MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Dominik Šulc

Geometrie v konečněrozměrných normovaných prostorech

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Učitelství matematiky – Učitelství informatiky

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Název práce: Geometrie v konečněrozměrných normovaných prostorech

Autor: Bc. Dominik Šulc

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato práce, která se zabývá normovanými vektorovými prostory konečné dimenze, je rozdělena do tří částí. První z nich se týká koulí a toho, jaký mohou mít tvar v závislosti na normě, kterou na daném prostoru uvažujeme. Ve druhé části je definován pojem takzvané zobecněné koule a je zde ukázáno několik výsledků týkajících se jejich objemů. Poslední část je zaměřena na číslo π – poměr obvodu kruhu a jeho průměru – které uvažujeme v konečněrozměrném normovaném vektorovém prostoru, tedy v prostoru s obecnou (ne jen eukleidovskou) normou.

Klíčová slova: normovaný prostor, zobecněná koule, objem

Title: Geometry in finite-dimensional normed spaces

Author: Bc. Dominik Šulc

Department: Department of mathematics education

Supervisor: doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Department of mathematics education

Abstract: This work, which focuses on normed vector spaces of finite dimension, is divided into three parts. The first one is concerned with balls, specifically with the shape they can have in spaces with various norms. In the second part we define objects called generalized balls and we show a few results concerning their volumes. The last part focuses on the number π – ratio of circle´s circumference and its diameter – in finite-dimensional normed vector space, which means space with general (not only Euclidean) norm.

Keywords: normed space, generalized ball, volume

Děkuji svému školiteli doc. RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D. za pomoc, kterou mi v podobě mnohých rad a užitečných připomínek při psaní této práce poskytoval.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Předtím, než přistoupíme k matematice, věnujme pár slov tomu, co všechno bude moci čtenář v této práci najít. Ve druhé kapitole definujeme několik základních pojmů jako je norma, normovaný prostor, jednotková koule a budeme se věnovat popisu toho, jaký tvar může koule v normovaném prostoru mít. Třetí a nejobsáhlejší kapitola se zabývá tím, jak se mění objem koule v normovaném prostoru v závislosti na jeho dimenzi a normě, kterou na tomto prostoru uvažujeme. V úvodu kapitoly definujeme takzvanou zobecněnou kouli, uvedeme také definici gama funkce, kterou budeme v dalším textu velmi často používat a připomeneme pár základních vlastností této funkce. Poté nalezneme vzorec pro výpočet objemu n-rozměrné jednotkové koule a následně vypočítáme i objem zobecněné n-rozměrné koule. Pro jednoduchost budeme počítat objemy koulí o poloměru 1, poněvadž objem koule o obecném poloměru lze z této hodnoty snadno určit vynásobením n-tou mocninou tohoto poloměru. Dále ukážeme konkrétní příklady výpočtu objemu na dvojrozměrném a trojrozměrném případu útvaru, kterému se říká asteroida a potom se podíváme se na to, jak se objem koule chová při limitním přechodu k nekonečné dimenzi. Nejprve ukážeme, že objem libovolné koule (tj. o libovolném poloměru) v eukleidovské normě je, neformálně řečeno, v prostorech velké dimenze malý. V následující větě toto tvrzení zobecníme a ukážeme, že předpoklad speciální eukleidovské normy není nutný a že objem koule jde pro dimenzi jdoucí k nekonečnu k nule nezávisle na hodnotě parametru p, který normu určuje. Tuto větu dokážeme dvěma způsoby, zaprvé elementárně za cenu toho, že důkaz bude poněkud rozsáhlý a poté s použitím Stirlingova vzorce, což bude mnohem kratší, avšak přijdeme o elementárnost kvůli této formuli, kterou uvádíme pouze bez důkazu. V další části této kapitoly se zaměříme na to, v jakém prostoru nabývá objem jednotkové eukleidovské koule maximální hodnoty. Ukážeme, že to nastává v prostoru dimenze 5. Na závěr této kapitoly ukážeme, že pro jistou třídu zobecněných koulí (takovou, kde se v definici vyskytuje pouze jeden parametr p) platí, že pro každé p objem jednotkové koule se zvyšující se dimenzí nejdříve monotónně roste a poté, co dosáhne svého maxima, monotónně klesá. Poslední kapitola, ve které budeme pracovat s dvourozměrnými reálnými prostory, se věnuje číslu π, které s objemem koule v těchto prostorech (koule v $\mathbb{R}^2$ je kruh) úzce souvisí. My se však v této práci zabýváme i jinými prostory než eukleidovskými, a tak v této kapitole zavedeme symbol $\pi_{\|\cdot\|}$, což bude zobecnění klasického π na prostory s obecnou normou $\|\cdot\|$. Už to tedy nebude konstanta, ale parametr závisející na daném prostou. V každém normovaném prostoru tedy

budeme mít jinou hodnotu tohoto parametru pro tento prostor specifickou. Dokážeme, že tato hodnota však nemůže být jakákoliv, ale že leží v intervalu $[3, 4]$ a pokud budeme uvažovat pouze normy definované předpisem z úvodu 2. kapitoly, tento interval se zmenší na $[\pi, 4]$. V úplném závěru získaný výsledek opět zmírněním předpokladů ještě trochu zobecníme.
Přepokládáme, že čtenář je seznámen alespoň se základy logiky potřebnými pro porozumění různým důkazovým technikám a také se základními pojmy a výsledky lineární algebry, matematické analýzy a teorie míry a integrálu. Tento text by tedy měl být srozumitelný posluchačům posledních ročníků bakalářského studia matematických oborů.
Tvrzení v této práci jsou z velké části převzata z jiných textů, je zde však i několik nových výsledků. U každého převzatého tvrzení je odkaz na zdroj, ze kterého bylo čerpáno, tedy všechny výsledky, u kterých není odkaz na literaturu, jsou původní. Konkrétně to jsou věty 3.9, 3.14 a 3.15.

Kapitola 2

Koule v normovaných prostorech

V celém textu se bude pracovat s normovanými lineárními prostory konečné dimenze, bude tedy dobré o tomto pojmu na úvod něco říci. Uvažujme n-rozměrný reálný vektorový prostor, tedy množinu všech n-tic reálných čísel. Nejpřirozenější způsob, jak na tomto prostoru změřit délku l vektoru $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, je zřejmě následující

$$l(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Je to přirozené proto, že to odpovídá našemu chápání délky v našem trojrozměrném prostoru. Nic nám však nebrání použít k měření délky jinou funkci než tu, která je výše uvedena. Na druhou stranu ale není rozumné měřit délku úplně jakoukoliv funkcí, protože pak bychom mohli ztratit některé důležité vlastnosti, na které jsme u naší běžné délky zvyklí. Například je rozumné požadovat, ať už definujeme délku jakkoliv, aby tato délka nemohla být menší než 0 a na druhou stranu aby délka nulového vektoru byla nulová. Funkcím, které splňují tyto a ještě několik dalších rozumných požadavků, se říká normy (například funkci použité k výše uvedenému měření se říká eukleidovská norma). Norma tedy v jistém smyslu zobecňuje délku, tak jak ji běžně chápeme. Pojem norma bude pro nás v tomto textu klíčový, budeme ho tedy na dalších stránkách formálně definovat a dále se mu věnovat.

