které mají derivaci nespojitou ve více bodech — například funkci s nespojitou derivací ve všech celých číslech:

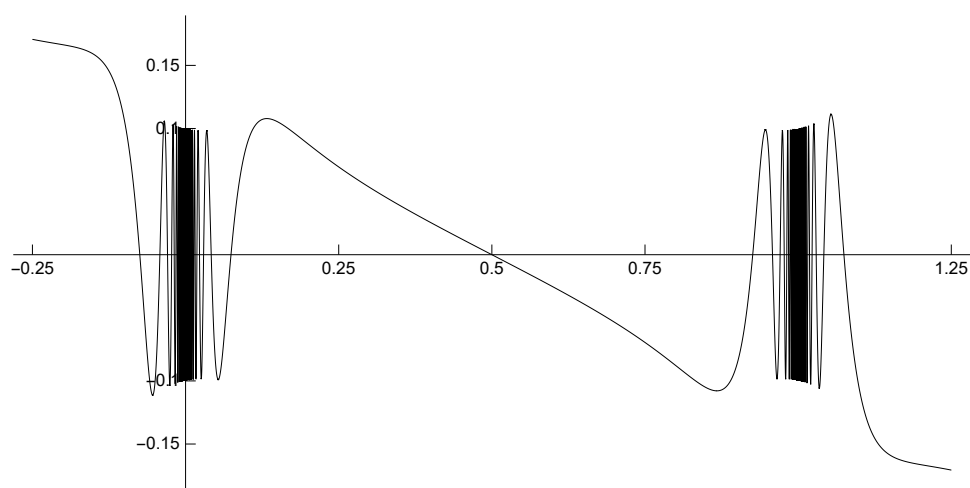
$$\mathbf{n}_{\mathbb{Z}}(x) = \begin{cases} \mathbf{n}_{\{[x]; \lceil x \rceil\}}(x), & x \notin \mathbb{Z}, \\ 0, & x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Tato funkce má tedy derivaci nespojitou v nekonečně (avšak spočetně) mnoha bodech. Graf funkce $\mathbf{n}_{\mathbb{Z}}$ a její derivaci můžeme vidět na obrázku 4.5.

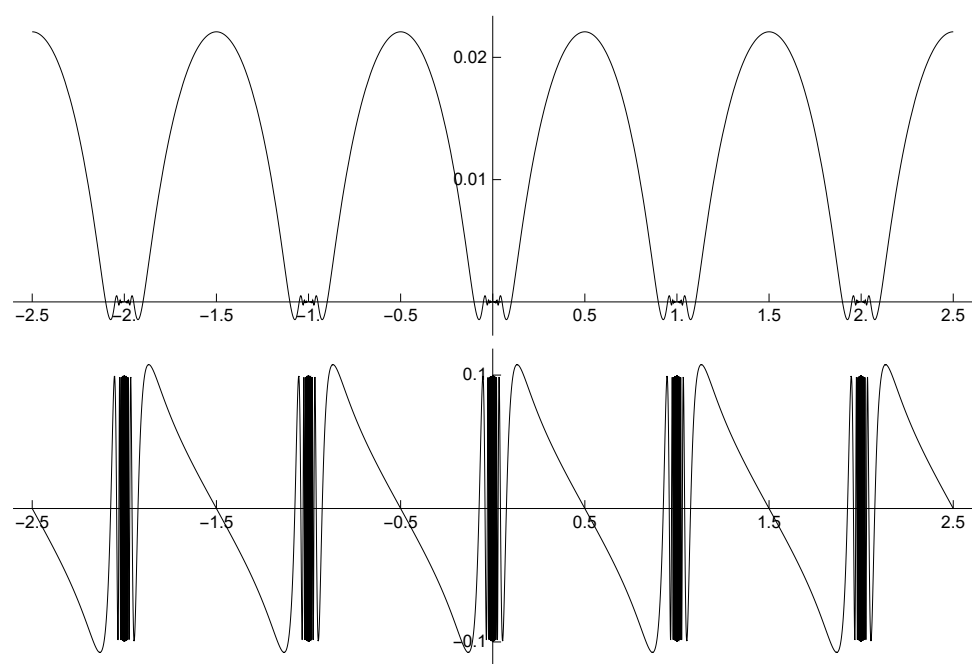
Další zajímavou modifikaci uvedených myšlenek si ukážeme v podsekcí 5.2.1, kde uvidíme funkci, která má derivaci nespojitou v tolika bodech, že tato derivace již není riemannovsky integrovatelná.



Obrázek 4.3: Funkce $n_{\{0\}}$ (vlevo nahoře), $n_{\{1\}}$ (vpravo nahoře) a jejich součin $n_{\{0;1\}}$ (dole).



Obrázek 4.4: Derivace funkce $n_{\{0;1\}}$.



Obrázek 4.5: Graf funkce $n_{\mathbb{Z}}$ (nahore) a její derivace (dole).

4.2 Funkce spojité nemající derivaci

V podsekcí 1.3.3 jsme viděli, že většina výukových materiálů uvádí, že vlastní derivace funkce v nějakém bodě implikuje spojitost v tomto bodě, a zároveň také, že obrácená implikace neplatí. Minimum materiálů však hovoří o funkcích, které nemají v žádném bodě derivaci, ačkoli jsou spojitě — a právě těm se budeme věnovat v této sekci.

Říkáme-li, že funkce uváděné dále nemají derivaci, máme tím na mysli vlastní derivaci. Některé funkce v této sekci uváděné nemají v žádném bodě ani nevlastní derivaci, to je však pro nás spíše „zajímavým bonusem“. Ve větě 45 (na straně 74) si totiž ukážeme, že množina funkcí, které mají alespoň v jednom bodě vlastní derivaci, je 1. kategorie v prostoru všech spojitých funkcí, tedy typická spojitá funkce je právě ta, která nemá vlastní derivaci v žádném bodě.

Většina spojitých funkcí nemá vlastní derivaci

Ačkoli materiály studované v kapitole 1.3 se tomuto typu funkcí příliš nevěnují, ve skutečnosti tvoří mezi spojitými funkcemi většinu právě ty, které nemají v žádném bodě vlastní derivaci. Spojité funkce, které mají alespoň v jednom bodě derivaci, totiž tvoří v prostoru spojitých funkcí množinu 1. kategorie, jak si nyní dokážeme [94]. O množinách 1. kategorie jsme podrobněji pojednali v podsekcí 2.2.2. O tom, proč bychom tyto množiny měly považovat za malé, jsme se zmínili v sekci 2.6.

Abychom vůbec mohli formulovat nějaká tvrzení, musíme si ujasnit, s jakými pojmy budeme pracovat. Předně tedy definujeme značení, a to množinu všech funkcí spojitých na intervalu $\langle a, b \rangle$, tedy

$$\mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$$

a k ní supremovou metriku

$$\varrho_{\infty}(f, g) = \sup_{t \in \langle a, b \rangle} \{|f(t) - g(t)|\},$$

které dohromady tvoří metrický prostor $(\mathcal{C}(\langle a, b \rangle), \varrho_{\infty})$. Ve všech následujících úvahách budeme na množině $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$ uvažovat právě tuto metriku, i když to nebudeme explicitně uvádět.

Než se pustíme do samotného důkazu, formulujeme si jedno užitečné lemma. Nejdříve si ale definujeme pojem v tomto lemmatu používaný.

Definice 40 (Po částech lineární funkce). *Spojitá funkce f definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$ se nazývá po částech lineární, jestliže existuje dělení $D = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ takové, že pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$ je funkce f na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ lineární.*

Lemma 44. *Nechť je dána funkce $f \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$ a $\varepsilon > 0$. Pak existuje spojitá po částech lineární funkce g , pro kterou platí, že*

$$\varrho_{\infty}(f, g) < \varepsilon. \quad (4.3)$$

Důkaz. Důkaz provedeme tím, že hledanou funkci g sestrojíme.

Věta 7 nám říká, že spojitá funkce na uzavřeném omezeném intervalu je stejnoměrně spojitá, tedy že

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x, y \in \langle a, b \rangle) \left(|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Vezměme pro dané ε toto příslušné δ a sestrojme na intervalu $\langle a, b \rangle$ dělení $a = x_0 < \dots < x_n = b$ takové, že pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$ je

$$x_i - x_{i-1} = \frac{a - b}{n} < \delta.$$

Definujme hledanou funkci g tak, že pro všechna $i \in \{0, \dots, n\}$ je $f(x_i) = g(x_i)$ a na intervalech mezi těmito body je funkce g lineární.

Nyní už zbývá jen dokázat, že tato funkce g splňuje vlastnost (4.3). To je ale jednoduché, protože pro všechna $t \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ je $|x_i - t| < \delta$, takže

$$|g(t) - f(t)| \leq |g(t) - g(x_i)| + |g(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Protože t bylo libovolné číslo z intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a tento interval byl libovolným intervalem z dělení intervalu $\langle a, b \rangle$, platí tato nerovnost pro všechna $t \in \langle a, b \rangle$, a tedy

$$\varrho_\infty(f, g) < \varepsilon. \quad \square$$

Nyní již můžeme přistoupit k důkazu následující věty.

Věta 45. *Množina*

$$A = \{f \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle) \mid \exists t \in (a, b) : f'(t) \in \mathbb{R}\}$$

je množina 1. kategorie v $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$.

Důkaz. Ve skutečnosti dokážeme ještě o něco víc, než tvrdí věta, a to fakt, že množiny

$$\begin{aligned} A^+ &= \left\{ f \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle) \mid \exists t \in \langle a, b \rangle : f'_+(t) \in \mathbb{R} \right\} \\ A^- &= \left\{ f \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle) \mid \exists t \in (a, b) : f'_-(t) \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

jsou 1. kategorie v $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$. Protože $A \subseteq A^+ \cup A^-$, bude pak zřejmé, že i množina A je množinou 1. kategorie.

Dokážeme toto tvrzení pro množinu A^+ , pro množinu A^- by se důkaz vedl obdobně.

Důkaz samotný provedeme ve třech krocích. Nejdříve definujeme množiny A_n takové, že $A^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, dále dokážeme, že množiny A_n jsou uzavřené a nakonec, že množiny A_n jsou řídké.

1. Definice množin A_n a její korektnost

Položme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \left\{ f \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle) \mid \exists t \in \left\langle a, b - \frac{1}{n} \right\rangle : \forall h \in \left(0, \frac{1}{n}\right) : \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| \leq n \right\}.$$

Abychom dokázali inkluzi $A^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ musíme dokázat, že pro každou funkci f , pro kterou existuje v nějakém bodě intervalu $(0,1)$ konečná pravá derivace, existuje nějaká množina A_n , že $f \in A_n$.

Jestliže existuje bod $t \in \langle a, b \rangle$, že $f'_+(t) \in \mathbb{R}$, existuje nějaké $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_1$ je $t \in \langle a, b - \frac{1}{n} \rangle$.

Dále, protože $f'_+(t)$ je konečná, existuje $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \geq n_2$ je $|f'_+(t)| < n$.

Z definice pravé derivace v bodě t také víme, že pro libovolné zvolené $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $h \in (0, \delta)$ je $|\frac{f(t+h)-f(t)}{h} - f'_+(t)| < \varepsilon$, tedy můžeme najít n_3 takové, že pro všechna $n \geq n_3$ je

$$\left(\forall h \in \left(0, \frac{1}{n} \right) \right) \left(\left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| < n \right).$$

Je tedy zřejmé, že pokud položíme $n_0 = \max \{n_1, n_2, n_3\}$, pak pro všechna $n \geq n_0$ platí všechny uvedené vlastnosti, a tedy $f \in A_n$.

2. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je A_n uzavřená

Nechť je $n \in \mathbb{N}$ zvoleno pevně. Podle tvrzení 16 nám stačí ukázat, že pro každou posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je $f_k \in A_n$ platí, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f \implies f \in A_n,$$

jinými slovy, musíme dokázat, že pro tuto funkci f

$$\left(\exists t \in \left\langle a, b - \frac{1}{n} \right\rangle \right) \left(\forall h \in \left(0, \frac{1}{n} \right) \right) (|f(x+h) - f(x)| \leq n \cdot h).$$

Vezměme tedy nějakou posloupnost funkcí $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, která konverguje k f a ke každé této funkci pak takový bod $x_k \in \langle a, b - \frac{1}{n} \rangle$, že

$$\left(\forall h \in \left(0, \frac{1}{n} \right) \right) (|f_k(x_k+h) - f_k(x_k)| \leq n \cdot h).$$

Můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = t \in \left\langle a, b - \frac{1}{n} \right\rangle,$$

víme totiž, že posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je omezená, takže pokud by nebyla konvergentní, můžeme z ní vybrat podposloupnost (a upravit příslušně i posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$), která již konvergentní je.

Pomocí trojúhelníkové nerovnosti můžeme dále odhadnout

$$\begin{aligned} |f(t+h) - f(t)| &\leq |f(t+h) - f(x_k+h)| \\ &\quad + |f(x_k+h) - f_k(x_k+h)| \\ &\quad + |f_k(x_k+h) - f_k(x_k)| \\ &\quad + |f_k(x_k) - f(x_k)| \\ &\quad + |f(x_k) - f(t)|. \end{aligned}$$

Podívejme se nyní na absolutní hodnoty na pravé straně nerovnosti. První a pátá konvergují s rostoucím k k nule díky spojitosti funkce f . Druhá a čtvrtá

konvergují s rostoucím k rovněž k nule, tentokrát díky stejnoměrné konvergenci funkcí f_k k f (na $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$ totiž uvažujeme supremovou metriku, podle poznámky za definicí 18 tedy funkce konverguje stejnoměrně). Třetí absolutní hodnota je pak menší, nebo rovna $n \cdot h$, protože $f_k \in A_n$.

Z toho tedy vidíme, že $f \in A_n$.

3. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je A_n řídká

Protože už víme, že A_n je uzavřená, tj. $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle) \setminus A_n$ je otevřená, stačí podle tvrzení 19 dokázat, že $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle) \setminus A_n$ je hustá.

To dokážeme přímo z definice — konkrétně ukážeme, že ke každé funkci $f \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$ dokážeme najít pro libovolné $\varepsilon > 0$ funkci $g \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle) \setminus A_n$, že $\varrho_\infty(f, g) < \varepsilon$.

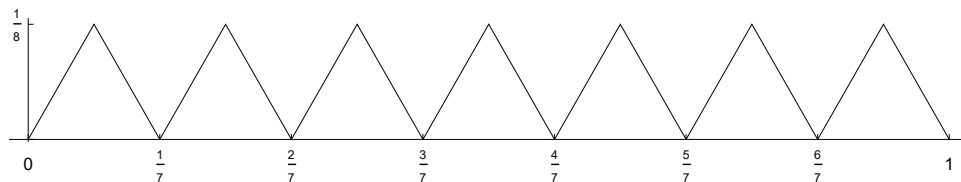
Nejdříve sestojíme pro funkci f a číslo $\frac{\varepsilon}{2}$ lineární lomenou funkci z lemmatu 44. Funkce p má vlastní pravou derivaci pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ a existuje $\alpha \geq 0$ takové, že

$$|p'_+(x)| \leq \alpha.$$

Dále pro $m \in \mathbb{N}$ zvolme dělení $a = x_0 < \dots < x_{2m} = b$ takové, že vzdálenosti mezi vedlejšími body jsou stejné. Funkci q definujeme tak, že v bodech x_i položíme

$$q(x_i) = \frac{\varepsilon}{4} (1 - (-1)^i)$$

a mezi těmito body je funkce q lineární. Jedná se tedy o „pilovitou funkci“ (příklad takovéto funkce pro $m = 7$ a $\varepsilon = \frac{1}{4}$ můžeme vidět na obrázku níže).



Absolutní hodnota pravé derivace funkce q je konstantní a pro všechna $t \in \langle a, b \rangle$ je

$$|q'_+(t)| = \frac{m \cdot \varepsilon}{b - a}.$$

Označme tuto hodnotu s ohledem na dříve definovanou hodnotu α jako $\beta + \alpha$. Je zřejmé, že pokud budeme zvětšovat m , bude se $|q'_+(t)| = \beta + \alpha$ zvětšovat nade všechny meze. Volme tedy $m \in \mathbb{N}$ tak velké, aby bylo $\beta > n$, protože pak je pro všechna x

$$|(q + p)'_+| = |q'_+ + p'_+| \geq |q'_+| - |p'_+| \geq \beta + \alpha - \alpha = \beta > n,$$

z čehož je zřejmé, že $g = p + q \notin A_n$, ale zároveň zřejmě $\varrho_\infty(f, g) < \varepsilon$.

Tím je dokázáno, že $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle) \setminus A_n$ je (otevřená) hustá v $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$, a tedy podle tvrzení 19 je A_n řídká v $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$.

Množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ je spočetným sjednocením řídkých množin, jedná se tedy o množinu 1. kategorie v $(\mathcal{C}(\langle a, b \rangle), \varrho_\infty)$. Množina $A^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ je tedy také množinou 1. kategorie. $\square$

Graf spojité funkce bez derivace má nekonečnou délku

V sekci 1.2 jsme viděli, že většina materiálů uvádí, že spojitou funkci lze nakreslit jedním tahem. V této části naší práce si ukážeme, proč je tato představa obecně nesprávná — grafy spojitých funkcí nemajících derivaci mají totiž na každém uzavřeném intervalu nekonečnou délku. Tedy, pokud bychom měli navázat na intuici uváděnou v materiálech: na celém světě neexistuje dost tuhy na to, abychom graf takové funkce nakreslili.¹

Chceme-li mluvit o délce, je potřeba si nejdříve formalizovat, co tímto pojmem budeme myslet.

Definice 41 (Délka grafu funkce).

- *Nechť je dáno dělení $D = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ intervalu $\langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R}$ a funkce $f : \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že po částech lineární funkce φ přísluší funkci f a dělení D , jestliže*

$$(\forall i \in \{0, \dots, n\}) (\varphi(x_i) = f(x_i))$$

a

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}) (\varphi \text{ je lineární na } \langle x_{i-1}, x_i \rangle).$$

- *Délku grafu po částech lineární funkce φ , která přísluší funkci $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ a dělení $D = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ definujeme jako*

$$\ell(\varphi, \langle a, b \rangle) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}))^2 + (x_i - x_{i-1})^2}.$$

- *Délku grafu funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ definujeme jako*

$$\ell(f, \langle a, b \rangle) = \sup \{ \ell(\varphi, \langle a, b \rangle) \mid D \text{ je dělení } \langle a, b \rangle \text{ a } \varphi \text{ přísluší } f \text{ a } D \}.$$

Definice 42 (Variace). *Nechť je dána funkce $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Definujeme variaci funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ jako*

$$\bigvee_a^b f = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \mid D = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\} \text{ je dělení } \langle a, b \rangle \right\}.$$

Řekneme, že funkce f má na intervalu $\langle a, b \rangle$ konečnou variaci, pokud $\bigvee_a^b f < \infty$.

Všimněme si, že definice délky grafu lomené funkce uvažuje délky úseček (podle Pythagorovy věty), ale variace pouze to, o kolik funkce naroste či klesne (v absolutní hodnotě). Je tedy přirozené formulovat následující lemma.

Lemma 46. *Pro každou funkci $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je*

$$\ell(f, \langle a, b \rangle) \geq \bigvee_a^b f.$$

¹Důkaz byl zpracován podle výkladu vedoucího práce během jedné z konzultací. S jeho laskavým svolením jej zde uvádíme.

Důkaz. Je-li $D = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ libovolné dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ a φ je po částech lineární funkce příslušná f a D , pak

$$\begin{aligned}\ell(\varphi, \langle a, b \rangle) &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}))^2 + (x_i - x_{i-1})^2} \\ &\geq \sum_{i=1}^n |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|.\end{aligned}$$

Přechodem k supremu přes všechna D a φ dostaneme požadovanou nerovnost. $\square$

K důkazu hlavní věty bude důležité následující lemma. Po něm už budeme mít k dispozici vše, co budeme potřebovat k důkazu věty o nekonečnosti délky grafů spojitých funkcí bez derivací.

Lemma 47. *Nechť má funkce $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ konečnou variaci. Pak existují neklesající funkce $f_1, f_2 : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že $f = f_1 - f_2$.*

Důkaz. Položme $f_1(x) = V_a^x f$. Protože funkce f má na $\langle a, b \rangle$ konečnou variaci, má konečnou variaci i na tomto menším intervalu, takže f_1 je reálná funkce. Z definice variace je také zřejmé, že tato funkce je neklesající.

Z definice variace také můžeme jednoduše vidět, že pro libovolné body $a \leq x \leq y \leq z \leq b$ platí

$$\bigvee_x^y f + \bigvee_y^z f = \bigvee_x^z f.$$

Definujme nyní funkci f_2 . Chceme, aby bylo $f = f_1 - f_2$, takže položíme $f_2 = f_1 - f$. Zbývá ověřit, že f_2 je neklesající. Zvolme dále libovolné dva body $x, y \in \langle a, b \rangle$ tak, že $x < y$. Potom máme

$$\begin{aligned}f_2(y) - f_2(x) &= \left(\bigvee_a^y f - f(y) \right) - \left(\bigvee_a^x f - f(x) \right) \\ &= \bigvee_a^y f - \bigvee_a^x f - (f(y) - f(x)) \\ &= \bigvee_x^y f - (f(y) - f(x)) \geq 0,\end{aligned}$$

kde poslední nerovnost je jasně vidět z definice variace. $\square$

Věta 48. *Nechť je funkce $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$) spojitá a nemá v žádném bodě derivaci. Pak $\ell(f, \langle a, b \rangle) = \infty$.*

Důkaz. Budeme chtít ukázat, že $\bigvee_a^b f = \infty$. Z lemmatu 46 pak bude zřejmé, že i $\ell(f, \langle a, b \rangle) = \infty$.

Pro spor předpokládejme, že $\bigvee_a^b f < \infty$. Pak existují neklesající funkce f_1 a f_2 takové, že $f = f_1 - f_2$. Podle Lebesgueovy věty (věta 31 na straně 45) mají funkce f_1 a f_2 vlastní derivaci skoro všude na intervalu $\langle a, b \rangle$. Jinými slovy, existují množiny $E_1, E_2 \subseteq \langle a, b \rangle$ míry nula takové, že f_1 (resp. f_2) má derivaci ve všech bodech $\langle a, b \rangle \setminus E_1$ (resp. $\langle a, b \rangle \setminus E_2$). Pak ale $E = E_1 \cup E_2$ má podle tvrzení 30 také míru nula. Pro všechny body $x \in \langle a, b \rangle \setminus E$ je $f'(x) = f'_1(x) - f'_2(x)$, tedy f má rovněž derivaci skoro všude v intervalu $\langle a, b \rangle$. To je ale spor s tím, že f nemá derivaci v žádném bodě intervalu $\langle a, b \rangle$. $\square$

Poznámka. Pokud funkce f nemá derivaci v žádném bodě intervalu $\langle a, b \rangle$, nemá samozřejmě derivaci ani v žádném bodě intervalu $\langle c, d \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$. Tedy spojité funkce bez derivace mají nekonečnou délku grafu na jakkoli malém intervalu.

Poznámka. Přemýšlivého čtenáře jistě napadne, jak můžeme v následujících podsekcích prezentovat grafy funkcí, jejichž graf, jak jsme si právě dokázali, nejde nakreslit. Trik je v tom, že vykreslujeme místo grafu samotné funkce vždy pouze graf aproximace pomocí lineární lomené funkce příslušné k původní funkci a dostatečně jemnému dělení — navíc čára, kterou grafy kreslíme, nemá nulovou šířku, takže vzniklá nepřesnost není patrná.

4.2.1 Bolzanova funkce (1834)

Tato funkce, první svého druhu (tj. spojitá bez derivace), se objevuje v Bolzanově knize *Functionenlehre*². Bernard Bolzano ji zde konstruuje poměrně obsáhle a podrobně, ale její klíčovou vlastnost, tedy absenci derivace ve všech bodech, dokázat neuměl — dokázal ovšem absenci derivace na husté množině a i tím předběhl svou dobu o několik desetiletí. Další funkce tohoto typu byla totiž objevena nejdříve kolem roku 1860 (viz podsekcí 4.2.4) a do obecného povědomí se dostala až funkce Weierstrassova z roku 1872 (viz podsekcí 4.2.2).

Ukažme si nyní myšlenku celého postupu tvorby Bolzanovy funkce, jak jej Bolzano prezentoval (zpracováno podle [109]).

Definice Bolzanovy funkce

Pro konstrukci Bolzanovy funkce budeme postupně definovat posloupnost funkcí. Bolzano definoval svou funkci obecně, všechny funkce jsou proto definovány na nějakém obecném intervalu $\langle a, b \rangle$, kde $a < b$.

Nejdříve definujeme funkci y_0 . Jedná se o lineární funkci, pro kterou

$$\begin{aligned}y_0(a) &= A, \\ y_0(b) &= B,\end{aligned}$$

přičemž $A \neq B$. Funkce y_0 je tedy v celém intervalu (a, b) rostoucí nebo klesající a její předpis je

$$y_0(x) = A + \frac{B - A}{b - a}(x - a).$$

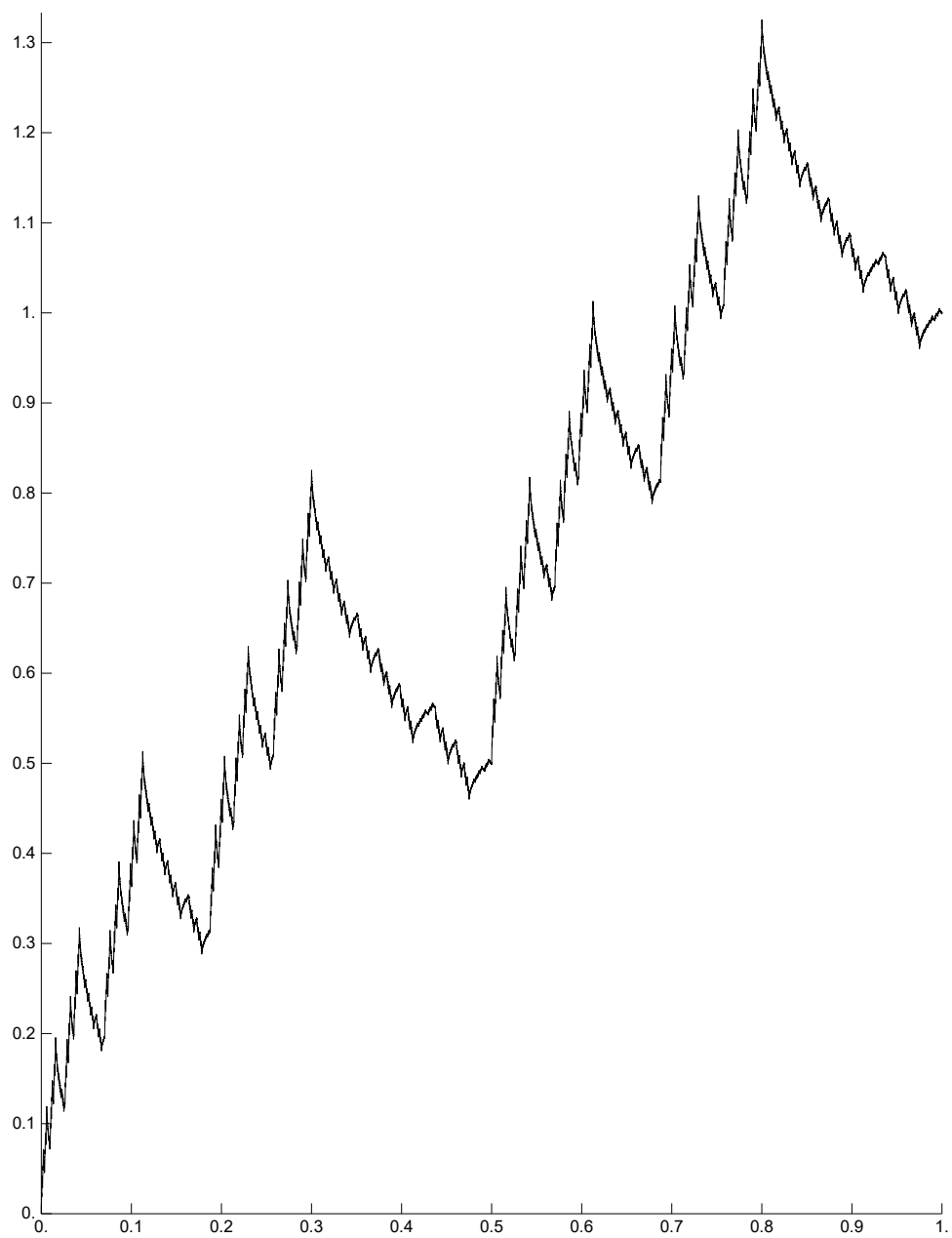
Dále definujeme funkci y_1 , a to tak, aby nebyla rostoucí ani klesající v celém intervalu, ale střídavě rostoucí a klesající. Funkční hodnoty na krajích a uprostřed intervalu jsou stejné jako u funkce y_0 , tj.

$$\begin{aligned}y_1(a) &= y_0(a) = A, \\ y_1(b) &= y_0(b) = B, \\ y_1\left(\frac{a+b}{2}\right) &= y_0\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{A+B}{2}.\end{aligned}$$

Bolzano dále požaduje, aby (je-li funkce y_0 rostoucí), byla funkce y_1 v intervalu $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ nejdříve rostoucí a pak klesající — je-li klesající, pak má být funkce y_1 naopak nejdříve klesající, pak rostoucí. Obdobně v intervalu $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$. Jako konkrétní příklad uvádí Bolzano doplnění výše dané body a funkční hodnoty o

$$\begin{aligned}y_1\left(a + \frac{3}{8}(b-a)\right) &= A + \frac{5}{8}(B-A), \\ y_1\left(a + \frac{7}{8}(b-a)\right) &= A + \frac{9}{8}(B-A),\end{aligned}$$

²Teorie funkcí



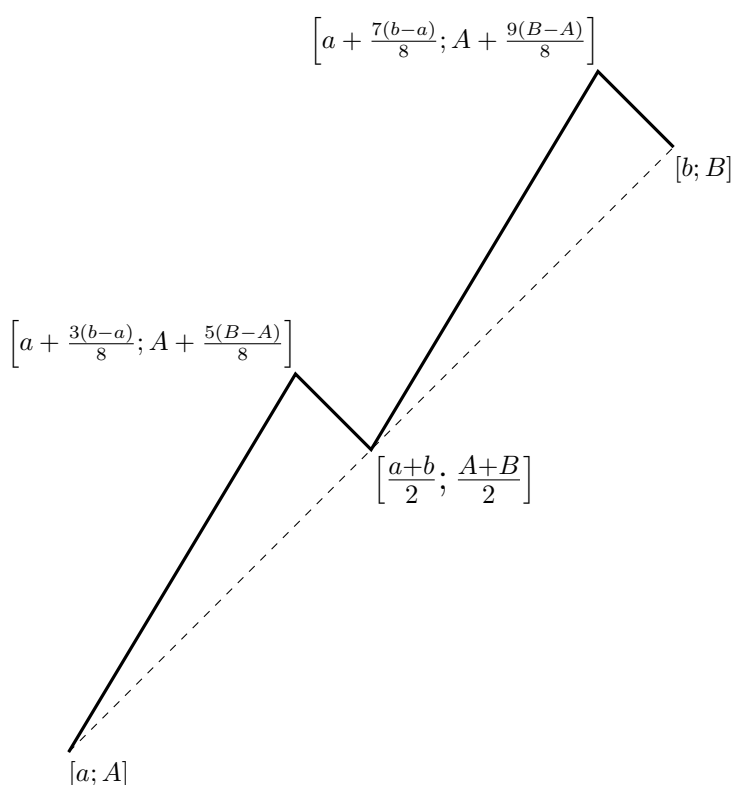
Obrázek 4.6: Graf Bolzanovy funkce.

čímž se definiční obor rozpadne na čtyři intervaly, konkrétně

$$\begin{aligned} &\left(a, a + \frac{3}{8}(b-a)\right), & \left(a + \frac{3}{8}(b-a), \frac{a+b}{2}\right), \\ &\left(\frac{a+b}{2}, a + \frac{7}{8}(b-a)\right), & \left(a + \frac{7}{8}(b-a), b\right), \end{aligned}$$

a na každém z těchto intervalů je funkce y_1 lineární a — jak si snadno rozmyslíme — střídavě rostoucí a klesající.

Popsaný postup si nejlépe představíme s pomocí obrázku (graf funkce y_0 je znázorněn čárkovanou čarou, graf funkce y_1 plnou čarou).



Obrázek 4.7: Schéma jednoho kroku tvorby grafu Bolzanovy funkce.

Uvedený algoritmus aplikujeme na lineární funkci na každém ze čtyř zmíněných intervalů (nebo názorněji: každou úsečku grafu funkce y_1 rozdělíme podle obrázku 4.7). Tím nám vznikne funkce y_2 , u níž máme 4^2 (tj. 16) intervalů, na každém z nich je funkce lineární a funkce y_2 je střídavě rostoucí a klesající. Pokračujme takto dále a dostaneme funkci y_n , která je definována na 4^n intervalech, na každém z nich je lineární a na celém svém definičním oboru střídavě roste a klesá.

Popsaný proces si pro přehlednost ještě jednou znázorníme grafem jednotlivých funkcí, tentokrát pro více iterací (obrázek 4.8, kde je pro jednoduchost $a = 0$, $b = 1$, $A = 0$, $B = 1$) [110]. Graf funkce y_0 tvoří jedna úsečka. Ve v grafu funkce y_1 ji nahradíme čtyřmi úsečkami s krajními body

$$[0,0], \quad \left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right], \quad \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad \left[\frac{7}{8}, \frac{9}{8}\right], \quad [1,1].$$

V grafu funkce y_2 máme 16 úseček, v grafu funkce y_3 pak 64 úseček a tak dále. Obecně graf funkce y_n tvoří 4^n úseček. V každém kroku vytvoříme graf funkce y_{n+1} tak, že každou z úseček tvořící graf funkce y_n nahradíme čtyřmi úsečkami podle vzoru na obrázku 4.7.

Poznamenejme také, že ačkoli Bolzano definoval svou funkci obecněji (tj. pro libovolné hodnoty a, b, A, B), budeme pro jednoduchost od této chvíle dále jako Bolzanovu funkci $\mathcal{B}$ rozumět funkci definovanou výše uvedeným postupem (který dále zpřesníme) tak, že výchozí funkce $y_1(x) = x$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

Popsaným postupem máme definovanou funkci pro hustou množinu bodů (tj. všechny body, ve kterých v některém kroku konstrukce dojde ke „zlomu“), zdaleka však ne pro celý interval $\langle 0, 1 \rangle$. Bolzanovu funkci proto budeme chtít definovat jako bodovou limitu (viz definici 17) funkcí y_n [109, 111].

Bolzano takto pomocí limity svou funkci také definoval a zároveň dokázal, že je tato funkce spojitá a nemá v žádném ze „zlomových“ bodů derivaci. Jeho postup (jak jej můžeme číst např. v [112]) je však založený především na intuici a z dnešního hlediska není zcela správný — i vzhledem k tomu, že Bolzano neměl naši dnešní představu o spojitosti a stejnoměrné konvergenci [111]. Podíváme se tedy na formalizaci Bolzanovy funkce a důkaz její spojitosti podle Karla Rychlíka [111]. Nejdříve si ale zavedeme značení, které budeme dále používat.

Ukázali jsme si, že v n -té iteraci (tj. při tvorbě funkce y_n) je funkce y_n definována po částech na 4^n intervalech. Označme k -tý interval zleva (počínaje 0) v n -té iteraci jako

$$d_{n,k} = \langle a_{n,k}, a_{n,k+1} \rangle,$$

kde $k \in \{0, 1, \dots, 4^n - 1\}$. Pro lepší představu tedy konkrétně u funkce y_0 máme $d_{0,0} = \langle 0, 1 \rangle$, u funkce y_1 $d_{1,0} = \langle 0, \frac{3}{8} \rangle$, $d_{1,1} = \langle \frac{3}{8}, \frac{1}{2} \rangle$, $d_{1,2} = \langle \frac{1}{2}, \frac{7}{8} \rangle$, $d_{1,3} = \langle \frac{7}{8}, 1 \rangle$ a tak dále.

Pododobně označme intervaly oborů hodnot jednotlivých dílčích lineárních funkcí definovaných na intervalech $d_{n,k}$ jako

$$D_{n,k} = \langle A_{n,k}, A_{n,k+1} \rangle,$$

kde opět $k \in \{0, 1, \dots, 4^n - 1\}$. Vzhledem k tomu, že jsou funkce y_n na jednotlivých intervalech $d_{n,k}$ střídavě rostoucí a klesající, připustíme pro intervaly $D_{n,k}$ značení, kde $A_{n,k} > A_{n,k+1}$. Pro lepší představu tedy konkrétně u funkce y_0 máme $D_{0,0} = \langle 0, 1 \rangle$, u funkce y_1 $D_{1,0} = \langle 0, \frac{5}{8} \rangle$, $D_{1,1} = \langle \frac{5}{8}, \frac{1}{2} \rangle$, $D_{1,2} = \langle \frac{1}{2}, \frac{9}{8} \rangle$, $D_{1,3} = \langle \frac{9}{8}, 1 \rangle$ a tak dále.

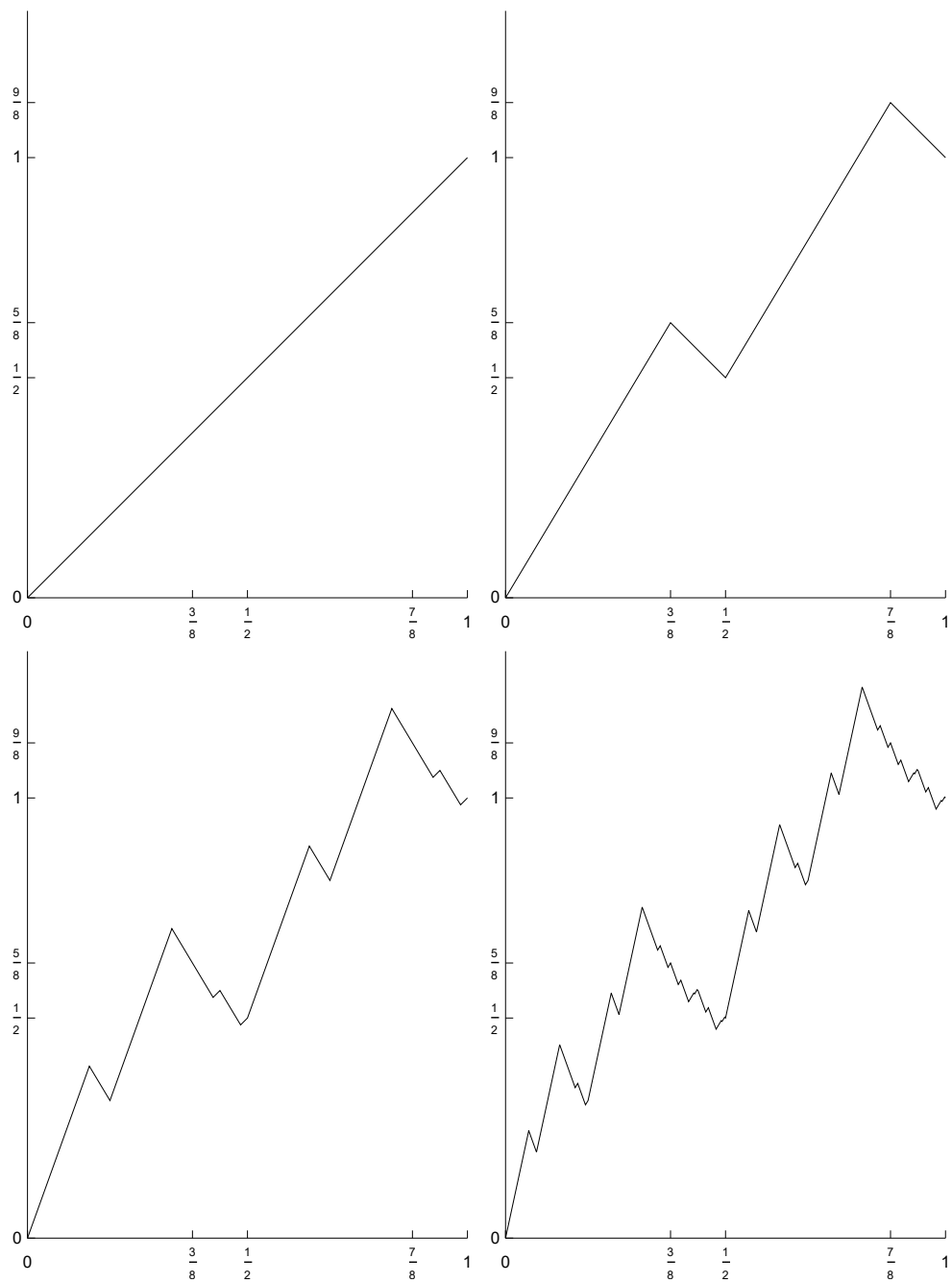
V dalším textu nás budou zajímat zejména orientované délky těchto intervalů. Označme tedy

$$\delta_{n,k} = a_{n,k+1} - a_{n,k}, \quad (4.4)$$

$$\Delta_{n,k} = A_{n,k+1} - A_{n,k}, \quad (4.5)$$

kde opět $k \in \{0, 1, \dots, 4^n - 1\}$. Pro představu opět uvedme konkrétní příklady: $\delta_{0,0} = 1$, $\delta_{1,0} = \frac{3}{8}$, $\delta_{1,1} = \frac{1}{8}$, $\delta_{1,2} = \frac{3}{8}$, $\delta_{1,3} = \frac{1}{8}$ atd., $\Delta_{0,0} = 1$, $\Delta_{1,0} = \frac{5}{8}$, $\Delta_{1,1} = -\frac{1}{8}$, $\Delta_{1,2} = \frac{5}{8}$, $\Delta_{1,3} = -\frac{1}{8}$ atd.