Definice 2.1. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ je vektor, jehož složky jsou reálná čísla. Pro $p \in [1, \infty)$ definujeme:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

Věta 2.2. [1] *Zobrazení $x \to \|x\|_p$ má následující vlastnosti:*

- $\|x\|_p \geq 0$
- $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\forall c \in \mathbb{R} : \|cx\|_p = |c|\|x\|_p$
- $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ *(Minkowského nerovnost)*

[1] Převzato z [1], str. 10

Důkaz:

1. $\|x\|_p \geq 0: \quad |x_k| \geq 0 \;\; \forall \;\; k \in \{1,2,...,n\} \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \geq 0$

2. $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0: \quad \|x\|_p = 0 \Rightarrow |x_k| = 0 \quad \forall k \in \{1,2,...,n\} \Rightarrow x = 0$

$$x = 0 \Rightarrow |x_k| = 0 \quad \forall k \in \{1,2,...,n\} \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} = 0$$

3. $\forall c \in \mathbb{R} : \|cx\|_p = |c|\|x\|_p: \quad \|cx\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |cx_k|^p\right)^{1/p} =$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} |c|^p |x_k|^p\right)^{1/p} = \left(|c|^p \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} = |c| \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

4. $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$:

   Protože $p \geq 1$, platí, že funkce $x \to |x|^p$ je konvexní na $\mathbb{R}$. Pro $x, y \in \mathbb{R}^n$ a $\lambda \in [0,1]$ tedy platí:

   $\|(1-\lambda)x + \lambda y\|_p^p = \sum_{k=1}^n |(1-\lambda)x_k + \lambda y_k|^p \leq$

   $\sum_{k=1}^n ((1-\lambda)|x_k|^p + \lambda |y_k|^p) = (1-\lambda)\|x\|_p^p + \lambda \|y\|_p^p$

   Pro vektory x, y takové, že $\|x\|_p = \|y\|_p = 1$ tedy dostáváme:

   $\|(1-\lambda)x + \lambda y\|_p \leq 1$

   Pokud $x = 0$ nebo $y = 0$, dokazovaná nerovnost zřejmě platí.
   V opačném případě dostáváme pro jednotkové vektory $x/\|x\|_p$ a $y/\|y\|_p$ následující vztah.

   $\frac{\|x+y\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p} = \| \frac{\|x\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p} \frac{x}{\|x\|_p} + \frac{\|y\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p} \frac{y}{\|y\|_p} \|_p \leq 1$

   Důkaz dokončíme vynásobením předchozí nerovnosti jmenovatelem zlomku na levé straně.

$\square$

Poznámka 2.3. Každé zobrazení, které má vlastnosti z předchozí věty, se nazývá norma a značí se $\|\cdot\|$. V předchozím tvrzení jsme tedy dokázali, že $\|\cdot\|_p$ je norma na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$. Dvojice $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ je tedy normovaný lineární prostor.

Definice 2.4. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $p \in [1, \infty)$. Definujeme l_p^n jako reálný vektorový prostor dimenze n vybavený normou z definice 2.1. Přesněji

$$l_p^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p).$$

Poznámka 2.5. [2] Omezení pro p v definici normy je nutné, protože pro $p < 1$ by příslušná „norma" nesplňovala trojúhelníkovou nerovnost, tj. vágně řečeno,

[2] Převzato z https://math.stackexchange.com/questions/73294/minkowski-inequality-for-p-le-1

neplatilo by, že nejkratší cesta z jednoho bodu do druhého vede po přímce procházející těmito body. Dokonce platí, že

$$\|x+y\|_p \geq \|x\|_p + \|y\|_p \quad \forall x, y \in [0,\infty)^n$$

pro n přirozené a pro $p < 1$. Tedy pro $p < 1$ se znaménko v Minkowského nerovnosti obrací.

Důkaz:

Platí:

$$(x_k + y_k)^p = \left(t\frac{x_k}{t} + (1-t)\frac{y_k}{1-t}\right)^p, \quad t \in (0,1).$$

Funkce $f(x) = x^p$ je konkávní na intervalu $[0,\infty)$ pro $0 < p < 1$, a tedy pro $x_k, y_k \in \mathbb{R}^*$ dostáváme:

$$|x_k + y_k|^p = \left(t\frac{|x_k|}{t} + (1-t)\frac{|y_k|}{1-t}\right)^p \geq t\frac{|x_k|^p}{t^p} + (1-t)\frac{|y_k|^p}{(1-t)^p}$$

Po sečtení přes všechna k máme:

$$\|x+y\|_p^p \geq t\frac{\|x\|_p^p}{t^p} + (1-t)\frac{\|y\|_p^p}{(1-t)^p}$$

Pokud $\|x\|_p = 0$ nebo $\|y\|_p = 0$, dokazované tvrzení zřejmě platí. V opačném případě zvolme:

$$t = \frac{\|x\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p}, \qquad (1-t) = \frac{\|y\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p}$$

a získáváme:

$$\|x+y\|_p^p \geq t\frac{\|x\|_p^p}{\frac{\|x\|_p^p}{(\|x\|_p+\|y\|_p)^p}} + (1-t)\frac{\|y\|_p^p}{\frac{\|y\|_p^p}{(\|x\|_p+\|y\|_p)^p}}$$

a po úpravě:

$$\|x+y\|_p^p \geq t\left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)^p + (1-t)\left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)^p = \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)^p \implies$$

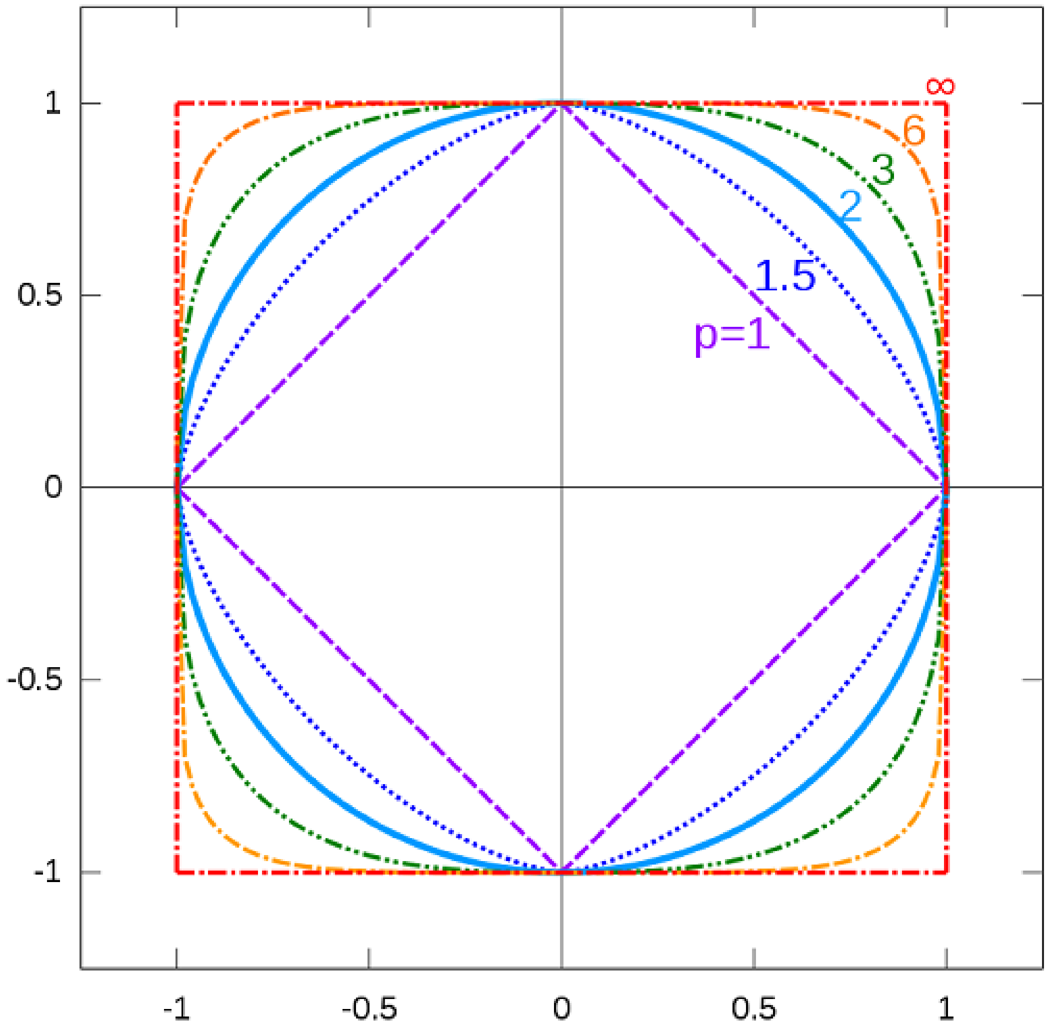
$$\implies \|x+y\|_p \geq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

$\square$

Definice 2.6. Jednotková (uzavřená) koule v prostoru $\mathbb{R}^n$ s normou $\|\cdot\|$ je množina

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}.$$

Na obrázku 2.1 je několik příkladů jednotkových koulí v prostoru $\mathbb{R}^2$ s různými normami, které lze dostat různou volbou p v definici 2.1.



Obrázek 2.1: Jednotkové koule v l_p^2 pro různé hodnoty p (převzato z https://en.wikipedia.org/wiki/Lp_space)

Poznámka 2.7. Podobně jako lze klasickou jednotkovou kružnici ($\{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} = 1\}$) parametrizovat goniometrickými funkcemi sinus a kosinus, které souvisejí s úhly v trojúhelníku, můžeme podobnými funkcemi parametrizovat i další jednotkové kružnice (tj. hranice jednotkových koulí) v jiných normách. Volbou $p = 2$ v definici 2.1 získáme eukleidovskou kružnici, ale pokud zvolíme $p > 2$, dostaneme jednotkovou kružnici, která se bude s rostoucím p čím dál tím více podobat čtverci (square). Těmto objektům, jednotkovým kružnicím (circles), které tvarem připomínají čtverce (squares), se někdy říká squircles a příslušná zobecnění funkcí sinus a kosinus, která je parametrizují, se nazývají squigonometrické funkce. Přesněji, pro dané $p > 2$ definujeme funkce squinus (zobecnění sinu), značíme sq_p a kosquinus (zobecnění kosinu), značíme cq_p, jako funkce splňující

$$sq_p'(t) = cq_p(t)^{p-1},$$

$$cq_p'(t) = -sq_p(t)^{p-1},$$

$$sq_p(0) = 0,$$
$$cq_p(0) = 1,$$

kde $t \in \mathbb{R}$. Není těžké se přesvědčit, že takto definované funkce skutečně splňují podmínku
$$sq_p(t)^p + cq_p(t)^p = 1,$$
a tedy jsou to skutečně parametrizace našich objektů, které jsme nazvali squircles. Tuto a další vlastnosti lze nalézt v [2].

Následující dvě věty ukazují, jakým způsobem norma omezuje tvary jednotkových koulí v $\mathbb{R}^n$.

Věta 2.8. [3] *Nechť* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ *je funkce, která splňuje:* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *a* $\forall c \in \mathbb{R} : \|cx\| = |c| \cdot \|x\|$. *Potom* $\|\cdot\|$ *je norma na* $\mathbb{R}^n$ *právě tehdy, když jednotková koule* B *je konvexní množina.*

Důkaz:

Nechť $\|\cdot\|$ je norma na $\mathbb{R}^n$ a nechť $x, y \in B, \lambda \in [0,1]$ a $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ je libovolný bod na úsečce mezi x a y. Platí:

$$\|z\| = \|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\| =$$
$$= \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| = \lambda + (1-\lambda) = 1$$

tedy $z \in B$.
Nechť tedy naopak B je konvexní množina a $x, y \in \mathbb{R}^n$. Chceme dokázat, že $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Pokud $x = 0$ nebo $y = 0$, nerovnost zřejmě platí. Můžeme tedy předpokládat, že x i y jsou nenulové. Uvažujme $\overline{x} = x/\|x\|$ a $\overline{y} = y/\|y\|$, jejichž normy jsou rovny 1, a tedy leží v jednotkové kouli. Jelikož

$$\frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|} + \frac{\|y\|}{\|x\|+\|y\|} = 1,$$

plyne z konvexity B, že

$$\frac{x+y}{\|x\|+\|y\|} = \left(\frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}\overline{x} + \frac{\|y\|}{\|x\|+\|y\|}\overline{y}\right) \in B.$$

Platí tedy
$$\frac{\|x+y\|}{\|x\|+\|y\|} = \left\|\frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}\overline{x} + \frac{\|y\|}{\|x\|+\|y\|}\overline{y}\right\| \leq 1.$$
Ověřili jsme, že $\frac{\|x+y\|}{\|x\|+\|y\|} \leq 1$, a tedy

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

□

[3] Převzato z [1], str. 11

Věta 2.9. [4] *Nechť K je kompaktní konvexní množina v $\mathbb{R}^n$, která je středově souměrná vzhledem k počátku a obsahuje nějakou (eukleidovskou) kouli se středem v počátku. Potom existuje norma $\|\cdot\|_K$ na $\mathbb{R}^n$ taková, že K je jednotková koule vzhledem k této normě.*

Důkaz:

Ukážeme, že funkce

$$f(x) = \min\{\xi \in [0,\infty) : x \in \xi K\},$$

kde $\xi K = \{\xi y : y \in K\}$, má požadované vlastnosti, a tedy je to hledaná norma $\|x\|_K$. Funkce f přiřazuje vektoru x nejmenší nezáporné reálné číslo ξ takové, že $x \in \xi K$. Je tedy vidět, že potom x leží na hranici množiny ξK a je tedy přirozené definovat jeho normu jako ξ. Poznamenejme ještě, že v předpokladech věty je uvedeno, že K obsahuje eukleidovskou kouli, což zaručuje, že množina v definici $f(x)$ bude neprázdná a také že hodnota $f(x)$ bude konečná pro každé $x \in \mathbb{R}^n$.
1. Jelikož množina v definici $f(x)$ obsahuje pouze nezáporná čísla, minimum této množiny je nezáporné číslo, tedy $f(x) \geq 0$.
2. Pokud $x = 0$, zřejmě $f(x) = 0$. Naopak, pokud $x \neq 0$, uvažujme přímku, která prochází bodem 0 a bodem x. Tato přímka protíná hranici K v bodě αx, pro nějaké $\alpha > 0$, takže úsečka s krajními body 0 a αx je podmnožinou K. Zároveň x leží na hranici koule K/α a tedy platí, že $f(x) = \alpha^{-1} > 0$.
3. Dále platí:

$$f(\beta x) = \min\{\xi \in [0,\infty) : \beta x \in \xi K\} = \min\{\beta\xi \in [0,\infty) : x \in \xi K\} =$$

$$\beta \min\{\xi \in [0,\infty) : x \in \xi K\} = \beta f(x),$$

pro $\beta > 0$. Ze symetrie množiny K plyne $f(-x) = f(x)$, a tedy dostáváme $f(\beta x) = \beta f(x), \quad \beta \in \mathbb{R}$.
4. Nechť $x, y \in \mathbb{R}^n$ jsou nenulové. Potom $x' = x/f(x) \in K, \quad y' = y/f(y) \in K$ podle úvah v bodě 2. Protože K je konvexní množina a platí

$$z := \frac{f(x)}{f(x)+f(y)}x' + \frac{f(y)}{f(x)+f(y)}y' = \frac{x+y}{f(x)+f(y)},$$

dostáváme, že $z \in K$, tedy $f(z) \leq 1$. Zároveň díky bodu 3 platí:

$$f(z) = \frac{f(x+y)}{f(x)+f(y)},$$

a tedy $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$. Pokud x nebo y je rovno 0, nerovnost zřejmě platí také. Dokázali jsme tedy, že $f(x)$ je opravdu norma. Zbývá dokázat, že K je jednotková koule vzhledem k této normě
Zvolme libovolné $x \in K$. Pokud $x = 0$, pak $f(x) = 0 \leq 1$. V opačném případě najdeme $\alpha > 0$ takové, že αx leží na hranici K. Potom zřejmě platí, že $1 \leq \alpha$, a tedy $f(x) = \frac{1}{\alpha} \leq 1$. Naopak pokud $f(x) \leq 1$, pak $x \in K$, což dokazuje, že $f(x) = \|x\|_K$.