Očividnou vlastnost $\delta_{n,k}$ a $\Delta_{n,k}$ shrnuje následující lemma.



Obrázek 4.8: Nultá až třetí fáze vzniku Bozanovy funkce (tj. funkce y_0 až y_3).

Lemma 49. Pro $\delta_{n,k}$ a $\Delta_{n,k}$ definované v (4.4) a (4.5) platí

$$\left(\frac{1}{8}\right)^n \leq \delta_{n,k} \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n, \quad (4.6)$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^n \leq |\Delta_{n,k}| \leq \left(\frac{5}{8}\right)^n. \quad (4.7)$$

Důkaz. Je zřejmé, že

$$\begin{aligned} \delta_{0,0} &= 1, \\ \Delta_{0,0} &= 1. \end{aligned}$$

Z algoritmu tvorby funkce pak vyplývá, že

$$\begin{aligned} \delta_{n+1,4k} &= \delta_{n+1,4k+2} = \frac{3}{8}\delta_{n,k}, \\ \delta_{n+1,4k+1} &= \delta_{n+1,4k+3} = \frac{1}{8}\delta_{n,k}, \\ \Delta_{n+1,4k} &= \Delta_{n+1,4k+2} = \frac{5}{8}\Delta_{n,k}, \\ \Delta_{n+1,4k+1} &= \Delta_{n+1,4k+3} = -\frac{1}{8}\Delta_{n,k}. \end{aligned}$$

Pomocí matematické indukce je už snadné dokázat požadované nerovnosti. $\square$

Jak jsme si řekli výše, chceme definovat Bolzanovu funkci jako limitu funkcí y_n . Dokažme si proto následující tvrzení (z něhož nám mimochodem ihned vyplyne, že Bolzanova funkce je spojitá).

Tvrzení 50. Posloupnost funkcí $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně.

Důkaz. Definujme posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \begin{cases} y_0(x), & n = 0, \\ y_n(x) - y_{n-1}(x), & n > 0. \end{cases}$$

Dále uvažujme řadu

$$r(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$$

a uvědomme si, že pro částečné součty platí

$$r_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i(x) = y_0(x) + (y_1(x) - y_0(x)) + \dots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) = y_n(x).$$

Podle definice stejnoměrné konvergence řady (definice 19) konverguje řada zadávající funkci $r(x)$ stejnoměrně právě tehdy, když posloupnost částečných součtů $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně — tj. když posloupnost $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně. Stačí tedy dokázat stejnoměrnou konvergenci řady funkcí definující funkci $r(x)$. To provedeme pomocí Weierstrassova kritéria pro konvergenci řad (věta 8).

Z popsaného procesu tvorby Bolzanovy funkce (a zejména z jeho grafického znázornění na obrázku 4.7) je jasné, že výraz $|y_{n+1}(x) - y_n(x)|$ nabývá na intervalech $\langle a_{n+1,4k}, a_{n+1,4(k+1)} \rangle$ svého maxima v bodech $a_{n+1,4k+1}$ a $a_{n+1,4k+3}$. Toto maximum lze odhadnout

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| < |A_{n+1,4k+1} - A_{n+1,4k}| = |\Delta_{n+1,4k}| \stackrel{(4.7)}{\leq} \left(\frac{5}{8}\right)^{n+1}.$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^{n+1}$ je ale geometrická řada a protože $-1 < \frac{5}{8} < 1$, tato řada konverguje. Podle Weierstrassova kritéria tedy konverguje i řada funkcí v definici funkce $r(x)$. $\square$

Nyní už můžeme konečně definovat Bolzanovu funkci.

Definice 43 (Bolzanova funkce). *Pro $x \in \langle 0,1 \rangle$ definujeme funkci $\mathcal{B}$ jako limitu posloupnosti funkcí $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, tj.*

$$\mathcal{B}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x),$$

kde $y_0(x) = x$.

Vlastnosti Bolzanovy funkce

Budeme chtít dokázat, že funkce $\mathcal{B}$ je ve všech bodech svého definičního oboru spojitá, ale v žádném bodě svého definičního oboru nemá derivaci.

S pomocí výsledků základního kurzu matematické analýzy (které jsme zmínili v sekci 2.1) je důkaz první ze zmíněných vlastností poměrně jednoduchý.

Věta 51. *Funkce $\mathcal{B}$ je ve všech bodech svého definičního oboru spojitá.*

Důkaz. Vzhledem k tomu, že funkce y_n jsou složené z na sebe navazujících lineárních funkcí, jsou všechny tyto funkce spojitě.

Podle tvrzení 50 je posloupnost funkcí $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ stejnoměrně konvergentní a podle věty 10 stejnoměrná konvergence zachovává spojitost. Funkce $\mathcal{B}$ je tedy spojitá. $\square$

Důkaz faktu, že Bolzanova funkce nemá v žádném bodě derivaci, je poněkud obsáhlejší, ale jeho myšlenka není v jádru příliš složitá. Jak už jsme zmínili, sám Bolzano neuměl absenci derivace ve všech bodech dokázat, použijeme tedy postup Vojtěcha Jarníka [110].

Než přistoupíme k důkazům samotným (na straně 91), rozmysleme si několik důležitých lemmat a úvah.

Lemma 52. *Pro každé dvě hodnoty x a x' z libovolného intervalu $d_{n,k} = \langle a_{n,k}, a_{n,k+1} \rangle$, pro které platí, že*

$$|x' - x| = \frac{1}{2} \delta_{n,k},$$

platí

$$|\mathcal{B}(x') - \mathcal{B}(x)| = \frac{1}{2} \Delta_{n,k}.$$

Tedy směrnice sečny procházející body grafu Bolzanovy funkce $[x, \mathcal{B}(x)]$ a $[x', \mathcal{B}(x')]$ (tj. $\frac{\mathcal{B}(x) - \mathcal{B}(x')}{x - x'}$) má stejnou hodnotu, jako směrnice přímky procházející body grafu příslušných ke krajním bodům intervalu $\delta_{n,k}$.

Důkaz. Z definice funkce y_1 je zřejmé, že pro $x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ je $y_1(x + \frac{1}{2}) = y_1(x) + \frac{1}{2}$. Další funkce se ale tvoří na každém intervalu, na který se interval $\langle 0, 1 \rangle$ rozpadne v n -té iteraci, stejným způsobem, takže pro jakékoli $n \in \mathbb{N}$ je pro $x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ rovnost $y_n(x + \frac{1}{2}) = y_n(x) + \frac{1}{2}$ splněna.

Podobnou úvahu můžeme provést i začínáme-li místo funkce y_1 a intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s funkcí y_n a intervalem $d_{n,k}$ (protože funkce $\mathcal{B}$ na intervalu $d_{n,k}$ je jen naškálovanou verzí funkce $\mathcal{B}$ na celém intervalu $\langle 0, 1 \rangle$). To znamená, že pro každé $x \in \langle a_{n,k}, \frac{a_{n,k} + a_{n,k+1}}{2} \rangle$ (tj. z levé poloviny intervalu $d_{n,k}$) je

$$y_n\left(x + \frac{1}{2}\delta_{n,k}\right) = y_n(x) + \frac{1}{2}\Delta_{n,k}.$$

Z toho plyne, že pro krajní body podintervalů intervalu $d_{n,k}$, na které se rozpadne interval $d_{n,k}$ v následujících iteracích, věta platí. Pro zbývající body si stačí uvědomit, že

$$\mathcal{B}\left(x + \frac{1}{2}\delta_{n,k}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n\left(x + \frac{1}{2}\delta_{n,k}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) + \frac{1}{2}\Delta_{n,k} = \mathcal{B}(x) + \frac{1}{2}\Delta_{n,k}.$$

□

V důkazech vět 55, 56, 57 a 58 budeme pracovat s následující jednoduchou úvahou.

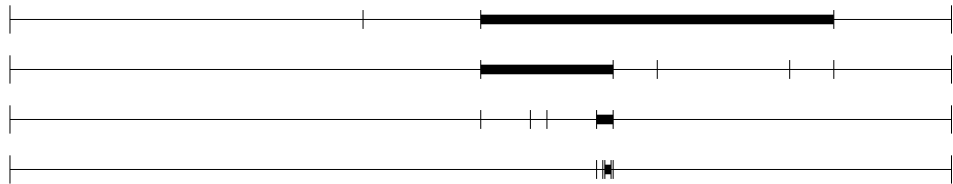
Máme-li nějaký bod $x \in \langle 0, 1 \rangle$, potom tento bod leží (alespoň) v jednom z intervalů $\delta_{1,k}$, kde $k \in \{0; 1; 2; 3\}$. Označme tento interval J_1 . Podle toho, zda je to interval $\delta_{1,0}$, $\delta_{1,1}$, $\delta_{1,2}$, nebo $\delta_{1,3}$, doplníme značení horním indexem na J_1^I , J_1^{II} , J_1^{III} nebo J_1^{IV} .

Tento interval je v další fázi rozdělen na čtyři intervaly $\delta_{2,4k}$, $\delta_{2,4k+1}$, $\delta_{2,4k+2}$ a $\delta_{2,4k+3}$, které můžeme obdobně označit J_2^I , J_2^{II} , J_2^{III} , J_2^{IV} — v jednom z nich leží bod x .

Takto můžeme pokračovat dále, čímž vytvoříme nekonečnou posloupnost intervalů $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$. Vždy z intervalu $\delta_{n,k} = J_n$ vytvoříme čtyři intervaly:

$$\delta_{n+1,4k} = J_{n+1}^I \quad \delta_{n+1,4k+1} = J_{n+1}^{II} \quad \delta_{n+1,4k+2} = J_{n+1}^{III} \quad \delta_{n+1,4k+3} = J_{n+1}^{IV} \quad (4.8)$$

a jeden z nich vybereme jako interval J_{n+1} . Posloupnost $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy jednoznačně určena pořadím, v jakém za sebou následují čísla I , II , III a IV — budeme říkat, že intervaly jsou typu J^I , J^{II} , J^{III} , nebo J^{IV} . Náznak takovéto posloupnosti intervalů můžeme vidět na následujícím obrázku — konkrétně se jedná o posloupnost $[J_1^{III}, J_2^I, J_3^{IV}, J_4^{III}, \dots]$.



Z lemmatu 49 vyplývá, že délky intervalů J_n s rostoucím n konvergují k nule, a tedy každá takováto posloupnost intervalů má jednobodový průnik. To znamená, že posloupnost $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ jednoznačně určuje bod x .

Poznámka. Uvědomme si ale, že krajní body intervalů $\delta_{n,k} = J_n$ (kromě bodů 0 a 1) lze zadat dvěma způsoby — posloupností, kde jsou od určitého indexu J_n typu J^I , nebo posloupností, kde jsou od určitého indexu J_n typu J^{IV} .

Pro přehlednost označme ještě délku intervalu J_n jako $|J_n|$, krajní body intervalu J_n jako a_n^l a a_n^p , tj.

$$J_n = \langle a_n^l, a_n^p \rangle, \quad (4.9)$$

a směrnici funkce y_n v intervalu J_n jako k_n — pro tuto směrnici platí následující jednoduché lemma.

Lemma 53. *Pro směrnice k_{n+1} funkcí y_{n+1} platí následující rovnosti.*

- Je-li J_{n+1} typu J^I nebo J^{III} , je $k_{n+1} = \frac{5}{3}k_n$.
- Je-li J_{n+1} typu J^{II} nebo J^{IV} , je $k_{n+1} = -k_n$.

Důkaz. Lemma přímo vyplývá z rovnic v důkazu lemmatu 49. □

K důkazům vět 56, 57 a 58 budeme potřebovat ještě následující lemma, které hovoří o extrémech Bolzanovy funkce. Jeho podrobný důkaz je sice poměrně rozsáhlý, ale myšlenkově není nijak náročný. Navíc po zhlédnutí obrázku 4.6 není jeho tvrzení příliš překvapivé.

Lemma 54 (O extrémech Bolzanovy funkce).

1. (a) Funkce $\mathcal{B}$ nabývá svého globálního minima v bodě $x_{\min} = 0$, přičemž $y_{\min} = \mathcal{B}(x_{\min}) = \mathcal{B}(0) = 0$.
(b) Funkce $\mathcal{B}$ nabývá svého globálního maxima v bodě $x_{\max} = \frac{4}{5}$, přičemž $y_{\max} = \mathcal{B}(x_{\max}) = \mathcal{B}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{3}$.
2. Funkce $\mathcal{B}$ nabývá na intervalu $d_{n,k}$ lokálních extrémů v bodech $a_{n,k}$ a $a_{n,k} + \frac{4}{5}\delta_{n,k}$, přičemž $\mathcal{B}(a_{n,k}) = A_{n,k}$ a $\mathcal{B}\left(a_{n,k} + \frac{4}{5}\delta_{n,k}\right) = A_{n,k} + \frac{4}{3}\Delta_{n,k}$.

Důkaz. 1.(a) *Globální maximum*

Víme, že $\mathcal{B}(0) = 0$, tedy nutně musí být $y_{\min} \leq 0$.

Dále je z principu konstrukce funkce jasné (jak jsme si řekli už v důkazu lemmatu 52), že pro $x \leq \frac{1}{2}$ je

$$\mathcal{B}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \mathcal{B}(x) + \frac{1}{2},$$

což znamená, že $x_{\min}$ musí ležet v intervalu $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$.

Pro spor předpokládejme, že $x_{\min} \in \langle \frac{3}{8}, \frac{1}{2} \rangle$. Potom bod $x_{\min}$ je jednoznačně zadán posloupností $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde J_1 je typu J^{II} , a tedy

$$|J_1| = \frac{1}{8}, \quad (4.10)$$

$$k_1 = -1. \quad (4.11)$$

Z rovnic v důkazu lemmatu 49 a z lemmatu 53 víme, že

$$|J_n| \leq \frac{3}{8} |J_{n-1}|, \quad (4.12)$$

$$|k_n| \leq \frac{5}{3} |k_{n-1}|. \quad (4.13)$$

Aplikujeme-li nerovnosti (4.12) a (4.13) rekurzivně (a vezmeme přitom v úvahu rovnosti (4.10) a (4.11) jako dno rekurze), dostáváme

$$|J_n| \leq \frac{1}{8} \left(\frac{3}{8}\right)^{n-1},$$

$$|k_n| \leq \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}.$$

Nyní vezmeme v úvahu, že $x_{\min}$ je (jediným) prvkem průniku všech intervalů J_n , tedy limitou levých krajních bodů těchto intervalů.

Protože $a_{n+1}^l \in J_n$ (s využitím značení z rovnosti (4.9)), je z principu konstrukce funkce (vizme např. obrázek 4.7) zřejmé, že rozdíl funkčních hodnot v levých bodech intervalů J_n a J_{n+1} je

$$\mathcal{B}(a_n^l) - \mathcal{B}(a_{n+1}^l) \leq |\mathcal{B}(a_{n+1}^l) - \mathcal{B}(a_n^l)| < \frac{9}{8} \cdot |k_n| \cdot |J_n|,$$

tedy

$$\mathcal{B}(a_{n+1}^l) > \mathcal{B}(a_n^l) - \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{8} \left(\frac{3}{8}\right)^{n-1} = \mathcal{B}(a_n^l) - \frac{9}{64} \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1},$$

$$\mathcal{B}(a_{n+1}^l) > \mathcal{B}(a_{n-1}^l) - \frac{9}{64} \left(\frac{5}{8}\right)^{n-2} - \frac{9}{64} \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1},$$

...

$$\mathcal{B}(a_{n+1}^l) > \mathcal{B}(a_1^l) - \frac{9}{64} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{5}{8}\right)^i,$$

a protože $a_1^l = \frac{3}{8}$, je $\mathcal{B}(a_1^l) = \frac{5}{8}$, a tedy

$$\mathcal{B}(a_{n+1}^l) > \frac{5}{8} - \frac{9}{64} \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{8}\right)^n}{1 - \frac{5}{8}} = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} + \overbrace{\frac{3}{8} \left(\frac{5}{8}\right)^n}^{>0} > \frac{1}{4}.$$

To ale znamená, že

$$\mathcal{B}(x_{\min}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}(a_{n+1}^l) \geq \frac{1}{4},$$

což ale odporuje faktu, že $\mathcal{B}(x_{\min}) \leq 0$, který jsme si ujasnili výše. Bod $x_{\min}$ tedy musí ležet v intervalu $\langle 0, \frac{3}{8} \rangle$.

Výše uvedený postup ale můžeme aplikovat i na interval $\langle 0, \frac{3}{8} \rangle$ (protože konstrukce Bolzanovy funkce je v intervalu $\langle 0, \frac{3}{8} \rangle$ analogická konstrukci v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$) a docházíme tedy k výsledku, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je

$$x_{\min} \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Z toho je jasné, že funkce $\mathcal{B}$ nabývá globálního minima o hodnotě 0, a to pouze v bodě $x_{\min} = 0$.

Poznámka. Vzhledem k tomu, že Bolzanova funkce se ve všech intervalech $d_{n,k}$ konstruuje stejným algoritmem, můžeme říci (používáme stejnou myšlenku, jako v důkazu lemmatu 52), že v libovolném intervalu $d_{n,k}$ nabývá funkce $\mathcal{B}$ lokálního extrému $A_{n,k}$ v bodě $a_{n,k}$ (tj. levém krajním bodě), a to minima, je-li směrnice funkce y_n v intervalu $d_{n,k}$ kladná, nebo maxima, je-li záporná.

1.(b) Globální minimum

Jak už jsme uvedli výše, je pro $x \leq \frac{1}{2}$ $\mathcal{B}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \mathcal{B}(x) + \frac{1}{2}$, a tedy $x_{\max}$ musí ležet v intervalu $\left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle$.

Z poznámky na konci důkazu části (a) ale vyplývá, že funkce $\mathcal{B}$ nabývá na intervalu $\left\langle \frac{7}{8}, 1 \right\rangle$ maxima v levém krajním bodě tohoto intervalu, tj. v bodě $\frac{7}{8}$ (konkrétně jde o hodnotu $\frac{9}{8}$). V intervalu $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{7}{8} \right\rangle$ ovšem nabývá větších hodnot (jak jde vidět už z obrázků 4.7 a 4.8) — konkrétně například:

$$\mathcal{B}\left(\frac{1}{2} + \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{8}\right) = y_2\left(\frac{1}{2} + \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{8}\right) = \frac{1}{2} + \frac{9}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{77}{64} > \frac{9}{8}.$$

Podobně můžeme uvažovat i v rámci intervalu $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{7}{8} \right\rangle$. Vidíme tedy, že bod $x_{\max}$ je dán posloupností intervalů $J_1^{III}, J_2^{III}, J_3^{III}, \dots$

Obdobně jako v části (a) je $x_{\max}$ limitou levých krajů těchto intervalů:

$$\begin{aligned} a_1^l &= \frac{1}{2}, \\ a_2^l &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}, \\ a_3^l &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2, \\ &\dots \\ a_n^l &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{3}{8}\right)^{n-1-i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{8}\right)^n}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{4}{5} \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{8}\right)^n\right), \end{aligned}$$

a tedy samotná limita je

$$x_{\max} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{5} \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{8}\right)^n\right) = \frac{4}{5}.$$

Obdobně

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(a_n^l) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1-i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{8}\right)^n}{1 - \frac{5}{8}} = \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \left(\frac{5}{8}\right)^n\right), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}(a_n^l) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \left(\frac{5}{8}\right)^n\right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Poznámka. Ze stejného důvodu jako v poznámce na konci části (a) můžeme říci, že funkce $\mathcal{B}$ nabývá v libovolném intervalu $d_{n,k}$ lokálního extrému $A_{n,k} + \frac{4}{3}\Delta_{n,k}$ v bodě $a_{n,k} + \frac{4}{5}\delta_{n,k}$.

2. Lokální extrémy

Pravdivost tohoto tvrzení je ukázána v poznámkách na konci částí důkazu 1.(a) a 1.(b). $\square$

Nyní už můžeme dokázat jednotlivé dílčí věty o neexistenci derivací.

Věta 55. *Funkce $\mathcal{B}$ nemá derivaci v bodech x , které jsou dány posloupností $\{J_n\}_{n=1}^\infty$, která obsahuje nekonečně mnoho intervalů typu J^{II} nebo J^{IV} .*

Důkaz. Ke každému n_0 tedy existuje $n \geq n_0$ takové, že J_n je typu J^{II} nebo J^{IV} , tedy podle lemmatu 53 je

$$k_n = -k_{n+1}.$$

Z faktu, že $|k_1| \geq 1$, a z lemmatu 53 vidíme, že

$$|k_n| \geq 1,$$

je očividné, že posloupnost $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ diverguje, konkrétně $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n$ neexistuje.

Podle lemmatu 52 najdeme k našemu x v každém intervalu J_n nějaké x_n takové, že

$$\frac{\mathcal{B}(x) - \mathcal{B}(x_n)}{x - x_n} = k_n.$$

Z toho už ale vidíme, že neexistuje limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{B}(x) - \mathcal{B}(x_n)}{x - x_n},$$

tedy v bodě x neexistuje derivace. □

Poznámka. Nyní dokážeme, že funkce $\mathcal{B}$ nemá derivaci v bodech, které jsou dány posloupnostmi intervalů $\{J_n\}_{n=1}^\infty$, v nichž je jen konečný počet intervalů typu J^{II} a J^{IV} . Vzhledem k tomu, že funkce $\mathcal{B}$ je konstruována ve všech intervalech J_n stejným algoritmem jako v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, můžeme bez újmy na obecnosti uvažovat pouze posloupnosti, v nichž jsou všechny intervaly pouze typu J^I a J^{III} .

Důkaz pro přehlednost rozložíme do tří vět (stejně jako to udělal i Jarník) podle tří možností, jak může vypadat posloupnost $\{J_n\}_{n=1}^\infty$.

Ve všech třech větách (56, 57, 58) je myšlenka důkazu stejná — najdeme nějaké dvě posloupnosti, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ a $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ takové, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - x = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n - x = 0,$$

ale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{B}(x_n) - \mathcal{B}(x)}{x_n - x} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{B}(y_n) - \mathcal{B}(x)}{y_n - x}.$$

Věta 56. *Funkce $\mathcal{B}$ nemá derivaci v bodech x , které jsou dány posloupností $\{J_n\}_{n=1}^\infty$ takovou, že*

1. *pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je J_n typu J^I nebo J^{III} a*
2. *posloupnost obsahuje nekonečně mnoho po sobě jdoucích dvojic J_i^{III}, J_{i+1}^{III} .*

Důkaz. Podle podmínky 2 existuje pro každé n_0 takové $n > n_0$, že posloupnost $\{J_n\}_{n=1}^\infty$ obsahuje intervaly $J_n, J_{n+1}^{III}, J_{n+2}^{III}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $k_n > 0$ (pro $k_n < 0$ je situace symetrická).

Podle lemmatu 52 existuje k danému x takové $x'_n \in J_n$, že

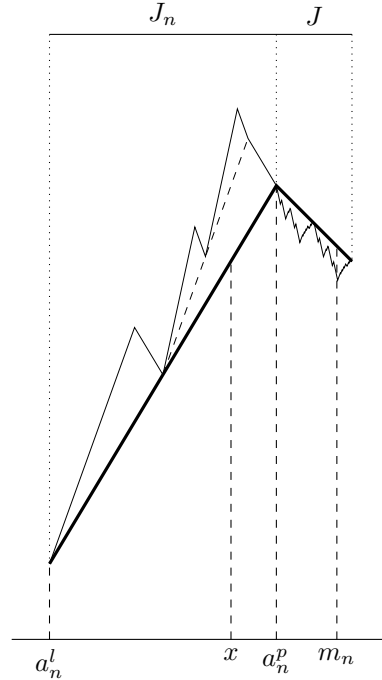
$$\mathcal{B}(x) > \underbrace{\mathcal{B}(a_n^l) + \frac{1}{2} \cdot k_n \cdot |J_n|}_{x \in J_{n+1}^{III}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} k_n \cdot \frac{3}{8} |J_n|}_{x \in J_{n+2}^{III}} = \mathcal{B}(a_n^l) + \frac{13}{16} k_n |J_n|. \quad (4.14)$$

Protože podle 1 je J_n typu J^I nebo J^{III} , můžeme si být jisti tím, že k němu zprava těsně přiléhá interval J (tj. levý krajní bod intervalu J je roven pravému krajnímu bodu intervalu J_n) takový, že J je typu J^{II} nebo J^{IV} , a tedy směrnice v intervalu J je

$$k = -k_{n-1} = -\frac{3}{5} k_n.$$

V intervalu J pak leží nějaký bod m_n , ve kterém nabývá funkce $\mathcal{B}$ minima na tomto intervalu.

Popsanou situaci můžeme přehledně vidět na následujícím obrázku.



Z lemmatu 54 víme, že

$$m_n = a_n^p + \frac{4}{5} \cdot |J| = a_n^l + |J_n| + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} |J_n|,$$

a tedy

$$0 < m_n - x < m_n - a_n^l = \frac{19}{15} |J_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (4.15)$$

což znamená, že i $m_n - x$ jde k nule. Navíc snadno spočítáme, že

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(m_n) &= \mathcal{B}(a_n^p) + \frac{3}{4} \cdot |J| \cdot k \\ &= \mathcal{B}(a_n^l) + |J_n| k_n - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} J_n \cdot \frac{3}{5} k_n \\ &= \mathcal{B}(a_n^l) + \frac{11}{15} |J_n| k_n. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Z nerovnosti (4.14) a rovnosti (4.16) vyplývá, že

$$\mathcal{B}(x) - \mathcal{B}(m_n) < \frac{13}{16}k_n |J_n| - \frac{11}{15}|J_n|k_n,$$

a protože podle nerovnosti (4.15) je

$$x - m_n > -\frac{19}{15}|J_n|,$$

můžeme psát

$$\frac{\mathcal{B}(x) - \mathcal{B}(m_n)}{x - m_n} < \frac{\frac{13}{16}|J_n|k_n - \frac{11}{15}|J_n|k_n}{-\frac{19}{15}|J_n|} = \frac{\frac{13}{16} - \frac{11}{15}}{-\frac{19}{15}}k_n = -\frac{1}{16}k_n.$$

Uvažíme-li, že protože jsou všechny intervaly typu J^I nebo J^{III} , je $k_n = \left(\frac{5}{3}\right)^n$ a tedy vidíme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{B}(x) - \mathcal{B}(m_n)}{x - m_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{16}k_n = -\infty.$$

Ale

$$x - a_n^l < \left(\frac{3}{8}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

a

$$\frac{\mathcal{B}(x) - \mathcal{B}(m_n)}{x - m_n} = k_n = \left(\frac{5}{3}\right),$$

takže

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{B}(x) - \mathcal{B}(m_n)}{x - m_n} = \infty.$$

To znamená, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{B}(m_n) - \mathcal{B}(x)}{m_n - x} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{B}(a_n^l) - \mathcal{B}(x)}{a_n^l - x},$$

a proto funkce $\mathcal{B}$ nemá v daných bodech derivaci. $\square$

Věta 57. Funkce $\mathcal{B}$ nemá derivaci v bodech x , které jsou dány posloupností $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že

1. pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je J_n typu J^I nebo J^{III} a
2. posloupnost obsahuje nekonečně mnoho po sobě jdoucích dvojic J_i^I, J_{i+1}^I .

Důkaz. Důkaz je obdobný jako v případě věty 56 — pouze stačí místo intervalů $J_n, J_{n+1}^{III}, J_{n+2}^{III}$ uvažovat intervaly $J_n, J_{n+1}^I, J_{n+2}^I$. $\square$

Věta 58. Funkce $\mathcal{B}$ nemá derivaci v bodech x , které jsou dány posloupností $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že

1. pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je J_n typu J^I nebo J^{III} a
2. v posloupnosti se střídají intervaly J^I a J^{III} .

Důkaz. Vzhledem k tomu, že funkce $\mathcal{B}$ je v každém intervalu naškálovanou verzí funkce $\mathcal{B}$ v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, můžeme uvažovat bod x zadaný posloupností

$$J_1^I, J_2^{III}, J_3^I, J_4^{III}, J_5^I, J_6^{III}, \dots \quad (4.17)$$

jako reprezentanta všech bodů x ze znění věty.

Protože podle podmínky 1 jsou všechny intervaly J_n typu J^I nebo J^{III} , víme, že

$$|J_n| = \left(\frac{3}{8}\right)^n, \\ k_n = \left(\frac{5}{8}\right)^n.$$

Snadno si rozmyslíme (např. s pomocí obrázku 4.7), že

$$a_{2n+1}^l = a_{2n}^l, \\ a_{2n+2}^l = a_{2n+1}^l + \frac{1}{2} |J_{2n+1}|,$$

z čehož jednoduše vypočítáme

$$\begin{aligned} a_{2n+2}^l &= a_{2n}^l + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{8}\right)^{2n+1} \\ &= a_{2n-2}^l + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{8}\right)^{2n-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{8}\right)^{2n+1} \\ &\dots \\ &= \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{8}\right)^{2n+1}, \\ \mathcal{B}(a_{2n+2}^l) &= \mathcal{B}(a_{2n}^l) + \frac{1}{2} k_{2n+1} |J_{2n+1}| = \mathcal{B}(a_{2n}^l) + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{8}\right)^{2n+1} \\ &= \mathcal{B}(a_{2n-2}^l) + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{8}\right)^{2n-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{8}\right)^{2n+1} \\ &\dots \\ &= \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{2} \left(\frac{5}{8}\right)^{2n+1}. \end{aligned}$$

Protože x je dáno posloupností intervalů $\{J_n\}_{n=1}^\infty$, je

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+2}^l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{8}\right)^{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{12}{55}, \\ \mathcal{B}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}(a_{2n+2}^l) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{2} \left(\frac{5}{8}\right)^{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{8}\right)^2} = \frac{20}{39}. \end{aligned}$$

Všimněme si nyní, že posloupnost (4.17) zůstane stejná, pokud odebereme ze začátku sudý počet členů (to souvisí i s již zmíněným faktem, že funkce $\mathcal{B}$ je v intervalu J_{2n} naškálovanou verzí sebe sama). Proto

$$x = a_{2n}^l + \frac{12}{55} \cdot |J_{2n}|, \quad (4.18)$$

$$\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(a_{2n}^l) + \frac{20}{39} \cdot k_{2n} \cdot |J_{2n}|. \quad (4.19)$$

Vytvoříme nyní posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že budeme brát středy sudých intervalů J_{2n} , tedy

$$s_n = a_{2n}^l + \frac{1}{2} \cdot |J_{2n}|, \quad (4.20)$$

$$\mathcal{B}(s_n) = \mathcal{B}(a_{2n}^l) + \frac{1}{2} \cdot k_{2n} \cdot |J_{2n}|. \quad (4.21)$$

Odečteme-li od sebe rovnosti (4.20) a (4.18) (resp. (4.21) a (4.19)), dostáváme

$$\begin{aligned} s_n - x &= \frac{1}{2} \cdot |J_{2n}| - \frac{12}{55} \cdot |J_{2n}| \\ &= \frac{31}{110} \cdot |J_{2n}|, \\ \mathcal{B}(s_n) - \mathcal{B}(x) &= \frac{1}{2} \cdot k_{2n} \cdot |J_{2n}| - \frac{20}{39} \cdot k_{2n} \cdot |J_{2n}| \\ &= -\frac{1}{78} \cdot k_{2n} \cdot |J_{2n}|, \end{aligned}$$

z čehož nám ihned vyplývá

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{31}{110} \cdot |J_{2n}| = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{B}(s_n) - \mathcal{B}(x)}{s_n - x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{31}{110}}{-\frac{1}{78}} k_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1209}{55} \left(\frac{5}{8}\right)^{2n} = -\infty. \end{aligned}$$

Ale podle lemmatu 52 existuje v každém intervalu J_n takové x'_n , že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{B}(x'_n) - \mathcal{B}(x)}{x'_n - x} = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \left(\frac{5}{3}\right)^n = \infty,$$

ale protože délky intervalů J_n jdou k nule, je i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n - x = 0.$$

To znamená, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{B}(s_n) - \mathcal{B}(x)}{s_n - x} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{B}(x'_n) - \mathcal{B}(x)}{x'_n - x},$$

a proto funkce $\mathcal{B}$ nemá v daných bodech derivaci. □

Věty 55, 56, 57 a 58 zahrnují všechny body intervalu $(0,1)$ — v těchto bodech tedy funkce $\mathcal{B}$ nemá derivaci.

4.2.2 Weierstrassova funkce (1872)

Karl Weierstrass představil svou funkci 18. července 1872 v článku *Über continuirliche functionen eines reellen arguments, die für keinen werth des letzteren einen bestimmten differentialquotienten besitzen*³ [113]. Jeho definice je následující.

Definice 44 (Weierstrassova funkce). *Nechť jsou dána čísla a , b taková, že a je liché přirozené číslo a $0 < b < 1$ a pro jejich součin platí*

$$a \cdot b > 1 + \frac{2}{3}\pi. \quad (4.22)$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujeme funkci $\mathcal{W}$ předpisem

$$\mathcal{W}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x \pi). \quad (4.23)$$

U běžných funkcí, jak jsme si řekli v podsekcí 1.3.3, jsme zvyklí představovat si absenci derivace jako jakýsi hrot na grafu funkce v příslušném bodě (většina materiálů uvádí jako příklad funkce spojitě v bodě, která v něm nemá derivaci, funkci absolutní hodnota). Na rozdíl od funkce Bolzanovy (sekce 4.2.1), kde tyto hroty měly už jednotlivé dílčí funkce, které následně konvergovaly k $\mathcal{B}$, a s vyššími iteracemi se pouze zahušťovaly, u Weierstrassovy funkce mají všechny dílčí funkce, které konvergují k funkci $\mathcal{W}$, derivaci ve všech bodech.

Také z definice 44 není dost dobře možné si představit graficky, jak Weierstrassova funkce vzniká. Můžeme si všimnout, že funkce uvnitř sumy (4.23) jsou kosinusoidy, u nichž se zmenšuje vlnová délka i amplituda. Nejlepší představu nám ale dá obrázek několika prvních iterací, tj. funkcí $\sum_{n=0}^{m-1} b^n \cos(a^n x \pi)$ (obrázek 4.10) — pro lepší grafické zobrazení je u jednotlivých grafů odlišné měřítko osy y .

Ve stejném článku, v němž Weierstrass definuje svou funkci, zároveň dokazuje, že funkce $\mathcal{W}$ nemá v žádném bodě derivaci. Pro úplnost ale nejdříve ukažme, že je funkce $\mathcal{W}$ spojitá.

Věta 59. *Funkce $\mathcal{W}$ je ve všech bodech svého definičního oboru spojitá.*

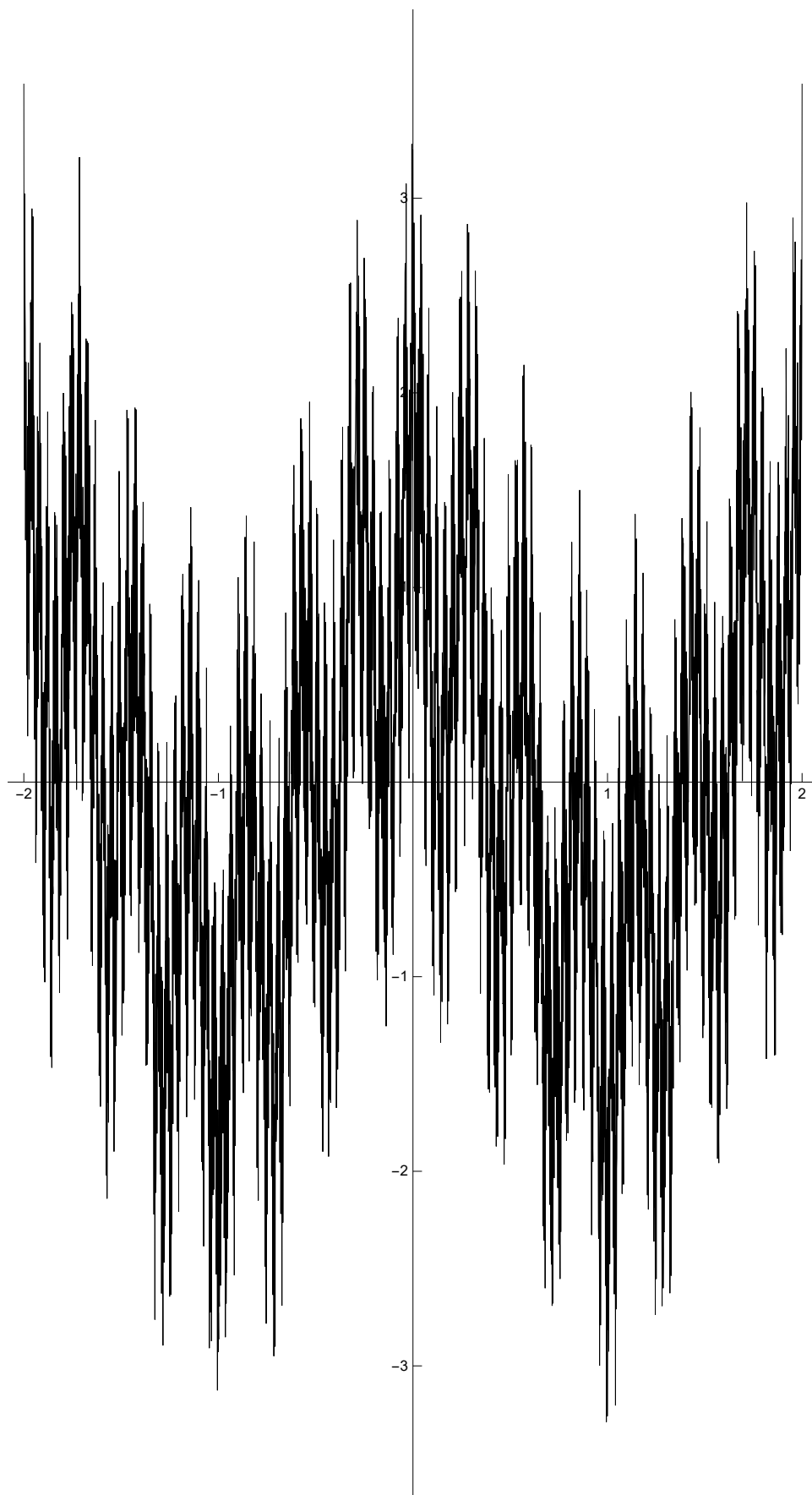
Důkaz. Budeme postupovat podobně jako při důkazu spojitosti Bolzanovy funkce (tvrzení 50 a věta 51), tj. nejdříve dokážeme, že řada (4.23) konverguje stejnoměrně. To bude znamenat (podle definice stejnoměrné konvergence), že konvergují stejnoměrně její částečné součty — to jsou ale spojitě funkce, tím tedy budeme mít dokázáno, že funkce $\mathcal{W}$ vyjádřená řadou (4.23) je spojitá.

Že řada (4.23) konverguje stejnoměrně, plyne z Weierstrassova kritéria pro konvergenci řad. Protože $|\cos(a^n x \pi)| \leq 1$, je

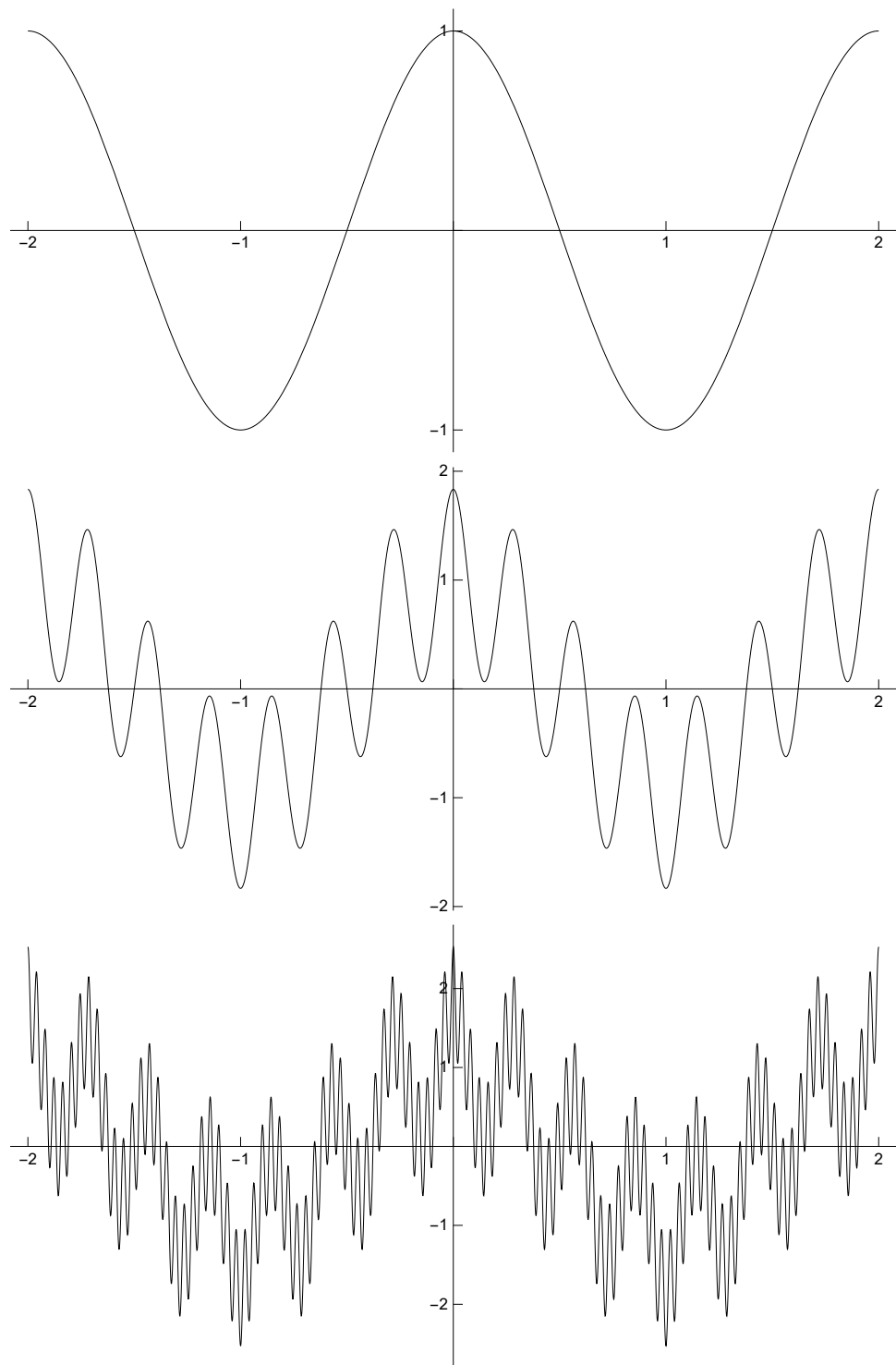
$$|b^n \cos(a^n x \pi)| \leq b^n.$$

Ale $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$ je geometrická řada a $0 < b < 1$, tedy tato řada konverguje. Podle Weierstrassova kritéria proto konverguje řada (4.23) stejnoměrně, a tedy funkce $\mathcal{W}$ je spojitá. $\square$

³O spojitých funkcích jedné reálné proměnné, které nemají pro žádnou její hodnotu konečný diferenciální podíl



Obrázek 4.9: Graf Weierstrassovy funkce s parametry $a = 7$, $b = \frac{5}{6}$.