□

[4] Převzato z [3], str. 17

Kapitola 3

Objem koule

Jedním ze základních pojmů matematické analýzy je koule a v této části se zaměříme na studium právě tohoto objektu. Koule, kterou každý zná a která se vyskytuje (i když ne v úplně dokonalé formě) běžně v přírodě, je považována za jeden z nejjednodušších geometrických útvarů a již velmi dlouho jsou známy vzorce pro výpočet jejího povrchu a objemu. V této kapitole se však podíváme na kouli mnohem obecněji a v širších souvislostech a zjistíme, že situace bude mnohem zajímavější a komplikovanější, než by se mohlo na první pohled zdát.

Definice 3.1. Zobecněná jednotková koule v $\mathbb{R}^n$ je množina

$$B_{p_1 p_2 \dots p_n} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1|^{p_1} + \dots + |x_n|^{p_n} \leq 1\},$$

kde $p_1, p_2, ..., p_n \in (0, \infty)$.

Poznámka 3.2. V případě, že v definici 3.1 zvolíme $p_1 = \dots = p_n$, dostaneme zobecněnou jednotkovou kouli, která se bude shodovat s jednotkovou koulí v prostoru l_p^n pro $p = p_1$.

Poznámka 3.3. Zobecněná koule už nemusí být konvexní množina. Například zvolíme-li $p_1 = \dots = p_n < 1$, dostaneme kouli, která není konvexní (viz poznámka 2.5).

Definice 3.4. Na intervalu $(0, \infty)$ definujeme gama funkci $\Gamma(t)$ předpisem:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx.$$

Poznámka 3.5. V důkazu následující věty a v dalším textu budeme využívat některých známých vlastností gama funkce, které zde uvedeme bez důkazu. Pro $u, v > 0$ platí:

(a) $\Gamma(u + 1) = u\Gamma(u)$,

(b) $\int_0^1 x^{u-1}(1 - x)^{v-1} dx = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$,

(c) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1$,

(d) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right) > 0, \quad x > 0,$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x} = 1$ (*Stirlingův vzorec*).

Důkazy tvrzení z předchozí poznámky lze najít v knize [4], konkrétně tvrzení (a) lze nalézt na straně 686 – věta 250, tvrzení (b) na staně 692 – věta 254, tvrzení (c) na straně 686 – věta 251 spolu s poznámkou 5 na téže straně a tvrzení (e) lze najít na straně 605. Tvrzení (d) plyne z následujícího vzorce, který je na straně 701 označen číslem (52):

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right) dt, \qquad x > 0.$$

Není težké ukázat, že integrand je rostoucí funkcí proměnné x, a tedy celý integrál (díky monotonii) je rostoucí funkcí x, tudíž má kladnou derivaci.

Následující dvě věty ukazují, jak lze počítat objemy zobecněných jednotkových koulí. První z nich se zabývá speciálním případem kdy $p_1 = \cdots = p_n = p \in (0,\infty)$, tedy jedná se o jednotkovou kouli v prostoru l_p^n.

Věta 3.6. [5] *Nechť $p_1 = \cdots = p_n = p \in (0,\infty)$ a $n \in \mathbb{N}$. Pro objem V_n jednotkové koule $B_{p_1p_2\cdots p_n}$ platí:*

$$V_n = 2^n \frac{\Gamma(1+1/p)^n}{\Gamma(1+n/p)}.$$

Důkaz:

Definujeme

$$v_p(r) := \int_{\|x\|_p^p \le r} 1 dx.$$

Použijeme substituci

$$\Psi(y) = y r^{1/p} = x,$$

jakobián zobrazení Ψ je

$$J_\Psi(y) = r^{n/p}$$

a dostaneme:

$$v_p(r) = \int_{\|x\|_p^p \le r} 1 dx = \int_{\|y\|_p^p \le 1} r^{n/p} dy = r^{n/p} \int_{\|y\|_p^p \le 1} dy = r^{n/p} v_p(1).$$

Nyní vyjádříme dvěma způsoby integrál $\int_0^\infty e^{-t} v_p(t) dt$:

1. $\int_0^\infty e^{-t} v_p(t) dt = \int_0^\infty e^{-t} v_p(1) t^{n/p} dt = v_p(1) \int_0^\infty e^{-t} t^{n/p} dt = v_p(1)\Gamma(1+n/p)$

$$2. \int_0^\infty e^{-t} v_p(t) dt = \int_0^\infty e^{-t} \left(\int_{\|x\|_p^p \le t} 1 dx\right) dt = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\|x\|_p^p}^\infty e^{-t} dt\right) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_p^p} dx = \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-|x_k|^p} dx_k = \left(2\int_0^\infty e^{-x_k^p} dx_k\right)^n = \left(2\Gamma(1+1/p)\right)^n.$$

[5] Převzato z [5], str. 195

Zdůvodněme podrobně poslední rovnost. Potřebujeme ukázat, že platí $\int_0^\infty e^{-x_k^p} dx_k = \Gamma(1+1/p)$. S použitím substituce $x_k^p = t$ dostaneme:

$$\int_0^\infty e^{-x_k^p} dx_k = \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-1} e^{-t} \frac{1}{p} dt = \frac{1}{p}\Gamma(1/p) = \Gamma(1+1/p),$$

kde poslední rovnost plyne z tvrzení (a) v poznámce 3.5. Porovnáním výše uvedených výrazů pro $\int_0^\infty e^{-t} v_p(t) dt$ dostáváme následující vztah:

$$v_p(1)\Gamma(1+n/p) = (2\Gamma(1+1/p))^n,$$

a tedy

$$v_p(1) = 2^n \frac{\Gamma(1+1/p)^n}{\Gamma(1+n/p)}.$$

□

Jako příklad si vezměme křivku, které se říká asteroida a použijme právě dokázanou větu k výpočtu obsahu oblasti, kterou tato křivka omezuje. Asteroida je definována rovnicí

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

a oblast ohraničená touto křivkou je speciálním případem zobecněné koule, kterou získáme, pokud v definici zvolíme $n = 2$ a $p_1 = p_2 = 2/3$. Je to tedy množina $A(a)$, pro kterou platí

$$A(a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{2/3} + |y|^{2/3} \leq a^{2/3}\},$$

kde a je poloměr této koule. Věta 3.6 se zabývá objemem jednotkových koulí, počítejme tedy obsah asteroidy o poloměru 1. Výpočet obsahu obecné asteroidy, jakožto zobecněné koule, lze snadno převést na tento případ pomocí vztahu

$$A(a) = a^2 A(1).$$

Z předchozí věty tedy máme

$$V(A(1)) = 2^n \frac{\Gamma(1+1/p)^n}{\Gamma(1+n/p)} = 2^2 \frac{\Gamma(1+3/2)^2}{\Gamma(1+3)} = 4\frac{(3/2)^2\Gamma(3/2)^2}{3!} =$$

$$= \frac{4 \cdot 9 \cdot (1/2)^2 \Gamma(1/2)^2}{4 \cdot 6} = \frac{4 \cdot 9 \cdot \pi}{4 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{3\pi}{8}.$$

Definici asteroidy můžeme přirozeně zobecnit a můžeme tak definovat analogický útvar i ve vyšších dimenzích. Definujme tedy n-rozměrnou asteroidu $A_n(a)$ o poloměru a vztahem

$$x_1^{2/3} + ... + x_n^{2/3} = a^{2/3}$$

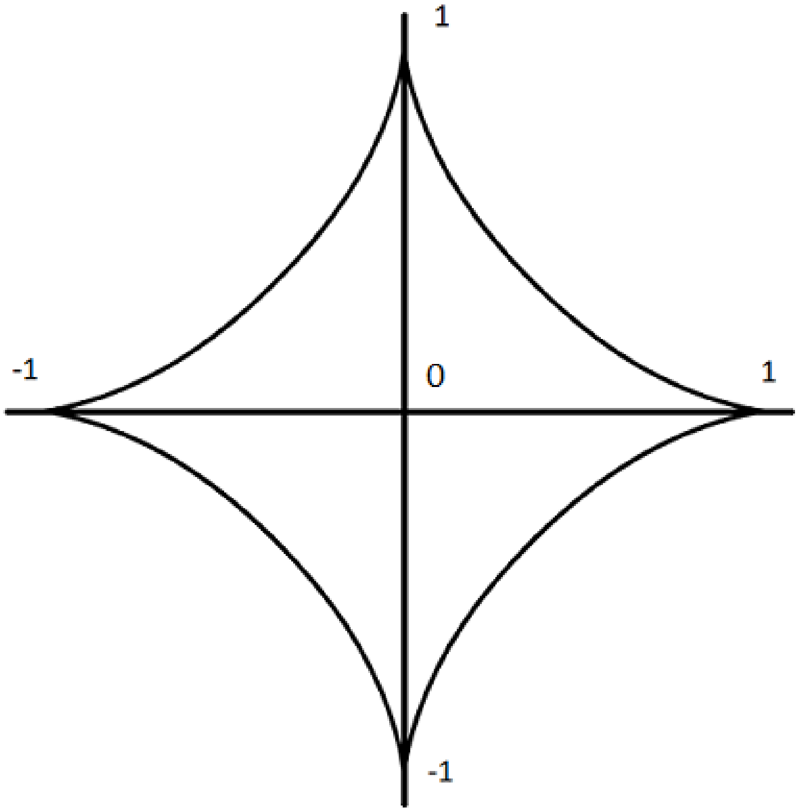
a spočítejme objem oblasti ohraničené trojrozměrnou jednotkovou asteroidou. Počítáme tedy objem

$$V(A_3(1)) = V\left(\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x|^{2/3} + |y|^{2/3} + |z|^{2/3} \leq 1\}\right).$$

$$V(A_3(1)) = 2^n \frac{\Gamma(1+1/p)^n}{\Gamma(1+n/p)} = 2^3 \frac{\Gamma(1+3/2)^3}{\Gamma(1+9/2)} = 8\frac{(3/2)^3\Gamma(3/2)^3}{9/2\Gamma(9/2)} =$$

$$= \frac{3 \cdot 2(1/2)^3\Gamma(1/2)^3}{7/2\Gamma(7/2)} = \frac{3 \cdot \pi^{3/2}}{2 \cdot 7 \cdot 5/2\Gamma(5/2)} = \frac{3\pi^{3/2}}{7 \cdot 5 \cdot 3/2\Gamma(3/2)} =$$

$$= \frac{2\pi^{3/2}}{7 \cdot 5 \cdot 1/2\Gamma(1/2)} = \frac{4\pi^{3/2}}{7 \cdot 5\sqrt{\pi}} = \frac{4\pi}{35}.$$



Obrázek 3.1: Asteroida s poloměrem 1

Nyní se podíváme na obecný případ. Z věty 3.7 získáme vzorec, který nám umožní vypočítat objem libovolné zobecněné jednotkové koule.

Věta 3.7. [6] *Nechť* $p_1, p_2, ..., p_n \in (0, \infty)$. *Pro objem* V_n *zobecněné jednotkové koule* $B_{p_1 p_2 \dots p_n}$ *platí:*

$$V_n = 2^n \frac{\Gamma(1 + 1/p_1)...\Gamma(1 + 1/p_n)}{\Gamma(1/p_1 + 1/p_2 + ... + 1/p_n + 1)}$$

Důkaz:

Vyjdeme ze známého vztahu

$$V_n = \int_{\mathbb{B}_{p_1 p_2 \dots p_n}} 1 dx$$

a použijeme substituci

$$\Phi(y_1, \dots, y_n) = \left(y_1^{2/p_1}, \dots, y_n^{2/p_n}\right) = (x_1, \dots, x_n).$$

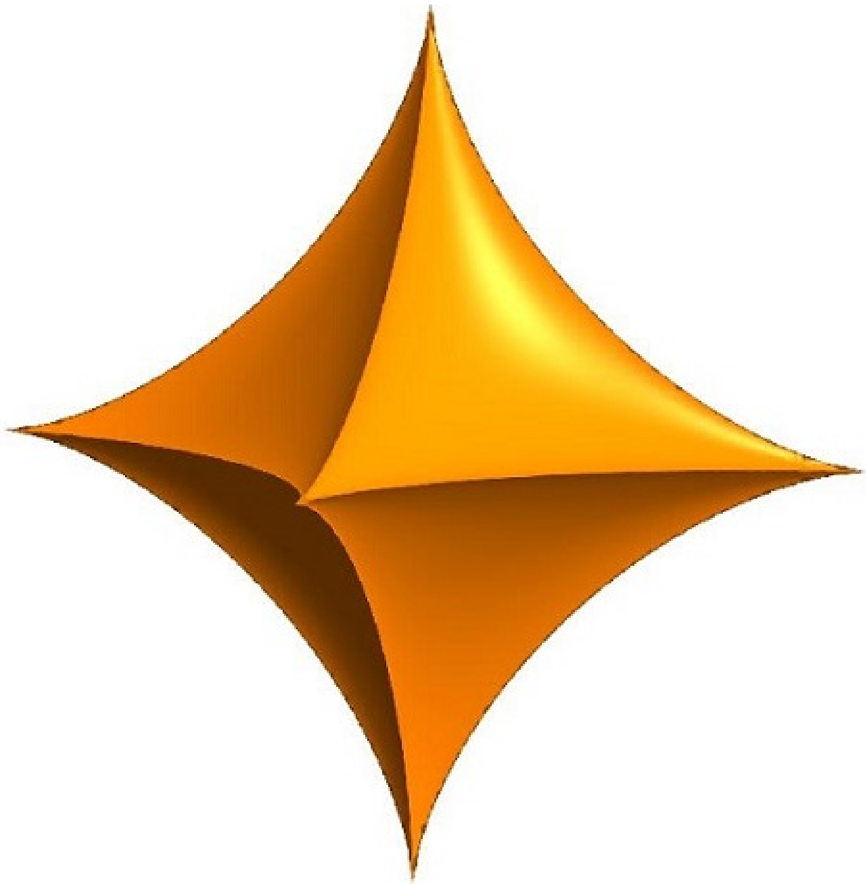
Jakobián tohoto zobrazení je

$$J_\Phi(y) = \frac{2}{p_1} ... \frac{2}{p_n} y_1^{\frac{2}{p_1}-1} ... y_n^{\frac{2}{p_n}-1}.$$

Použitím substituce dostaneme:

$$\int_{B_{p_1 p_2 \dots p_n}} 1 dx = \int_{|x_1|^{p_1} + ... + |x_n|^{p_n} \leq 1} 1 dx = \int_{y_1^2 + ... + y_n^2 \leq 1} |J_\Phi(y)| dy =$$

[6] Převzato z [6], str. 390



Obrázek 3.2: Trojrozměrná asteroida

$$= \frac{2^n}{p_1 ... p_n} \int_B |y_1|^{\frac{2}{p_1}-1} ... |y_n|^{\frac{2}{p_n}-1} dy$$

Jako další krok důkazu ověříme, že platí

$$I(\alpha_1, ..., \alpha_n) := \int_B |y_1|^{\alpha_1} ... |y_n|^{\alpha_n} dy = \frac{\Gamma(\frac{\alpha_1+1}{2}) ... \Gamma(\frac{\alpha_n+1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha_1+...+\alpha_n+n}{2}+1)}.$$

Nejprve použijeme Fubiniovu větu a dostaneme:

$$I(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \int_{-1}^{1} |x_1|^{\alpha_1} \left(\int_{x_2^2+...+x_n^2 \leq 1-x_1^2} |x_2|^{\alpha_2} ... |x_n|^{\alpha_n} dx_2 ... dx_n \right) dx_1.$$