Obrázek 4.10: První tři iterace (tj. nultý až druhý částečný součet) Weierstrassovy funkce s parametry $a = 7$, $b = \frac{5}{6}$.

Důkaz, že Weierstrassova funkce nemá v žádném bodě $x \in \mathbb{R}$ derivaci, je poměrně přímočarý (budeme sledovat přímo Weierstrassův postup, [113]). Na rozdíl od důkazu nediferencovatelnosti Bolzanovy funkce dokážeme najednou, že funkce $\mathcal{W}$ nemá nikde ani vlastní, ani nevlastní derivaci.

Věta 60. *Funkce $\mathcal{W}$ nemá v žádném bodě svého definičního oboru derivaci.*

Důkaz. Najdeme dvě takové posloupnosti, $\{x'_m\}_{m=1}^\infty$ a $\{x''_m\}_{m=1}^\infty$, že

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x'_m - x = \lim_{m \rightarrow \infty} x''_m - x = 0,$$

ale

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{W}(x'_m) - \mathcal{W}(x)}{x'_m - x} \neq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{W}(x''_m) - \mathcal{W}(x)}{x''_m - x}.$$

Pro libovolný bod x a přirozené číslo m lze jistě nalézt takové celé číslo α_m , že rozdíl

$$x_m = a^m x - \alpha_m$$

je

$$-\frac{1}{2} < x_m \leq \frac{1}{2}. \quad (4.24)$$

Zadejme hledané posloupnosti $\{x'_m\}_{m=1}^\infty$ a $\{x''_m\}_{m=1}^\infty$ pomocí předpisů

$$x'_m = \frac{\alpha_m - 1}{a^m},$$

$$x''_m = \frac{\alpha_m + 1}{a^m}.$$

Z nich pak dostáváme důležité rozdíly

$$x'_m - x = \frac{\alpha_m - 1}{a^m} - \frac{x_m + \alpha_m}{a^m} = -\frac{1 + x_m}{a^m}, \quad (4.25)$$

$$x''_m - x = \frac{\alpha_m + 1}{a^m} - \frac{x_m + \alpha_m}{a^m} = \frac{1 - x_m}{a^m}, \quad (4.26)$$

které budeme dále používat.

Z nerovností (4.24) vidíme, že $|-1 - x_m| \leq \frac{3}{2}$ a $|1 - x_m| \leq \frac{3}{2}$ a z předpokladů věty víme, že $a \leq 1$, což znamená, že posloupnosti $\{x'_m\}_{m=1}^\infty$ a $\{x''_m\}_{m=1}^\infty$ jsou omezené. Zároveň $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{a^m} = 0$, tedy

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x'_m - x = \lim_{m \rightarrow \infty} x''_m - x = 0.$$

Rozepišme si nyní zlomek

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{W}(x'_m) - \mathcal{W}(x)}{x'_m - x} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x'_m \pi) - \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x \pi)}{x'_m - x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{\cos(a^n x'_m \pi) - \cos(a^n x \pi)}{x'_m - x} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n \frac{\cos(a^n x'_m \pi) - \cos(a^n x \pi)}{a^n (x'_m - x)} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} b^{m+n} \frac{\cos(a^{m+n} x'_m \pi) - \cos(a^{m+n} x \pi)}{x'_m - x} \\ &= S_1 + S_2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Podívejme se nejdříve na sumu

$$S_1 = \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n \frac{\cos(a^n x'_m \pi) - \cos(a^n x \pi)}{a^n (x'_m - x)}. \quad (4.28)$$

Připomeňme si, že platí vzorec

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right), \quad (4.29)$$

a zaměříme se na zlomek ve výrazu uvnitř řady S_1 . Pokud použijeme právě uvedený vzorec (4.29) a celý zlomek rozšíříme číslem π , dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\cos(a^n x'_m \pi) - \cos(a^n x \pi)}{a^n (x'_m - x)} &= - \frac{\sin \left(\frac{a^n x'_m \pi + a^n x \pi}{2} \right) \sin \left(\frac{a^n x'_m \pi - a^n x \pi}{2} \right)}{a^n \frac{x'_m - x}{2}} \\ &= -\pi \cdot \sin \left(a^n \frac{x'_m + x}{2} \pi \right) \cdot \frac{\sin \left(a^n \frac{x'_m - x}{2} \pi \right)}{a^n \frac{x'_m - x}{2} \pi}. \end{aligned}$$

Podívejme se nyní na jednotlivé činitele. Očividně

$$\left| \sin \left(a^n \frac{x'_m + x}{2} \pi \right) \right| \leq 1$$

a protože pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $\left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \leq 1$, je i

$$\left| \frac{\sin \left(a^n \frac{x'_m - x}{2} \pi \right)}{a^n \frac{x'_m - x}{2} \pi} \right| \leq 1.$$

Tedy

$$|S_1| \leq \pi \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n = \pi \cdot \frac{(ab)^m - 1}{ab - 1} < \frac{\pi}{ab - 1} (ab)^m,$$

což ale znamená, že existuje takové číslo ζ' , že $|\zeta'| < 1$, že platí

$$S_1 = \zeta' \frac{\pi}{ab - 1} (ab)^m. \quad (4.30)$$

Dále se zaměříme na sumu

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b^{m+n} \frac{\cos(a^{m+n} x'_m \pi) - \cos(a^{m+n} x \pi)}{x'_m - x}.$$

Protože a je liché číslo (a tedy i a^n je liché číslo), je

$$\cos(a^{m+n} x'_m \pi) = \cos(a^n (\alpha_m - 1) \pi) = (-1)^{\alpha_m - 1} = -(-1)^{\alpha_m}. \quad (4.31)$$

Protože platí vzorec

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta),$$

můžeme napsat, že

$$\cos(a^{m+n} x \pi) = \cos(a^n \alpha_m \pi + a^n x_m \pi) = (-1)^{\alpha_m} \cos(a^n x_m \pi). \quad (4.32)$$

S použitím vzorců (4.31), (4.32) a (4.25) můžeme napsat řadu S_2 ve tvaru

$$S_2 = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{1 + \cos(a^n x_m \pi)}{1 + x_m}. \quad (4.33)$$

Protože $b_n > 0$, $1 + \cos(a^n x_m \pi) \geq 0$ a z nerovnosti (4.24) je $1 + x_m > 0$, jsou všechny členy této řady nezáporné. Podíváme-li se na nultý člen této řady, uvidíme, že je roven

$$b^0 \cdot \frac{1 + \cos(a^0 x_m \pi)}{1 + x_m} = \frac{1 + \cos(x_m \pi)}{1 + x_m},$$

ale protože podle nerovnosti (4.24) je $-\frac{1}{2} < x_m \leq \frac{1}{2}$, tj. $-\frac{\pi}{2} < x_m \pi \leq \frac{\pi}{2}$, je tedy $\cos(x_m \pi) \geq 0$, tedy samozřejmě $1 + \cos(x_m \pi) \geq 1$. Zároveň podle nerovnosti (4.24) je $1 + x_m \leq \frac{3}{2}$.

Dáme-li tyto dva poslední výsledky dohromady s tím, že všechny členy této řady jsou nezáporné. Celkem tedy dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{1 + \cos(a^n x_m \pi)}{1 + x_m} \geq \frac{1 + \cos(x_m \pi)}{1 + x_m} \geq \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3},$$

a tedy existuje takové $\eta' \geq 1$, že

$$S_2 = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \cdot \eta' \frac{2}{3}. \quad (4.34)$$

Máme tedy rovnosti (4.30) a (4.34). Jak vidíme, hrají v nich roli čísla ζ' a η' taková, že $|\zeta'| < 1$ a $\eta' \geq 1$. Číslo ζ' můžeme rozepsat jako $\zeta' = \eta' \cdot \epsilon' \cdot (-1)^{\alpha_m}$, kde $|\epsilon'| < 1$.

Dosaďme nyní tyto výsledky zpátky do rovnosti (4.27). Dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{W}(x'_m) - \mathcal{W}(x)}{x'_m - x} &= \eta' \epsilon' (-1)^{\alpha_m} \frac{\pi}{ab - 1} (ab)^m + (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \cdot \eta' \frac{2}{3} \\ &= (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \cdot \eta' \left(\frac{2}{3} + \epsilon' \frac{\pi}{ab - 1} \right). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Podobným způsobem, jaký jsme nyní ukázali, můžeme odvodit i hodnotu zlomku

$$\frac{\mathcal{W}(x''_m) - \mathcal{W}(x)}{x''_m - x} = -(-1)^{\alpha_m} (ab)^m \cdot \eta'' \left(\frac{2}{3} + \epsilon'' \frac{\pi}{ab - 1} \right), \quad (4.36)$$

kde $\eta'' \geq 1$ a $|\epsilon''| < 1$.

Nyní použijeme podmínku (4.22) z definice funkce $\mathcal{W}$ (definice 44) a upravíme ji do následujícího tvaru:

$$\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab - 1}. \quad (4.37)$$

Z této nerovnosti vidíme, že pro jakékoli hodnoty η' a ϵ' (a stejně tak η'' a ϵ'') platí

$$0 < \frac{2}{3} + \epsilon' \frac{\pi}{ab - 1} \leq \eta' \left(\frac{2}{3} + \epsilon' \frac{\pi}{ab - 1} \right), \quad (4.38)$$

$$0 < \frac{2}{3} + \epsilon'' \frac{\pi}{ab - 1} \leq \eta'' \left(\frac{2}{3} + \epsilon'' \frac{\pi}{ab - 1} \right), \quad (4.39)$$

protože $\eta' \geq 1$ (resp. $\eta'' \geq 1$), $|\epsilon'| < 1$ (resp. $|\epsilon''| < 1$) a $\frac{\pi}{ab-1}$ je (pro konkrétní funkci) pevné číslo ostře menší než $\frac{2}{3}$ (viz nerovnost (4.37)). Tedy výrazy na pravé straně rovností jsou nejen ostře kladné, ale dokonce odražené od nuly. Protože zřejmě $\lim_{m \rightarrow \infty} (ab)^m = \infty$, je limita absolutních hodnot výše uvedených podílů

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{\mathcal{W}(x'_m) - \mathcal{W}(x)}{x'_m - x} \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{\mathcal{W}(x''_m) - \mathcal{W}(x)}{x''_m - x} \right| = \infty,$$

ale z rovností (4.35) a (4.36) (a nerovností (4.38) a (4.39)) je zřejmé, že uvedené podíly mají opačná znaménka.

To znamená, že

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{W}(x'_m) - \mathcal{W}(x)}{x'_m - x} \neq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{W}(x''_m) - \mathcal{W}(x)}{x''_m - x},$$

a proto funkce $\mathcal{W}$ nemá derivaci. □

Dovolme si na tomto místě ještě krátkou poznámku o grafech Weierstrassových funkcí pro různé parametry. Budeme-li hledat graf Weierstrassovy funkce, najdeme v řadě zdrojů graf, který se poměrně značně liší od grafu na obrázku 4.9 (např. [114]). Budeme-li však kreslit grafy funkcí podle Weierstrassovy původní definice, budeme docházet k velmi podobným grafům, jako je ten, který jsme uvedli na začátku kapitoly.

Problémem je značně omezující podmínka (4.22) v definici Weierstrassovy funkce. Tuto podmínku zmínil v roce 1916 Godfrey Harold Hardy [115], když dokázal následující větu.

Věta 61. *Nechť a, b jsou čísla splňující nerovnosti*

$$\begin{aligned} a &> 1, \\ 0 &< b < 1, \\ a \cdot b &\geq 1. \end{aligned}$$

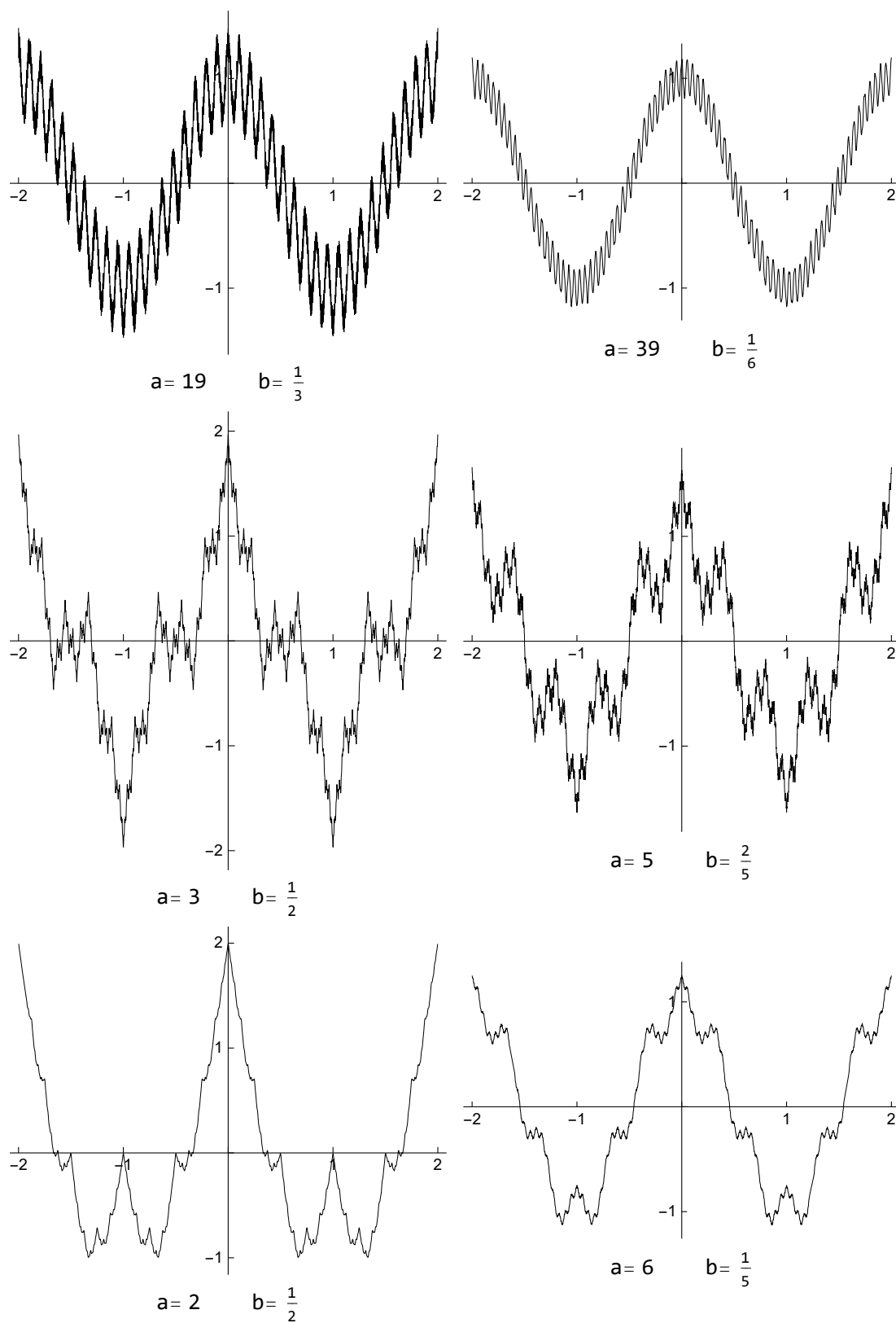
Potom funkce

$$\begin{aligned} C(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x \pi), \\ S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b^n \sin(a^n x \pi) \end{aligned}$$

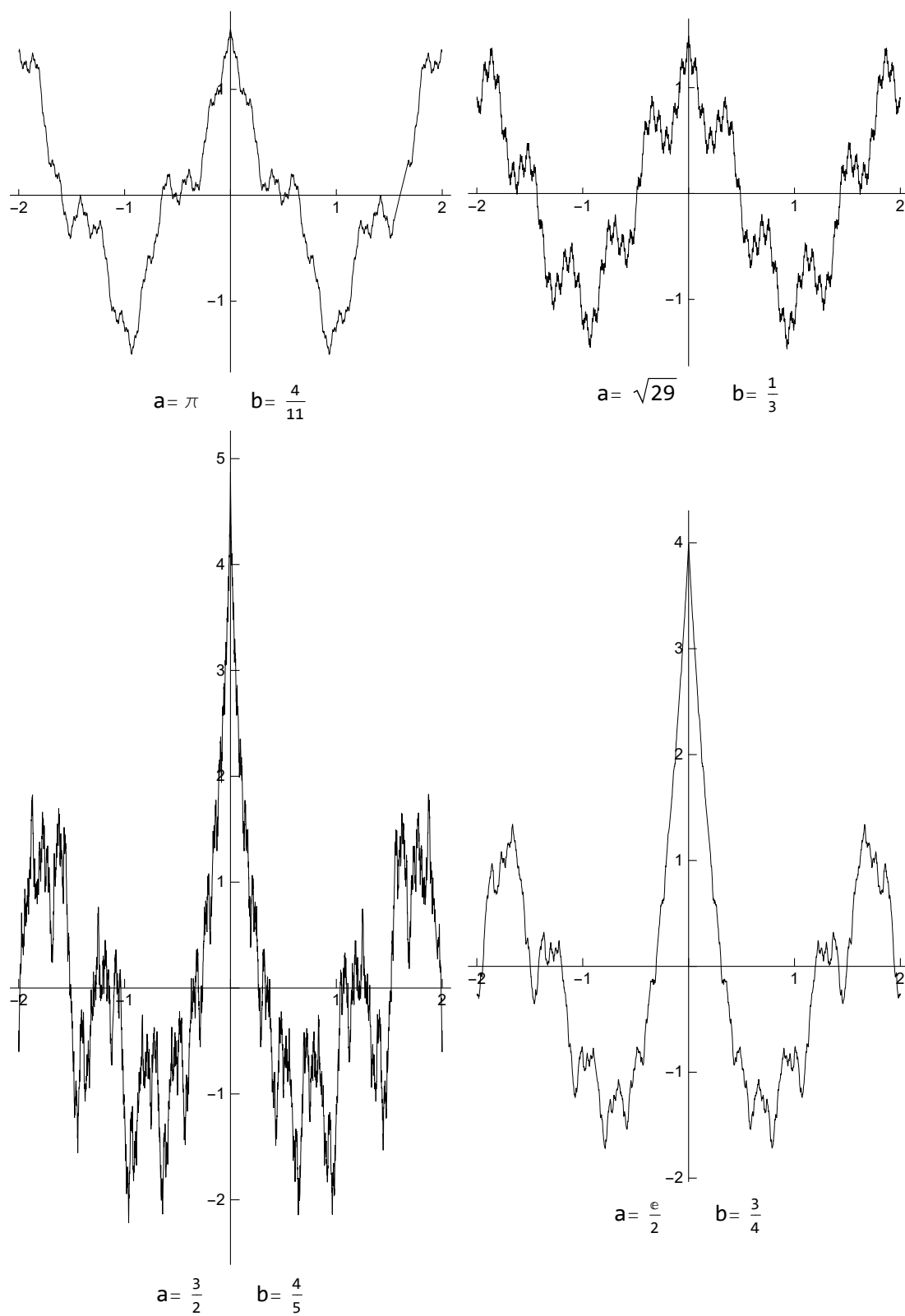
jsou ve všech bodech svého definičního oboru spojité, ale v žádném nemají vlastní derivaci.

Povšimněme si dvou věcí: zaprvé číslo a nemusí být liché, a dokonce ani celé, zadruhé věta mluví o vlastní derivaci. Hardy také ukázal, že pokud bychom ve větě slovo *vlastní* vynechali, věta nebude platit — tzn., že uvedené funkce mohou mít v některých bodech derivace nevlastní. Jak jsme si ale řekli v úvodu této sekce, tato skutečnost nám nijak vadit nebude.

Na obrázcích 4.11 a 4.12 vidíme příklady grafů Weierstrassovy funkce pro různé parametry a a b (na obrázku 4.11 jsou grafy funkcí, kde $a \in \mathbb{Z}$, na obrázku 4.12 jsou $a \notin \mathbb{Z}$).



Obrázek 4.11: Weierstrassova funkce pro různé parametry a a b , kde $a \in \mathbb{Z}$.



Obrázek 4.12: Weierstrassova funkce pro různé parametry a a b , kde $a \notin \mathbb{Z}$.

4.2.3 Petrova funkce (1920)

Autorem této funkce je český matematik Karel Petr, který ji prezentoval ve svém článku *Příklad funkce spojitě nemající v žádném bodě derivace* z roku 1920 [116]. Je zajímavá nejen svými vlastnostmi, ale i aritmetickým způsobem zadání — její definice je následující.

Definice 45 (Petrova funkce). *Vyjádříme každé $x \in (0,1)$ řadou*

$$x = \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_k}{10^k} + \dots, \quad (4.40)$$

kde $a_k \in \mathbb{N}$ a $0 \leq a_k \leq 9$.

Definujeme funkci $\mathcal{P}$ v intervalu $(0,1)$ následujícím předpisem

$$\mathcal{P}(x) = \frac{c_1 \cdot b_1}{2^1} + \frac{c_2 \cdot b_2}{2^2} + \frac{c_3 \cdot b_3}{2^3} + \dots + \frac{c_k \cdot b_k}{2^k} + \dots,$$

kde čísla b_k a c_k jsou určena následovně:

$$b_k = \begin{cases} 0 & a_k \text{ sudé,} \\ 1 & a_k \text{ liché,} \end{cases}$$

$$c_k = \begin{cases} 1 & k = 1, \\ -c_{k-1} & k > 1 \wedge a_{k-1} \in \{1; 3; 5; 7\}, \\ c_{k-1} & k > 1 \wedge a_{k-1} \in \{0; 2; 4; 6; 8; 9\}. \end{cases}$$

Uvedme pro snazší porozumění několik příkladů:

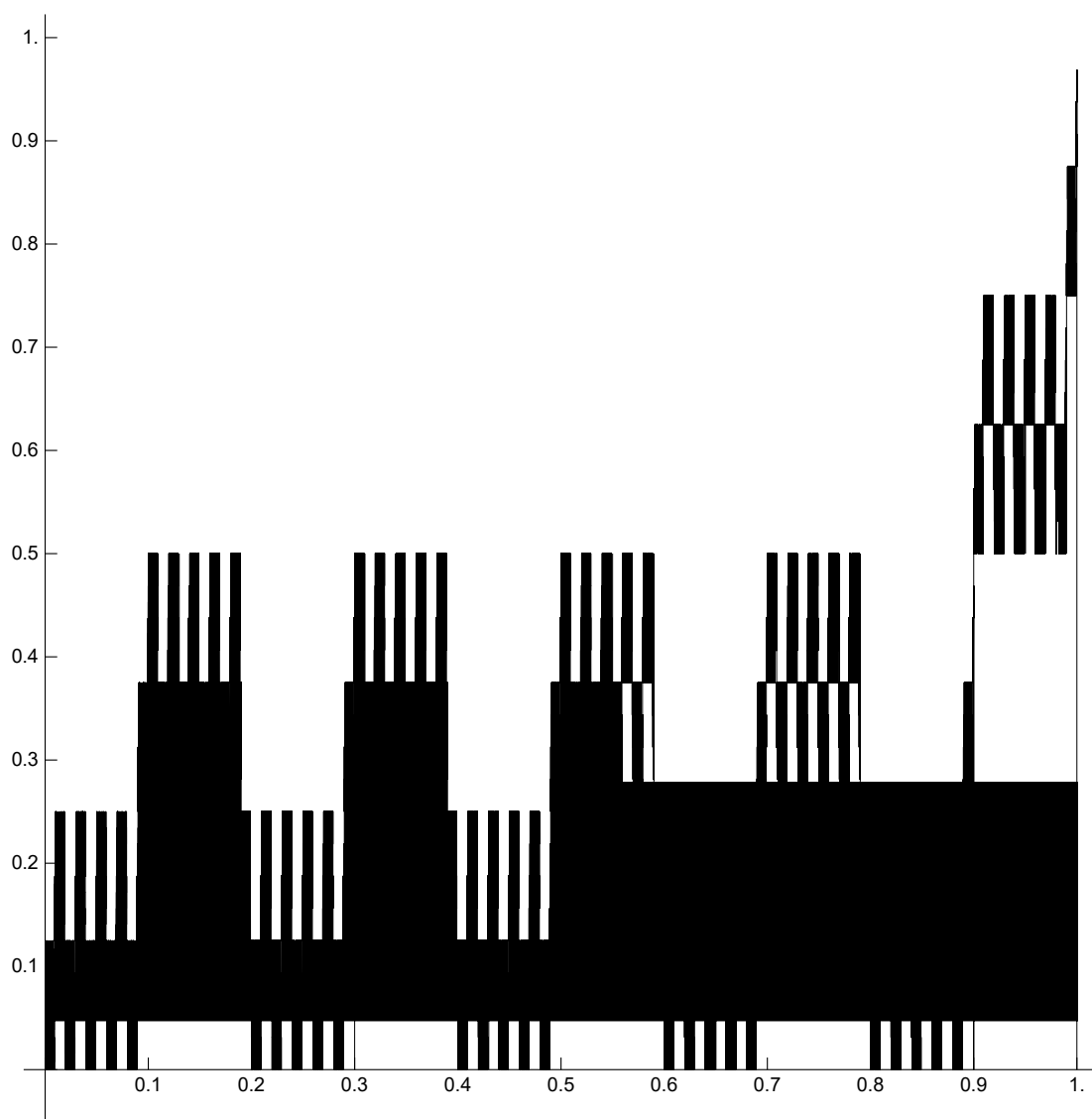
$$\begin{aligned} \mathcal{P}(0,14372916) &= \frac{1}{2^1} - \frac{0}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{0}{2^5} - \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^7} + \frac{0}{2^8} = \frac{53}{128}, \\ \mathcal{P}(0,24860134) &= \frac{0}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^7} + \frac{0}{2^8} = \frac{1}{128}, \\ \mathcal{P}(0,\overline{2}) &= \frac{0}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \dots = 0, \\ \mathcal{P}(0,5) &= \frac{1}{2^1} - \frac{0}{2^2} - \frac{0}{2^3} - \frac{0}{2^4} - \dots = \frac{1}{2}, \\ \mathcal{P}(0,4\overline{9}) &= \frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

V posledním uvedeném příkladu jsme vyjádřili číslo 0,5 dvěma různými způsoby — pomocí konečného desetinného rozvoje a pomocí nekonečného desetinného rozvoje s periodou 9 —, ale funkční hodnota funkce $\mathcal{P}$ je v obou případech stejná. Je jednoduché ukázat, že toto platí obecně.

Tvrzení 62. *Definice funkce $\mathcal{P}$ je korektní.*

Důkaz. Na základě řady (4.40), kterou je vyjádřeno číslo x definujeme koeficienty

$$a'_k = \begin{cases} a_k & k < n, \\ a_n - 1 & k = n, \\ 9 & k > n. \end{cases}$$



Obrázek 4.13: Graf Petrovy funkce.

Pro $k < n$ je $b'_k = b_k$ a $c'_k = c_k$. Zjevně je také $c'_n = c_n$. Chceme dokázat, že hodnota $\mathcal{P}(x)$ je pro vyjádření s koeficienty a_k stejná pro vyjádření s koeficienty a'_k . Mohou nastat dva případy.

Pokud je a_n liché (a tedy a'_n je sudé), pak $b_n = 1$ a dále $b'_n = 0$ a pro $k > n$ je $b_k = 1$ a $c'_k = c'_n = c_n$. Ale

$$\frac{0}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+3}} + \dots = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} = \frac{b_n}{2^n}.$$

Pokud je a_n sudé (a tedy a'_n je liché), pak $b_n = 0$ a dále $b'_n = 1$ a pro $k > n$ je $b_k = 1$ a $c'_k = -c'_n = -c_n$. Ale

$$\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{n+3}} - \dots = \frac{1}{2^n} - \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} = 0 = \frac{b_n}{2^n}.$$

□

Díky tomuto výsledku nemusíme dále uvažovat případ, kdy by x bylo vyjádřeno desetinným číslem s periodou 9. To později využijeme při důkazu nediferencovatelnosti Petrovy funkce.

Důkaz spojitosti a nediferencovatelnosti Petrovy funkce je zajímavý tím, že je tzv. elementární, tedy na rozdíl od důkazů u Bolzanovy nebo Weierstrassovy funkce k němu nepotřebujeme žádnou další teorii a vše dokážeme přímo z definic. Zároveň je Petrova funkce ukázkou toho, že ani stejnoměrná spojitost nám nezaručí, že bude mít funkce v nějakém bodě derivaci.

Věta 63. *Funkce $\mathcal{P}$ je na intervalu $(0,1)$ stejnoměrně spojitá.*

Důkaz. Necht je dáno libovolně malé $\varepsilon > 0$. Pak existuje $k \in \mathbb{N}$, že

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2^{k-1}} \leq \varepsilon.$$

Zvolme

$$\delta_1 = \frac{1}{10^k}.$$

Ukážeme, že pro všechna $x, x' \in (0,1)$, pro která platí, že $|x - x'| < \delta_1$, platí nutně i $|\mathcal{P}(x) - \mathcal{P}(x')| < \varepsilon_1$.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x > x'$. Potom $0 < x - x' < \delta_1$. To může nastat dvěma způsoby.

1. Čísla x a x' se shodují v prvních $k - 1$ cifrách desetinného rozvoje, tj. pro $0 < i \leq k - 1$ je $a_i = a'_i$.

Snadno nahlédneme, že část řady $\mathcal{P}(x)$ příslušící zbytku desetinného rozvoje je pro x i pro x' v absolutní hodnotě menší než $\frac{1}{2^{k-1}}$. Symbolicky

$$\left| \mathcal{P}\left(\frac{a_k}{10^k} + \frac{a_{k+1}}{10^{k+1}} + \dots\right) \right| = \left| \frac{c_k \cdot b_k}{2^k} + \frac{c_{k+1} \cdot b_{k+1}}{2^{k+1}} + \dots \right| < \frac{1}{2^{k-1}},$$

obdobně pro x' . Zároveň je zřejmé, že $c_k = c'_k$, a tedy zbytky $\mathcal{P}\left(\frac{a_k}{10^k} + \frac{a_{k+1}}{10^{k+1}} + \dots\right)$ a $\mathcal{P}\left(\frac{a'_k}{10^k} + \frac{a'_{k+1}}{10^{k+1}} + \dots\right)$ mají stejná znaménka. Platí tedy, že

$$|\mathcal{P}(x) - \mathcal{P}(x')| < \frac{1}{2^{k-1}} = \varepsilon_1.$$

2. Mějme $\varrho \in \mathbb{N}_0$. Čísla x a x' se shodují v prvních $k - \varrho - 2$ cifrách desetinného rozvoje, tj. pro $0 < i \leq k - \varrho - 2$ je $a_i = a'_i$. V desetinném rozvoji čísla x je pak na místech $k - \varrho$ až k číslice 0, v desetinném rozvoji čísla x' na stejných místech číslice 9 (tj. pro $k - \varrho \leq i \leq k$ je $a_i = 0$ a $a'_i = 9$). Dále $a_{k-\varrho-1} \neq 0$ a $a'_{k-\varrho-1} = a_{k-\varrho-1} - 1$. Z definice funkce $\mathcal{P}$ pak vyplývá, že

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(x) - \mathcal{P}(x')| &= \left| \frac{1}{2^{k-\varrho-1}} - \frac{1}{2^{k-\varrho}} - \frac{1}{2^{k-\varrho+1}} - \cdots - \frac{1}{2^k} - \frac{\Theta}{2^{k-1}} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2^{k-\varrho-1}} - \frac{1}{2^{k-\varrho}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\varrho+1}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\Theta}{2^{k-1}} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2^{k-\varrho-1}} - \frac{1}{2^{k-\varrho-1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{\varrho+1}}\right) - \frac{\Theta}{2^{k-1}} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2^k} - \frac{\Theta}{2^{k-1}} \right| \leq \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^{k-1}} = \varepsilon_1, \end{aligned}$$

kde $0 \leq \Theta < 1$ je kladné⁴ číslo označující zbytek po odečtení členů řad $\mathcal{P}(x)$ a $\mathcal{P}(x')$ s indexy $k+1$ a většími. $\square$

Věta 64. Funkce $\mathcal{P}$ nemá v žádném bodě svého definičního oboru derivaci.

Důkaz. Zvolme libovolný bod $x \in (0,1)$. Najdeme takové dvě posloupnosti $\{h_k\}_{k=1}^\infty$ a $\{h'_k\}_{k=1}^\infty$, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = \lim_{k \rightarrow \infty} h'_k = 0,$$

ale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{P}(x + h_k) - \mathcal{P}(x)}{h_k} \neq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{P}(x + h'_k) - \mathcal{P}(x)}{h'_k}.$$

Prošetříme postupně dva případy v závislosti na volbě čísla $x \in (0,1)$.

1. Číslo x je dáno konečným desetinným rozvojem

Označme délku desetinného rozvoje čísla x jako ϱ . Tedy pro všechna $k > \varrho$ jsou všechna $a_k = 0$.

Zvolme

$$\begin{aligned} h_k &= \pm \frac{1}{10^k}, \\ h'_k &= \pm \frac{2}{10^k}, \end{aligned}$$

přičemž znaménka můžeme volit libovolně. Pokud bychom zvolili v obou posloupnostech pouze kladné (resp. záporné), dokázali bychom dále neexistenci pravé (resp. levé) derivace.

Samozřejmě platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = \lim_{k \rightarrow \infty} h'_k = 0.$$

⁴Dokážeme jednoduše rozborem případů pro různé hodnoty $a_{k-\varrho-1}$, $a'_{k-\varrho-1}$, $c_{k-\varrho-1}$ a $c'_{k-\varrho-1}$.

Všimněme si nyní, že pro všechna $k > \varrho$ je

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x + h_k) &= \mathcal{P}\left(x \pm \frac{1}{10^k}\right) = \mathcal{P}(x) \pm \frac{1}{2^k}, \\ \mathcal{P}(x + h'_k) &= \mathcal{P}\left(x \pm \frac{2}{10^k}\right) = \mathcal{P}(x),\end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{P}(x + h_k) - \mathcal{P}(x)}{h_k} &= \pm \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{10^k}{2^k} = \pm \infty, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{P}(x + h'_k) - \mathcal{P}(x)}{h'_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0}{\frac{2}{10^k}} = 0.\end{aligned}$$

2. Číslo x je dáno nekonečným desetinným rozvojem

Zvolme

$$h_k = \frac{\theta_k}{10^k} + \frac{\theta_{k+1}}{10^{k+1}}, \quad (4.41)$$

přičemž čísla θ_k a θ_{k+1} jsou definována následujícím způsobem v závislosti na hodnotách a_k a a_{k+1} .

Podívejme se nejdříve na případ, kdy $\theta_k \neq 9 \wedge \theta_{k+1} \neq 9$. Potom definujeme

$$\theta_i = \begin{cases} 1 & a_i = 0, \\ -1 & a_i = 8, \\ \pm 1 & 1 \geq a_i \geq 7, \end{cases}$$

kde $i \in \{k; k+1\}$. Znaménko u posledního případu je libovolné, protože nám jde pouze o to, aby $a_i + \theta_i$ bylo různé od nuly a od devítky.

Všimněme si, že pokud a_i je liché, je θ_i sudé číslo a je-li a_i sudé, je θ_i liché číslo různé od devítky.

Podíváme se nyní, jak se liší funkční hodnoty $\mathcal{P}(a_i)$ a $\mathcal{P}(a_i + h_k)$ pro $i \in \{k; k+1\}$. Je zřejmé, že na prvních $k-1$ členů posloupnosti nemá přičtení h_k vliv a rovněž znaménko u k -tého členu funkční hodnoty se nezmění. Změny ve zbytku řady v závislosti na tom, zda je a_i sudé, či liché uvádíme pro přehlednost v následující tabulce.

Označme $x' = x + h_k$ (to znamená, že $a'_k = a_k + \theta_k$, $a'_{k+1} = a_{k+1} + \theta_{k+1}$).

a_k	a_{k+1}	a'_k	a'_{k+1}	$c_k \cdot b_k$	$c_{k+1} \cdot b_{k+1}$	$c'_k \cdot b'_k$	$c'_{k+1} \cdot b'_{k+1}$
sudé	sudé	liché	liché	± 0	± 0	± 1	∓ 1
sudé	liché	liché	sudé	± 0	± 1	± 1	∓ 0
liché	sudé	sudé	liché	± 1	∓ 0	± 0	± 1
liché	liché	sudé	sudé	± 1	∓ 1	± 0	± 0

Při pohledu na poslední dva sloupce jde snadno vidět, že pro všechny čtyři případy je $c_{k+2} = c'_{k+2}$ (protože ani jedno z čísel a_k , a_{k+1} , a'_k , a'_{k+1} není rovno devíti), tedy přičtení h_k nemá vliv ani na i -té členy funkční hodnoty pro $i > k+1$. Změna se tedy projevuje pouze v k -tém a $(k+1)$ -tém členu. Můžeme tedy vypočítat pro jednotlivé případy rozdíl $\mathcal{P}(x + h_k) - \mathcal{P}(x)$.

$$\frac{\mathcal{P}(x + h_k) - \mathcal{P}(x)}{\pm \frac{1}{2^k} \mp \frac{1}{2^{k+1}}}$$

$$\pm \frac{1}{2^k} \mp \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\mp \frac{1}{2^k} \pm \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\mp \frac{1}{2^k} \pm \frac{1}{2^{k+1}}$$

Pro všechny případy je tedy

$$|\mathcal{P}(x + h_k) - \mathcal{P}(x)| = \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}}. \quad (4.42)$$

Je-li $\theta_k = 9$ nebo $\theta_{k+1} = 9$, definujeme uspořádanou dvojici

$$(\theta_k; \theta_{k+1}) = \begin{cases} (-1; 0) & a_k = 9, \\ (0; -1) & a_k \neq 9 \wedge a_{k+1} = 9. \end{cases}$$

Přehledněji znázorníme situaci tabulkou. Označme $a'_i = a_i + \theta_i$ pro $i \in \{k; k+1\}$. Necht α je libovolné číslo takové, že $\alpha \neq 9$.

a_k	a_{k+1}	a'_k	a'_{k+1}	$\mathcal{P}(x) - \mathcal{P}(x + h_k)$
9	α	8	α	$\frac{1}{2^k}$
9	9	8	9	$\frac{1}{2^k}$
α	9	α	8	$\frac{1}{2^{k+1}}$

Z posledního sloupce vidíme, že

$$|\mathcal{P}(x + h_k) - \mathcal{P}(x)| \geq \frac{1}{2^{k+1}}. \quad (4.43)$$

Z definice h_k je zřejmé, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = 0.$$

Z rovnice (4.42) a nerovnice (4.43) plyne, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{P}(x + h_k) - \mathcal{P}(x)}{h_k} = \pm \infty,$$

přičemž znaménko závisí na konkrétním čísle x .

Zvolme

$$h'_k = \begin{cases} \frac{2}{10^k} & a_k \in \{1; 3; 5\}, \\ -\frac{2}{10^k} & a_k = 7, \\ \frac{2}{10^k} & a_k \in \{0; 2; 4; 6\}, \\ -\frac{2}{10^k} & a_k = 8, \\ h'_l & l > k \wedge a_l \neq 9. \end{cases}$$

Všimněme si, že tímto přiřazením zajistíme, aby přičtení h'_k změnilo sudá čísla na sudá a lichá (kromě devítky) na lichá (kromě devítky), přičemž změna neovlivní okolní číslice.

V posledním případě si můžeme být jisti existencí takového $l > k$, že $a_l \neq 9$ — díky tvrzení 62 můžeme předpokládat, že číslo x nekončí periodou devítky. Je zřejmé, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = 0.$$

Zároveň také vzhledem k předchozí poznámce vidíme, že $\mathcal{P}(x + h'_k) = \mathcal{P}(x)$, tj. $\mathcal{P}(x + h'_k) - \mathcal{P}(x) = 0$, a tedy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{P}(x + h'_k) - \mathcal{P}(x)}{h'_k} = 0. \quad \square$$

4.2.4 Cellérierova funkce (před 1889)

V roce 1889 zemřel francouzský matematik Charles Cellérier. V jeho pozůstatosti se našel zažloutlý článek s názvem *Note sur les principes fondamentaux de l'analyse*⁵ a připsanou poznámkou: *Velmi důležité a domnívám se, že nové. — Sepsáno správně. Lze publikovat tak, jak je.*⁶ V páté části tohoto článku Cellérier uvádí následující funkci.[117]

Definice 46 (Cellérierova funkce). *Nechť je dáno číslo $a \in \mathbb{N}$ takové, že*

$$a > 1000. \quad (4.44)$$

Pro $x \in \mathbb{R}$ definujme funkci $\mathcal{C}$ předpisem

$$\mathcal{C}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(a^n x)}{a^n}.$$

Na obrázku 4.15 lze graficky nahlédnout princip, kterým Cellérierova funkce vzniká.