Množina, přes kterou se integruje ve vnitřním integrálu, je koule o poloměru $\sqrt{1-x_1^2}$. Označíme-li $r := \sqrt{1-x_1^2}$ tento poloměr a použijeme-li substituci:

$$\Psi(y_2, \ldots, y_n) = r(y_2, \ldots, y_n) = (ry_2, \ldots, ry_n) = (x_2, \ldots, x_n),$$

jejíž jakobián je

$$J_\Psi(y) = r^{(n-1)},$$

dostaneme vztah

$$\int_{x_2^2+...+x_n^2 \leq r^2} |x_2|^{\alpha_2} ... |x_n|^{\alpha_n} dx_2 ... dx_n =$$

$$= \int_{y_2^2+...+y_n^2 \leq 1} r^{(n-1)+\alpha_2+...+\alpha_n} |y_2|^{\alpha_2} ... |y_n|^{\alpha_n} dy_2 ... dy_n$$

Celkem tedy máme:

$$I(\alpha_1,...,\alpha_n)=\int_{-1}^{1}|x_1|^{\alpha_1}(1-x_1^2)^{\frac{n-1+\alpha_2+...+\alpha_n}{2}}\left(\int_{y_2^2+...+y_n^2\leq 1}|y_2|^{\alpha_2}...|y_n|^{\alpha_n}dy_2...dy_n\right)dx_1=$$

$$=2\left(\int_0^1 x_1^{\alpha_1}(1-x_1^2)^{\frac{n-1+\alpha_2+...+\alpha_n}{2}}dx_1\right).\left(\int_{y_2^2+...+y_n^2\leq 1}|y_2|^{\alpha_2}...|y_n|^{\alpha_n}dy_2...dy_n\right).$$

Pomocí substituce $t=x_1^2$ upravíme předchozí integrál do tvaru:

$$\left(\int_0^1 t^{\frac{\alpha_1-1}{2}}(1-t)^{\frac{n+1+\alpha_2+...+\alpha_n}{2}-1}dt\right)\left(\int_{y_2^2+...+y_n^2\leq 1}|y_2|^{\alpha_2}...|y_n|^{\alpha_n}dy_2...dy_n\right).$$

S použitím Poznámky 3.5 (b) dostaneme následující rekurzivní vztah:

$$I(\alpha_1,...,\alpha_n)=\frac{\Gamma(\frac{\alpha_1+1}{2})\Gamma(\frac{\alpha_2+...+\alpha_n+n+1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha_1+...+\alpha_n+n+2}{2})}.I(\alpha_2,...,\alpha_n).$$

$(n-1)$-násobnou aplikací tohoto vztahu získáme:

$$I(\alpha_1,...,\alpha_n)=\frac{\Gamma(\frac{\alpha_1+1}{2})...\Gamma(\frac{\alpha_{n-1}+1}{2})\frac{\alpha_n+1}{2}\Gamma(\frac{\alpha_n+1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha_1+...+\alpha_n+n+2}{2})}.I(\alpha_n).$$

A jelikož platí:

$$I(\alpha_n)=\int_{x^2\leq 1}|x|^{\alpha_n}dx=2\int_0^1 x^{\alpha_n}dx=\frac{2}{\alpha_n+1},$$

dokázali jsme, že

$$I(\alpha_1,...,\alpha_n)=\frac{\Gamma(\frac{\alpha_1+1}{2})...\Gamma(\frac{\alpha_n+1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha_1+...+\alpha_n+n}{2}+1)}.$$

Nyní stačí zvolit $\alpha_k=2/p_k-1$ pro každé $k\in\{1,...,n\}$ a dostáváme:

$$I(2/p_1-1,...,2/p_n-1)=\frac{\Gamma(\frac{1}{p_1})...\Gamma(\frac{1}{p_n})}{\Gamma(\frac{1}{p_1}+...+\frac{1}{p_n}+1)},$$

odkud plyne dokazovaná rovnost:

$$V_n=2^n\frac{1}{p_1}...\frac{1}{p_1}I(2/p_1-1,...,2/p_n-1)=2^n\frac{\Gamma(\frac{1}{p_1})...\Gamma(\frac{1}{p_n})}{\Gamma(\frac{1}{p_1}+...+\frac{1}{p_n}+1)}.$$

□

Věta 3.6 samozřejmě plyne z věty 3.7 jakožto její speciální případ, z didaktických důvodů je tu však uvedena samostatně.

Následující dvě věty popisují limitní chování objemů n-rozměrných koulí pro n jdoucí do nekonečna. První z nich se týká eukleidovských prostorů a druhá je zobecněním příslušného tvrzení na prostory s libovolnou normou $\|\cdot\|_p$.

Věta 3.8. [7] *Nechť $r>0$. Pro objem $V_n(r)$ n-rozměrné koule $B\subset(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_2)$ o poloměru r platí*

$$\lim_{n\to\infty}V_n(r)=0.$$

[7]Převzato z [7], str. 105

Důkaz:

Dokážeme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} n^{\frac{n+1}{2}} V_n(r)$ konverguje právě tehdy, když $0 < r < \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}$. Odtud plyne konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} V_n(r)$ pro všechna reálná $r > 0$. Jelikož například $\sum_{n=0}^{\infty} n^{\frac{n+1}{2}} V_n(\frac{1}{2\pi\mathrm{e}})$ konverguje, ze srovnávacího kritéria a ze vztahu $V_n(ar) = a^n V_n(r)$ dostaneme, že i $\sum_{n=0}^{\infty}(2\pi\mathrm{e}r)^n V_n(\frac{1}{2\pi\mathrm{e}}) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(r)$ konverguje. Dokazovaná limita je nutnou podmínkou konvergence této řady. To, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} V_n(r)$ konverguje, znamená nejen konvergenci objemů $V_n(r)$ k nule, ale poskytuje nám to informaci o rychlosti této konvergence. Dokážeme tedy silnější tvrzení.
Platí $V_n(r) = r^n V_n(1)$, a tedy z věty 3.6, kde zvolíme $p = 2$, dostaneme následující rovnosti

$$V_n(r) = r^n 2^n \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2})^n}{\Gamma(1+\frac{n}{2})} = r^n 2^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \Gamma(\frac{1}{2})^n}{\Gamma(1+\frac{n}{2})} = \frac{r^n \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}.$$

S pomocí Stirlingova vzorce (poznámka 3.5 (e))

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n} = 1,$$

kde místo n dosadíme $n/2$, dostaneme

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{2\mathrm{e}}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{r^n \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \frac{\sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{2\mathrm{e}}\right)^{\frac{n}{2}}}{r^n \pi^{\frac{n}{2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} V_n(r) \frac{\sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{2\mathrm{e}}\right)^{\frac{n}{2}}}{r^n \pi^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n\to\infty} V_n(r) \frac{\sqrt{\pi} n^{\frac{n+1}{2}}}{r^n (2\pi\mathrm{e})^{\frac{n}{2}}}.$$

Nyní využijeme toho, že pokud limita nějaké posloupnosti a_n je rovna jedné, potom i posloupnost $(a_n)^{\frac{1}{n}}$ má stejnou limitu. Pokud totiž $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, pak platí

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\ln\left((a_n)^{\frac{1}{n}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(a_n)} = 1,$$

neboť limita exponentu $\frac{1}{n}\ln(a_n)$ je 0. Zmíněná implikace tedy skutečně platí. Tedy máme

$$1 = \lim_{n\to\infty} (V_n(r))^{\frac{1}{n}} \frac{\pi^{\frac{1}{2n}} n^{\frac{n+1}{2n}}}{r\sqrt{2\pi\mathrm{e}}} = \lim_{n\to\infty} (V_n(r) n^{\frac{n+1}{2}})^{\frac{1}{n}} \lim_{n\to\infty} \frac{\pi^{\frac{1}{2n}}}{r\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}.$$

Odtud již snadno dostaneme, že

$$\lim_{n\to\infty} (V_n(r) n^{\frac{n+1}{2}})^{\frac{1}{n}} = r\sqrt{2\pi\mathrm{e}}.$$

K rozhodnutí o konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} n^{\frac{n+1}{2}} V_n(r)$ použijeme Cauchyho odmocninové kritérium, které říká, že tato řada konverguje, pokud $r\sqrt{2\pi\mathrm{e}} < 1$, tedy pro $r \in (0, \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}]$ a diverguje, pokud $r\sqrt{2\pi\mathrm{e}} > 1$, tedy pro $r > \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}$. V případě, že $r = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}$, máme

$$1 = \lim_{n\to\infty} V_n(r) \frac{\sqrt{\pi} n^{\frac{n+1}{2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}\right)^n (2\pi\mathrm{e})^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n\to\infty} V_n(r)\sqrt{\pi} n^{\frac{n+1}{2}},$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} V_n(r) n^{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \neq 0.$$

V tomto případě tedy řada diverguje, protože její členy nejdou k nule.