Podmínka (4.44) je očividně zvolena zcela arbitrárně (Cellérier ostatně sám poznamenává, že stačí, aby bylo číslo a dostatečně veliké). V dalším textu si rozmyslíme, že stačí, aby bylo $a > 1$ (přičemž nemusí být ani celé).

O uvedené funkci pak Cellérier ukazuje, že je spojitá a nemá v žádném bodě derivaci. Nebudeme zde uvádět původní důkaz, protože tyto fakty jsou zřejmé, uvážíme-li, že pokud v definici 44 zvolíme konstanty a, b (označme je pro přehlednost $a_{\mathcal{W}}$ a $b_{\mathcal{W}}$)

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{W}} &= a, \\ b_{\mathcal{W}} &= \frac{1}{a}, \end{aligned}$$

dostáváme

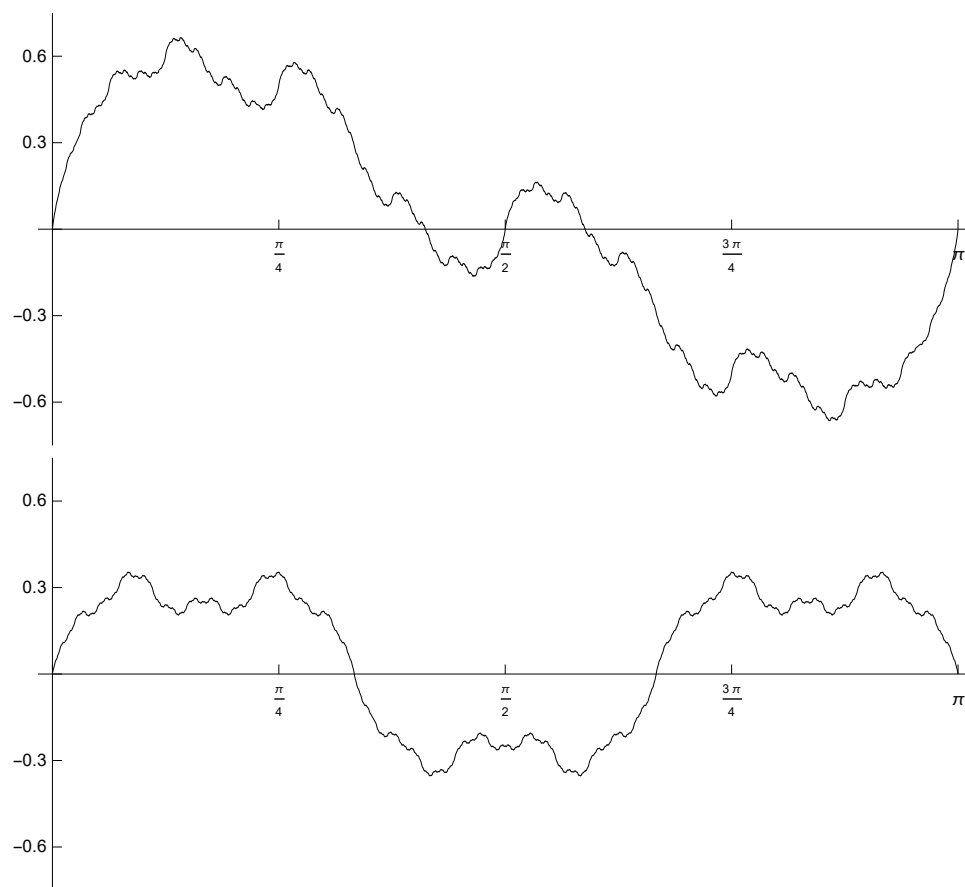
$$\mathcal{C}(\pi x) = \mathcal{W}(x).$$

V tomto případě zcela očividně platí podmínky z Hardyho zobecnění Weierstrassovy funkce (věta 61) a pokud je spojitá a nediferencovatelná funkce $\mathcal{C}(\pi x)$, má tyto vlastnosti i funkce $\mathcal{C}(x)$ [118].

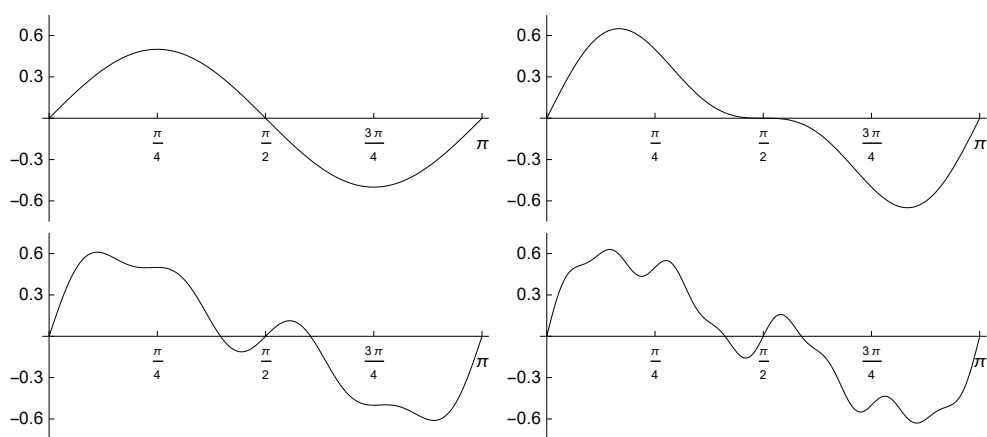
Co se týče roku objevení funkce, původní Cellérierův článek nebyl datován [117]. Podle historiků je možné jej zařadit do období kolem roku 1860 [118] — což by znamenalo, že Cellérierova funkce je ještě starší než funkce Weierstrassova. Ačkoli toto není jisté, ze stylu, kterým Cellérier popisuje svou funkci, lze usuzovat, že o Weierstrassově funkci v době psaní článku nevěděl a svou funkci objevil zcela nezávisle [117].

⁵Poznámka k základním principům analýzy

⁶Doslova: *Trés important et, je crois, nouveau. — Rédaction correcte. Peut être publié tel quel.*



Obrázek 4.14: Cellérierova funkce pro hodnoty $a = 2$ (nahore) a $a = 3$ (dole).



Obrázek 4.15: První až čtvrtá iterace vzniku Cellérierovy funkce pro $a = 2$.

4.2.5 Peanovy funkce (1890)

Italský matematik Giuseppe Peano sestrojil ve svém článku *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*⁷ [119] z ledna roku 1890 křivku, která prochází každým bodem jednotkového čtverce a to tím způsobem, že definoval funkce, které určují x -ovou a y -ovou souřadnici bodu této křivky. Právě tyto funkce pro nás budou zajímavé — jsou totiž všude spojitě a zároveň nediferencovatelné.

Uvažujme číslo $t \in \langle 0,1 \rangle$

$$t = 0,a_1a_2a_3\dots, \quad (4.45)$$

kde a_i jsou jsou cifry ternárního rozvoje (tj. číslo (4.45) je zapsáno ve trojkové soustavě).

Peano dále definoval unární operátor $\mathbf{k}$, a to tak, že

$$\mathbf{k}a = 2 - a,$$

tj. $\mathbf{k}0 = 2$, $\mathbf{k}1 = 1$ a $\mathbf{k}2 = 0$.

Dále zavádíme značení $\mathbf{k}^n a$, tedy operaci $\mathbf{k}$ aplikovanou n -krát na a . Jednoduše si rozmyslíme, že $\mathbf{k}^n a = a$, je-li n sudé a $\mathbf{k}^n a = \mathbf{k}a$, je-li n liché.

Nyní můžeme definovat funkce X a Y jako

$$X(t) = 0,b_1b_2b_3\dots,$$

$$Y(t) = 0,c_1c_2c_3\dots,$$

kde číslice b_i a c_i jsou opět cifry ternárního rozvoje definované takto:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1, & b_n &= \mathbf{k}^{a_2+a_4+\dots+a_{2n-2}} a_{2n-1}, \\ c_1 &= \mathbf{k}^{a_1} a_2, & c_n &= \mathbf{k}^{a_1+a_3+\dots+a_{2n-1}} a_{2n}. \end{aligned}$$

Grafy funkcí X a Y můžeme vidět na obrázku 4.16. Postupný vznik Peanovy křivky, tedy grafu funkce, která číslu t přiřazuje dvojici $[X(t), Y(t)]$ (kterou zobrazíme jako bod v rovině), můžeme vidět na obrázku 4.17 — na tomto obrázku jsou vždy v n -té iteraci souřadnice jednotlivých bodů zaokrouhleny na n cifer.

Peano ve stejném článku definoval i křivku, která souvisle vyplňuje jednotkovou krychli. Její souřadnice jsou zadány funkcemi

$$X(t) = 0,b_1b_2b_3\dots,$$

$$Y(t) = 0,c_1c_2c_3\dots,$$

$$Z(t) = 0,d_1d_2d_3\dots,$$

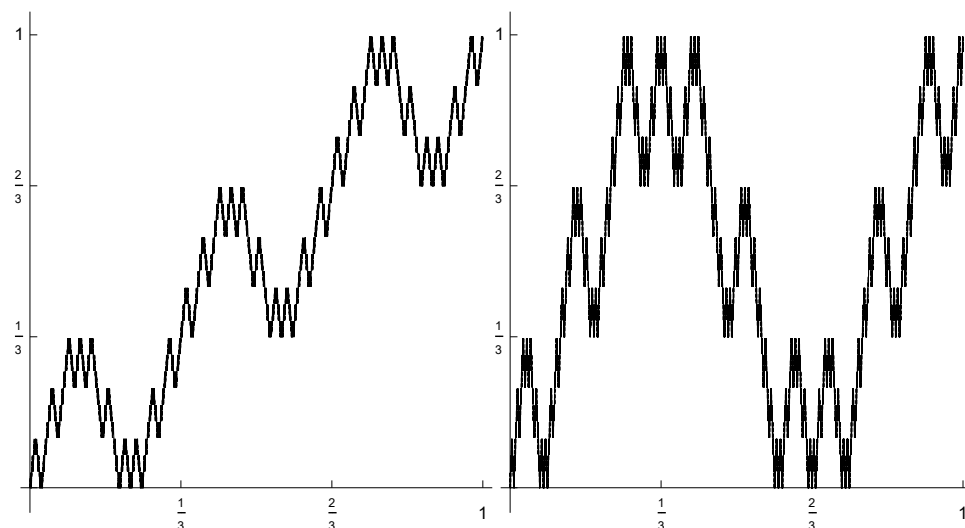
kde tato čísla jsou opět ve trojkové soustavě a číslice b_i , c_i a d_i jsou definovány pomocí vztahů

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 & b_n &= \mathbf{k}^{c_1+\dots+c_{n-1}+d_1+\dots+d_{n-1}} a_{3n-2}, \\ c_1 &= \mathbf{k}^{b_1} a_2 & c_n &= \mathbf{k}^{d_1+\dots+d_{n-1}+b_1+\dots+b_n} a_{3n-1}, \\ d_1 &= \mathbf{k}^{b_1+c_1} a_3 & d_n &= \mathbf{k}^{b_1+\dots+b_n+c_1+\dots+c_n} a_{3n}. \end{aligned}$$

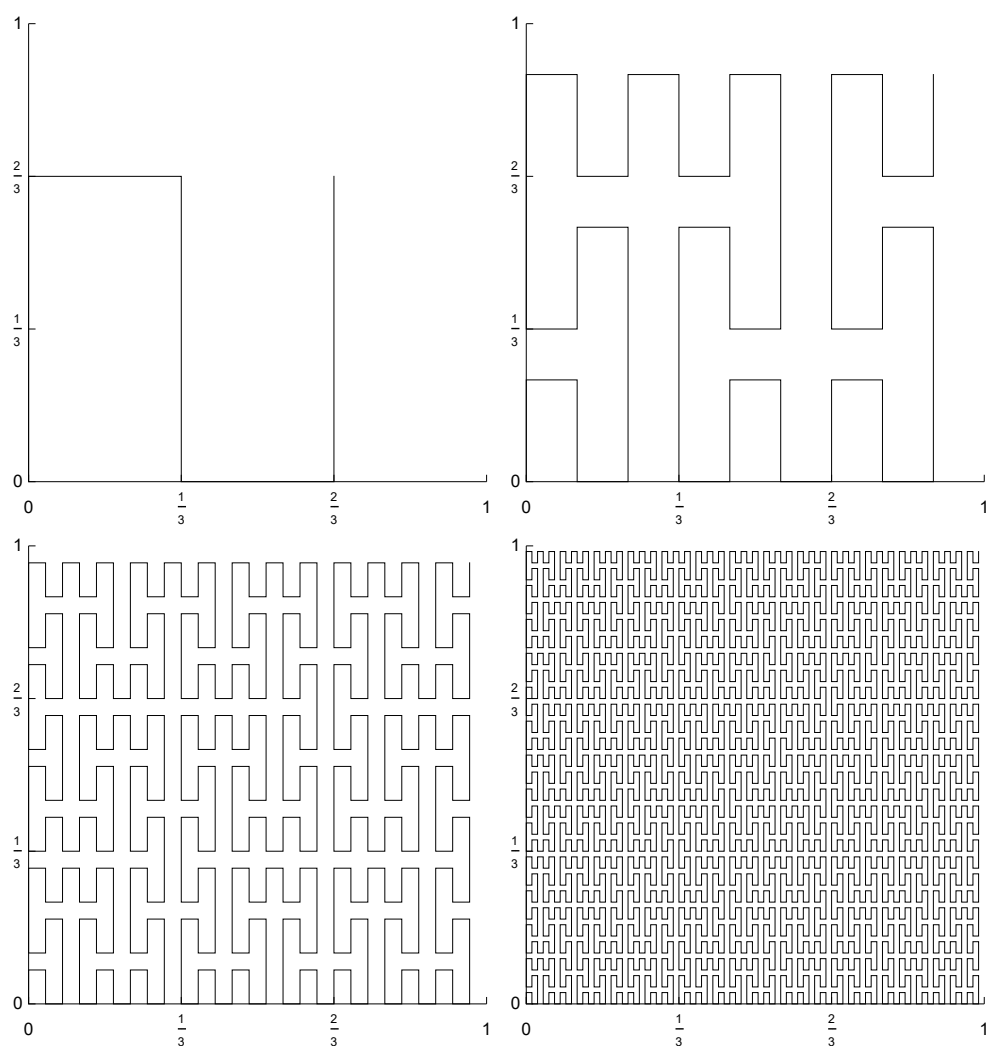
Obdobně jako v předchozím příkladu můžeme grafy těchto funkcí, resp. jimi generovaných křivek, vidět na obrázku 4.18, resp. 4.19.

Podrobněji se těmito a podobným křivkám věnovala věnovala Lydia Ceháková ve své bakalářské práci *Prostor-vyplňující křivky* z roku 2020 [120].

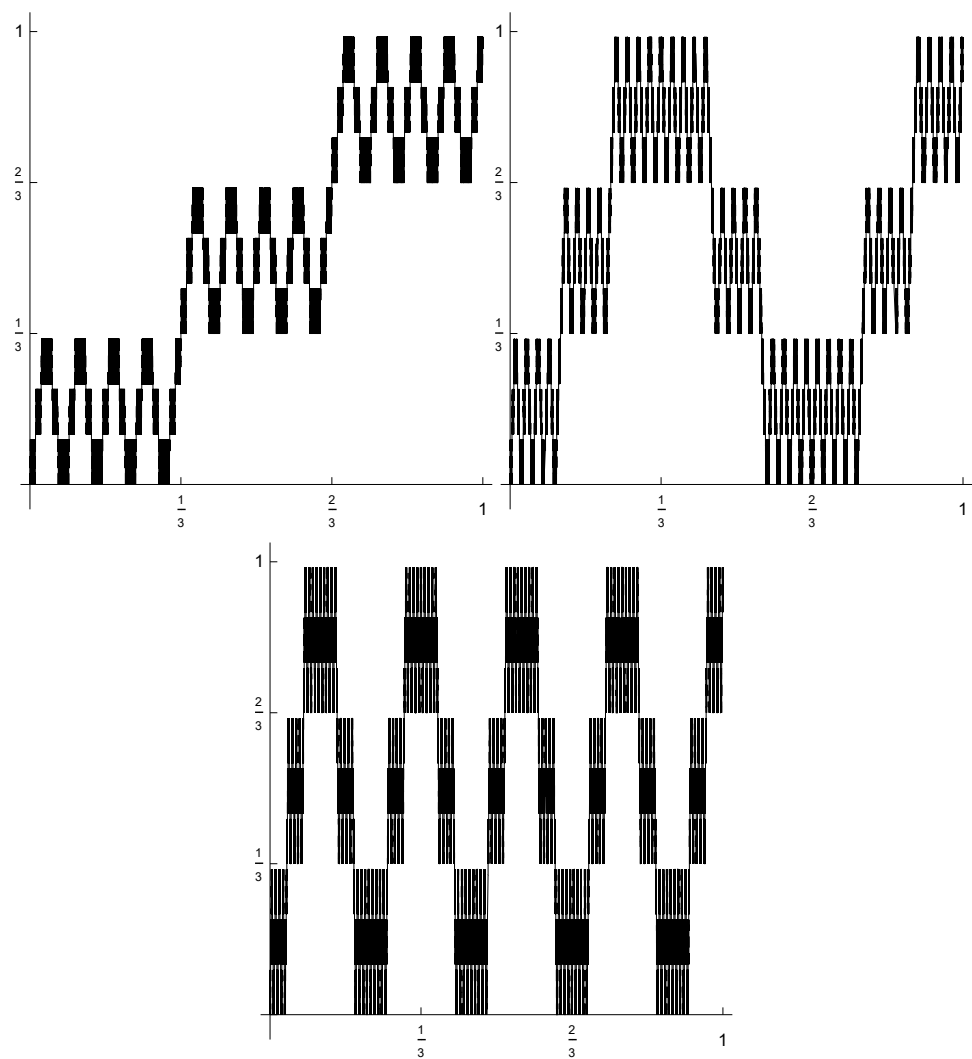
⁷O křivce, která vyplňuje celou rovinnou plochu



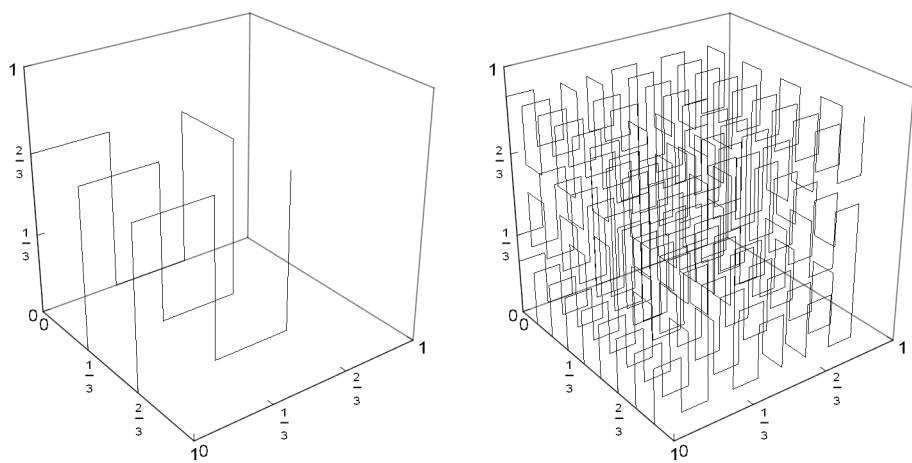
Obrázek 4.16: Peanovy funkce X (vlevo) a Y (vpravo) udávající souřadnice bodů křivky vyplňující jednotkový čtverec.



Obrázek 4.17: Vznik Peanovy dvojrozměrné křivky (první až čtvrtá iterace).



Obrázek 4.18: Peanovy funkce X (vlevo nahoře) a Y (vpravo nahoře) a Z (dole) udávající souřadnice bodů křivky vyplňující jednotkovou krychli.



Obrázek 4.19: Vznik Peanovy třírozměrné křivky (první a druhá iterace).

4.2.6 Takagiho funkce (1901)

Tuto funkci představil japonský matematik Teiji Takagi ve svém krátkém článku *A simple example of the continuous function without derivative*⁸ [121] z roku 1901. Jeho původní definice, kterou si dále uvedeme, byla poměrně rozsáhlá.

Pro začátek si vyjádříme číslo $x \in \langle 0,1 \rangle$ v binární soustavě, tedy

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{2^i}, \quad (4.46)$$

kde $c_n \in \{0; 1\}$.

Dále v závislosti na tomto x definujeme dvě funkce

$$\begin{aligned} \tau_n(x) &= \sum_{i=n}^{\infty} \frac{c_i}{2^i}, \\ \tau'_n(x) &= \frac{1}{2^{n-1}} - \tau_n(x). \end{aligned}$$

Dále definujeme funkci γ_n pro x dané předpisem (4.46) následovně.

$$\gamma_n(x) = \begin{cases} t_n(x) & c_n = 0, \\ t'_n(x) & c_n = 1. \end{cases}$$

Takagiho funkci $\mathcal{T}$ na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ pak definujeme předpisem

$$\mathcal{T}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(x).$$

Graf Takagiho funkce můžeme vidět na obrázku 4.20. Jedná se o spojitou funkci, která nemá v žádném bodě vlastní derivaci, v některých bodech má ale derivaci nevlastní [122].

V pozdější době byla tato definice podstatně zjednodušena [122]. Jestliže označíme $\langle\langle x \rangle\rangle$ vzdálenost x od nejbližšího celého čísla, můžeme Takagiho funkci vyjádřit předpisem

$$\mathcal{T}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\langle\langle 2^i \cdot x \rangle\rangle}{2^i}.$$

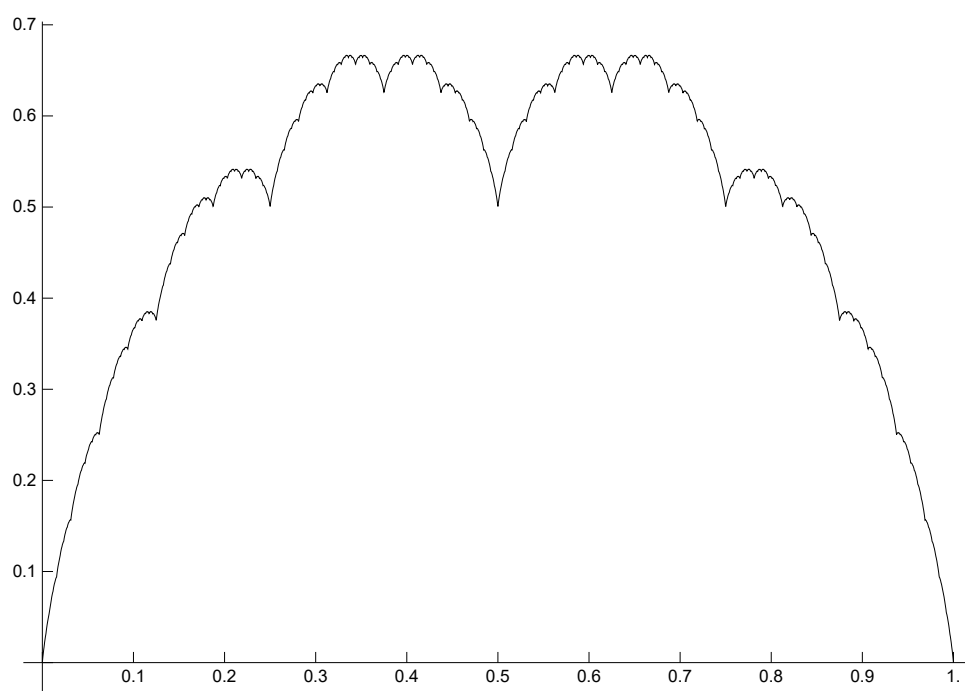
Tento předpis také dává grafickou představu o vzniku funkce. Budeme-li vykreslovat grafy částečných součtů této řady, získáme grafy vykreslené na obrázku 4.22.

Rovněž můžeme díky tomuto předpisu Takagiho funkci modifikovat, a to do podoby dané předpisem

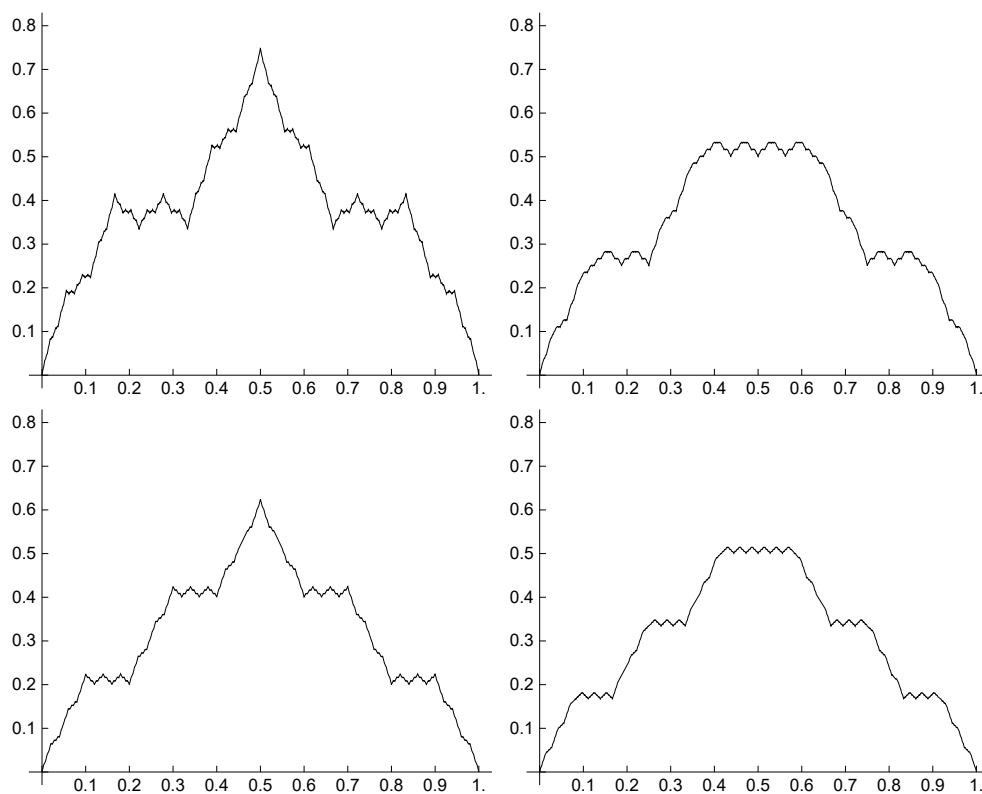
$$\mathcal{T}_r(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\langle\langle r^i \cdot x \rangle\rangle}{r^i}.$$

Rovněž tyto funkce jsou spojitě a nemají v žádném bodě vlastní derivaci [122]. Grafy těchto zobecněných Takagiho funkcí pro různé parametry r pak můžeme vidět na obrázku 4.21.

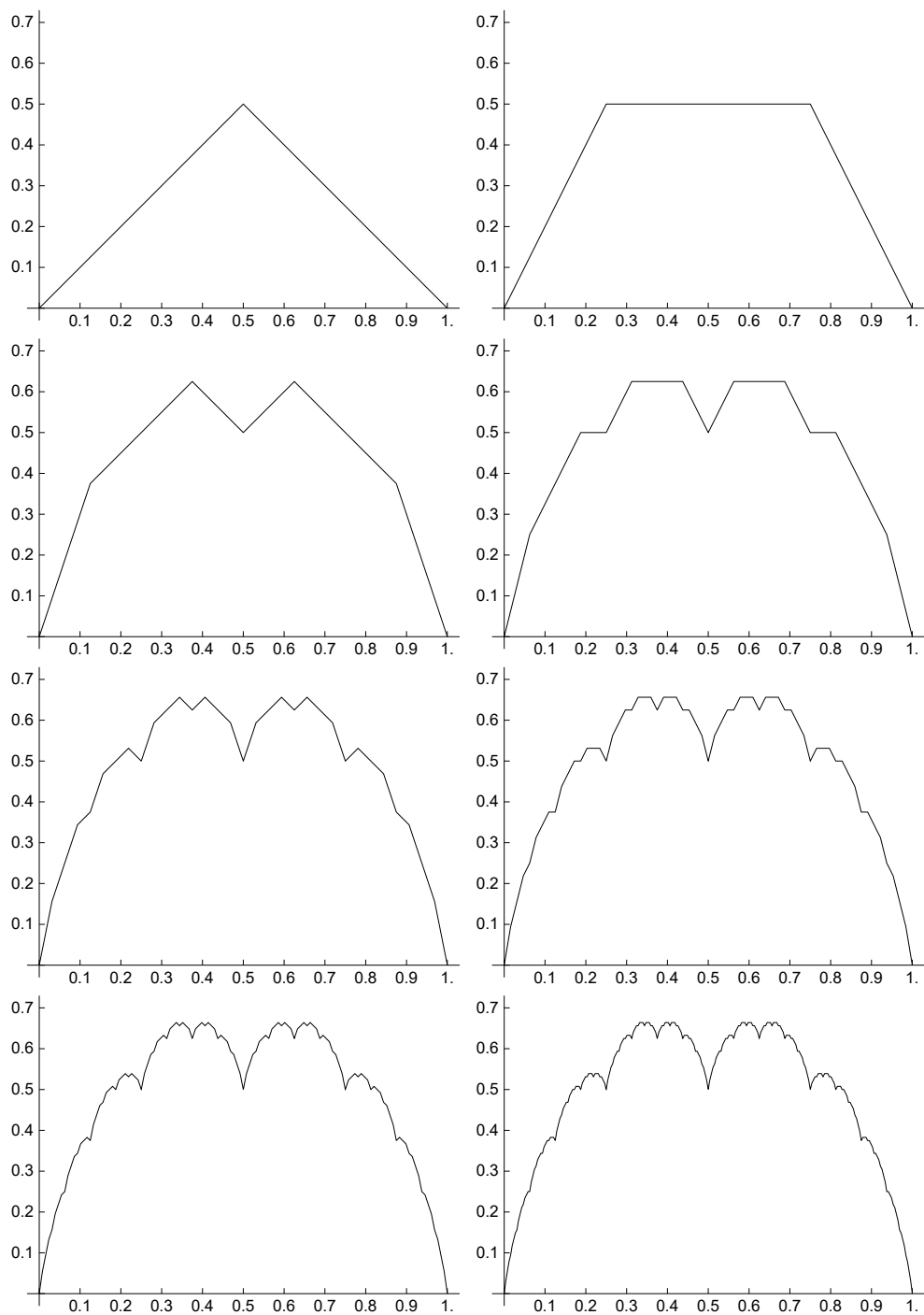
⁸Jednoduchý příklad spojitě funkce bez derivace



Obrázek 4.20: Takagiho funkce.



Obrázek 4.21: Zobecněné Takagiho funkce pro $r \in \{3; 4; 5; 6\}$.



Obrázek 4.22: Nultá až sedmá iterace vzniku Takagiho funkce.

4.2.7 Kochova funkce (1906)

Švédský matematik Helge von Koch představil v roce 1906 v článku *Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes*⁹ [123] rovinnou křivku, která je spojitá, ale v žádném bodě nemá tečnu — dnes je známa pod názvem Kochova křivka. Ve stejném článku ale popisuje i způsob, jak algoritmus modifikovat tak, aby výsledná křivka tvořila graf funkce, a to funkce spojitě, která nemá v žádném bodě derivaci. Ukažme si nyní jeho postup.

Klasická Kochova křivka je vytvořena následovně. Začínáme s jednotkovou úsečkou. Tu rozdělíme na tři shodné části a prostřední z nich nahradíme dvojicí úseček tak, aby spolu s odstraněnou úsečkou tvořila hranice rovnostranného trojúhelníku. Tím nám vznikne lomená čára skládající se ze čtyř úseček. Na každou z těchto úseček aplikujeme stejný postup, čímž dostaneme lomenou čáru složenou z šestnácti úseček. Na každou z nich opět aplikujeme popsany postup a takto pokračujeme do nekonečna. Křivka, k níž konverguje posloupnost popsaných křivek, je pak právě Kochova křivka. Národně můžeme tento postup vidět na obrázku 4.23.

Poznamenejme ještě, že výška rovnostranného trojúhelníku, který tvoří odstraněná úsečka a dvě nově přidávané, je $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{x}{3}$, kde x je délka právě dělené úsečky.

Graf Kochovy funkce vzniká obdobně — liší se pouze algoritmus kroku, kterým z úsečky dostaneme lomenou čáru o čtyřech úsečkách. Národnou představu o tomto algoritmu nám může dát obrázek 4.25.

Začínáme s úsečkou AB . Tu rozdělíme na tři stejně dlouhé úseky, dělicí body označme C a E . Dále označíme střed úsečky AB jako M . Bod D vznikne posunutím bodu M o $\frac{\sqrt{3}}{2}|CE|$ v kladném směru osy y . Výsledná lomená čára je čára $ACDEB$.

Označme k_0 funkci, jejíž grafem je úsečka s krajními body $[0,0]$ a $[1,0]$ (tedy $k_0(x) = 0$). Na tuto úsečku aplikujeme výše uvedený postup, čímž dostaneme graf funkce k_1 , který se skládá ze čtyř úseček.

Tento postup aplikujeme dále na jednotlivé úsečky tvořící graf funkce. Tak získáme posloupnost křivek, z nichž každá je grafem funkce, a tedy tuto funkci jednoznačně zadává (obrázek 4.26).

Limitu posloupnosti těchto funkcí nazveme Kochovou funkcí (Koch ji značí jako φ).

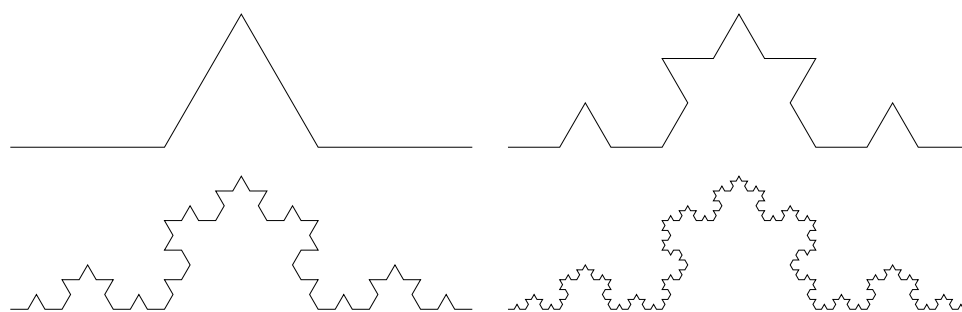
Definice 47 (Kochova funkce). *Pro $x \in \langle 0,1 \rangle$ definujeme funkci φ jako*

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n(x),$$

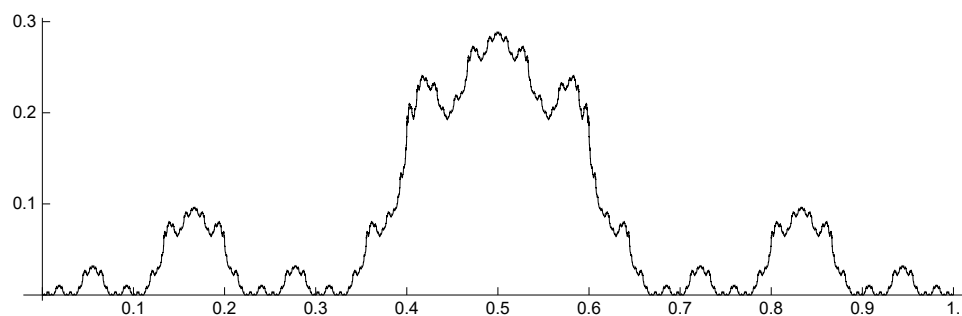
kde pro $x \in \langle 0,1 \rangle$ je

$$k_0(x) = 0.$$

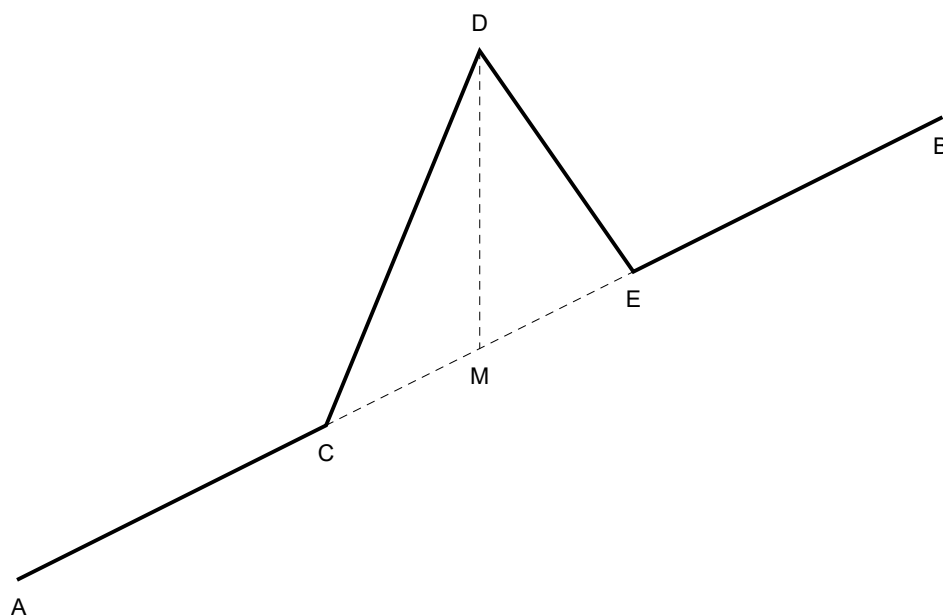
⁹Elementární geometrická metoda pro studium některých otázek teorie rovinných křivek



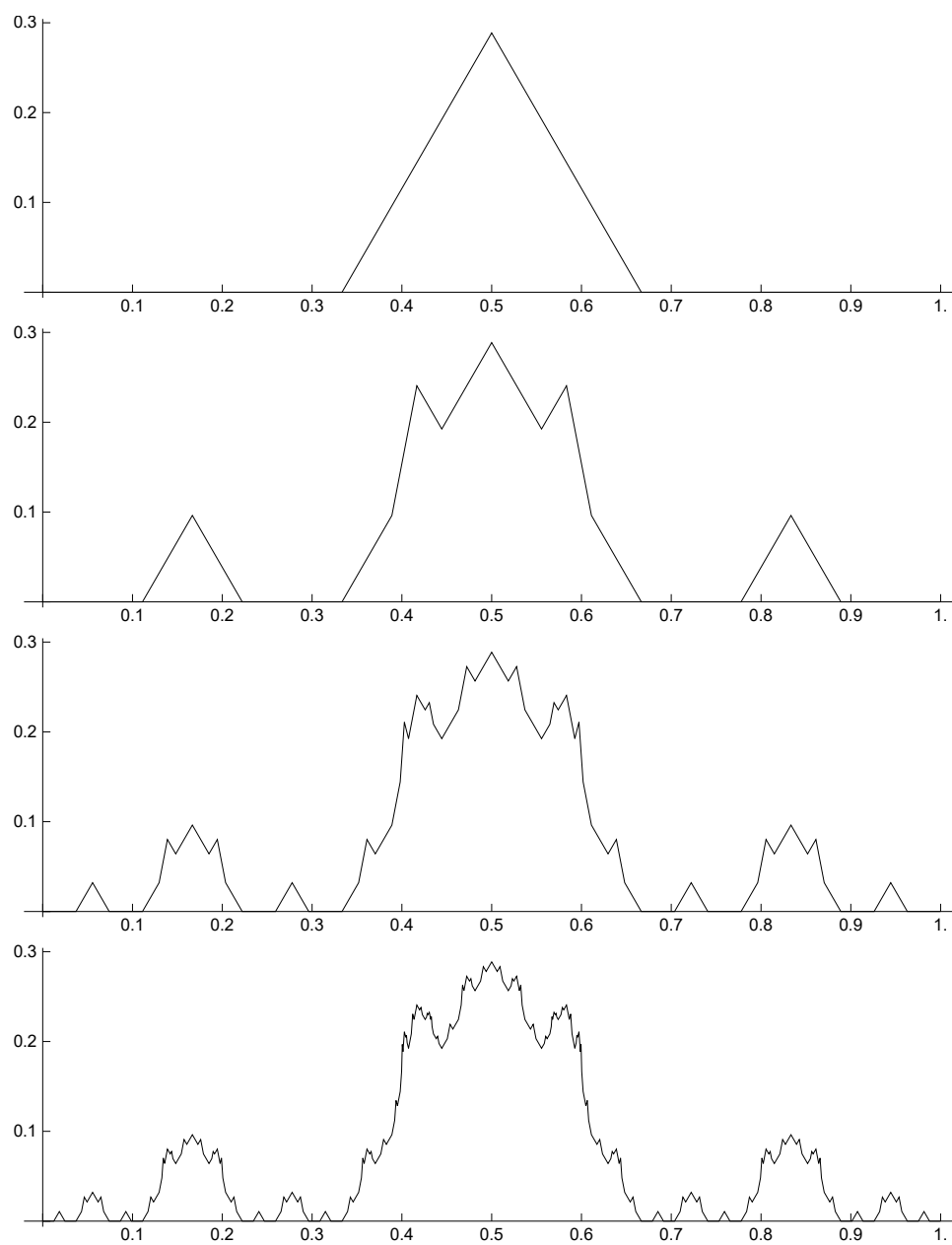
Obrázek 4.23: První až čtvrtá iterace vzniku Kochovy křivky.



Obrázek 4.24: Kochova funkce.



Obrázek 4.25: Iterační krok tvorby Kochovy funkce.



Obrázek 4.26: První až čtvrtá iterace vzniku Kochovy funkce.

4.2.8 Jarníkova funkce (1953)

V učebnici *Diferenciální počet; pokračování Úvodu do počtu diferenciálního* z roku 1953 (později vydáno jako *Diferenciální počet II* [124]) uvádí Vojtěch Jarník v páté kapitole příklad funkce $\mathcal{J}$ definované pro všechna $x \in \mathbb{R}$, která je spojitá ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$ a platí, že

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{\mathcal{J}(x) - \mathcal{J}(x_0)}{x - x_0} = \infty,$$

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} \frac{\mathcal{J}(x) - \mathcal{J}(x_0)}{x - x_0} = -\infty,$$

z čehož je vidět, že funkce nemá v žádném bodě derivaci. Definice funkce je následující.

Definice 48. Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme funkce f_n takto:

Pro x takové, že $0 \leq x \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-2n}$ je

$$f_n(x) = 10^n x,$$

dále je f_n sudá a má periodu 10^{-2n} .

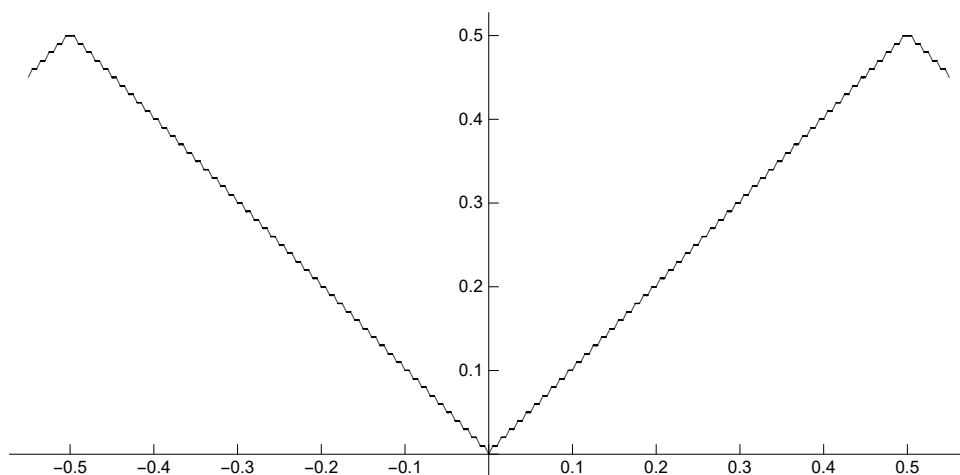
Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme funkci $\mathcal{J}$ předpisem

$$\mathcal{J}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

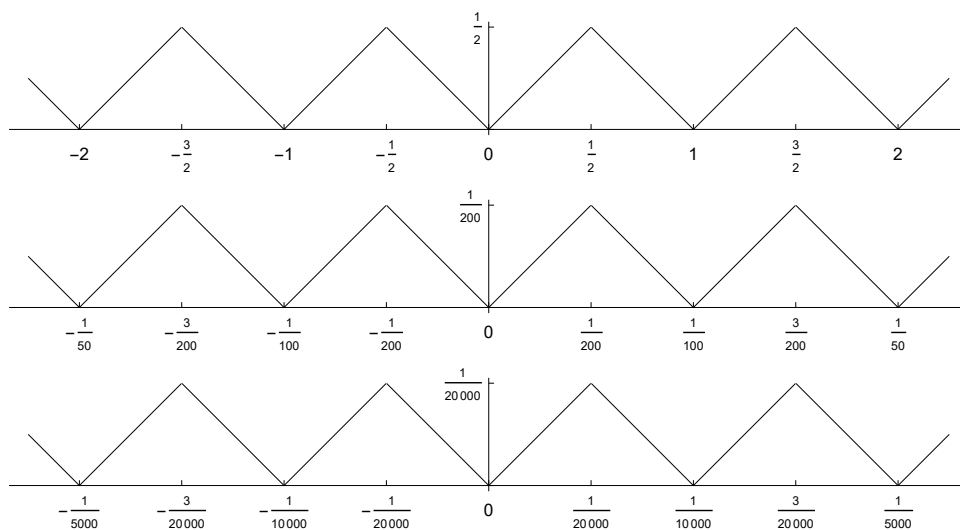
Snadno si rozmyslíme, že grafy funkcí f_n jsou nekonečné lomené čáry (první tři iterace můžeme vidět na obrázku 4.28) a podobně jako u Bolzanovy funkce (sekce 4.2.1) se s postupným sčítáním těchto funkcí zvyšuje počet zlomů.

Spojitosť Jarníkovy funkce plyne ze stejnoměrné konvergence řady (48). Nediiferencovatelnost Jarník dokazuje v podstatě podobně jako je tomu u Weierstrassovy funkce (věta 60) nebo Petrovy funkce (věta 64), tj. nalezením dvou různých posloupností, které konvergují k předem zvolenému x , ale jejich diferenční podíly divergují. Konkrétně dokáže, že pro každý bod x_0 a libovolná čísla $\Delta > 0$ a $K < \infty$ existují čísla x_1 a x_2 taková, že

$$\begin{aligned} 0 < |x_1 - x_0| < \Delta & \quad \frac{\mathcal{J}(x_1) - \mathcal{J}(x_0)}{x_1 - x_0} > K, \\ 0 < |x_2 - x_0| < \Delta & \quad \frac{\mathcal{J}(x_2) - \mathcal{J}(x_0)}{x_2 - x_0} < -K. \end{aligned}$$



Obrázek 4.27: Jarníkova funkce.



Obrázek 4.28: Ukázka funkcí f_n , z nichž je složena Jarníkova funkce, pro $n \in \{0; 1; 2\}$.

4.3 Rostoucí funkce s nulovou derivací na velké množině

V podsekcí 1.3.3 jsme viděli, že naprostá většina výukových materiálů uvádí větu 3 pouze ve tvaru implikace. V této sekci si ukážeme funkce, které mají nulovou derivaci na velké množině, a přesto jsou rostoucí — konkrétně Minkowského funkci, která má nulovou derivaci *skoro všude*, a Pompeiovu funkci (nebo přesněji řečeno funkci k ní inverzní), která má nulovou derivaci na husté množině.

4.3.1 Minkowského funkce (1904)

Ve svém článku *Zur Geometrie der Zahlen*¹⁰ [125] z roku 1904 definoval německý matematik Hermann Minkowski tuto zajímavou funkci, kterou označil φ . Jeho definice byla jen stručná a spíše geometrická, později však byla definice této funkce zpřesněna, rozpracována a podrobněji prozkoumána.

Definice Minkowského funkce

Podívejme se nejdříve na myšlenku původního Minkowského postupu.

Mějme čtverec o délce strany 1, jehož levý dolní roh leží v počátku soustavy souřadnic. Budeme postupně dělit jeho svislou a vodorovnou stranu.

Nejdříve se zaměříme na svislou stranu, tj. tu, která leží na ose y . Na začátku (tj. v nulté iteraci) vyznačíme na svislé straně čtverce jeho vrcholy, tj. čísla 0 a 1. V první iteraci rozpůlíme tento vzniklý interval, máme tedy vyznačena čísla 0, $\frac{1}{2}$ a 1. Ve druhé iteraci rozpůlíme každý z nově vzniklých intervalů a dostáváme čísla 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ a 1. Snadno nahlédneme, že tímto postupem dostaneme v n -té iteraci všechna čísla z intervalu $\langle 0,1 \rangle$, která lze zapsat jako $\frac{a}{2^n}$, kde $a \in \mathbb{N}_0$ (a samozřejmě $a \leq 2^n$). Pokračujeme-li s tímto postupem do nekonečna, dostaneme všechny dyadické zlomky (tj. zlomky tvaru $\frac{a}{2^n}$, kde $a, n \in \mathbb{N}$).

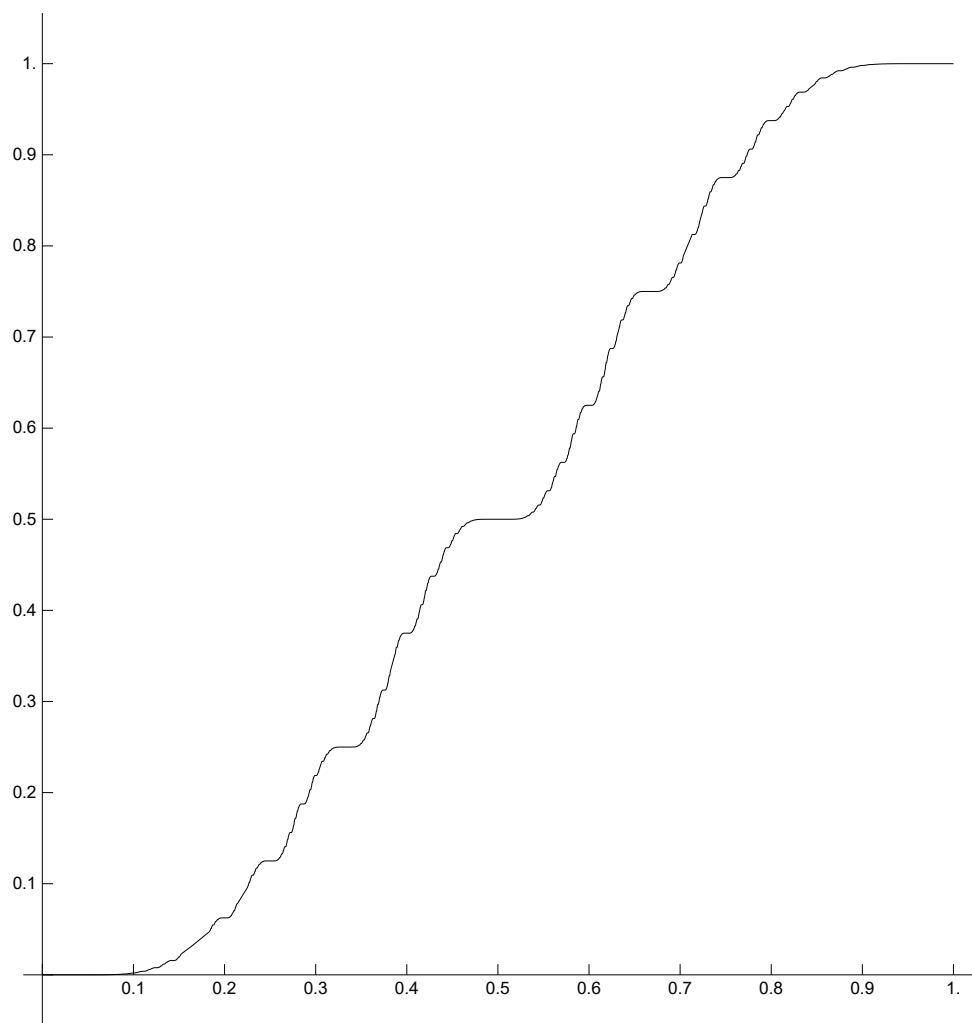
Nyní budeme dělit vodorovnou stranu čtverce, tj. tu, která leží na ose x . Na začátku (tj. v nulté iteraci) opět vyznačíme vrcholy, tj. čísla $\frac{0}{1}$ a $\frac{1}{1}$ (schválně jsme je zapsali v podobě zlomku). Budeme opět dělit nově vzniklé intervaly, tentokrát však bude mít dělicí bod intervalu $\langle \frac{a}{b}, \frac{a'}{b'} \rangle$ hodnotu medianu (viz definici 36 v podsekcí 2.5.1) jeho krajních bodů, tj. $\frac{a+a'}{b+b'}$. V první iteraci tedy dostáváme čísla $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$ (tj. $\frac{0+1}{1+1}$) a $\frac{1}{1}$. Ve druhé iteraci dostáváme čísla $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{3}$ (tj. $\frac{0+1}{1+2}$), $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ (tj. $\frac{1+1}{2+1}$), $\frac{1}{1}$. Jak jsme si rozmysleli v podsekcí 2.5.1, dostáváme takto všechna racionální čísla z intervalu $\langle 0,1 \rangle$.

Nyní přiřadíme pomocí funkce φ číslům z osy x čísla z osy y , a to v tom pořadí, v jakém vznikala — tj. $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $\varphi(\frac{1}{3}) = \frac{1}{4}$, $\varphi(\frac{2}{3}) = \frac{3}{4}$, ...

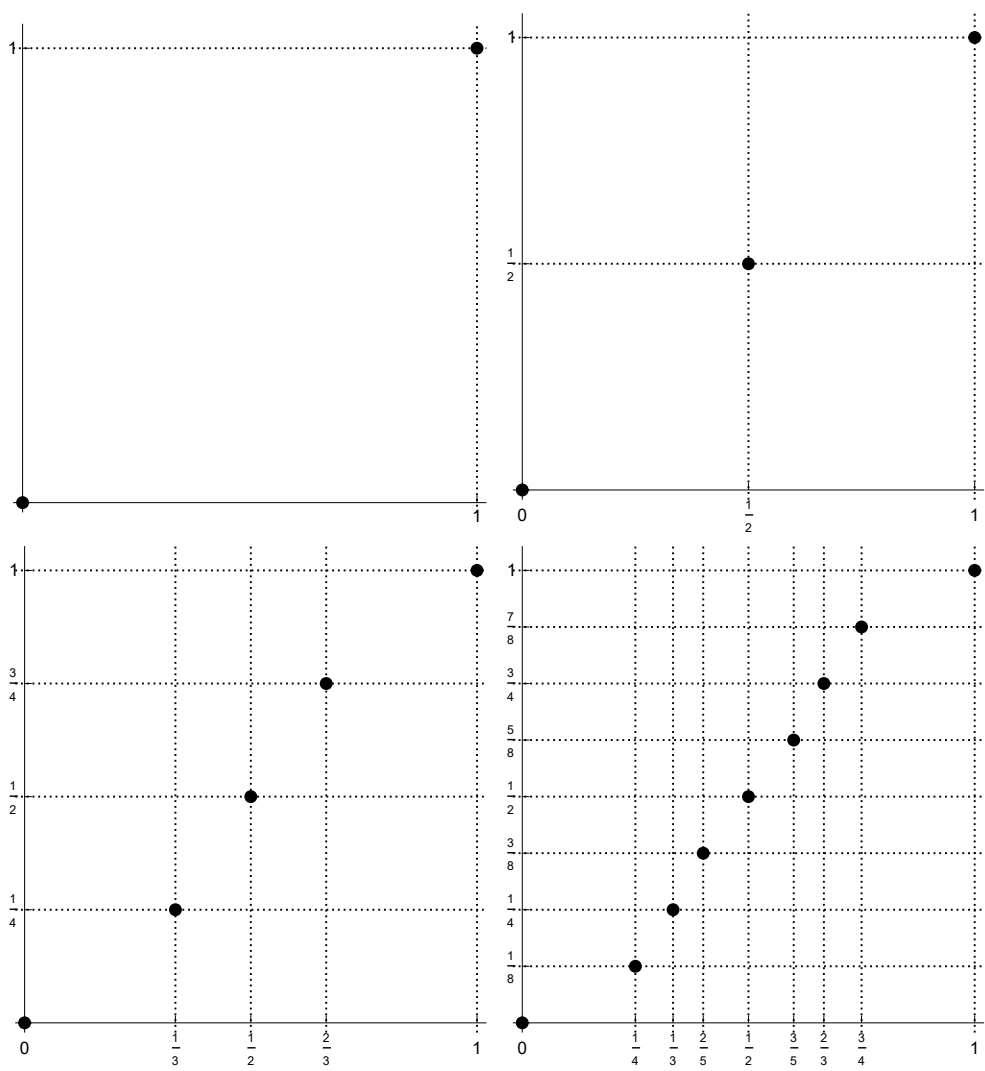
Prvních několik iterací vzniku funkce φ můžeme vidět na obrázku 4.30.

Uvedená definice se může zdát trochu rozvleklá a nepřehledná, proto ji raději zformalizujeme.

¹⁰O geometrii čísel



Obrázek 4.29: Minkowského funkce.



Obrázek 4.30: Proces tvorby Minkowského funkce (nultá až třetí iterace).

Definice 49 (Minkowského funkce, geometricky). *Definujeme*

$$?(0) = 0,$$

$$?(1) = 1.$$

Dále definujeme hodnoty iterativně — pokud už máme definovanou hodnotu funkce $?$ pro hodnoty $\frac{a}{b}$ a $\frac{a'}{b'}$ (kteréžto zlomky v předešlé iteraci následují po sobě), definujeme

$$?\left(\frac{a+a'}{b+b'}\right) = \frac{?\left(\frac{a}{b}\right) + ?\left(\frac{a'}{b'}\right)}{2}.$$

Všimněme si, že v uvedené definici jsou definovány hodnoty Minkowského funkce jen pro racionální čísla. Minkowský ve svém článku připojuje poznámku (aniž by se jí dále podrobněji věnoval), že funkci lze spojitě dodefinovat pro všechna čísla z intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Toto rozšíření nyní vynecháme a raději si ukážeme jinou ekvivalentní definici, která nám pomůže dokázat několik zajímavých vlastností o Minkowského funkci a která už také bude definovat hodnotu funkce pro všechna čísla z intervalu $\langle 0,1 \rangle$.

V roce 1938 ukázal Arnaud Denjoy [126], že Minkowského funkci lze zapsat ve tvaru (konečné či nekonečné) řady. Denjoyův postup je však poněkud obecnější, než potřebujeme (později se o tom ještě zmíníme), proto použijeme postup, který publikoval roku 1943 Raphaël Salem [127].

Nejdříve si dokažme následující jednoduché lemma.

Lemma 65. *Jsou-li $\frac{p_k}{q_k}$ a $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ dva po sobě jdoucí konvergenty řetězového zlomku čísla $x \in (0,1)$, jsou zároveň pro nějaké $i \in \mathbb{N}$ dvěma po sobě jdoucími členy i -té Fareyovy posloupnosti F_i .*

Důkaz. Lemma dokážeme pomocí matematické indukce.

Označme $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots]$ řetězový zlomek čísla x (je jedno, zda je konečný nebo nekonečný, zajímá nás pouze prvních $k+1$ konvergent).

Z definice Fareyových posloupností (definice 35 v podsekcí 2.5.1) je zřejmé, že $\frac{p_1}{q_1} = [0; a_1] = \frac{1}{a_1}$ se objeví v a_1 -té Fareyově posloupnosti a to jako její druhý člen, tj. následuje po prvním členu, kterým je $0 = \frac{p_0}{q_0}$ (tato rovnost platí, protože $x \in (0,1)$).

Dále předpokládejme, že věta platí pro $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ a $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ (tj. že v i -té Fareyově posloupnosti jde o dva po sobě následující zlomky). Z tvrzení 33 víme, že

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2}},$$

což ale znamená, že

$$\begin{aligned} \frac{p_k}{q_k} &= \frac{(a_k - 1) \cdot p_{k-1} + (p_{k-1} + p_{k-2})}{(a_k - 1) \cdot q_{k-1} + (q_{k-1} + q_{k-2})} \\ &= \frac{(a_k - 2) \cdot p_{k-1} + (p_{k-1} + (p_{k-1} + p_{k-2}))}{(a_k - 2) \cdot q_{k-1} + (q_{k-1} + (q_{k-1} + q_{k-2}))} \\ &= \dots \\ &= \frac{\overbrace{p_{k-1} + \dots + p_{k-1}}^{a_k} + p_{k-2}}{\overbrace{q_{k-1} + \dots + q_{k-1}}^{a_k} + q_{k-2}}. \end{aligned}$$

Z indukčního předpokladu tedy plyne, že zlomek

$$\frac{p_{k-1} + p_{k-2}}{q_{k-1} + q_{k-2}}$$

následuje po zlomku $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ v $(i+1)$ -té posloupnosti, podobně i zlomek

$$\frac{p_{k-1} + (p_{k-1} + p_{k-2})}{q_{k-1} + (q_{k-1} + q_{k-2})}$$

následuje po zlomku $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ v $(i+2)$ -té posloupnosti atd., až zlomek

$$\frac{\overbrace{p_{k-1} + \dots + p_{k-1}}^{a_k} + p_{k-2}}{\overbrace{q_{k-1} + \dots + q_{k-1}}^{a_k} + q_{k-2}} = \frac{a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2}}$$

následuje po zlomku $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ v $(i+a_k)$ -té posloupnosti. □

Ekvivalentní definice Minkowského funkce (a zejména pak její korektnost) plyne z následující věty.

Věta 66. *Je-li $x \in \mathbb{Q}$ a $0 \leq x \leq 1$ a*

$$x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

je vyjádření x konečným řetězovým zlomkem, pak

$$?(x) = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{2^{(a_1 + \dots + a_i) - 1}}.$$

Důkaz. Větu dokážeme pomocí matematické indukce.

Pro $x = [a_0] = 0$ vzorec očividně platí.

Pokud $x = [a_0; a_1] = \frac{1}{a_1}$, pak z definice 49 vyplývá, že číslo $\frac{1}{a_1}$ dostaneme v $(a_1 - 1)$ -ní iteraci a $?\left(\frac{1}{a_1}\right) = \frac{1}{2^{a_1-1}}$. Tedy i v tomto případě vzorec platí.

Nyní předpokládejme, že věta platí pro $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ a $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$. Pro přehlednost označme

$$y_{k-2} = ?\left(\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}\right),$$

$$y_{k-1} = ?\left(\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right).$$

Z lemmatu 65 víme, že $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ a $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ následují v nějaké iteraci vzniku funkce za sebou, a tedy podle definice 49 můžeme psát

$$?\left(\frac{p_{k-1} + p_{k-2}}{q_{k-1} + q_{k-2}}\right) = \frac{y_{k-1} + y_{k-2}}{2}.$$

Podobným způsobem jako v důkazu lemmatu 65 pokračujeme dále a dostáváme

$$?\left(\frac{2 \cdot p_{k-1} + p_{k-2}}{2 \cdot q_{k-1} + q_{k-2}}\right) = \frac{y_{k-1} + \frac{y_{k-1} + y_{k-2}}{2}}{2} = \frac{y_{k-1}}{2} + \frac{y_{k-1}}{2^2} + \frac{y_{k-2}}{2^2}.$$

Pokračujeme-li dále, dostáváme

$$y_k = ? \left(\frac{p_k}{q_k} \right) = ? \left(\frac{a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2}}{2 \cdot q_{k-1} + q_{k-2}} \right) = \frac{y_{k-1}}{2} + \frac{y_{k-1}}{2^2} + \dots + \frac{y_{k-1}}{2^{a_k}} + \frac{y_{k-2}}{2^{a_k}}.$$

Prvních a_k členů tvoří konečnou geometrickou řadu. Jejím sečtením dostáváme

$$y_k = \frac{y_k}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{a_k}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{a_{k-2}}{2^{a_k}} = y_{k-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{a_k}}\right) + \frac{a_{k-2}}{2^{a_k}},$$

a tedy

$$y_k - y_{k-1} = -\frac{1}{2^{a_k}} (y_{k-1} - y_{k-2}). \quad (4.47)$$

Uvědomme si, že podle lemmatu 65 následují $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ a $\frac{p_k}{q_k}$ následují v nějaké iteraci vzniku funkce po sobě, podobně jako $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ a $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$, a můžeme tedy vzorec (4.47) aplikovat iterativně dál, čímž dostáváme

$$y_k - y_{k-1} = \left(-\frac{1}{2^{a_k}}\right) \left(-\frac{1}{2^{a_{k-1}}}\right) \dots \left(-\frac{1}{2^{a_2}}\right) (y_1 - y_0).$$

Protože $y_0 = 0$ a $y_1 = \frac{1}{2^{a_1-1}}$, dostáváme

$$y_k - y_{k-1} = (-1)^{k-1} \frac{1}{2^{(a_1+\dots+a_k)-1}},$$

a tedy použitím indukčního předpokladu

$$\begin{aligned} y_k &= y_{k-1} + \frac{(-1)^{k-1}}{2^{(a_1+\dots+a_k)-1}} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^{i-1}}{2^{(a_1+\dots+a_i)-1}} + \frac{(-1)^{k-1}}{2^{(a_1+\dots+a_k)-1}} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{i-1}}{2^{(a_1+\dots+a_i)-1}} \end{aligned}$$

□

Na základě této věty vyslovíme následující definici Minkowského funkce.

Definice 50 (Minkowského funkce, pomocí řady). *Nechť $x \in \langle 0,1 \rangle$.*

Pokud x můžeme vyjádřit konečným řetězovým zlomkem, tj. $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, pak

$$?(x) = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{2^{(a_1+\dots+a_i)-1}}. \quad (4.48)$$

Pokud x můžeme vyjádřit nekonečným řetězovým zlomkem, tj. $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$, pak

$$?(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{2^{(a_1+\dots+a_i)-1}}. \quad (4.49)$$

Poznámka. Denjoy [126] ve skutečnosti prezentoval poněkud obecnější výsledek, než jsme si uvedli, a sice funkci κ , která je svým způsobem parametrizací funkce $?$.

Funkce κ je definovaná iterativně:

$$\begin{aligned}\kappa(0, \alpha) &= 1, \\ \kappa(n, \alpha) &= \alpha^n \quad (n \in \mathbb{N}), \\ \kappa\left(\frac{p+p'}{q+q'}, \alpha\right) &= \alpha \cdot \kappa\left(\frac{p'}{p}, \alpha\right) + (1-\alpha) \cdot \kappa\left(\frac{p}{q}, \alpha\right) \quad (pq' - p'q = 1),\end{aligned}$$

přičemž $0 < \alpha < 1$.

Snadno si rozmyslíme, že na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ je

$$?(x) = 2 - 2 \cdot \kappa\left(x, \frac{1}{2}\right).$$

Denjoy dále ukázal, že funkci κ lze formulovat ve tvaru řady. Zapišeme-li proměnnou x řetězovým zlomkem, tj.

$$\begin{aligned}x &= [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] && \text{nebo} \\ x &= [a_0; a_1, a_2, \dots],\end{aligned}$$

podle toho, zda je řetězový zlomek konečný nebo nekonečný, pak pokud označíme

$$\begin{aligned}\sigma_n &= a_0 + a_2 + \dots + a_{2m} + \dots && (2m \leq n), \\ \sigma'_n &= a_1 + a_3 + \dots + a_{2m+1} + \dots && (2m+1 \leq n),\end{aligned}$$

(tedy σ_n je součet sudých koeficientů řetězového zlomku a σ'_n je součet lichých koeficientů řetězového zlomku) pak platí, že

$$\begin{aligned}\kappa(x, \alpha) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha^{\sigma_n} (1-\alpha)^{\sigma'_n} \\ \kappa(x, \alpha) &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \alpha^{\sigma_n} (1-\alpha)^{\sigma'_n},\end{aligned}$$

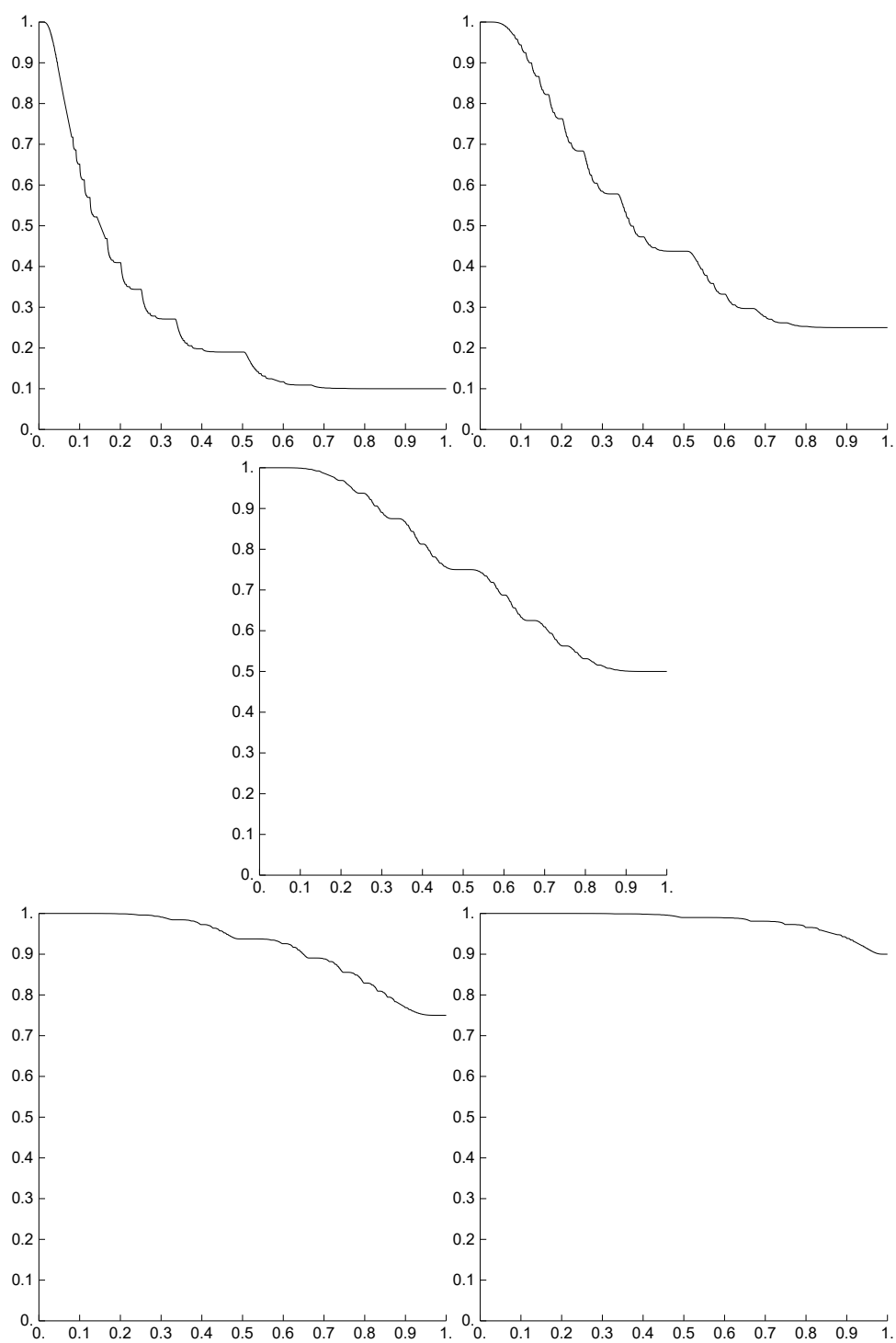
podle toho, zda je řetězový zlomek konečný nebo nekonečný.

Grafy funkce κ pro několik koeficientů můžeme vidět na obrázku 4.31.

Než se podíváme na vlastnosti Minkowského funkce, zmiňme ještě jeden zajímavý pohled na její definici (tímto způsobem definuje Minkowského funkci např. Steven Finch [128], strana 441).

Všimněme si, že sumu (4.49) z definice 50 můžeme lehce přeformulovat a přepsat jako součet součtu dvou po sobě následujících sčítanců:

$$\begin{aligned}?(x) &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{2^{a_1+\dots+a_i}} \\ &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{a_1+\dots+a_{2i-1}}} - \frac{1}{2^{a_1+\dots+a_{2i}}} \right) \\ &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{a_{2i}} - 1}{2^{a_1+\dots+a_{2i}}}.\end{aligned}$$



Obrázek 4.31: Denjoyova funkce κ pro hodnoty α po řadě $\frac{1}{10}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{10}$.

Označme nyní

$$S_{2i-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2i-2} + a_{2i-1}.$$

Potom

$$\frac{?(x)}{2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{a_{2i}} - 1}{2^{S_{2i-1} + a_{2i}}}. \quad (4.50)$$

Výraz v sumě na pravé straně nám může připomínat součet prvních několika členů geometrické posloupnosti. Opravdu — tento výraz dostaneme, pokud sečteme následující řadu.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{a_{2i}} \frac{1}{2^{S_{2i-1}+j}} &= \frac{1}{2^{S_{2i-1}+1}} + \frac{1}{2^{S_{2i-1}+2}} + \dots + \frac{1}{2^{S_{2i-1}+a_{2i}}} \\ &= \frac{1}{2^{S_{2i-1}}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{a_{2i}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{S_{2i-1}}} \cdot \frac{2^{a_{2i}} - 1}{2^{a_{2i}}} \cdot 2 = \frac{2^{a_{2i}} - 1}{2^{S_{2i-1}+a_{2i}}} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Na řadu (4.51) se můžeme dívat jako na číslo ve dvojkové soustavě, které má jedničky jen na místech $S_{2i-1} + 1$ až $S_{2i-1} + a_{2i}$.

Řadu (4.50) tedy můžeme chápat jako číslo, které má jedničky na místech $a_1 + 1$ až $a_1 + a_2$, dále $a_1 + a_2 + a_3 + 1$ až $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ a tak dále. Jinými slovy jde o číslo, které má za binární čárkou a_1 nul, a_2 jedniček, a_3 nul, a_4 jedniček a tak dále. Vzhledem k tomu, že abychom dostali samotnou funkci $?$, musíme toto číslo ještě násobit dvěma (což ve dvojkové soustavě znamená posunout binární čárku o jedno místo doprava), dostáváme

$$?([0; a_1, a_2, a_3, a_4, \dots]) = \left(0, \overbrace{0\dots 0}^{a_1-1} \overbrace{1\dots 1}^{a_2} \overbrace{0\dots 0}^{a_3} \overbrace{1\dots 1}^{a_4} \dots \right)_2. \quad (4.52)$$

Tento pohled je samozřejmě možné aplikovat i na konečné řetězové zlomky. Jen je třeba si zápis $[0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ představit jako

$$\left[0; a_1, a_2, \dots, a_n + \frac{1}{\infty} \right] = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \infty].$$

To znamená, že pokud má konečný zlomek sudý počet koeficientů, doplníme na konec nekonečný počet jedniček nebo nul, podle toho, která z číslic nebyla na konci desetinného rozvoje. Například tedy

$$\begin{aligned} ?\left(\frac{5}{18}\right) &= ?([0; 3, 1, 1, 2]) = (0, 001011)_2 = \frac{11}{64}, \\ ?\left(\frac{3}{8}\right) &= ?([0; 2, 1, 2]) = (0, 0100\bar{1})_2 = \frac{5}{16}, \\ ?\left(\frac{7}{9}\right) &= ?([0; 1, 3, 2]) = (0, 11100\bar{1})_2 = \frac{29}{32}, \\ ?\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= ?([0; 1, \bar{2}]) = (0, \overline{1100})_2 = \frac{4}{5}, \\ ?\left(\frac{1}{e}\right) &= ?([0; 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, \dots]) = (0, 010010111101\dots)_2 = 0,296145436\dots \end{aligned}$$

Vlastnosti Minkowského funkce

Minkowského funkce má zajímavou kombinaci vlastností — má sice nulovou derivaci *skoro všude*, ale zároveň je rostoucí.

Připomeňme při této příležitosti Cantorovu funkci, kterou jsme rozebrali v podsekcí 3.2.1. Ta má rovněž *skoro všude* nulovou derivaci a je monotónní, ovšem na rozdíl od Minkowského funkce je pouze neklesající (nikoli rostoucí) a obsahuje konstantní úseky.

Věta 67. *Funkce $?$ je na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ a rostoucí.*

Důkaz. V sekci 2.4 jsme si řekli, že každému racionálnímu číslu odpovídá právě jeden konečný řetězový zlomek a naopak. Podle původní Minkowského definice je funkce $?$ zcela očividně rostoucí na množině racionálních čísel. Zvolme nyní nějaké pevné $x \in \mathbb{I}$. Z tvrzení 34 víme, že pro x existuje posloupnost racionálních čísel $\left\{ \frac{p_n}{q_n} \right\}_{n=0}^{\infty}$ (konvergentů řetězového zlomku) taková, že

$$0 = \frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \dots < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \dots < x < \dots < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \dots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1} \leq 1,$$

přičemž

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = x.$$

Z definice Minkowského funkce pomocí binárního rozvoje (vzorec (4.52)) je pak zřejmé, že i pro funkční hodnoty platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnosti

$$? \left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}} \right) < ?(x) < ? \left(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} \right)$$

a rovnost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ? \left(\frac{p_n}{q_n} \right) = ?(x).$$

Vezměme nyní libovolné racionální číslo $\xi \in \langle 0, x \rangle$. Potom buď ξ je jedním z konvergentů, tj. $\xi < x$, nebo z definice limity posloupnosti najdeme takové $n \in \mathbb{N}$, že $\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \xi < \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}}$ a podle toho, co jsme si řekli na začátku tohoto důkazu, je i $? \left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}} \right) < ?(\xi) < ? \left(\frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} \right)$. Tedy pro všechna racionální čísla $\xi < x$ platí $?(\xi) < x$. Obdobně bychom dokázali, že pro všechna racionální čísla $\xi > x$ platí $?(\xi) > x$ (zde je také možné, že $\frac{p_1}{q_1} < \xi \leq 1$).

Nyní vezměme nějaké číslo $y \in \mathbb{I}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $y < x$. Víme, že existuje číslo $r \in \mathbb{Q}$ takové, že $y < r < x$. Z předchozích úvah ale víme, že $?(y) < ?(r) < ?(x)$. Tím je tedy dokázáno, že je funkce $?$ rostoucí v každém bodě intervalu $\langle 0,1 \rangle$. $\square$

Než se pustíme do důkazu věty o derivaci Minkowského funkce (zpracováno podle [127]), formulujme nejdříve lemma, které říká, že množina, na které funkce nemůže mít nulovou derivaci, má skutečně nulovou míru. Tuto větu nebudeme dokazovat, protože bychom potřebovali více teorie nejen z oblasti teorie míry, ale i z oblasti řetězových zlomků — pro zájemce ale přikládáme odkaz na literaturu, kde lze důkaz (a potřebnou teorii) najít.

Lemma 68. *Množina Z všech řetězových zlomků s omezenými koeficienty, tj.*

$$Z = \{x = [0; a_1, a_2, \dots] \in (0,1) \mid (\exists M \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) (a_n < M)\},$$

má nulovou míru.

Důkaz. Důkaz můžeme nalézt v [129], kapitola 13, věta 29 (strana 60). $\square$

Věta 69. *Funkce φ má skoro všude na intervalu $(0,1)$ nulovou derivaci.*

Důkaz. Zvolme nějaké $x \in (0,1) \setminus Z$, kde Z je množina z lemmatu 68. Je zřejmé, že x má nekonečný řetězový zlomek. Označme

$$u_n = \frac{p_n}{q_n} = [0; a_1, a_2, \dots, a_n],$$

$$a'_{n+1} = [a_{n+1}; a_{n+2}, a_{n+3}, \dots],$$

můžeme tedy psát $x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, a'_{n+1}]$, tedy podle tvrzení 33

$$x = \frac{p_n \cdot a'_{n+1} + p_{n-1}}{q_n \cdot a'_{n+1} + q_{n-1}}.$$

S pomocí rovnosti (2.7) z důkazu tvrzení 34 (po její menší úpravě) dostáváme

$$|x - u_n| = \left| \frac{(p_n \cdot a'_{n+1} + p_{n-1}) \cdot q_n - p_n \cdot (q_n \cdot a'_{n+1} + q_{n-1})}{(q_n \cdot a'_{n+1} + q_{n-1}) \cdot q_n} \right|$$

$$= \left| \frac{p_{n-1} \cdot q_n - p_n \cdot q_{n-1}}{(q_n \cdot a'_{n+1} + q_{n-1}) \cdot q_n} \right| = \frac{1}{(q_n \cdot a'_{n+1} + q_{n-1}) \cdot q_n}.$$

Dále si uvědomíme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $q_n > 0$ a $q_n > q_{n-1}$, a odhadneme

$$(q_n \cdot a'_{n+1} + q_{n-1}) \cdot q_n = \left(a'_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} \right) \cdot q_n^2 < (a_{n+1} + 1 + 1) \cdot q_n^2,$$

$$(q_n \cdot a'_{n+1} + q_{n-1}) \cdot q_n > a'_{n+1} \cdot q_n^2 > a_{n+1} \cdot q_n^2,$$

z čehož dostáváme

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2) \cdot q_n^2} < |x - u_n| < \frac{1}{a_{n+1} \cdot q_n^2}. \quad (4.53)$$

Z definice Minkowského funkce, konkrétně z definice 50, můžeme vypočítat, že

$$\varphi(x) - \varphi(u_n) = (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2^{(a_1 + \dots + a_{n+1}) - 1}} - \frac{1}{2^{(a_1 + \dots + a_{n+2}) - 1}} + \dots \right),$$

z čehož jednoduše odhadneme

$$\frac{1}{2^{a_1 + \dots + a_{n+1}}} < |\varphi(x) - \varphi(u_n)| < \frac{1}{2^{(a_1 + \dots + a_{n+1}) - 1}}. \quad (4.54)$$

S pomocí nerovností (4.53) a (4.54) odhadneme následující poměry.

$$\delta_n = \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(u_n)}{x - u_n} \right| < \frac{(a_{n+1} + 2) \cdot q_n^2}{2^{(a_1 + \dots + a_{n+1}) - 1}}$$

$$\delta_{n-1} = \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(u_{n-1})}{x - u_{n-1}} \right| > \frac{a_n \cdot q_{n-1}^2}{2^{a_1 + \dots + a_n}}$$

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} &< \frac{(a_{n+1} + 2) \cdot q_n^2}{2^{(a_1 + \dots + a_{n+1}) - 1}} \cdot \frac{2^{a_1 + \dots + a_n}}{a_n \cdot q_{n-1}^2} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2^{a_{n+1}}} \cdot \frac{a_{n+1} + 2}{a_n} \cdot \left(\frac{q_n}{q_{n-1}} \right)^2 \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2^{a_{n+1}}} \cdot \frac{a_{n+1} + 2}{a_n} \cdot (a_n + 1)^2 \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2^{a_{n+1}}} \cdot \frac{a_{n+1} \cdot \left(1 + \frac{2}{a_{n+1}}\right)}{a_n} \cdot a_n^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^2 \\
&< C \cdot \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{2^{a_{n+1}}},
\end{aligned}$$

kde $C = 2 \cdot (1 + 2) \cdot (1 + 1)^2 = 24$ je konstanta.