□

Předpoklad $B \subset (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ z předchozí věty lze ve skutečnosti zeslabit a lze uvažovat jakýkoliv normovaný prostor $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ s přípustnou hodnotou p, jak ukazuje další věta. Uvedeme zde dva důkazy, z nichž jeden je elementární a druhý využívá Stirlingův vzorec.

Věta 3.9. *Nechť $r > 0$ a $p > 0$. Pro objem $V_n(r)$ n-rozměrné koule $B \subset (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ o poloměru r platí*

$$\lim_{n\to\infty} V_n(r) = 0.$$

Důkaz (elementární):

Z věty 3.6 máme

$$V_n(r) = 2^n r^n \frac{\Gamma(1+1/p)^n}{\Gamma(1+n/p)}.$$

Výraz $\Gamma(1+1/p)$ je konstantní. Označíme $c = \Gamma(1+1/p)$ a pro $(2rc) \geq 1$ dostáváme:

$$V_n(r) = 2^n r^n \frac{c^n}{\Gamma(1+n/p)} \leq \frac{((2rc)^p)^{n/p}}{(\lfloor 1+n/p \rfloor)!} \leq \frac{((2rc)^p)^{\lfloor n/p \rfloor + 1}}{(\lfloor 1+n/p \rfloor)!} = (2rc)^p \frac{((2rc)^p)^{\lfloor n/p \rfloor}}{(\lfloor 1+n/p \rfloor)!}.$$

Jelikož pro libovolnou reálnou konstantu k platí $\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{n!} = 0$, výraz na pravé straně sledu nerovností jde k nule pro n jdoucí do nekonečna. Pokud platí $(2rc) < 1$, pak zřejmě výraz $2^n r^n \frac{c^n}{\Gamma(1+n/p)}$ má také limitu nula pro n jdoucí do nekonečna. Tedy pro $(2rc) < 1$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} V_n(r) = \lim_{n\to\infty} 2^n r^n \frac{c^n}{\Gamma(1+n/p)} = 0.$$

Jelikož ze zřejmého důvodu platí $V_n(r) \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, dostáváme pro $(2rc) \geq 1$:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} V_n(r) \leq \lim_{n\to\infty} (2rc)^p \frac{((2rc)^p)^{\lfloor n/p \rfloor}}{(\lfloor 1+n/p \rfloor)!} = 0$$

a z věty o dvou strážnících tedy dostáváme, že $\lim_{n\to\infty} V_n = 0$ a důkaz je hotov.

□

Důkaz (s použitím Stirlingova vzorce):

Opět využijeme vztah z věty 3.6 a dále použijeme Stirlingův vzorec

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(1+n)}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Platí

$$\lim_{n\to\infty} V_n(r) = \lim_{n\to\infty} 2^n r^n \frac{\Gamma(1+1/p)^n}{\Gamma(1+n/p)} = \lim_{k\to\infty} 2^{pk} r^{pk} \frac{\Gamma(1+1/p)^{pk}}{\Gamma(1+k)} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} 2^{pk} r^{pk} \frac{\Gamma(1+1/p)^{pk}}{\Gamma(1+k)} \frac{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} 2^{pk} r^{pk} \frac{\Gamma(1+1/p)^{pk}}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k}{\Gamma(1+k)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \left[\frac{(2r\Gamma(1+1/p))^p e}{k}\right]^k = 0.$$

Poslední rovnost plyne ze známé limity $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{q}{k}\right)^k = 0,\ \forall q \in \mathbb{R}$, kde zvolíme $q = (2r\Gamma(1+1/p))^p e$.

□

V další větě dokážeme, že jednotková eukleidovská koule má největší objem v pětirozměrném prostoru. Tento výsledek opět dokážeme v rámci obecnějšího tvrzení. Hodnotu objemu jednotkové eukleidovské koule v jednorozměrném prostoru lze vypočítat snadno, neboť tato koule je množina všech bodů na přímce, které jsou od počátku vzdálené méně než 1, tedy pro její objem $V_1(1)$ platí $V_1(1) = 2$. Podobně $V_2(1) = \pi \approx 3{,}14$, jelikož $V_2(1)$ je kruh o poloměru 1 a $V_3(1)$ jakožto objem koule v běžném významu (tedy trojrozměrné) je roven $\frac{4}{3}\pi \approx 4{,}19$. Pro objem $V_4(1)$ čtyřrozměrné koule už nemáme jednoduchý vzorec ze střední školy, použijeme tedy větu 3.6. Po dosazení $p = 2$ a $n = 4$ dostaneme

$$V_4(1) = 2^4 \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2})^4}{\Gamma(1+\frac{4}{2})} = 2^4 \frac{\left(\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\right)^4}{\Gamma(3)} = 16 \frac{\frac{1}{16}\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{2} \approx 4{,}93.$$

Konečně pro $p = 2$ a $n = 5$ máme

$$V_5(1) = 2^5 \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2})^5}{\Gamma(1+\frac{5}{2})} = 2^5 \frac{\left(\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\right)^5}{\frac{5}{2}\Gamma(\frac{5}{2})} = \frac{\pi^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{\pi^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\pi^{\frac{5}{2}}}{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}} = \frac{8}{15}\pi^2 \approx 5{,}26.$$

Pro $n \in \{1,2,3,4,5\}$ je tedy funkce vyjadřující objem jednotkové koule rostoucí. V následující větě však ukážeme, že pro každou eukleidovskou kouli o libovolném poloměru $r > 0$ existuje hraniční dimenze, od které už je funkce $V_n(r)$ klesající. Snadným výpočtem pak zjistíme, že pro jednotkovou kouli je tato hraniční dimenze rovna 5.

Věta 3.10. [8] *Pro posloupnost $\{V_n(1)\}_{n=1}^{\infty}$, která vyjadřuje objem n-rozměrné jednotkové koule $B \subset (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ v závislosti na dimenzi $n \in \mathbb{N}$, platí, že $V_n(1)$ nabývá svého maxima pro $n = 5$.*

Důkaz:

S pomocí vztahu $V_n(r) = r^n V_n(1)$ vyjádříme nejdříve ze vzorce ve větě 3.6 explicitně výrazy pro $V_{2n}(r)$ a $V_{2n+1}(r)$. Pro první výraz ihned dostáváme

$$V_{2n}(r) = \frac{r^{2n}\pi^n}{n!}.$$

[8] Převzato z [7], str. 106

Vzorec pro $V_{2n+1}(r)$ získáme následovně

$$V_{2n+1}(r) = r^{2n+1}2^{2n+1}\frac{\Gamma(1+\frac{1}{2})^{2n+1}}{\Gamma(1+\frac{2n+1}{2})} = r^{2n+1}2^{2n+1}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\Gamma(\frac{1}{2})^{2n+1}}{\Gamma(1+n+\frac{1}{2})} =$$

$$= r^{2n+1}\frac{(\sqrt{\pi})^{2n+1}}{(n+\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})} = r^{2n+1}\frac{\pi^n\sqrt{\pi}}{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}.$$

Nyní rozšíříme zlomek výrazem 2^{n+1} a dostaneme

$$V_{2n+1}(r) = \frac{(\pi r)^n(2r)^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}.$$