Protože jsme číslo x volili tak, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ není shora omezená, najdeme vybranou posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že $a_{n_k} < a_{n_{k+1}}$ a $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \infty$. Z toho je zřejmé, že

$$\liminf \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} = 0.$$

Pokud by v bodě $x \in (0,1) \setminus Z$ měla funkce ? vlastní derivaci různou od nuly, musela by být $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} = 1$. To znamená, že pokud má funkce ? na množině $(0,1) \setminus Z$ vlastní derivaci, musí být rovna nule. Ale podle věty 67 je funkce ? rostoucí, takže podle věty 31 (na straně 45) má vlastní derivaci *skoro všude*. Z toho plyne, že Minkowského funkce má nulovou derivaci *skoro všude*. $\square$

4.3.2 Pompeiova funkce (1906)

Tuto funkci představil rumunský matematik Dimitrie Pompeiu ve svém článku *Sur les fonctions dérivées*¹¹¹² [130] z 2. února 1906. Její definice je následující.

Definice 51 (Pompeiova funkce). *Pro všechna $x \in (0,1)$ definujeme funkci $\mathcal{P}$ předpisem*

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot (x - a_n)^{\frac{1}{3}}, \quad (4.55)$$

kde pro všechna n je $A_n > 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ je konvergentní řada a $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je spočetná množina hustá v $\langle 0,1 \rangle$.

Příkladem takovéto funkce může být funkce taková, že $A_n = \frac{1}{2^n}$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je enumerace racionálních čísel z intervalu $(0,1)$, kterou jsme si ukázali v sekci 2.5. Graf této funkce můžeme vidět na obrázku 4.32.

Pro naši potřebu nás však bude zajímat zejména funkce inverzní k této funkci, tj. $\mathcal{P}^{-1}(x)$. Její graf můžeme vidět na obrázku 4.33.

Nejdříve ze všeho musíme dokázat, že je definice funkce korektní, tj. že řada funkcí v předpisu z definice konverguje.

Tvrzení 70. *Řada funkcí (4.55) v definici 51 konverguje stejnoměrně.*

Důkaz. Protože pro všechna n je $a_n \in \langle 0,1 \rangle$, je $|(x - a_n)^{\frac{1}{3}}| \leq 1$, a tedy $|A_n \cdot (x - a_n)^{\frac{1}{3}}| \leq A_n$. Podle předpokladu dále $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ konverguje. Jsou tedy splněny předpoklady Weierstrassova kritéria (věta 8), podle kterého pak řada stejnoměrně konverguje. $\square$

Nyní už můžeme přistoupit k důkazům vlastností Pompeiovy funkce.

Věta 71. *Funkce $\mathcal{P}$ je rostoucí.*

Důkaz. Pravdivost této věty je zřejmá — funkce $\mathcal{P}$ je totiž součtem rostoucích funkcí. $\square$

Věta 72. *Funkce $\mathcal{P}^{-1}$ (tj. funkce inverzní k funkci $\mathcal{P}$) má derivaci omezenou a na husté množině rovou nule.*

Důkaz. Důkaz si pro přehlednost rozdělíme do několika částí.

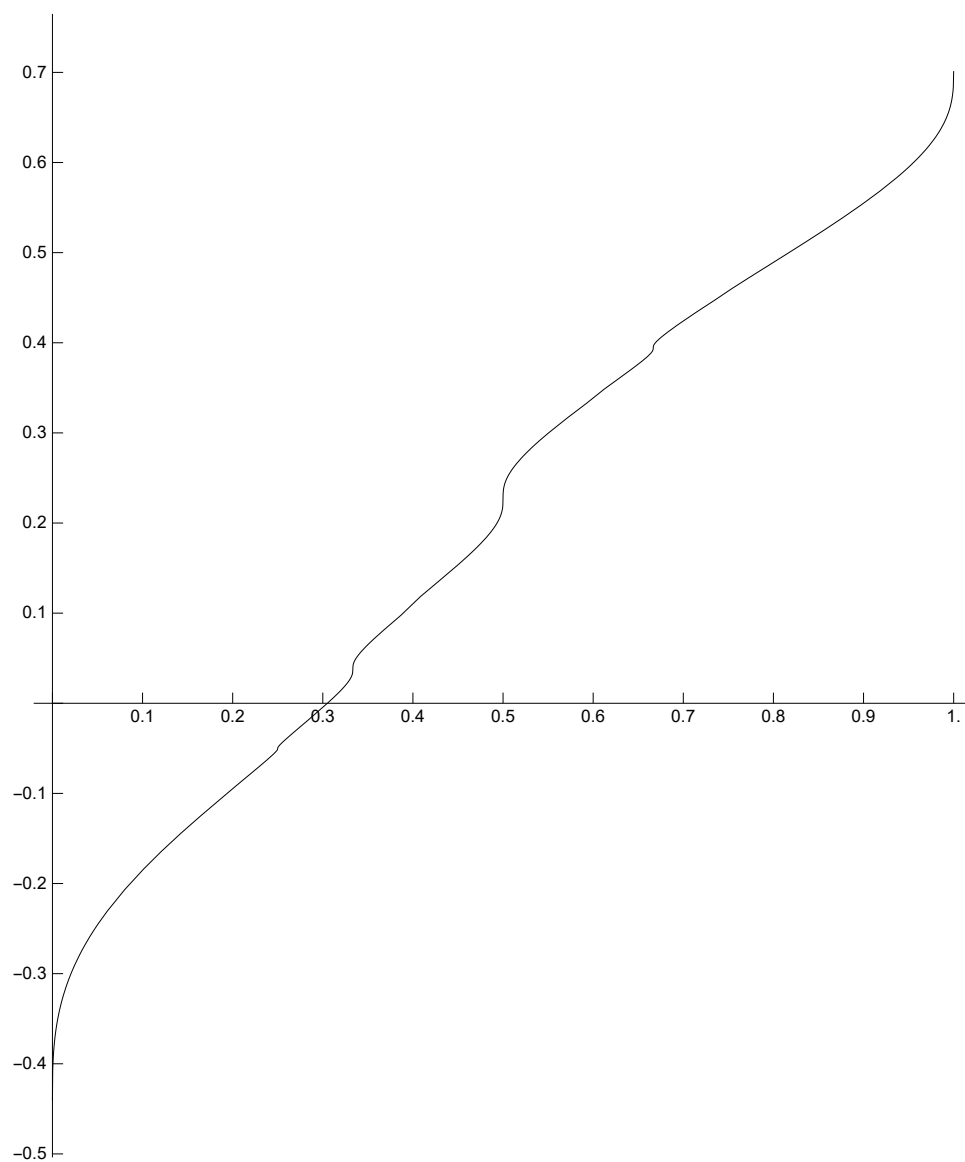
1. Nalezení derivace

Nejdříve si ukážeme, jak vypadá derivace funkce $\mathcal{P}$. Jediným kandidátem je následující řada, která vznikne derivováním řady (4.55) člen po členu:

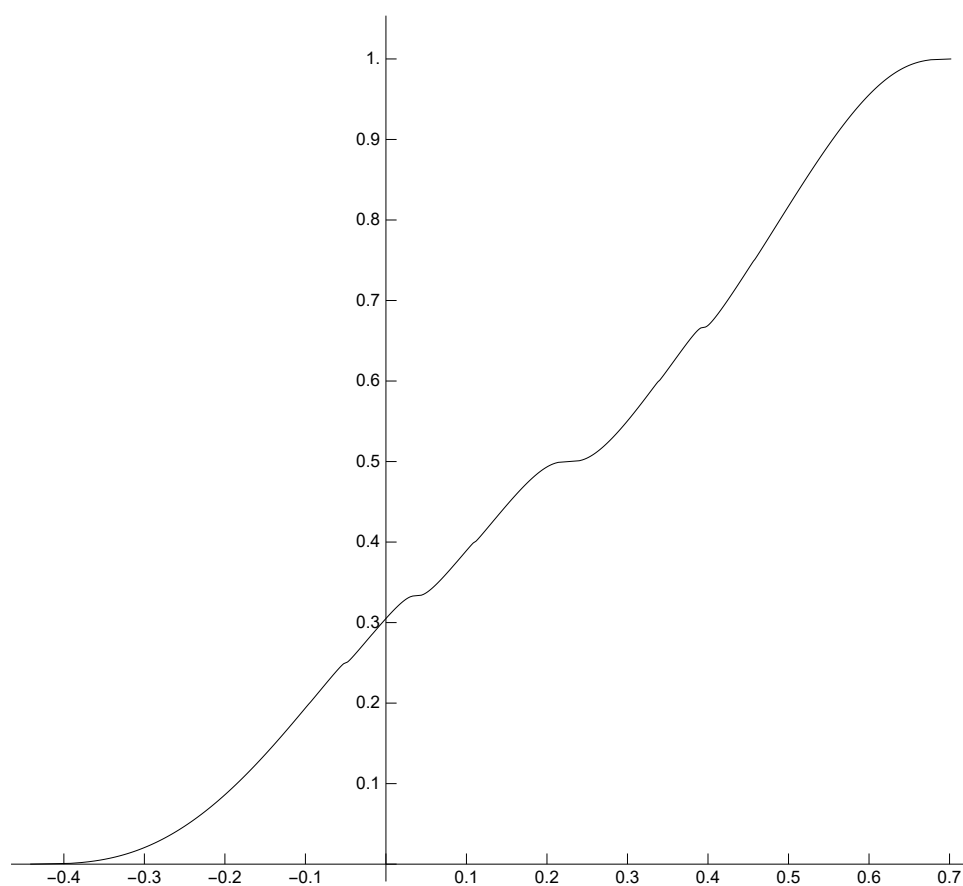
$$\mathcal{P}'(x) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(x - a_n)^{\frac{2}{3}}}. \quad (4.56)$$

¹¹¹O derivovatelných funkcích

¹¹²Definice i důkazy jsou převzaty přímo ze zmiňovaného článku, který pro potřeby této práce přeložil vedoucí práce, za což mu tímto děkuji.



Obrázek 4.32: Graf Pompeiovy funkce.



Obrázek 4.33: Graf funkce inverzní k Pompeiově funkci.

Ukážeme, že funkce $\mathcal{P}$ má ve všech bodech intervalu $(0,1)$ derivaci a pro všechna $x \in (0,1)$ nastává rovnost $\mathcal{P}'(x) = \mathbf{p}(x)$, přičemž pokud řada (4.56) diverguje, značíme $\mathcal{P}'(x) = \infty$. Buď tedy dáno libovolné $x \in (0,1)$. Uvažujme diferenční podíl

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{P}(x+h) - \mathcal{P}(x)}{h} &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot (x+h-a_n)^{\frac{1}{3}} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot (x-a_n)^{\frac{1}{3}}}{h} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \frac{(x+h-a_n)^{\frac{1}{3}} - (x-a_n)^{\frac{1}{3}}}{h}. \end{aligned}$$

Druhá rovnost platí díky tomu, že obě odečítané sumy mají konečné součty (to plyne z definice funkce $\mathcal{P}$ a její korektnosti dokázané v tvrzení 70). Můžeme nyní provést úpravu, která vychází ze vzorce $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$. Pro všechna $h \neq 0$ (což nám nevadí, protože pro h stejně není diferenční podíl definován) tak dostáváme rovnost

$$\frac{\mathcal{P}(x+h) - \mathcal{P}(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(x+h-a_n)^{\frac{2}{3}} + (x+h-a_n)^{\frac{1}{3}}(x-a_n)^{\frac{1}{3}} + (x-a_n)^{\frac{2}{3}}}. \quad (4.57)$$

Rozlišíme tři případy pokrývající všechny možnosti:

- (a) řada (4.56) konverguje,
- (b) řada (4.56) diverguje a $x \notin \mathbb{Q}$,
- (c) řada (4.56) diverguje a $x \in \mathbb{Q}$.

1.(a) Řada (4.56) konverguje

Předpokládejme, že (4.57) konverguje. Chceme dokázat, že řada z rovnice (4.57) konverguje na $\mathbb{R}$ stejnoměrně vzhledem k proměnné h . Položíme-li

$$\alpha_n(h) = \left(\frac{x+h-a_n}{x-a_n} \right)^{\frac{1}{3}}$$

lze řadu z rovnice (4.57) přepsat do tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2(h) + \alpha_n(h) + 1} \cdot \frac{A_n}{(x-a_n)^{\frac{2}{3}}}. \quad (4.58)$$

Můžeme si všimnout, že polynom $y^2 + y + 1$, který je ve jmenovateli, má záporný diskriminant, a tedy kladné globální minimum ($\frac{3}{4}$ pro $y = -\frac{1}{2}$). Dostáváme tedy pro libovolné h (speciálně pro $h \in (-1,1)$) nerovnost

$$\frac{A_n}{(x+h-a_n)^{\frac{2}{3}} + (x+h-a_n)^{\frac{1}{3}}(x-a_n)^{\frac{1}{3}} + (x-a_n)^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{A_n}{(x-a_n)^{\frac{2}{3}}},$$

kde pravá strana nerovnosti už nezávisí na h . Požadovaná stejnoměrná konvergence tedy plyne z Weierstrassova kritéria a předpokladu části (a), že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(x-a_n)^{\frac{2}{3}}}$ pro ono dané číslo x konverguje.

Jsou tedy ověřeny předpoklady Mooreovy-Osgoodovy věty (věta 9 na straně 34), a tedy v následujícím výpočtu můžeme zaměnit pořadí limit.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{P}(x+h) - \mathcal{P}(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{(x+h-a_n)^{\frac{2}{3}} + (x+h-a_n)^{\frac{1}{3}}(x-a_n)^{\frac{1}{3}} + (x-a_n)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A_n}{(x+h-a_n)^{\frac{2}{3}} + (x+h-a_n)^{\frac{1}{3}}(x-a_n)^{\frac{1}{3}} + (x-a_n)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-a_n)^{\frac{1}{3}} - (x-a_n)^{\frac{1}{3}}}{h} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \left((x-a_n)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(x-a_n)^{\frac{2}{3}}} = \mathbf{p}(x)
\end{aligned}$$

1.(b) Řada (4.56) diverguje a $x \notin \mathbb{Q}$

Ukážeme, že $\mathcal{P}'(x) = \infty$. Zvolme libovolné $K > 0$. Protože sčítance v řadě (4.56) jsou kladné, víme, že existuje nějaké číslo $N \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\frac{1}{3} \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{(x-a_n)^{\frac{2}{3}}} \geq K + 1.$$

Uvažujme nyní funkci

$$\varphi(h) = \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{(x+h-a_n)^{\frac{2}{3}} + (x+h-a_n)^{\frac{1}{3}}(x-a_n)^{\frac{1}{3}} + (x-a_n)^{\frac{2}{3}}}.$$

Protože $x \notin \mathbb{Q}$, existuje $\eta = \min \{|x-a_1|, |x-a_2|, \dots, |\arg 1|\} > 0$ a funkce φ je spojitá pro $h \in (-\eta, \eta)$ (protože je na tomto intervalu součtem konečně mnoha spojitých funkcí). Všimneme-li si nyní, že

$$\varphi(0) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{(x-a_n)^{\frac{2}{3}}} \geq K + 1,$$

vyvodíme ze spojitosti existenci $\delta \in (0, \eta)$ takového, že

$$(\forall h \in (-\delta, \delta)) (\varphi(h) > K).$$

Vraťme se nyní k rovnici (4.57), můžeme si její pravou stranu vyjádřit ve tvaru (4.58), z něž je zřejmé, že všechny sčítance v nekonečné řadě jsou kladné (viz také zdůvodnění bezprostředně pod (4.58)). Vezmeme-li v úvahu nezápornost všech zmíněných sčítanců, je z uvedeného zřejmé, že pro $h \in (-\delta, \delta)$ je

$$\frac{\mathcal{P}(x+h) - \mathcal{P}(x)}{h} \geq \varphi(h) > K,$$

čímž jsme z definice (nevlastní) limity funkce dokázali, že

$$\mathcal{P}'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{P}(x+h) - \mathcal{P}(x)}{h} = \infty.$$

1.(c) Řada (4.56) diverguje a $x \in \mathbb{Q}$

Předpokládáme, že $x \in \mathbb{Q}$, takže $x = a_i$ pro jistý index i . Uvážíme-li opět, že všechny sčítance řady z pravé strany nerovnosti (4.57) jsou kladné (na svých definičních oborech), je zřejmé, že stačí, aby limita pro $h \rightarrow 0$ jediného sčítance byla nekonečná a už víme, že je nekonečná limita celého součtu. Pro $x = a_i$ nás tedy zajímá limita i -tého sčítance. Skutečně je

$$\lim_{h \rightarrow 0} A_i \frac{(x+h-a_i)^{\frac{1}{3}} - (x-a_i)^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} A_i \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \infty,$$

tedy i $\mathcal{P}'(x) = \infty$.

2. Vlastnosti derivace

Dokázali jsme, že pro všechna $x \in (0,1)$ je $\mathcal{P}'(x) = \mathbf{p}(x)$. Speciálně derivace ve všech těchto bodech existuje a je nekonečná přinejmenším v bodech množiny $(0,1) \cap \mathbb{Q}$. Nyní si všimneme, že derivace je zdola omezená — totiž evidentně pro všechna $x \in (0,1)$ je

$$\mathcal{P}'(x) = \mathbf{p}(x) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(x-a_n)^{\frac{2}{3}}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} A_n > 0 \quad (4.59)$$

To ale znamená, že funkce $\mathcal{P}^{-1} = G : I \rightarrow (0,1)$, která je inverzní k $\mathcal{P}$, má derivaci (ve všech bodech) omezenou shora, jak je vidět ze vzorce pro derivaci inverzní funkce:

$$G'(\mathcal{P}(x)) = \frac{1}{\mathcal{P}'(x)}.$$

Z téhož vzorce vidíme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $G'(\mathcal{P}(a_n)) = 0$ a není těžké si uvědomit, že $\{\mathcal{P}(a_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je hustá v $I = \mathcal{P}((0,1))$. Celkem tedy dostáváme, že funkce G je rostoucí (protože $\mathcal{P}$ je rostoucí) a diferencovatelná na I , G' je na I omezená (zdola nulou, shora podle nerovnosti (4.59)) a $\{y \in I \mid G'(y) = 0\}$ je v intervalu I hustá, neboť obsahuje hustou množinu $\{\mathcal{P}(a_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. $\square$

4.4 Nikde monotónní funkce mající všude derivaci

V sekci 4.2 jsme si ukázali několik funkcí, které nejsou na žádném intervalu monotónní. Tyto funkce ovšem neměly v žádném bodě derivaci. Existují ovšem i funkce, které sice mají derivaci ve všech bodech, ale nejsou na žádném intervalu monotónní. Takové funkce se někdy nazývají köpckeovské, protože právě německý matematik Alfred Köpcke byl prvním, kdo příklad takové funkce uvedl ve svém článku *Über Differentierbarkeit und Anschaulichkeit der stetigen Funktionen*¹³ — ačkoli nutno poznamenat, že v tomto jeho původním článku byla chyba, tu však o dva roky později opravil [131].

Definice 52 (Köpckeovská funkce). *O funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ řekneme, že je köpckeovská, pokud má ve všech bodech derivaci a zároveň není na žádném intervalu monotónní — tj. pro každý interval I existují body $x_1, x_2 \in I$ takové, že v bodě x_1 je funkce rostoucí, ale v bodě x_2 klesající.*

Konstrukce takovéto funkce je však příliš obtížná, takže si v této sekci neukážeme žádnou konkrétní funkci s uvedenou vlastností. Pomocí Baireovy věty o kategorii (věta 25 v podsekci 2.2.2) si ale dokážeme existenci takovýchto funkcí [132]. Pro čtenáře tedy tato sekce může být i ukázkou toho, že někdy můžeme dokázat existenci nějakého matematického objektu, aniž bychom zkonstruovali konkrétní příklad.

Abychom mohli použít Baireovu větu, musíme zkonstruovat nějaký úplný metrický prostor. Začneme prostorem všech omezených derivací se supremovou normou. K důkazu však budeme potřebovat dvě následující lemmata.

Lemma 73. *Nechť jsou pro všechna $n \in \mathbb{N}$ funkce $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ omezené a f_n konvergují stejnoměrně k f . Potom f je omezená.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je $0 < \varepsilon < 1$. Protože $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje stejnoměrně, najdeme takové n_0 , že pro všechna $n \geq n_0$ a $x \in \mathbb{R}$ je $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Zvolme nyní nějaké takové n . Protože f_n je omezená, existuje takové $M \in \langle 0, \infty \rangle$, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $|f_n(x)| \leq M$.

Nyní už můžeme odhadnout, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq \varepsilon + M < 1 + M,$$

z čehož plyne, že f je omezená. □

Lemma 74 (O stejnoměrné konvergenci derivací). *Nechť je (a, b) otevřený interval a $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost funkcí $F_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Nechť jsou dále splněny následující podmínky:*

- (a) *pro každé $n \in \mathbb{N}$ má F_n vlastní derivaci f_n na (a, b) ,*
- (b) *existuje bod $x_0 \in (a, b)$ takový, že posloupnost čísel $\{F_n(x_0)\}_{n=1}^\infty$ konverguje,*

¹³O diferencovatelnosti a názornosti spojitých funkcí

(c) posloupnost derivací $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně.

Potom existuje funkce F ($F' = f$) taková, že $F_n \xrightarrow{loc} F^{14}$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$.

Důkaz. Důkaz můžeme najít v [133], kapitola 12, věta 12.1.13 (strana 693) a poznámka 12.1.14 (strana 694). $\square$

Nyní už můžeme dokázat, že prostor všech omezených derivací se supremovou normou je úplný.

Tvrzení 75. *Mějme množinu omezených derivací*

$$D = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ je omezená a } (\exists F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) (\forall x \in \mathbb{R}) (F'(x) = f(x))\}$$

a supremovou metrikou

$$\varrho_{\infty}(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|.$$

Pak metrický prostor (D, ϱ_{∞}) je úplný.

Důkaz. Nejdříve dokážeme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Víme, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, tedy

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists k \in \mathbb{N}) (\forall m, n \geq k) (\forall x \in \mathbb{R}) (|f_n - f_m| < \varepsilon).$$

Je zřejmé, že posloupnost funkčních hodnot $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ je pro všechna $x \in \mathbb{R}$ cauchyovská, a tedy i konvergentní, tedy (protože $f_m(x) \in \mathbb{R}$) existuje limita $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = f(x)$, tedy posloupnost derivací konverguje bodově.

Mějme $\varepsilon > 0$ a $k \in \mathbb{N}$ z definice cauchyovské posloupnosti. Protože pro všechna $m, n \geq k$ a všechna $x \in \mathbb{R}$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, limitním přechodem pro $m \rightarrow \infty$ dostáváme $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Podle definice 18 tedy posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně.

Dále potřebujeme ověřit, že $f \in D$, tedy že je omezená a jedná se o derivaci. První vlastnost plyne z lemmatu 73 (protože pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je f_n omezená).

Druhá vlastnost plyne z lemmatu 74. Splnění podmínky (a) plyne z toho, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $f_n \in D$, splnění podmínky (c) jsme dokázali výše. Protože primitivní funkce lišící se o aditivní konstantu mají stejnou derivaci, můžeme definovat funkce F_n ($F'_n = f_n$), tak, aby pro všechna $n \in \mathbb{N}$ bylo například $F_n(0) = 0$. Potom v bodě 0 funkce F_n jistě konvergují, tedy je splněna i podmínka (b). $\square$

Ve skutečnosti však budeme potřebovat podprostor tohoto metrického prostoru, a sice prostor všech omezených derivací, které jsou nulové na husté množině (rovněž se supremovou normou).

¹⁴Konverguje lokálně stejnoměrně, tj. na každém uzavřeném omezeném intervalu konverguje stejnoměrně. Pro naše další úvahy ovšem tento výsledek nebude důležitý, zajímá nás pouze konvergence derivací.

Tvrzení 76. *Mějme množinu omezených derivací, které jsou nulové na husté množině*

$$D_0 = \{f \in D \mid \{x \mid f(x) = 0\} \text{ je hustá v } \mathbb{R}\}$$

a supremovou metrikou

$$\varrho_\infty(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|.$$

Pak metrický prostor (D_0, ϱ_∞) je úplný.

Důkaz. Protože $D_0 \subseteq D$ a podle tvrzení 75 je každá cauchyovská posloupnost $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ funkcí $f_i \in D_0$ konvergentní v supremové metrice a její limita leží v D . Stačí nám tedy dokázat, že $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = f \in D_0$.

Zvolme nějaké pevné $i \in \mathbb{N}$. Označme $Z_i = \{x \mid f_i(x) = 0\}$. Protože $f \in D_0$, je Z_i hustá v $\mathbb{R}$. Nyní budeme chtít dokázat, že Z_i je spočetným průnikem otevřených hustých množin¹⁵.

Vyjádríme si množinu Z_i trochu obšírněji. Označme F_i funkci takovou, že $F'_i = f_i$ (protože $f_i \in D$, víme, že taková funkce existuje). Z definice derivace víme, že

$$f_i(x) = F'_i(x) = 0 \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_i(x+h) - F_i(x)}{h} = 0.$$

Protože uvedená limita existuje, můžeme psát, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_i(x+h) - F_i(x)}{h} = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_i\left(x + \frac{1}{n}\right) - F_i(x)}{\frac{1}{n}},$$

což je podle definice limity ekvivalentní s vyjádřením

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) \left(\left| \frac{F_i\left(x + \frac{1}{n}\right) - F_i(x)}{\frac{1}{n}} \right| < \varepsilon \right),$$

tj.

$$(\forall l \in \mathbb{N}) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) \left(\left| \frac{F_i\left(x + \frac{1}{n}\right) - F_i(x)}{\frac{1}{n}} \right| < \frac{1}{l} \right).$$

Protože ale uvedená limita existuje, existuje i limita z libovolné vybrané posloupnosti a má stejnou hodnotu (tj. 0). Můžeme tedy ekvivalentně psát

$$(\forall k \in \mathbb{N}) (\forall N \in \mathbb{N}) (\exists n \geq N) \left(\left| \frac{F_i\left(x + \frac{1}{n}\right) - F_i(x)}{\frac{1}{n}} \right| < \frac{1}{k} \right).$$

Přepíšeme-li pak uvedený výrok pomocí množinového zápisu, dostáváme, že

$$f_i(x) = 0 \iff x \in \underbrace{\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} \left\{ x \mid \left| \frac{F_i\left(x + \frac{1}{n}\right) - F_i(x)}{\frac{1}{n}} \right| < \frac{1}{k} \right\}}_{M_{k,n}}.$$

¹⁵Neboli že je tzv. „ G_δ hustá“.

Interval $(-\infty, \frac{1}{k})$ je otevřená množina a $\varphi : x \mapsto \left| \frac{F_i(x + \frac{1}{n}) - F_i(x)}{\frac{1}{n}} \right|$ je spojitá funkce, takže podle tvrzení 17 je $M_{k,n}$ pro všechna $k, n \in \mathbb{N}$ otevřená množina. Podle tvrzení 14 je tedy $M_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_{k,n}$ otevřená množina.

Je zřejmé, že $Z_i = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k$. Protože $f_i \in D_0$, je Z_i hustá v $\mathbb{R}$; protože ale je pro všechna k množina $M_k \supseteq Z_i$, jsou i M_k husté množiny. Tedy množina Z_i je spočetným průnikem otevřených hustých množin.

Nyní označme $Z = \bigcap_{i=1}^{\infty} Z_i$. Z předchozích úvah víme, že Z_i je pro všechna $i \in \mathbb{N}$ spočetným průnikem otevřených hustých množin — tedy i Z je spočetným průnikem otevřených hustých množin, a tedy podle Baireovy věty je Z hustá v $\mathbb{R}$.

Dále je zřejmé, že pokud pro nějaké $x \in \mathbb{R}$ a všechna $i \in \mathbb{N}$ je $f_i(x) = 0$, je i $f(x) = 0$. Tedy $\{x \mid f(x) = 0\} \supseteq Z$. Ale Z je hustá v $\mathbb{R}$, tedy i $\{x \mid f(x) = 0\}$ je hustá v $\mathbb{R}$, a tedy $f \in D_0$. $\square$

Poznámka. Metrický prostor (D_0, ϱ_∞) není triviální (tj. neobsahuje pouze funkci $f(x) = 0$). To víme proto, že v podsekcí 4.3.2 jsme zkonstruovali funkci $\mathcal{P}^{-1}$ (označme si ji pro tento odstavec p), která má omezenou derivaci, která je na husté množině nulová, tj. $p' \in D_0$, ale přesto není funkce p' nulová ve všech bodech. To, že je funkce p definována pouze na omezeném uzavřeném intervalu, nám vůbec nevadí — můžeme totiž funkci p' prodloužit tak, že „nalepíme“ její kopie za sebe tak, aby funkční hodnoty jedné a druhé kopie byly v krajních bodech intervalů stejné.

Naším cílem tedy bude ukázat, že funkce, které nejsou köpckeovské, tvoří množinu 1. kategorie v prostoru (D_0, ϱ_∞) — z lemmatu 26 (uveďeno za Baireovou větou na straně 43) nám pak vyplyne existence köpckeovských funkcí. Než však přistoupíme k samotnému důkazu, dokážeme si následující lemma, které budeme k následnému důkazu potřebovat.

Lemma 77. *Nechť jsou $f, g \in D_0$. Potom $f + g \in D_0$.*

Důkaz. Označme $Z_f = \{x \mid f(x) = 0\}$ a $Z_g = \{x \mid g(x) = 0\}$. V důkazu tvrzení 76 jsme si ukázali, že Z_f a Z_g jsou průnikem spočetně mnoha otevřených hustých množin. Potom i množina $Z = Z_f \cap Z_g$ je průnikem spočetně mnoha otevřených hustých množin — tedy podle Baireovy věty je Z hustá v $\mathbb{R}$.

Dále si uvědomme, že pokud pro nějaký bod $x_0 \in \mathbb{R}$ je $f(x_0) = 0$ a $g(x_0) = 0$, je i $f(x_0) + g(x_0) = 0$. To znamená, že

$$Z_{f+g} = \{x \mid f(x) + g(x) = 0\} \supseteq Z_f \cap Z_g = Z.$$

Ale Z je hustá v $\mathbb{R}$, takže Z_{f+g} je také hustá v $\mathbb{R}$, což znamená, že $f + g \in D_0$. $\square$

Nyní už můžeme dokázat hlavní větu, z níž nám (po použití lemmatu 26) vyplyne existence köpckeovských funkcí.

Věta 78. *Množina*

$$E = \{f \in D_0 \mid \text{existuje interval } I \text{ takový, že} \\ (\forall x \in I) (f(x) \geq 0) \text{ nebo } (\forall x \in I) (f(x) \leq 0)\} \quad (4.60)$$

je množinou 1. kategorie v (D_0, ϱ_∞) .

Důkaz. Chceme dokázat, že E je množina 1. kategorie, tj. že se jedná o spočetné sjednocení řídkých množin. Musíme tedy takové řídké množiny najít.

Protože množina $\mathbb{Q}$ je spočetná, lze nalézt takovou posloupnost $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$, že I_n jsou všechny otevřené intervaly s racionálními mezemi (tj. $I_n = (q_1, q_2)$, kde $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$). Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme množiny E_n a F_n :

$$E_n = \{f \in D_0 \mid (\forall x \in I_n) (f(x) \geq 0)\},$$

$$F_n = \{f \in D_0 \mid (\forall x \in I_n) (f(x) \leq 0)\}.$$

Z definice množiny E je pak zřejmé, že

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cup F_n),$$

takže nám stačí dokázat, že množiny E_n a F_n jsou řídké. Důkaz provedeme pouze pro množinu E_n , důkaz pro množinu F_n je analogický.

Zvolme nyní nějaké pevné $n \in \mathbb{N}$. K důkazu, že množina E_n je řídká, využijeme tvrzení 20. Musíme tedy dokázat, že množina E_n je uzavřená a neobsahuje žádnou otevřenou kouli.

Uzavřenost množiny E_n dokážeme sporem pomocí tvrzení 16. Pro spor předpokládejme, že pro nějakou posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f \notin E_n$. To znamená, že $(\exists x_0 \in I_n) (f(x_0) < 0)$. Podle definice bodové limity funkcí ale

$$(\forall \varepsilon \in (0, |f(x_0)|)) (\exists k_0 \in \mathbb{N}) (\forall k > k_0) (|f_k(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon),$$

tedy $f_k(x_0) < 0$, což je spor s tím, že $f_k \in E_n$.

Že množina E_n neobsahuje žádnou otevřenou kouli, dokážeme tak, že vezmeme libovolnou funkci $f \in D_0$ a libovolné $\varepsilon > 0$ a ukážeme, že v kouli $B(f, \varepsilon)$ existuje funkce h taková, že $h \notin E_n$ — a to tak, že tuto funkci sestrojíme.

Protože $f \in D_0$, existuje takové $x_0 \in I_n$, že $f(x_0) = 0$. Jak jsme si řekli v poznámce za tvrzením 76, existuje funkce $\gamma \in D_0$ taková, že

$$(\exists \mu > 0) \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |\gamma(x)| < \mu \right)$$

a

$$(\exists \xi \in \mathbb{R}) (\gamma(\xi) > 0).$$

Můžeme tedy definovat funkci g tak, že

$$g(x) = -\frac{\varepsilon}{\mu} \cdot \gamma(x - x_0 + \xi).$$

Jistě $g \in D_0$, protože při přenásobení reálným číslem se nezmění nulovost derivace v příslušných bodech, ani omezenost (celá funkce bude jen odhadnuta větší nebo menší konstantou). Pak bude $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| < \varepsilon$ a $g(x_0) = -\frac{\varepsilon}{\mu} \cdot \gamma(\xi) < 0$.

Nyní položíme $h(x) = f(x) + g(x)$. Podle lemmatu 77 je $h \in D_0$. Jednoduše spočítáme, že

$$\varrho_{\infty}(f, h) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - h(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| < \varepsilon,$$

takže $h \in B(f, \varepsilon)$, ale $h(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = g(x_0) < 0$, takže $h \notin E_n$. $\square$

5. Podivnosti s integrálem

Co se týče integrálu, budeme se zde věnovat výhradně Riemannovu integrálu, který je často vykládán i ve výukových materiálech. Konkrétně si představíme funkce, které, až jsou spojité na husté množině, přesto mají Riemannův integrál. Zároveň si ukážeme nutnou a postačující podmínku existence Riemannova integrálu a na jejím základě zkonstruujeme funkci, která má ve všech bodech omezenou derivaci, ale tato derivace není riemannovsky integrovatelná.

5.1 Riemannovsky integrovatelné funkce nespojité na husté množině

Název této kapitoly může být poněkud matoucí a zavádějící — na tom, zda je množina bodů nespojitosti hustá či ne, v souvislosti s existencí Riemannova integrálu totiž vůbec nezáleží. Ve skutečnosti platí věta, která dává do souvislosti existenci Riemannova integrálu a míru množiny bodů nespojitosti.

Věta 79. *Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Označme N množinu všech bodů, v nichž je funkce f nespojitá. Potom Riemannův integrál funkce f existuje právě tehdy, když $\lambda(N) = 0$.*

Důkaz. Důkaz této věty můžeme nalézt v knize Vojtěcha Jarníka *Integrální počet II* [134] (pomocná věta v Kapitole XI, §2), kde ji však Jarník formuluje a dokazuje poněkud obecněji, a to pro funkce více proměnných definované na obecném intervalu. Věta a důkaz, které v této práci uvádíme, jsou tedy pouze zjednodušením pro funkce jedné proměnné na intervalu $\langle 0,1 \rangle$, pro naše potřeby ovšem plně postačí.

Dokážeme pouze implikaci „zleva doprava“, kterou budeme v práci dále používat, konkrétně v podsekcí 5.2.1.

1. *Riemannův integrál existuje $\implies$ míra množiny bodů nespojitosti je nulová*
Implikaci dokážeme pomocí obměněné implikace.

Nechť $\lambda(N) \neq 0$. Potom z definice míry je $\lambda(N) > 0$.

Označme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$N_n = \left\{ x \in \langle 0,1 \rangle \mid (\forall \varepsilon > 0) (\exists y \in \langle 0,1 \rangle) \left(|x - y| < \varepsilon \wedge |f(x) - f(y)| \geq \frac{1}{n} \right) \right\}.$$

Vzpomeňme si nyní na definici spojitosti, přesněji řečeno na její negaci. Řekneme, že funkce je v bodě x nespojitá, pokud

$$(\exists \eta > 0) (\forall \varepsilon > 0) (\exists y \in \langle 0,1 \rangle) (|x - y| < \varepsilon \wedge |f(x) - f(y)| \geq \eta).$$

Vidíme, že nahradíme-li písmeno η zlomkem $\frac{1}{n}$, dostáváme pro zvolené n tentýž výrok, jaký je v definici N_n , a tedy

$$N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n.$$

Protože $\lambda(N) > 0$, existuje nějaké $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\lambda(N_n) > 0$. Pro toto n označme $c = \lambda(N_n)$.

Vezměme nyní libovolné dělení $0 = x_1 < \dots < x_k = 1$. Označme $L_1, \dots, L_p$ všechny intervaly $\langle x_j, x_{j+1} \rangle$ takové, že pro všechna $i \in \{1, \dots, p\}$ je $N_n \cap L_i \neq \emptyset$. Je tedy zřejmé, že

$$N_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i,$$

a tedy podle monotonie Lebesgueovy míry (tvrzení 29 na straně 44)

$$c \leq \sum_{i=1}^p \lambda(L_i). \quad (5.1)$$

Protože každý otevřený interval L_i obsahuje nějaký bod množiny N_n je podle definice množiny N_n

$$\sup_{x \in L_i} \{f(x)\} - \inf_{x \in L_i} \{f(x)\} \geq \frac{1}{n}. \quad (5.2)$$

Z definice horních a dolních součtů dále vidíme, že

$$\begin{aligned} S(D, f) - s(D, f) &= \sum_{i=1}^{k-1} \left(\sup_{x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle} \{f(x)\} - \inf_{x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle} \{f(x)\} \right) \cdot (x_{i+1} - x_i) \\ &\geq \sum_{i=1}^p \left(\sup_{x \in L_i} \{f(x)\} - \inf_{x \in L_i} \{f(x)\} \right) \cdot \lambda(L_i) \\ &\stackrel{(5.2)}{\geq} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p \lambda(L_i) \\ &\stackrel{(5.1)}{\geq} \frac{c}{n}. \end{aligned}$$

Uvedená nerovnost platí pro libovolné dělení D . Proto i

$$\overline{\int_0^1 f(x) dx} - \underline{\int_0^1 f(x) dx} = \inf_D S(D, f) - \sup_D s(D, f) \geq \frac{c}{n} > 0,$$

a tedy

$$\overline{\int_0^1 f(x) dx} \neq \underline{\int_0^1 f(x) dx},$$

což znamená, že Riemannův integrál $\int_0^1 f(x) dx$ neexistuje. $\square$

I přes to, že jsme právě zjistili, že funkce v této kapitole nejsou v základu ničím podivným, stále může být zajímavé ukázat si funkce, které jsou na hustých množinách nespojité, a přesto mají Riemannův integrál. A ačkoli bychom v následujících příkladech mohli k důkazu, že jednotlivé funkce mají Riemannův integrál, bez problému využít právě uvedenou větu 79, ukážeme si u jednotlivých funkcí jiné, jednodušší způsoby.

5.1.1 Thomaeova funkce (1875)

Tuto funkci prezentoval roku 1875 německý matematik Johannes Thomae ve své knize *Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale*¹ [135].

Definice 53 (Thomaeova funkce). *Nechť $x \in \langle 0,1 \rangle$. Pro $x \in (0,1)$ definujeme funkci $\mathcal{T}$ předpisem*

$$\mathcal{T}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{I}, \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \wedge p, q \text{ nesoudělná celá čísla}, \end{cases} \quad (5.3)$$

Pro $x \in \{0;1\}$ definujeme

$$\mathcal{T}(0) = \mathcal{T}(1) = 0.$$

Poznámka. Na některých místech najdeme trochu jinou definici, a sice $\mathcal{T}(0) = \mathcal{T}(1) = 1$, která odpovídá definici pomocí předpisu (5.3) pro všechna $x \in \langle 0,1 \rangle$. Dále budeme pracovat s původní Thomaeovou definicí, ale snadno bychom upravili tvrzení následujících vět i pro tuto alternativní definici.

Začneme důkazem lemmatu, které je původně součástí Thomaeova důkazu věty 83. My ho ale vyčleníme, protože s jeho pomocí dokážeme i větu 82.

Lemma 80. *Pro libovolné $Q \in \mathbb{N}$, je počet bodů x , pro které je $\mathcal{T}(x) \geq \frac{1}{Q}$, nejvýše*

$$\frac{(Q-1) \cdot Q}{2}.$$

Důkaz. Je-li dáno číslo $Q \in \mathbb{N}$, je podle definice 53 $\mathcal{T}(x) \geq \frac{1}{Q}$ jen pro tyto konkrétní body:

$$\frac{1}{2}; \quad \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \quad \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}; \quad \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}; \quad \dots; \quad \frac{1}{Q}, \frac{2}{Q}, \dots, \frac{Q-1}{Q}. \quad (5.4)$$

Uvážíme-li množinu M obsahující právě tyto body, pak

$$|M| \leq 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (Q-1) = \frac{(Q-1) \cdot Q}{2}.$$

□

Věta 81. *Funkce $\mathcal{T}$ je nespojitá ve všech racionálních bodech intervalu $(0,1)$.*

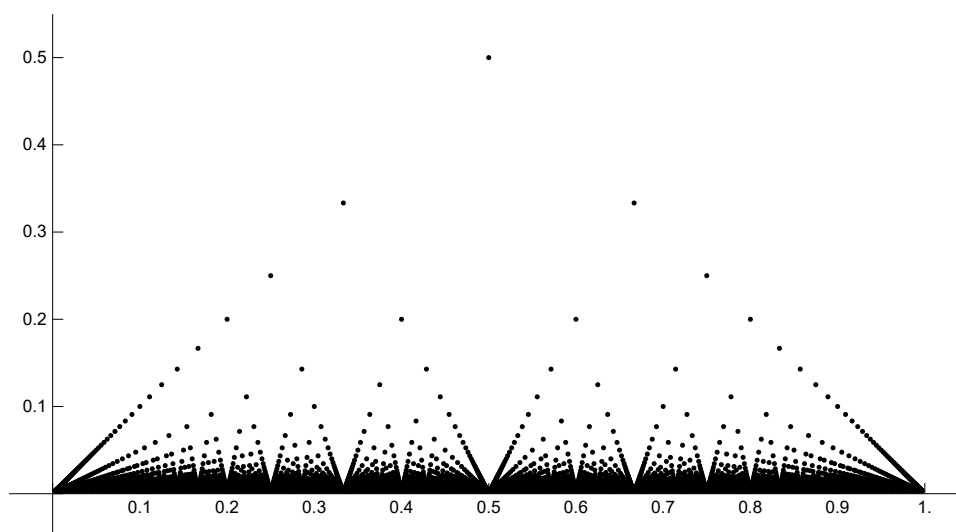
Důkaz. Každé $x \in \mathbb{Q}$ takové, že $0 < x < 1$, lze napsat v podobě $\frac{p}{q}$, kde p a q jsou nesoudělná přirozená čísla.

Stačí volit $\epsilon = \frac{1}{2q}$. Pro jakékoli δ bude existovat x' takové, že $|x - x'| < \delta$ a současně $x' \in \mathbb{I}$. Ale podle definice 53 je $\mathcal{T}(x') = 0$ a $\mathcal{T}(x) = \frac{1}{q}$, takže

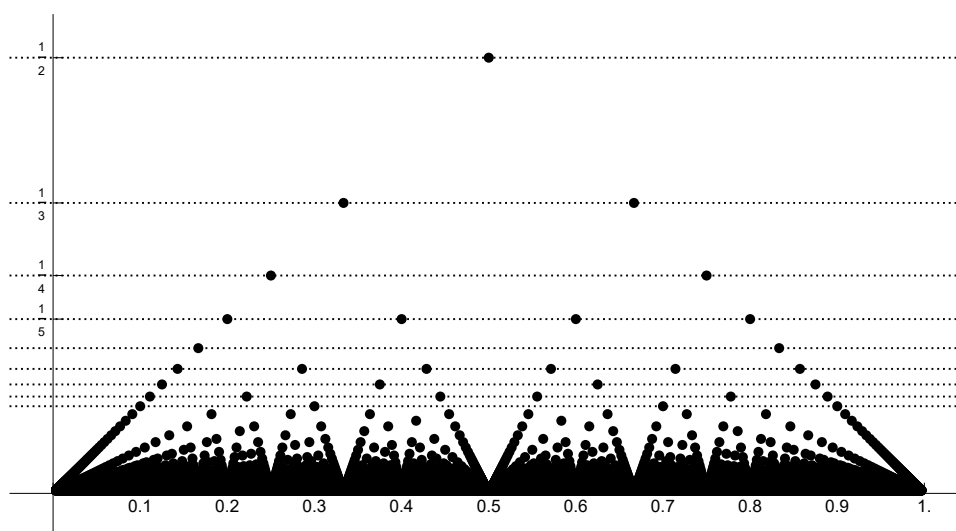
$$|\mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(x')| = \frac{1}{q} > \frac{1}{2q} = \epsilon.$$

□

¹Úvod do teorie určitých integrálů



Obrázek 5.1: Thomaeova funkce.



Obrázek 5.2: Thomaeova funkce, ukázka vrstev grafu.

Věta 82. Funkce $\mathcal{T}$ je spojitá ve všech iracionálních bodech intervalu $(0,1)$.

Důkaz. Vzhledem k tomu, že pro $x \in \mathbb{I}$ je $\mathcal{T}(x) = 0$ a pro $x' = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (p, q nesoudělná celá čísla) je $\mathcal{T}(x') = \frac{1}{q}$, musíme dokázat, že pro pevně zvolené $x_0 \in \mathbb{I}$ existuje pro libovolné $\varepsilon > 0$ takové $\delta > 0$, že pro všechna $x' \in \mathbb{Q}$ z intervalu $(x - \delta, x + \delta)$ jsou $\mathcal{T}(x')$ menší než ε .

Vezměme takové $\varepsilon_1 = \frac{1}{Q} < \varepsilon$, kde $Q \in \mathbb{N}$. Podle lemmatu 80 existuje jen konečná množina $M \subseteq \mathbb{Q}$ bodů m , ve kterých je $\mathcal{T}(m) \geq \varepsilon_1$. Najdeme tedy takové $m_0 \in M$, jehož vzdálenost od zadaného $x \in \mathbb{I}$ je minimální (to znamená, že ve vzdálenosti menší než $|x - m_0|$ není žádný bod množiny M , a tedy hodnota funkce $\mathcal{T}$ v tomto intervalu je menší než ε_1). Tato vzdálenost, tedy $|x - m_0|$ je hledané δ . $\square$

Věta 83. Funkce $\mathcal{T}$ je riemannovsky integrovatelná a

$$\int_0^1 \mathcal{T}(x) dx = 0.$$

Důkaz. Má-li být $\int_0^1 \mathcal{T}(x) dx = 0$, musí být

$$\int_0^1 \mathcal{T}(x) dx = 0 = \overline{\int_0^1 \mathcal{T}(x) dx}. \quad (5.5)$$

První rovnost v (5.5) je zřejmá — množina $\mathbb{I}$ je hustá, tzn., že při jakémkoli dělení budeme mít v každém intervalu iracionální číslo, a tedy jakýkoli dolní součet bude roven nule, tedy i dolní Riemannův integrál bude nulový.

Pro důkaz druhé rovnosti v (5.5) je třeba si uvědomit, že podle lemmatu 80 existuje pro libovolně zvolené číslo $Q \in \mathbb{N}$, jen konečný počet bodů x takových, že $\mathcal{T}(x) \geq \frac{1}{Q}$.

Zvolíme tedy jako dělení D_Q posloupnost čísel z (5.4). Protože jsou intervaly dělení uzavřené, tj. obsahují své krajní body (v nichž je hodnota větší nebo rovna $\frac{1}{Q}$), musíme toto dělení ještě zjemnit, tj. přidat body blízko hraničním bodům, aby zbytek intervalu už „propadl dolů“. Protože je ale dělicích bodů konečně mnoho, mohou být tyto přidané intervaly libovolně malé. Pro takto upravené dělení D'_Q tedy dostáváme

$$S(\mathcal{T}, D'_Q) < \frac{1}{Q}.$$

Budeme-li zvětšovat Q , bude klesat hodnota horního součtu $S(\mathcal{T}, D'_Q)$, a to pod libovolné kladné reálné číslo. To znamená, že

$$\inf \{S(\mathcal{T}, D'_Q) : Q \in \mathbb{N}\} = 0,$$

z čehož plyne druhá rovnost v (5.5). $\square$

Modifikovaná Thomaeova funkce

Vraťme se na chvíli k myšlenkám z kapitoly o derivacích. Thomaeova funkce je sice spojitá ve všech iracionálních bodech intervalu $(0,1)$, ale v žádném bodě nemá derivaci. Inspirováni modifikacemi Dirichletovy funkce bychom mohli požadovat, aby existovala modifikace Thomaeovy funkce, která bude v iracionálních bodech nejen spojitá, ale i diferencovatelná. Taková modifikace však neexistuje, jak nám říká následující věta [136].

Věta 84. *Nechť je funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že pro $x \in \mathbb{I}$ je $f(x) = 0$ a pro $x \in \mathbb{Q}$ je $f(x) > 0$.*

Pak existuje nespočetná množina hustá v $\mathbb{R}$, na které funkce f nemá derivaci.

Důkaz. Důkaz provedeme tak, že najdeme množinu takových bodů, v nichž funkce f nemá derivaci a ukážeme, že je nespočetná a hustá v $\mathbb{R}$.

Nechť $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost všech racionálních čísel. Definujeme rekurzivně konvergentní posloupnost racionálních čísel $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Nechť tedy $x_1 \in \mathbb{Q}$. Najdeme uzavřený interval I_1 takový, že pro všechna $x \in I_1$ je

$$|x - x_1| \leq f(x_1).$$

Zbytek posloupnosti budeme definovat rekurzivně, a to pomocí následujících pravidel.

Mějme definovány bod x_n a uzavřený interval I_n . Bod x_{n+1} a uzavřený interval I_{n+1} definujeme tak, aby platilo:

1. $I_{n+1} \subseteq I_n$,
2. délka intervalu I_{n+1} je menší než $\frac{1}{n}$,
3. $x_{n+1} \in I_{n+1} \cap \mathbb{Q}$ a pro všechna $x \in I_{n+1}$

$$|x - x_{n+1}| \leq f(x_{n+1}),$$

4. pro všechna $i \in \{1; \dots; n\}$ je $q_i \notin I_{n+1}$.

Posloupnost $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy posloupnost do sebe vnořených (podle 1) uzavřených intervalů, jejichž délka konverguje k nule (podle 2), takže podle Cantorova principu vnořených intervalů je

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\},$$

přičemž jistě také

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_i = a.$$

Rovněž víme (podle 4), že $a \notin \mathbb{Q}$, tj. $a \in \mathbb{I}$.

Co se týče derivace v bodě a , podle aproximace iracionálními body by musela být rovna nule. Ovšem (podle 3)

$$\frac{|f(x_i) - f(a)|}{|x_i - a|} = \frac{f(x_i)}{|x_i - a|} \geq 1.$$

V bodě a tedy neexistuje derivace.

Protože jsme na začátku volili interval I_1 libovolně a $a \in I_1$, je zřejmé, že množina A bodů a je hustá v $\mathbb{R}$.

Dále budeme chtít dokázat, že množina A je nespočetná. Pro spor předpokládejme, že je spočetná a vezmeme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ všech bodů z A .

Nyní zopakujme algoritmus uvedený výše s tím rozdílem, že místo posloupnosti $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ vezmeme právě posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (změní se pouze podmínka 4). Najdeme tedy nějaký bod a' , ve kterém funkce f nemá derivaci, a stejně jako předtím jsme dokázali, že $a \notin \mathbb{Q}$, vidíme nyní, že $a' \notin A$.

Z toho plyne, že množina A nemůže být spočetná. $\square$

Můžeme ovšem sestavit funkci, která bude nespojitá ve všech racionálních bodech, spojitá ve všech iracionálních bodech a zároveň bude mít derivaci na libovolné spočetné podmnožině iracionálních čísel, kterou si zvolíme [136].

Takovou funkci zkonstruujeme poměrně snadno. Mějme danou množinu

$$A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{I}.$$

Zkonstruujeme nejdříve pomocné funkce. Pro každé $i \in \mathbb{N}$ definujeme funkci

$$g_i(n) = \min \left\{ \left| \frac{m}{n} - a_i \right| \mid 0 < m < n \wedge m \text{ a } n \text{ jsou nesoudělná} \right\}.$$

Ta pro dané n vybírá vzdálenost od a_i k nejbližšímu číslu z množiny čísel $\left\{ \frac{1}{n}; \dots; \frac{n-1}{n} \right\}$ — ta je konečná, takže minimum existuje.

S pomocí funkce g_i následně definujeme funkci

$$g(n) = \min_{i \leq n} g_i(n),$$

která opět vybírá minimum z konečné množiny (tudíž toto minimum existuje).

Nyní už můžeme k dané množině A definovat funkci $\mathcal{T}_{a_i}$ pro všechna $x \in \langle 0, 1 \rangle$

$$\mathcal{T}_{a_i}(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{I}, \\ (g(n))^2 & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \wedge m \text{ a } n \text{ jsou nesoudělná}, \\ 1 & x = 0 \vee x = 1. \end{cases}$$

Příklad grafu takové funkce pro $a_i = \sin(i)$ můžeme vidět na obrázku 5.3.

Nyní už jen zbývá dokázat následující jednoduchou větu.

Věta 85. *Funkce $\mathcal{T}_{a_i}$ má derivaci ve všech bodech zvolené množiny*

$$A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{I}.$$

Důkaz. Zvolme pevně nějaké $i \in \mathbb{N}$. Pro všechna m a n nesoudělná taková, že $n \geq i$ a $0 < m < n$ je

$$\frac{\left| \mathcal{T}_{a_i}\left(\frac{m}{n}\right) - \mathcal{T}_{a_i}(a_i) \right|}{\left| \frac{m}{n} - a_i \right|} = \frac{\mathcal{T}_{a_i}\left(\frac{m}{n}\right)}{\left| \frac{m}{n} - a_i \right|} \leq \frac{(g(n))^2}{g_i(n)} \leq \frac{(g_i(n))^2}{g_i(n)} = g_i(n),$$

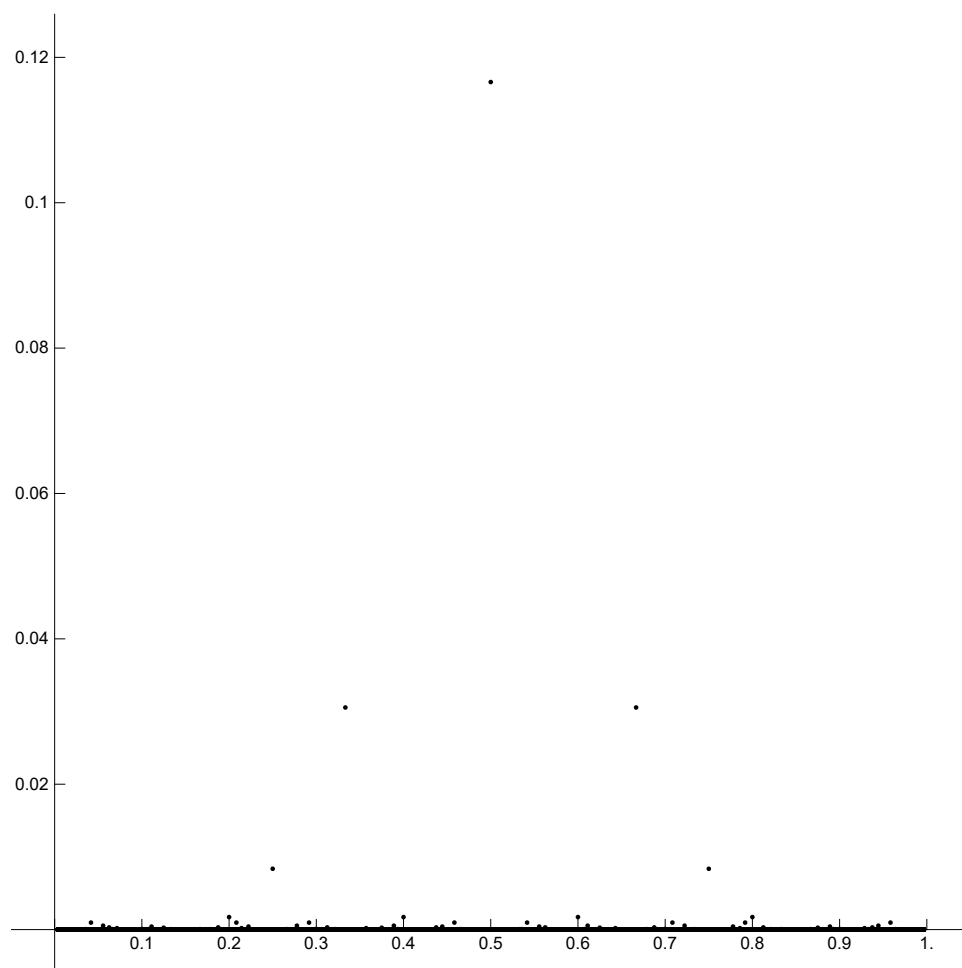
kde první rovnost plyne z toho, že $a_i \in \mathbb{I}$, a následné dvě nerovnosti z definice funkcí g_i a g .

Zvětšíme-li n , „zhoustne“ množina čísel $\frac{m}{n}$, k nimž měříme vzdálenost od a_i a minimum z těchto vzdáleností od tohoto daného a_i se tedy bude zmenšovat, takže

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_i(n) = 0.$$

Z toho už je jasné, že derivace v bodě a_i je nulová, a tudíž existuje. $\square$

Poznámka. Povšimněme si, že věta neříká nic o tom, co se děje mimo množinu A . Mimo tuto množinu také mohou existovat body, v nichž má funkce $\mathcal{T}_{a_i}$ derivaci, ovšem z věty 84 víme, že to nemůžou být všechny iracionální body.



Obrázek 5.3: Graf modifikované Thomaeovy funkce pro $a_i = \sin(i)$.

5.1.2 Monotónní funkce nespojitě na husté množině

Funkci, která je riemannovsky integrovatelná, ačkoli je nespojitá na husté množině bodů, můžeme získat ještě dalším zajímavým způsobem.

Víme, že platí následující věta.

Věta 86. *Je-li funkce f monotónní v intervalu $\langle a, b \rangle$, má funkce f Riemannův integrál od a do b .*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že f je neklesající (jinak můžeme vzít funkci $-f$). Zvolme nějaké dělení $D = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$. Protože je funkce f neklesající, je pro všechna $j \in \{1; \dots; n\}$

$$f(x_j) - f(x_{j-1}) \geq 0.$$

Můžeme tedy jednoduše spočítat

$$\begin{aligned} S(f, D) - s(f, D) &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \nu(D) \cdot \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \nu(D) \cdot (f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Navíc pro každé $\varepsilon > 0$ lze jistě volit D takové, že $\nu(D) \cdot (f(b) - f(a)) < \varepsilon$. Protože

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} f(x) \, dx &\leq S(f; D) \\ \underline{\int_a^b} f(x) \, dx &\geq s(f; D), \end{aligned}$$

je jistě

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x) \, dx - \underline{\int_a^b} f(x) \, dx \leq S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Protože toto platí pro každé $\varepsilon > 0$, je

$$\overline{\int_a^b} f(x) \, dx = \underline{\int_a^b} f(x) \, dx,$$

a tedy Riemannův integrál existuje. □

To znamená, že pokud se nám podaří vytvořit funkci, která je sice nespojitá na husté množině, ale monotónní, bude automaticky riemannovsky integrovatelná.

Touto funkcí bude například funkce následujícího typu.

Definice 54. *Pro každou dvojici čísel $p, q \in \mathbb{N}$ definujeme funkci*

$$f_{p,q}(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{p}{q}, \\ \frac{1}{q}, & x \geq \frac{p}{q}. \end{cases}$$

Nechť je posloupnost $\{a_q\}_{q=1}^\infty$ taková, že $(\forall q \in \mathbb{N}) (a_q > 0)$ a řada $\sum_{q=1}^\infty a_q$ konverguje.

Pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$ potom definujeme pro $x \in \mathbb{R}$ funkci $\mathfrak{m}$ předpisem

$$\mathfrak{m}(x) = \sum_{q=2}^\infty \left(a_q \sum_{p=1}^{q-1} f_{p,q}(x) \right). \quad (5.6)$$

Jak vypadá funkce $f_{p,q}$, si můžeme představit pomocí jejího grafu na obrázku 5.6 — funkce je konstantní nula na intervalu $(-\infty, \frac{p}{q})$, v bodě $\frac{p}{q}$ skokově naroste na hodnotu $\frac{1}{q}$ a na intervalu $(\frac{p}{q}, \infty)$ je opět konstantní (s hodnotou $\frac{1}{q}$).

Tyto funkce budeme následně sčítat; nejdříve pro konkrétní q přes všechna p mezi 1 a $q-1$ — taková funkce bude nespojitá ve všech racionálních číslech se jmenovatelem q — a následně přes všechna q , čímž se budou nespojitosti postupně nasčítávat (později si o tom povíme podrobněji). Toto postupné nasčítávání můžeme vidět na obrázku 5.7.

Výsledné grafy pro dvě různé posloupnosti $\{a_q\}_{q=1}^\infty$ můžeme vidět na obrázcích 5.4 ($a_q = \frac{1}{2^q}$) a 5.5 ($a_q = \frac{1}{q^2}$).

Můžeme si položit otázku, zda je funkce definována korektně, tj. zda suma (5.6) konverguje.

Uvědomme si, že pro všechna $x \in \langle 0,1 \rangle$ je

$$0 \leq f_{p,q}(x) \leq \frac{1}{q}.$$

Z toho je jasné, že

$$0 \leq \sum_{p=1}^{q-1} f_{p,q}(x) \leq \overbrace{\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}}^{q-1} = (q-1) \frac{1}{q} < 1.$$

Můžeme tedy říct, že pro vnitřní funkci φ_q definovanou předpisem

$$\varphi_q(x) = a_q \sum_{p=1}^{q-1} f_{p,q}(x) \tag{5.7}$$

platí

$$0 \leq \varphi_p(x) \leq a_n$$

a protože víme, že řada $\sum_{q=1}^\infty a_q$ konverguje, jsou splněny předpoklady Weierstrassova kritéria a řada (5.6) konverguje — a to dokonce stejnoměrně.

Nyní si podrobněji probereme požadované vlastnosti naší funkce.

Tvrzení 87. *Funkce m je neklesající na $\langle 0,1 \rangle$.*

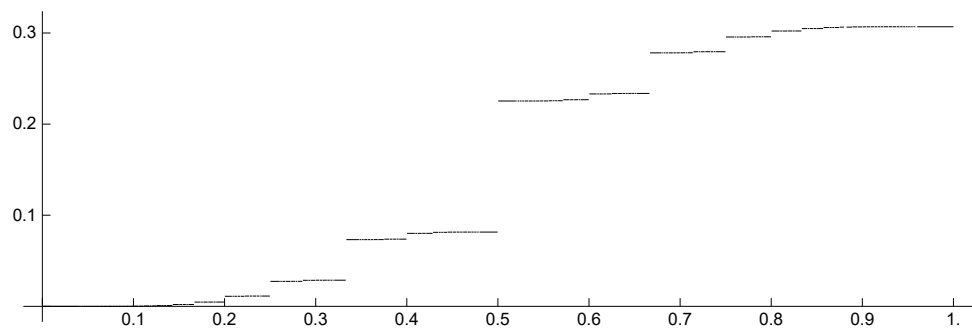
Důkaz. Je zřejmé, že funkce $f_{p,q}$ jsou neklesající. Jejich součet je proto také neklesající, a protože pro konkrétní q je a_q kladnou konstantou, je funkce φ_q (definovaná pomocí rovnice (5.7)) jen konstantním kladným násobkem neklesající funkce, a je tedy rovněž neklesající.

Funkce m je tedy součtem neklesajících funkcí — je tedy neklesající. □

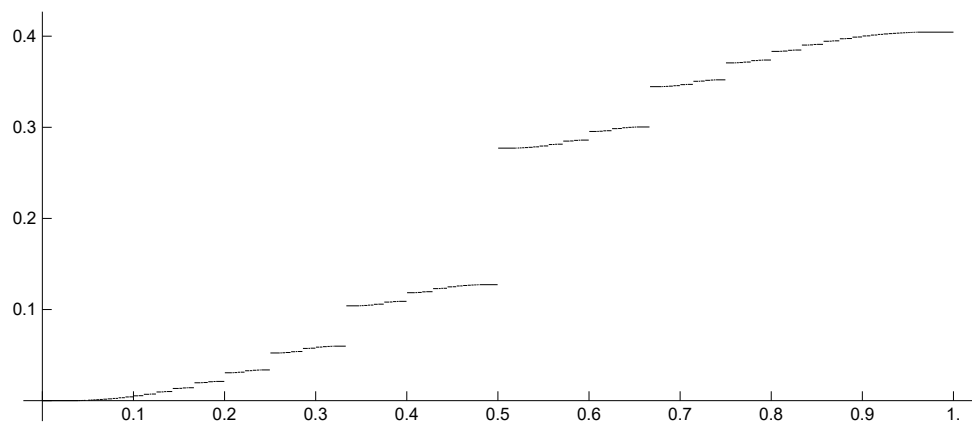
Věta 88. *Funkce m má na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ Riemannův integrál.*

Důkaz. Podle tvrzení 87 je funkce m neklesající, tj. monotónní. To znamená, že podle věty 86 má Riemannův integrál. □

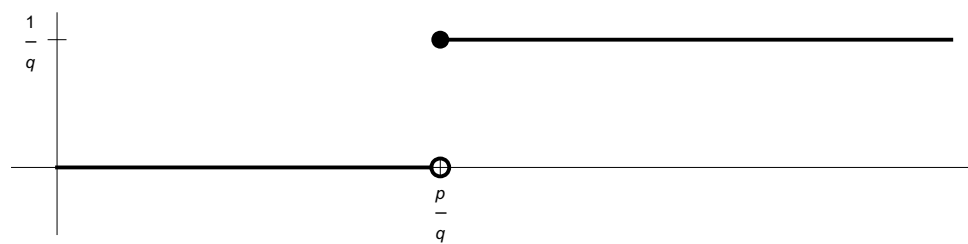
Věta 89. *Funkce m je nespojitá v bodech $x \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$.*



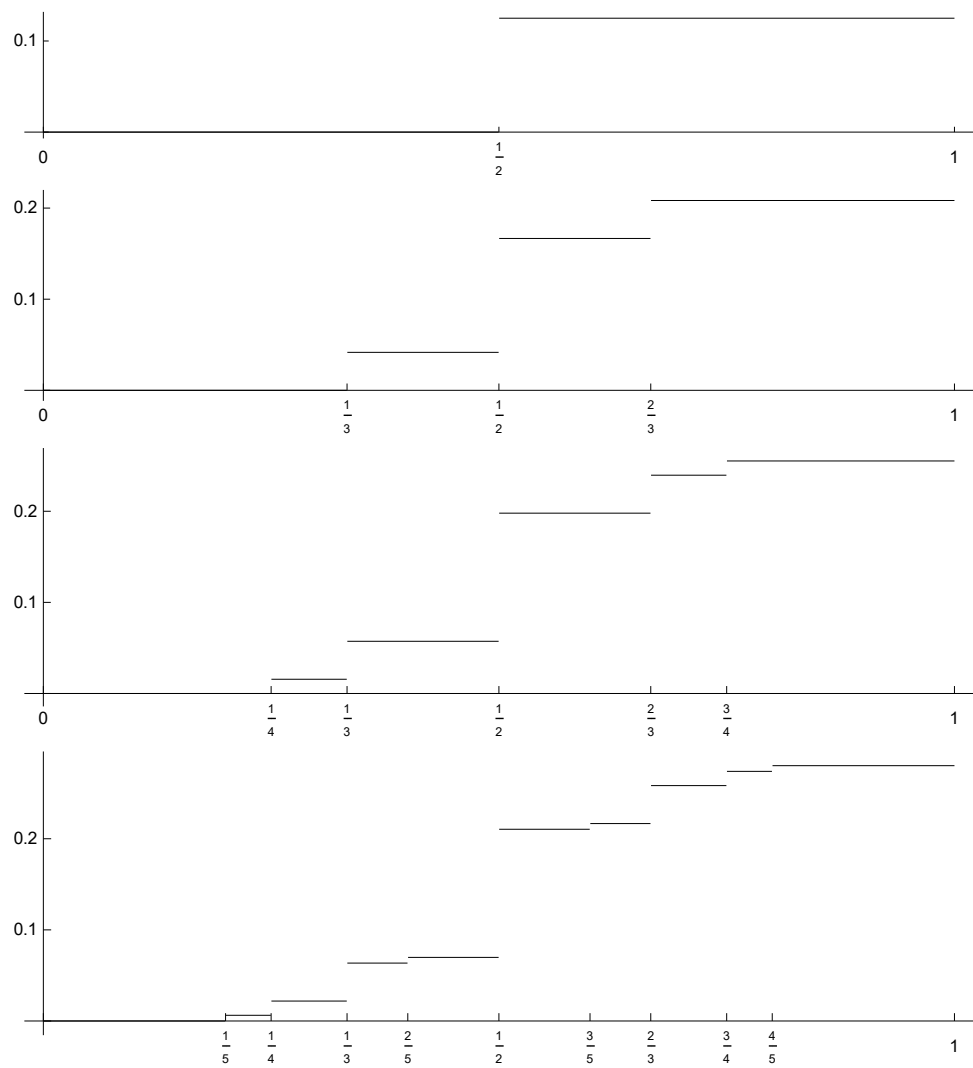
Obrázek 5.4: Monotónní funkce m nespojitá v $x \in \mathbb{Q}$, kde $a_q = \frac{1}{2^q}$.



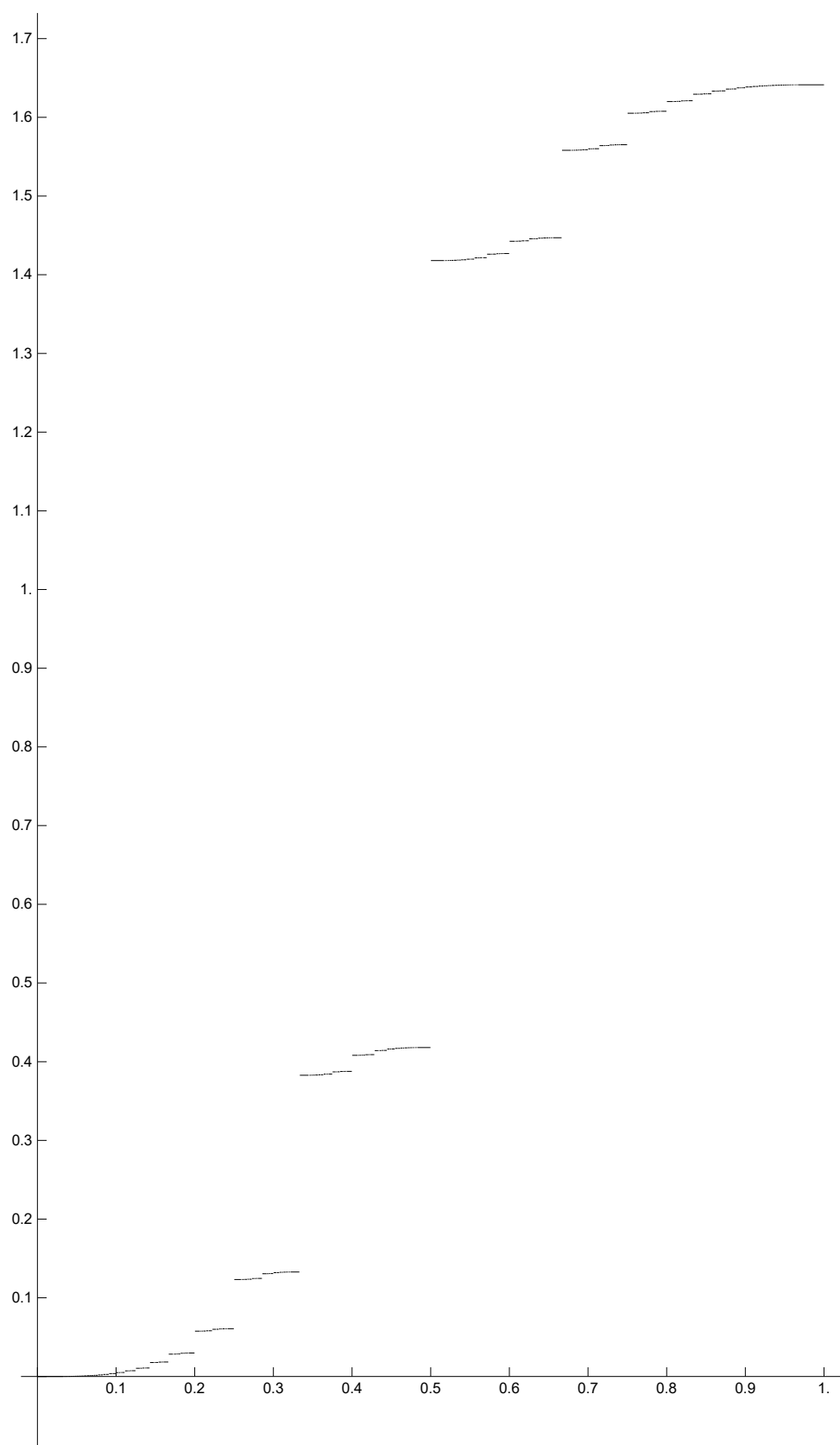
Obrázek 5.5: Monotónní funkce m nespojitá v $x \in \mathbb{Q}$, kde $a_q = \frac{1}{q^2}$.



Obrázek 5.6: Znázornění funkce $f_{p,q}$ z definice funkce m .



Obrázek 5.7: Postupný vznik funkce m , kde $a_q = \frac{1}{2^q}$ (částečné součty po 2 až 5).



Obrázek 5.8: Monotónní funkce f nespojitá v $x \in \mathbb{Q}$, kde $a_n = \frac{1}{n^2}$.

Důkaz. Je zřejmé, že pro každé $q \in \mathbb{Q}$ existuje funkce φ_n nespojitá v bodě q , a to tak, že nalevo od bodu q jsou funkční hodnoty menší než funkční hodnoty napravo. Protože je ale každá jiná φ_m v bodě q neklesající, tato nespojitost se přenesle i do výsledné funkce m . $\square$

Jinou definici podobné funkce uvádí i Vojtěch Jarník v knize *Integrální počet I* (kapitola IX, §2, cvičení 6) ([20], strana 184) — jedná se o způsob konstrukce funkce, která je nespojitá na konkrétní spočetné množině. Jarníkův postup je následující.

Definice 55. *Mějme libovolnou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ navzájem různých bodů takových, že $x_n \in (\alpha, \beta)$. Dále mějme konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takovou, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n > 0$.*

Definujeme funkci j předpisem

$$j(x) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ x_n \leq x}} a_n,$$

tedy sčítáme vždy jen taková a_n , že $x_n \leq x$.

Poznámka. Chceme-li, aby funkce j byla v každém bodě x_n nespojitá z obou stran, můžeme definovat

$$j(x) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ x_n < x}} a_n + \frac{1}{2} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ x_n \leq x}} a_n.$$

Na obrázku 5.8 můžeme vidět graf této funkce, pokud $a_n = \frac{1}{n^2}$ a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovna posloupnosti $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, kterou jsme zkonstruovali na straně 67 (posloupnost (3.2.1)).

5.2 Funkce s riemannovsky neintegrovatelnou derivací

V podseksi 1.4.1 jsme viděli, že výukové materiály prezentují integrování (tj. hledání primitivní funkce) jako opačný proces k derivování a určitý integrál zavádějí často s pomocí určitého. Může být tedy překvapivé, že můžeme sestrojít funkci, jejíž derivace není riemannovsky integrovatelná — uvědomme si ale, že definice Riemannova integrálu z funkce f (definice 14 na straně 30) není nijak závislá na primitivní funkci k f .

Na začátku sekce 5.1 jsme si ukázali větu 79, která říká, že pokud je funkce a nespojitá na množině kladné Lebesgueovy míry, nemá Riemannův integrál. Stačí tedy, abychom sestrojili funkci, jejíž derivace je omezená a zároveň nespojitá na množině kladné míry.

Ještě než si ukážeme konkrétní příklad, zmiňme se krátce o faktu, že ve skutečnosti je většina omezených derivací riemannovsky neintegrovatelná. V roce 1977 totiž dokázal americký matematik Clifford Edward Weil ve svém článku *The Space of Bounded Derivatives*² [137] následující větu.

Věta 90. *Nechť (D, ϱ_∞) je úplný metrický prostor omezených derivací se supremovou normou (viz sekci 4.4). Množina*

$$E = \{f \in D \mid \text{existuje interval } I \in \mathbb{R}, \text{ na kterém je funkce } f \\ \text{riemannovsky integrovatelná}\}$$

je v tomto prostoru množinou 1. kategorie.

Důkaz této věty není myšlenkově složitý, ale potřebovali bychom k němu ještě více teorie z oblasti metrických prostorů, proto ho vynecháváme (čtenář ho může nalézt v [137]) a místo toho si ukážeme konkrétní příklad takovéto funkce.

5.2.1 Volterrova funkce (1881)

Italský matematik Vito Volterra uvedl tuto funkci v dubnu roku 1881 ve svém článku *Sui principi del calcolo integrale*³ [138]. Uvedme si jeho postup, který navazuje na to, co jsme si řekli v sekci 4.1.

Mějme dány dva body $a < b$. Definujme nejdříve následující dvě funkce:

$$A(x) = (x - a)^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x - a}\right), \\ B(x) = (b - x)^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{b - x}\right).$$

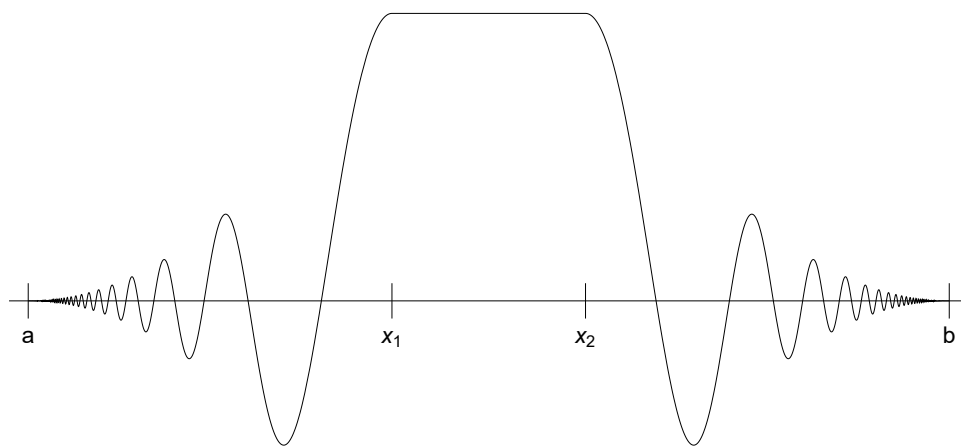
Jejich grafy můžeme vidět (zčásti čárkovaně) jako součást obrázku 5.11.

Dále označíme jako x_1 největší bod menší než $\frac{a+b}{2}$ (tj. polovina intervalu (a, b)), v němž funkce A nabývá lokálního maxima. Podobně označíme jako x_2 nejmenší bod větší než $\frac{a+b}{2}$, v němž funkce B nabývá lokálního maxima. Můžeme si všimnout, že hodnota tohoto maxima je v obou případech stejná — označme ji m .

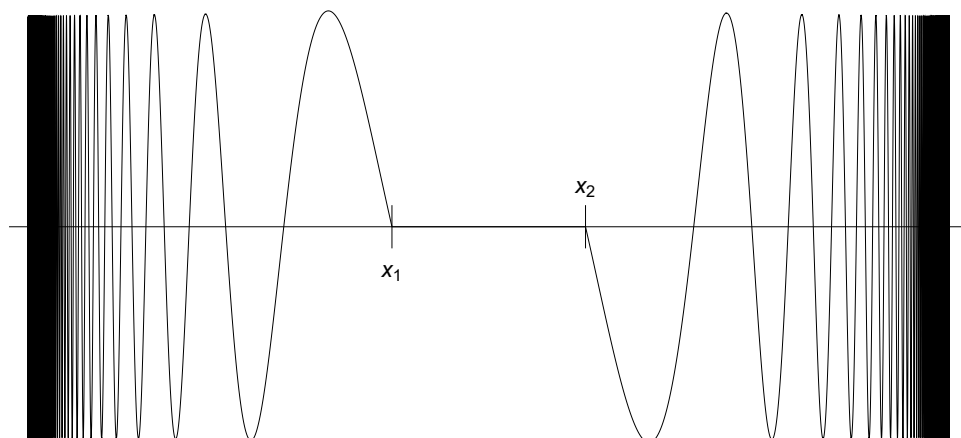
Nyní už můžeme definovat funkci $\mathcal{V}_{a,b}$ na intervalu $\langle a, b \rangle$.

²Prostor omezených derivací

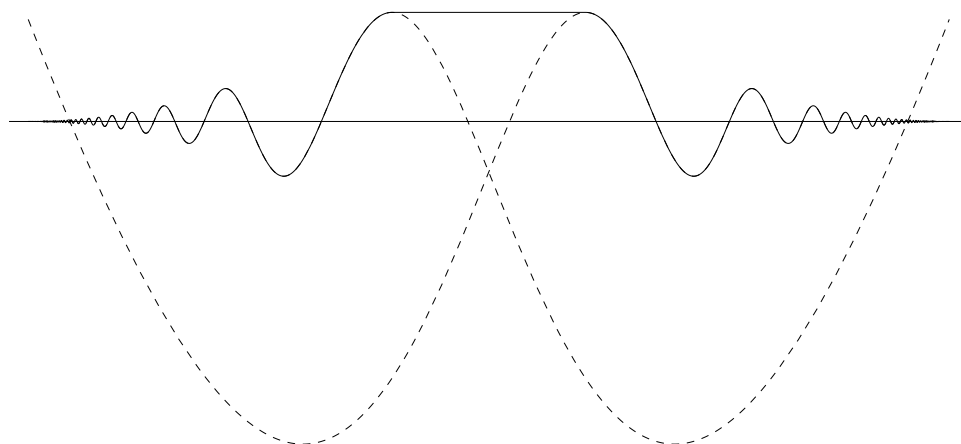
³O principech integrálního počtu



Obrázek 5.9: Funkce $V_{a,b}$.



Obrázek 5.10: Derivace funkce $V_{a,b}$.



Obrázek 5.11: Funkce $V_{a,b}$ s náznakem pokračujících grafů dílčích funkcí.

Definice 56. Pro $x \in \langle a, b \rangle$ definujeme funkci $\mathcal{V}_{a,b}$ předpisem

$$\mathcal{V}_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & a, \\ A(x) & a < x \leq x_1, \\ m & x_1 < x < x_2, \\ B(x) & x_2 \leq x < b, \\ 0 & b. \end{cases}$$

Graf funkce $\mathcal{V}_{a,b}$ můžeme vidět na obrázcích 5.9 a 5.11.

Tvrzení 91. Funkce $\mathcal{V}_{a,b}$ je na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá. Její derivace je na intervalu (a, b) spojitá a v bodech a a b jednostranně nespojitá.

Důkaz. Pro body $x \in \langle a, x_1 \rangle \cup (x_2, b)$ jsme toto tvrzení dokázali už v tvrzení 43 (na straně 68).

Na intervalu (x_1, x_2) je funkce $\mathcal{V}_{a,b}$ konstantní, tedy tvrzení věty je zde jistě splněno. Navíc je na tomto intervalu funkce $\mathcal{V}_{a,b}$ definována tak, aby byla v jeho krajních bodech spojitá.

Protože v bodě x_1 (resp. x_2) nabývá funkce A (resp. B) maxima, má v tomto bodě derivaci rovnou nule (stejně jako na intervalu (x_1, x_2)). Její derivace je tedy v těchto bodech spojitá. $\square$

Graf derivace funkce $\mathcal{V}_{a,b}$ můžeme vidět na obrázku 5.10.

Nyní už stačí, jak píše i Volterra ve svém článku, abychom zkonstruovali řídkou množinu V s kladnou mírou, jejíž doplněk je složen ze spočetně mnoha intervalů. Na těchto intervalech, označme si je (a_n, b_n) , pak definujeme hodnotu Volterrový funkce $\mathcal{V}$ funkcemi $\mathcal{V}_{a_n, b_n}$ a na množině V ji dodefinujeme nulou.

Definice 57 (Volterrova funkce). Necht' $V \subseteq \langle 0, 1 \rangle$ je řídká množina taková, že $\lambda(V) > 0$ a existují po dvou disjunktní intervaly (a_n, b_n) takové, že

$$\langle 0, 1 \rangle \setminus V = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n).$$

Pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ definujeme funkci $\mathcal{V}$ předpisem

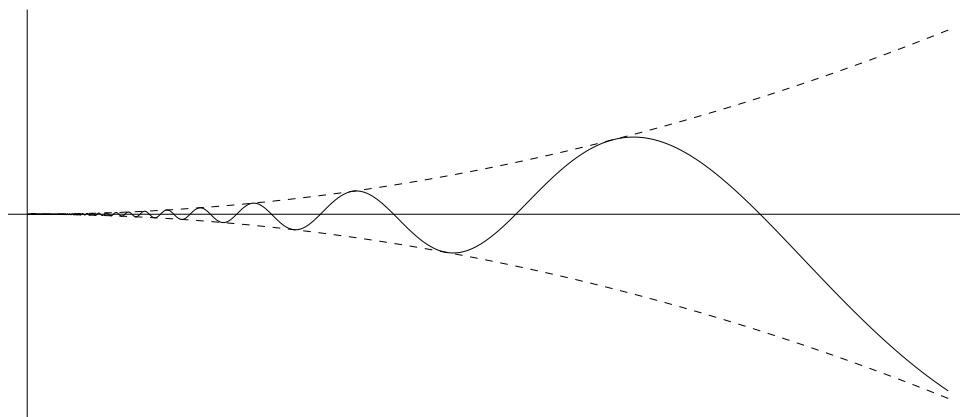
$$\mathcal{V}(x) = \begin{cases} \mathcal{V}_{a_n, b_n}(x), & x \in (a_n, b_n), \\ 0, & x \in V. \end{cases}$$

Že je funkce $\mathcal{V}$ spojitá, je zřejmé. Nyní je třeba dokázat následující větu.

Věta 92. Funkce $\mathcal{V}$ má omezenou derivaci nespojitou na množině N .

Důkaz. Nejdříve ukážeme, že funkce $\mathcal{V}$ má ve všech bodech intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ derivaci. Pro body x množiny $\langle 0, 1 \rangle \setminus V$ je tento fakt zřejmý z tvrzení 91.

Pro body $x_0 \in V$ můžeme argumentovat následovně. Všimneme si, že pokud vezmeme $x \in (0, 1) \setminus V$, víme, že platí, že existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x \in (a_n, b_n)$.



Obrázek 5.12: Ukázka omezenosti grafu Volterrovky funkce.

Jistě interval (a_n, b_n) je buď nalevo, nebo napravo od bodu x_0 , neboli platí buď $b_n \leq x_0$, nebo $x_0 \leq a_n$. Ale pro všechna $\xi \in \langle a_n, b_n \rangle$ platí

$$\begin{aligned} -(x - a_n)^2 &\leq \mathcal{V}(\xi) \leq (x - a_n)^2, \\ -(b_n - x)^2 &\leq \mathcal{V}(\xi) \leq (b_n - x)^2, \end{aligned}$$

tedy graf funkce $\mathcal{V}$ je na intervalu (a_n, b_n) omezen shora i zdola parabolou, jak můžeme vidět na obrázku 5.12.

Protože $b_n \leq x_0$, nebo $x_0 \leq a_n$, víme, že určitě

$$-(x - x_0)^2 \leq \mathcal{V}(\xi) \leq (x - x_0)^2,$$

kteréžto nerovnosti už nejsou závislé na příslušném n a platí i pokud je $x \in V$ (protože potom je $\mathcal{V}(x) = 0$). Jednoduše tedy nahlédneme, že $\mathcal{V}'(x_0) = 0$. Protože x_0 byl libovolný bod z množiny V , má funkce $\mathcal{V}$ nulovou derivaci na celé množině V . Dohromady tedy víme, že funkce $\mathcal{V}$ má derivaci ve všech bodech.

Nyní chceme dokázat, že derivace funkce $\mathcal{V}$ je nespojitá v bodech množiny V . Vezmeme tedy libovolné $x_0 \in V$. Budeme chtít dokázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ najdeme body x_1 a x_2 takové, že $|x_0 - x_1| < \varepsilon$ a $|x_0 - x_2| < \varepsilon$ takové, že $\mathcal{V}'(x_1) = 1$ a $\mathcal{V}'(x_2) = -1$, čímž bude dokázána nespojitost derivace (protože $\mathcal{V}'(x_0) = 0$).

Nechť je tedy dáno $\varepsilon > 0$. Protože je množina V řídká, víme, že pro dané x_0 je $(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0 + \frac{\varepsilon}{2}) \cap (\langle 0, 1 \rangle \setminus V) \neq \emptyset$. Jinými slovy najdeme takové $\xi \in \langle 0, 1 \rangle \setminus V$, že $|x_0 - \xi| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ale podle definice množiny $\langle 0, 1 \rangle \setminus V$ existuje $n \in \mathbb{N}$, že $\xi \in (a_n, b_n)$. Tedy podle toho, zda interval (a_n, b_n) leží nalevo nebo napravo od ξ , je buď $|\xi - b_n| < |\xi - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, nebo $|a_n - \xi| < |x - \xi| < \frac{\varepsilon}{2}$. Označme si tento hraniční bod intervalu (a_n, b_n) (tj. a_n nebo b_n) jako t .

Nyní už je jednoduché podle derivace funkce $\mathcal{V}_{a_n, b_n}$ najít takové x_1 , že $|x_1 - t| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\mathcal{V}'(x_1) = 1$ a obdobně takové x_2 , že $|x_2 - t| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\mathcal{V}'(x_2) = -1$. Snadno už pak odhadneme, že

$$\begin{aligned} |x_0 - x_1| &\leq |x_0 - t| + |t - x_1| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \\ |x_0 - x_2| &\leq |x_0 - t| + |t - x_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Důsledek. Z právě dokázané věty (a podmínce $\lambda(V) > 0$) nám díky větě 79 vyplývá, že derivace Volterrovky funkce nemá Riemannův integrál.

Poslední, co nám zbývá, je zkonstruovat konkrétní příklad této funkce. K tomu nám postačí zkonstruovat množinu V z definice 57 — tou už bude funkce $\mathcal{V}$ jednoznačně zadána.

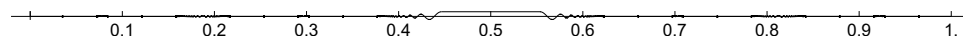
V podsekcí 2.2.1 jsme zkonstruovali Cantorovu množinu. Začínali jsme s intervalem $\langle 0,1 \rangle$; v první iteraci jsme odstranili jeho prostřední část, ve druhé iteraci jsme odstranili prostřední část z nově vzniklých intervalů. Nyní budeme postupovat stejně, jen s tím rozdílem že délka intervalu, který budeme odstraňovat v n -té iteraci, bude $\frac{1}{4^n}$. Z tvrzení 27 nám pak plyne, že

$$\lambda(\langle 0,1 \rangle \setminus V) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

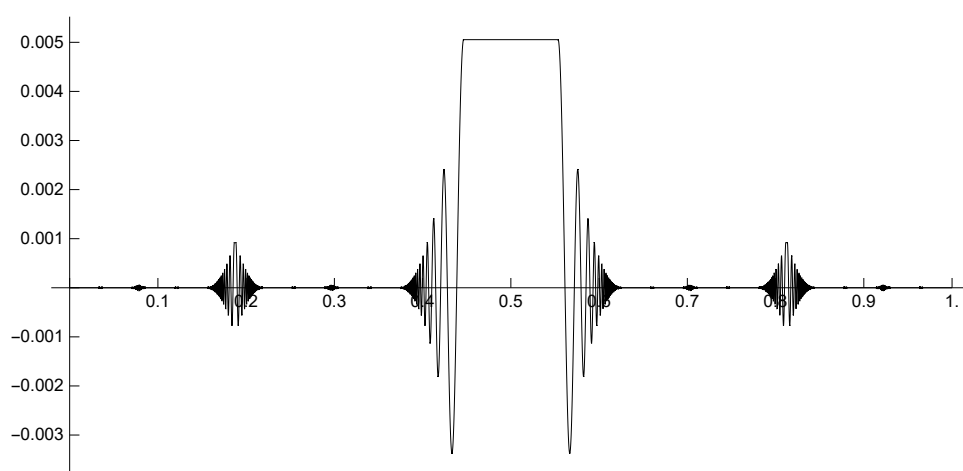
Podle tvrzení 28 je

$$\lambda(V) = \lambda(\langle 0,1 \rangle) - \lambda(\langle 0,1 \rangle \setminus V) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0.$$

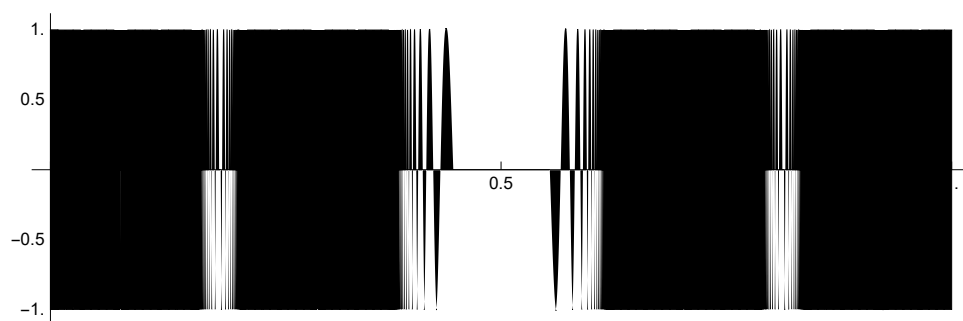
Graf Volterrový funkce pro takto zkonstruovanou množinu můžeme vidět na obrázku 5.13. Protože má ale tato funkce poměrně malé funkční hodnoty, přikládáme i obrázek s upraveným měřítem osy y (obrázek 5.14). Derivaci Volterrový funkce pak můžeme vidět na obrázku 5.15.



Obrázek 5.13: Graf Volterrový funkce.



Obrázek 5.14: Graf Volterrový funkce s upraveným měřítkem osy y .



Obrázek 5.15: Graf derivace Volterrový funkce.

Závěr

V průběhu této práce jsme viděli řadu zajímavých funkcí, z nichž řada popírala některá tvrzení, která jsme mohli nalézt ve výukových materiálech. Tato práce nám tedy ukazuje, jak „podivné“ funkce můžeme získat, pokud se budeme držet čistě teorie a upustíme od intuitivních představ.

Zajímavostí, kterou si můžeme z této práce odnést, je také to, že zatímco jsme začínali s pocitem, že funkce, které budeme v této práci probírat, budou „podivné“, u mnohých z nich jsme zjistili, že právě ony jsou ty většinové (např. v sekcích 4.2 nebo 5.2), a tedy, dá-li se to tak říci, „normální“.

Seznam použité literatury

- [1] Josef Metelka and Rudolf Horáček. *Algebra pro devátý ročník*. 5. nezměněné vydání. Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha, 1963.
- [2] Oldřich Odvárko. *Matematika pro I. ročník gymnázií: Funkce I*. 1. vydání. Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha, 1989.
- [3] Ondřej Šedivý, Petr Drlík, Mária Križalkovičová, Vlastimil Macháček, Jana Müllerová, and Stanislav Židek. *MATEMATIKA pro 8. ročník základní školy, II. díl*. 1. vydání. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1991.
- [4] Ivan Bušek, Marie Kubínová, and Jarmila Novotná. *MATEMATIKA pro 9. ročník základní školy*. Dotisk 1. vydání. Prometheus, s. r. o., Praha, 1996.
- [5] Zdena Rosecká. *Algebra pro 9. ročník*. Nová škola, Brno, 2000.
- [6] Oldřich Odvárko and Jiří Kadleček. *Matematika pro 9. ročník základní školy, 2. díl*. Dotisk 2. vydání. Prometheus, spol. s r. o., Praha, 2006.
- [7] Jiří Herman, Vítězslava Chrápavá, Eva Jančovičová, and Jaromír Šimša. *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií: Funkce*. Dotisk 1. vydání. Prometheus, spol. s r. o., Praha, 2014.
- [8] Oldřich Odvárko and Jiří Kadleček. *Matematika pro 9. ročník základní školy, 1. díl*. Dotisk 3. přepracovaného vydání. Prometheus, spol. s r. o., Praha, 2015.
- [9] Michela Jedličková, Peter Krupka, and Jana Nechvátalová. *Matematika: práce s daty, úměrnosti a funkce (učebnice)*. 1. vydání. Nová škola, s.r.o., Brno, 2018.
- [10] Oldřich Odvárko. *Matematika pro gymnázia: Funkce*. 3. upravené vydání. Prometheus, spol. s r. o., Praha, 2002.
- [11] Dag Hrubý and Josef Kubát. *Matematika pro gymnázia: Diferenciální a integrační počet*. Dotisk 2. upraveného vydání. Prometheus, spol. s r. o., Praha, 2006.
- [12] Michaela Cizlerová, Marek Zahradníček, and Alena Zahradníčková. *Matematika pro střední školy, 4. díl: Funkce I (učebnice)*. Dotisk 1. vydání. Nakladatelství Didaktis, Brno, 2014.
- [13] Marek Liška, Tomáš Valenta, and Lukáš Král. *Matika pro spolužáky: Funkce (učebnice)*. 2. vydání. ProSpolužáky.cz s.r.o., Hradec Králové, 2017.
- [14] Marek Liška, Tomáš Valenta, and Lukáš Král. *Matika pro spolužáky: Diferenciální a integrační počet (učebnice)*. 1. vydání. ProSpolužáky.cz s. r. o., Praha, 2018.
- [15] Oldřich Odvárko. *Matematika pro střední školy: Funkce*. 1. vydání. Prometheus, spol. s r. o., Praha, 2018.

- [16] Václav Zemek, Kristýna Zemková, and Lenka Macálková. *Matematika pro střední školy — 10. díl: Komplexní čísla, polynomy, matice, základy diferenciálního a integrálního počtu (učebnice)*. 1. vydání. Didaktis, Brno, 2019.
- [17] Pavla Pavlíková and František Procházka. *Matematika pro střední školy: Diferenciální a integrální počet*. 1. vydání. Prometheus, spol. s r. o., Praha, 2021.
- [18] M. K. Grebenča and S. I. Novoselov. *Učebnice matematické analýzy I*. 1. vydání. Nakladatelství Československé akademie věd, 1955.
- [19] Vojtěch Jarník. *Diferenciální počet I*. 5. vydání. Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1963.
- [20] Vojtěch Jarník. *Integrální počet I*. 4. vydání. Nakladatelství Československé akademie věd, 1963.
- [21] Zbyněk Dlouhý, Karel Hruša, Jiří Kůst, Jiří Rohlíček, Jan Taišl, and Josef Zieris. *Úvod do matematické analýzy pro pedagogické fakulty*. 3. nezměněné vydání. Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha, 1965.
- [22] Ján Badida and Ján Pidany. *MATEMATIKA II. část*. 2. vydání. ALFA vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, n. p., Bratislava, 1979.
- [23] Ján Badida and Ján Pidany. *MATEMATIKA I. část*. 2. vydání. ALFA vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, n. p., Bratislava, 1980.
- [24] Miloš Kaňka and Jiří Henzler. *Matematika 2*. 1. vydání. Ekopress, s.r.o., Praha, 2003.
- [25] Vítězslav Novák. *Diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné*. 1. vydání. Masarykova univerzita, Brno, 2004.
- [26] Ludmila Macháčová. *Matematika. Základy diferenciálního a integrálního počtu*. Dotisk 4. vydání. Univerzita Pardubice, Pardubice, 2005.
- [27] Jiří Moučka and Petr Rádl. *Matematika pro studenty ekonomie*. 2. upravené a doplněné vydání. Grada Publishing, a.s., Praha, 2015.
- [28] Rudolf Výborný. *Diferenciální počet*. 1. vydání. Academia, Praha, 1966.
- [29] Bibliographisches Institut AG — Mannheim. *Populární encyklopedie matematiky*. 1. vydání. SNTL, Nakladatelství technické literatury, n. p., Praha, 1971.
- [30] Josef Polák. *Přehled středoškolské matematiky*. 1. vydání. Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha, 1972.
- [31] Viliam Matuška and Zdeněk Trefný. *Matematika v otázkách a heslech*. 3. vydání. Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1973.
- [32] Zdeněk Opava. *Víš si rady s matematikou?* 1. vydání. Práce, vydavatelství a nakladatelství ROH, Praha, 1975.

- [33] E. Pešková and J. Mulačová. *Přehled středoškolské matematiky*. ALBRA, Úvaly u Prahy, 1996.
- [34] Radek Veselý. *Maturitní otázky: matematika*. 2. upravené vydání. Radek Veselý, Třebíč, 1997.
- [35] Alois Halouzka. *Přehled učiva k maturitní zkoušce z matematiky*. 1. vydání. FORTUNA, Praha, 2002.
- [36] Pavel Čermák. *Odmaturuj z matematiky II*. 1. vydání. DIDAKTIS spol. s r. o., Brno, 2004.
- [37] Miroslava Černá. *Matematika, průvodce učivem SŠ — 1. díl*. 1. vydání. NAKLADATELSTVÍ SCIENTIA, spol. s r. o., Praha, nejen k maturitě edition, 2006.
- [38] Blanka Běhounková and Miroslava Černá. *Matematika, průvodce učivem SŠ — 2. díl*. 1. vydání. NAKLADATELSTVÍ SCIENTIA, spol. s r. o., Praha, 2007.
- [39] Pavel Čermák and Petra Červinková. *Odmaturuj z matematiky I*. 4. vydání. DIDAKTIS spol. s r. o., Brno, 2007.
- [40] Eva Řídká, Dana Blahunková, and Petr Chára. *Maturitní otázky — Matematika*. 1. vydání. Nakladatelství FRAGMENT, Praha, 2007.
- [41] Zdeněk Vošický. *Matematika v kostce pro střední školy*. 1. vydání. Nakladatelství Fragment, Havlíčkův Brod, 2007.
- [42] Naděžda Kubešová and Eva Cibulková. *Matematika — přehled středoškolského učiva*. Dotisk 2. vydání. Petra Velanová, Třebíč, maturita edition, 2008.
- [43] Katka Maria Delventhal, Alfred Kissner, and Malte Kulick. *Kompendium matematiky*. 4. vydání. Euromedia Group, a. s. – Knižní klub v edici Universum, Praha, 2017.
- [44] Michaela Petrová and Jaroslav Kala. *Maturita s nadhledem, Matematika*. 1. vydání. Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2019.
- [45] Helena Sixtová. *Nová matematika v kostce pro střední školy*. 1. vydání. Fragment, Praha, 2019.
- [46] Pavel Thustý. *Matematika s nadhledem od prváku k maturitě: Funkce, 5. díl*. 1. vydání. Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2019.
- [47] Marek Valášek. Funkce 1. YouTube, February 2015. Dostupné na <https://youtu.be/m2GIcXHZ5Nc> (15. 3. 2022).
- [48] Marek Valášek. Funkce 2. YouTube, March 2015. Dostupné na <https://youtu.be/ziGHGaVYI1A> (15. 3. 2022).
- [49] Isibalo. 1 - Úvod a praktické příklady (mat - funkce). YouTube, November 2015. Dostupné na (23. 4. 2022).

- [50] Isibalo. 2 - přechod k abstrakci (mat - funkce). YouTube, November 2015. Dostupné na <https://youtu.be/plvLcgjymhc> (23. 4. 2022).
- [51] Isibalo. 5 - graf funkce (mat - funkce). YouTube, 2015. Dostupné na <https://youtu.be/6z97cUbUMp4> (23. 4. 2022).
- [52] Isibalo. 7 - funkce jako zobrazení (mat - funkce). YouTube, 2015. Dostupné na https://youtu.be/iVj_172Pw6o (23. 4. 2022).
- [53] Dr. Matika. Co je matematická funkce? | Doučování Dr. Matika. YouTube, September 2018. Dostupné na <https://youtu.be/ApMyjblQH08> (16. 3. 2022).
- [54] Edufix. cz. ČVUT Matematika 1: Úvod do funkcí. YouTube, December 2018. Dostupné na <https://youtu.be/nMMUOQ3iyLM> (15. 3. 2022).
- [55] Onlineschool cz. Úvod do funkcí | 1/34 Funkce | Matematika | Onlineschool.cz. YouTube, August 2019. Dostupné na <https://youtu.be/VF46MGwtZ1U> (15. 3. 2022).
- [56] Onlineschool cz. Definice funkce | 2/34 Funkce | Matematika | Onlineschool.cz. YouTube, August 2019. Dostupné na <https://youtu.be/uoPyk-L8LeU> (15. 3. 2022).
- [57] Onlineschool cz. Monotónnost funkce | 4/34 Funkce | Matematika | Onlineschool.cz. YouTube, August 2019. Dostupné na <https://youtu.be/spczXWQ7Nh4> (16. 3. 2022).
- [58] Vaclav Horsky. Matematika 4.c - po 11.5.2020: Funkce - opakování. YouTube, 2020. Dostupné na <https://youtu.be/q0Rb17pLoUc> (27. 6. 2022).
- [59] Číslíš, Nečíslíš. Matematika - Základní definice funkce. YouTube, March 2020. Dostupné na <https://youtu.be/FXmpFgZ5M3c> (15. 3. 2022).
- [60] Matematika. Funkce jedné proměnné (přednáška). YouTube, October 2020. Dostupné na <https://youtu.be/HYK7zXjmPs4> (16. 3. 2022).
- [61] Matematika - Marcela Horáčková. Funkce - základní pojmy (definice, zadání, def. obor a obor hodnot). YouTube, April 2021. Dostupné na <https://youtu.be/mdAAYAASAG8> (15. 3. 2022).
- [62] Isibalo. 21 - spojitost v bodě a na intervalu (mat - limita a spojitost funkce). YouTube, 2015. Dostupné na <https://youtu.be/hLNV7Rzl8HI> (27. 6. 2022).
- [63] Marek Valášek. Vlastnosti funkce 7 - spojitost funkce. YouTube, 2019. Dostupné na https://youtu.be/tVF_B5p9LPE (27. 6. 2022).
- [64] Daniel Mužátko. Limita funkce - spojitost, spojitá funkce. YouTube, 2020. Dostupné na <https://youtu.be/HRnk4R0nGhY> (27. 6. 2022).
- [65] NaučímTěMatiku. Limity - spojitá a nespojitá funkce. YouTube, 2020. Dostupné na https://youtu.be/kXFEx_bKuEO (27. 6. 2022).

- [66] Matematika UPOL. Ma1-27-spojítost. YouTube, 2020. Dostupné na <https://youtu.be/0t6oPV9G3cA> (27. 6. 2022).
- [67] GYMBUC MATEMATIKA. Spojítost funkce. YouTube, 2021. Dostupné na <https://youtu.be/w2K0PnARaOI> (27. 6. 2022).
- [68] Michal Strnad. 50. spojítost funkce. YouTube, 2021. Dostupné na <https://youtu.be/khzCfLaBbYE> (27. 6. 2022).
- [69] Marek Valášek. Derivace - význam a co nám říká. YouTube, 2013. Dostupné na <https://youtu.be/lXZmgv8xm18> (12. 7. 2022).
- [70] Marek Valášek. Derivace - vysvětlení definice. YouTube, 2013. Dostupné na <https://youtu.be/ACU3tdGglmA> (12. 7. 2022).
- [71] Isibalo. 1 - co nám říká derivace v bodě (mat - diferenciální počet - derivace). YouTube, 2015. Dostupné na <https://youtu.be/Sbztj0Ve7Eg> (12. 7. 2022).
- [72] Isibalo. 2 - sečna, tečna a přesná definice derivace (mat - diferenciální počet - derivace). YouTube, 2015. Dostupné na <https://youtu.be/107U5WP11Yw> (12. 7. 2022).
- [73] Isibalo. 4 - derivace funkcí na celém intervalu (mat - diferenciální počet - derivace), 2015. Dostupné na <https://youtu.be/S0mFpG0YPaw> (12. 7. 2022).
- [74] Isibalo. 5 - mají všechny funkce derivaci v každém bodě? (mat - diferenciální počet - derivace). YouTube, 2015. Dostupné na <https://youtu.be/xCpGEdxKEIo> (12. 7. 2022).
- [75] ekospace. Matematika - derivace 1 - Úvod. YouTube, 2016. Dostupné na <https://youtu.be/-QnfG75YY9Q> (12. 7. 2022).
- [76] ekospace. Matematika - derivace 2 - co je to derivace 1. YouTube, 2016. Dostupné na (12. 7. 2022).
- [77] Onlineschool cz. Základy derivací | 1/13 derivace | matematika | onlineschool.cz. YouTube, 2018. Dostupné na https://youtu.be/JKn84tBTv_E (12. 7. 2022).
- [78] Onlineschool cz. Monotónnost a extrémy funkcí | 4/13 derivace | matematika | onlineschool.cz. YouTube, 2018. Dostupné na <https://youtu.be/jXUm7TI26CQ> (12. 7. 2022).
- [79] Zbyněk Vrba. Diferenciální počet 12 - derivace funkce - geometrický význam a odvození 1. YouTube, 2020. Dostupné na <https://youtu.be/sy3yfbHXPYg> (12. 7. 2022).
- [80] Zbyněk Vrba. Diferenciální počet 12 - derivace funkce - geometrický význam a odvození 2. YouTube, 2020. Dostupné na https://youtu.be/7oveEBV_E18 (12. 7. 2022).
- [81] Petr Pavelka. Derivace funkce v bodě 01. YouTube, 2020. Dostupné na <https://youtu.be/S-QQ5byYKwM> (12. 7. 2022).

- [82] NaučímTěMatiku. Derivace - definice, derivace základních funkcí, součtu, rozdílu a součinu čísla a funkce. YouTube, 2020. Dostupné na https://youtu.be/6eSNw_bZ764 (12. 7. 2022).
- [83] Vaclav Horsky. Aplikovaná matematika 4.a - st 11.11.2020: Derivace funkce. YouTube, 2020. Dostupné na <https://youtu.be/4cjisUU1a8M> (12. 7. 2022).
- [84] felácká holka. Jak že je to s tou derivací? - definice derivace a užití v praxi. YouTube, 2021. Dostupné na <https://youtu.be/GoCiQNYAXu8> (12. 7. 2022).
- [85] ekofun. Určitý integrál. YouTube, 2013. Dostupné na <https://youtu.be/6Ajxf02040Q> (21. 7. 2022).
- [86] Isibalo. 27 - Přesná definice Riemannova integrálu (MAT - Integrální počet - integrace). YouTube, 2015. Dostupné na <https://youtu.be/C0mzecFP35k> (21. 7. 2022).
- [87] Onlineschool cz. Určitý integrál a plocha pod křivkou | 13/20 Integrály | Matematika | Onlineschool.cz. YouTube, 2018. Dostupné na <https://youtu.be/8jKrMn-uTLw> (21. 7. 2022).
- [88] Pavel Navrátil. Určitý integrál - Velmi stručné zavedení určitého integrálu. YouTube, 2020. Dostupné na <https://youtu.be/6Ajxf02040Q> (21. 7. 2022).
- [89] Petr Liška. Rrmat 8.1. určitý integrál. YouTube, 2020. Dostupné na https://youtu.be/bu3-J_0Q5xE (21. 7. 2022).
- [90] Matematika. Určitý integrál (přednáška). YouTube, 2020. Dostupné na <https://youtu.be/FCjg2nwopk8> (21. 7. 2022).
- [91] Jitka Křičková. Integrální počet - určitý integrál. YouTube, 2021. Dostupné na <https://youtu.be/E2GeJV3kJNM> (21. 7. 2022).
- [92] NaučímTěMatiku. Integrály - Určitý integrál. YouTube, 2021. Dostupné na <https://youtu.be/fbahS0nQj10> (21. 7. 2022).
- [93] Jiří Veselý. *Základy matematické analýzy; První díl*. 2. vydání. MATFY-ZPRESS, Praha, 2019.
- [94] Jiří Veselý. *Základy matematické analýzy; Druhý díl*. 1. vydání. MATFY-ZPRESS, Praha, 2009.
- [95] Georg Cantor. Fondements d'une théorie générale des ensembles. *Acta Mathematica*, 2:381–408, December 1883.
- [96] Georg Cantor. De la puissance des ensembles parfaits de points: Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur. *Acta Mathematica*, 4:381–392, 1884.
- [97] Oleksiy Dovgoshey, O. Martio, V. Ryazanov, and M. Vuorinen. The Cantor function. *Expositiones Mathematicae*, 24(1):1–37, 2006.

- [98] Ivan Netuka. *Základy moderní analýzy*. 1. vydání. MATFYZPRESS, Praha, 2014.
- [99] Jaroslav Lukeš and Jan Malý. *Measure and Integral*. 2. vydání. MATFYZPRESS, Praha, 2005.
- [100] Vlastimil Dlab and Jindřich Bečvář. *Od aritmetiky k abstraktní algebře*. 1. vydání. Vlastním nákladem, Praha, 2016.
- [101] Godfrey Harold Hardy and Edward Maitland Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. 4. vydání. Clarendon Press, Oxford, 1975.
- [102] John Farey. On a curious property of vulgar fractions. *The Philosophical Magazine*, 47:385–386, 1816.
- [103] Lejeune Dirichlet. Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 4:157–169, 1829.
- [104] R. Fujisawa. On the convergency of the trigonometrical series which serves to represent an arbitrary function between given limits. *Tokyo Sugaku-Butsurigaku Kwai Kiji*, 3(3):249–266, 1885.
- [105] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. 3. vydání. McGraw-Hill, New York, 1976.
- [106] William Dunham. A Historical Gem from Vito Volterra. *Mathematics Magazine*, 63(4):234–237, 1990.
- [107] E. Hille and J. D. Tamarkin. Remarks on a Known Example of a Monotone Continuous Function. *The American Mathematical Monthly*, 36(5):255–264, 1929.
- [108] R. E. Gilman. A Class of Functions Continuous but not Absolutely Continuous. *Annals of Mathematics*, 33(3):433–442, 1932.
- [109] Martin Jašek. Aus dem handschriftlichen Nachlass Bernard Bolzanos. *Věstník Královské české společnosti nauk. Třída mathematicko-přírodovědecká*, 1921-1922(I):1–32, 1923.
- [110] Vojtěch Jarník. O funkci Bolzanově. *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*, 51(4):248–264, 1922.
- [111] Karel Rychlík. Über eine Funktion aus Bolzanos handschriftlichem Nachlasse. *Věstník Královské české společnosti nauk. Třída mathematicko-přírodovědecká*, 1921-1922(IV):1–20, 1923.
- [112] Martin Jašek. Funkce Bolzanova. *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*, 51(2):69–76, 1922.
- [113] Karl Weierstrass. *Mathematische Werke*, chapter 6, pages 71–74. Mayer & Müller, Berlín, 1895.

- [114] Wikipedie. Weierstrassova funkce, 2022. Dostupné na https://cs.wikipedia.org/wiki/Weierstrassova_funkce (21. 07. 2022).
- [115] Godfrey Harold Hardy. Weierstrass's Non-Differentiable Function. *Transactions of the American Mathematical Society*, 17(3):301–325, 1916.
- [116] Karel Petr. Příklad funkce spojitě nemající v žádném bodě derivace. *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*, 49(1):25–31, 1920.
- [117] Charles Cellérier. Note sur les principes fondamentaux de l'analyse. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 14:142–160, 1890.
- [118] Johan Thim. Continuous Nowhere Differentiable Functions. mathesis, Luleå University of Technology, December 2003.
- [119] Giuseppe Peano. Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane. *Mathematische Annalen*, 36:157–160, 1890.
- [120] Lydia Ceháková. Prostor-vyplňující křivky. Bakalářská práce, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Praha, 2020. Dostupné na <http://hdl.handle.net/20.500.11956/118726> (25. 4. 2022).
- [121] Teiji Takagi. A Simple Example of the Continuous Function without Derivative. *Tokyo Sugaku-Butsurigakkwai Hokoku*, 1:176–177, 1901.
- [122] Jeffrey C. Lagarias. The Takagi Function and Its Properties. *Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects*, 2011.
- [123] Helge von Koch. Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes. *Acta Mathematica*, 30:145–174, 1906.
- [124] Vojtěch Jarník. *Diferenciální počet II*. 2. vydání. Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1956.
- [125] Hermann Minkowski. Zur Geometrie der Zahlen. *Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg*, pages 164–173, August 1904.
- [126] Arnaud Denjoy. Sur une fonction réelle de Minkowski. *Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques*, 17:105–151, January 1938.
- [127] Raphaël Salem. On Some Singular Monotonic Functions Which Are Strictly Increasing. *Transactions of the American Mathematical Society*, 53(3):427–439, May 1943.
- [128] Steven R. Finch. *Mathematical Constants*. 1. vydání. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [129] Aleksandr Yakovlevich Khinchin. *Continued Fractions*. 3. vydání. The University of Chicago Press, Chicago, 1964.

- [130] Dimitrie Pompeiu. Sur les fonctions dérivées. *Mathematische Annalen*, 63:326–332, 1907.
- [131] A. M. Bruckner and J. L. Leonard. Derivatives. *The American Mathematical Monthly*, 73(4):24–56, 1966.
- [132] Clifford E. Weil. On nowhere monotone functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 56, 1976.
- [133] L. Pick, S. Hencl, J. Spurný, and M. Zelený. Matematická analýza 1 (velmi předběžná verze), 2020. Dostupné na <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf> (20. 7. 2022).
- [134] Vojtěch Jarník. *Integrální počet II*. 3. vydání. Academia nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1984.
- [135] Johannes Thomae. *Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale*. Verlag von Louis Nebert, Halle, 1875.
- [136] Kevin Beanland, James W. Roberts, and Craig Stevenson. Modifications of thomae’s function and differentiability. *The American Mathematical Monthly*, pages 531–535, 2009.
- [137] Clifford E. Weil. The Space of Bounded Derivatives. *Real Analysis Exchange*, 3(1):38–41, 1978.
- [138] Vito Volterra. Sui principi del calcolo integrale. *Giornale di Matematiche*, 19:333–372, 1881.

Seznam obrázků

1.1	Graf funkce, kde funkční hodnotu v bodě x získáme tak, že celou část x nahradíme nulou a z desetinné části vyškrtáme číslice na sudých pozicích.	13
1.2	Příklady grafů funkcí v polárních souřadnicích; po řádcích: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = e^x$, $f_4(x) = \ln(x)$, $f_5(x) = \sin(x)$, $f_6(x) = \sin(6x)$, $f_7(x) = \lfloor x \rfloor$, $f_8(x) = \cos^2(x)$	16
1.3	Graf spojitě funkce nemající derivaci v bodě 0.	27
1.4	Graf funkce rostoucí v nule, ale ne na žádném jejím okolí.	28
1.5	Graf funkce, která není nalevo od bodu, v němž má maximum, rostoucí, a napravo od bodu, v němž má maximum, klesající.	28
2.1	Nultá až pátá iterace vzniku Cantorovy množiny.	39
2.2	Nultá až pátá iterace vzniku doplňku Cantorovy množiny.	39
3.1	Dirichletova funkce.	53
3.2	Ukázka konvergence funkce $\cos^{2n}(m!\pi x)$ k Dirichletově funkci.	53
3.3	Modifikace Dirichletovy funkce.	55
3.4	Cantorova funkce.	60
3.5	Prvních šest iterací vzniku Cantorovy funkce (pouze pro intervaly (a_n, b_n)).	61
3.6	Prvních šest iterací vzniku Cantorovy funkce (pro celý interval $(0,1)$).	63
3.7	Cantorova funkce pro různé číselné soustavy.	65
3.8	Modifikace Cantorovy funkce pro posloupnost $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ vytvořenou pomocí mediantů.	66
4.1	Funkce $\mathbf{n}_{\{0\}}$ (spojitá).	69
4.2	Derivace funkce $\mathbf{n}_{\{0\}}$ (nespojité v 0).	69
4.3	Funkce $\mathbf{n}_{\{0\}}$ (vlevo nahoře), $\mathbf{n}_{\{1\}}$ (vpravo nahoře) a jejich součin $\mathbf{n}_{\{0;1\}}$ (dole).	71
4.4	Derivace funkce $\mathbf{n}_{\{0;1\}}$	71
4.5	Graf funkce $\mathbf{n}_{\mathbb{Z}}$ (nahore) a její derivace (dole).	72
4.6	Graf Bolzanovy funkce.	81
4.7	Schéma jednoho kroku tvorby grafu Bolzanovy funkce.	82
4.8	Nultá až třetí fáze vzniku Bolzanovy funkce (tj. funkce y_0 až y_3).	84
4.9	Graf Weierstrassovy funkce s parametry $a = 7$, $b = \frac{5}{6}$	97
4.10	První tři iterace (tj. nultý až druhý částečný součet) Weierstrassovy funkce s parametry $a = 7$, $b = \frac{5}{6}$	98
4.11	Weierstrassova funkce pro různé parametry a a b , kde $a \in \mathbb{Z}$	103
4.12	Weierstrassova funkce pro různé parametry a a b , kde $a \notin \mathbb{Z}$	104
4.13	Graf Petrovy funkce.	106
4.14	Cellérierova funkce pro hodnoty $a = 2$ (nahore) a $a = 3$ (dole).	113
4.15	První až čtvrtá iterace vzniku Cellérierovy funkce pro $a = 2$	113
4.16	Peanovy funkce X (vlevo) a Y (vpravo) udávající souřadnice bodů křivky vyplňující jednotkový čtverec.	115
4.17	Vznik Peanovy dvojrozměrné křivky (první až čtvrtá iterace).	115

4.18	Peanovy funkce X (vlevo nahoře) a Y (vpravo nahoře) a Z (dole) udávající souřadnice bodů křivky vyplňující jednotkovou krychli. . .	116
4.19	Vznik Peanovy třírozměrné křivky (první a druhá iterace).	116
4.20	Takagiho funkce.	118
4.21	Zobecněné Takagiho funkce pro $r \in \{3; 4; 5; 6\}$	118
4.22	Nultá až sedmá iterace vzniku Takagiho funkce.	119
4.23	První až čtvrtá iterace vzniku Kochovy křivky.	121
4.24	Kochova funkce.	121
4.25	Iterační krok tvorby Kochovy funkce.	121
4.26	První až čtvrtá iterace vzniku Kochovy funkce.	122
4.27	Jarníkova funkce.	124
4.28	Ukázka funkcí f_n , z nichž je složena Jarníkova funkce, pro $n \in \{0; 1; 2\}$. . .	124
4.29	Minkowského funkce.	126
4.30	Proces tvorby Minkowského funkce (nultá až třetí iterace).	127
4.31	Denjoyova funkce κ pro hodnoty α po řadě $\frac{1}{10}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{10}$	132
4.32	Graf Pompeiovy funkce.	138
4.33	Graf funkce inverzní k Pompeiově funkci.	139
5.1	Thomaeova funkce.	151
5.2	Thomaeova funkce, ukázka vrstev grafu.	151
5.3	Graf modifikované Thomaeovy funkce pro $a_i = \sin(i)$	155
5.4	Monotónní funkce m nespojitá v $x \in \mathbb{Q}$, kde $a_q = \frac{1}{2^q}$	158
5.5	Monotónní funkce m nespojitá v $x \in \mathbb{Q}$, kde $a_q = \frac{1}{q^2}$	158
5.6	Znázornění funkce $f_{p,q}$ z definice funkce m	158
5.7	Postupný vznik funkce m , kde $a_q = \frac{1}{2^q}$ (částečné součty po 2 až 5). . .	159
5.8	Monotónní funkce j nespojitá v $x \in \mathbb{Q}$, kde $a_n = \frac{1}{n^2}$	160
5.9	Funkce $\mathcal{V}_{a,b}$	163
5.10	Derivace funkce $\mathcal{V}_{a,b}$	163
5.11	Funkce $\mathcal{V}_{a,b}$ s náznakem pokračujících grafů dílčích funkcí.	163
5.12	Ukázka omezenosti grafu Volterrovy funkce.	165
5.13	Graf Volterrovy funkce.	167
5.14	Graf Volterrovy funkce s upraveným měřítkem osy y	167
5.15	Graf derivace Volterrovy funkce.	167

Seznam tabulek

1	Učebnice pro základní školy	5
2	Učebnice pro střední školy	5
3	Učebnice pro vysoké školy	5
4	Souhrnné publikace	6
5	Videomateriály — funkce	6
6	Videomateriály — spojitost	7
7	Videomateriály — derivace	7
8	Videomateriály — integrály	8