Tvrdíme, že od jistého členu je posloupnost $\{V_n(r)\}_{n=1}^{\infty}$ klesající. K tomu stačí dokázat, že pro všechna dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{V_{2n}(r)}{V_{2n+1}(r)} = \frac{1}{2r}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} > 1, \quad \frac{V_{2n-1}(r)}{V_{2n}(r)} = \frac{1}{\pi r}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} > 1.$$

To nastane právě tehdy, když pro r budou platit obě následující nerovnosti zároveň

$$r < \frac{1}{2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} = x_n, \quad r < \frac{1}{\pi}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} = y_n.$$

Chceme tedy ukázat, že pro každé $r > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ platí $x_n > r$ a zároveň $y_n > r$. K tomu nám stačí dokázat, že $\{x_n\}, \{y_n\}$ jsou rostoucí a neomezené. Ukažme, že tyto vlastnosti má x_n, důkaz téhož pro y_n je analogický. Platí

$$x_n = \frac{1}{2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right),$$

tedy zřejmě $x_{n+1} = x_n + \frac{x_n}{2n+2}$, odkud ihned plyne, že x_n je rostoucí. Protože zároveň $x_1 = \frac{3}{2}$, platí, že $x_n > 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Můžeme tedy odhadnout x_n takto

$$x_n = x_{n-1} + \frac{x_{n-1}}{2n} > x_{n-1} + \frac{1}{2n} = x_{n-2} + \frac{x_{n-2}}{2(n-1)} + \frac{1}{2n} >$$

$$> x_{n-2} + \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2n} > \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2n} =$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i} > \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Tedy vidíme, že x_n je neomezená.

V našem případě, kde $r = 1$, potřebujeme, aby

$$1 < \frac{1}{2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}, \quad 1 < \frac{1}{\pi}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}.$$

Spočítejme prvních několik hodnot x_n a y_n.

$$x_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4} < 1$$

$$y_1 = \frac{1}{\pi} \cdot 2 = \frac{2}{\pi} < 1$$
$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{16} < 1$$
$$y_2 = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3\pi} < 1$$
$$x_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} = \frac{105}{96} > 1$$
$$y_3 = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{48}{15\pi} > 1$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}, \quad n > 2$ tedy platí, že $x_n > 1$ a $y_n > 1$. Z předchozího již víme, že platí

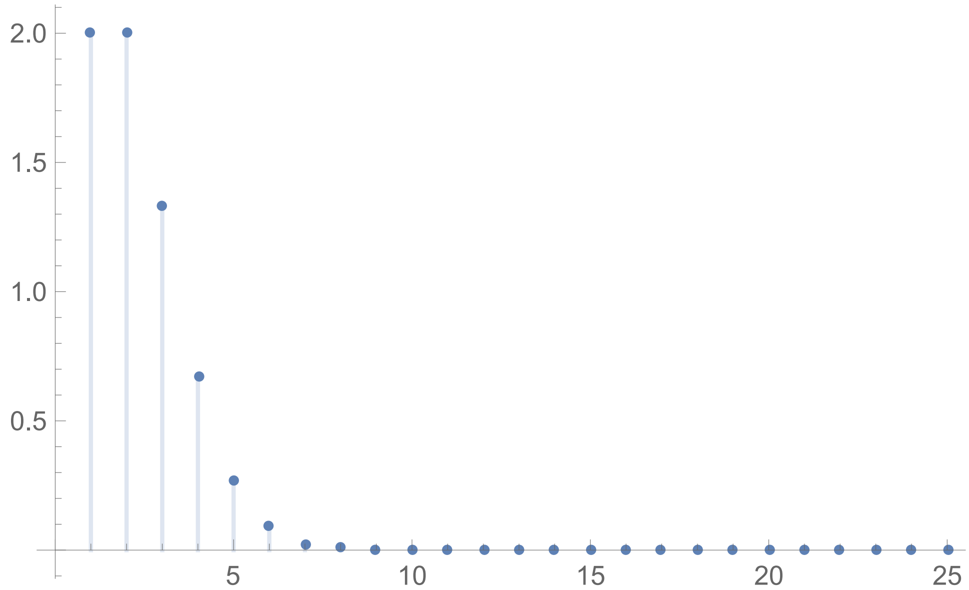
$$V_1(1) < V_2(1) < V_3(1) < V_4(1) < V_5(1)$$

a z právě dokázaného máme i

$$V_5(1) > V_6(1) > V_7(1) > \cdots .$$

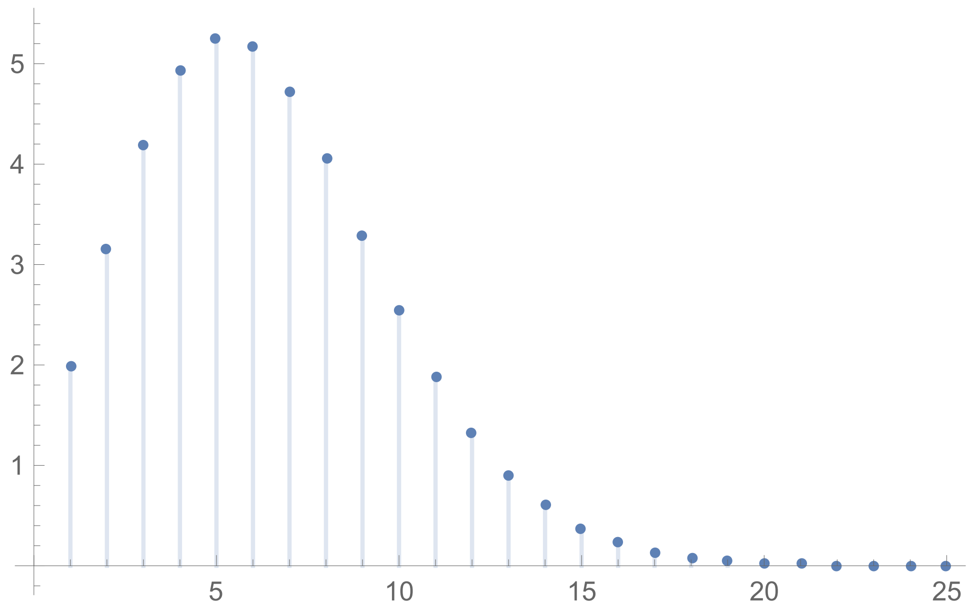
□

Další věta říká, jak se chová posloupnost jednotkových koulí $V_n(1)$ v závislosti na parametru $p \geq 1$ v definici normy daného prostoru. Při pohledu na následující tři obrázky se nabízí hypotéza, že pro každé $p \geq 1$ objem jednotkových koulí v prostorech l_p^n s rostoucí dimenzí n nejdříve roste (pro $p = 1$ neklesá) a potom od určité dimenze klesá. Jistou představu o tom, jak se posloupnost objemů chová nám dává již věta 3.9, která říká, že tyto objemy jdou v limitě k nule, tedy členy posloupnosti objemů se musí v jistém smyslu zmenšovat, avšak neříká nám nic o monotonii. Ve větě 3.14 dokážeme, že posloupnost objemů skutečně lze rozdělit globálním maximem na dva monotónní úseky, z nichž první je neklesající a druhý je nerostoucí.



Obrázek 3.3: Závislost objemu jednotkových koulí v prostorech l_1^n na dimenzi n

Nejprve definujeme dva pojmy, které budeme dále používat.



Obrázek 3.4: Závislost objemu jednotkových koulí v prostorech l_2^n na dimenzi n

Definice 3.11. Posloupnost reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá unimodální, pokud je neklesající nebo pokud existuje $i \in \mathbb{N}$ takové, že platí
$x_1 \leq x_2 \cdots \leq x_i \geq x_{i+1} \geq \ldots$

Definice 3.12. Posloupnost reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá logaritmicky konkávní, pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ platí $x_{n-1}x_{n+1} \leq x_n^2$.

Ještě než zformulujeme závěrečnou větu, dokážme jedno pomocné lemma, které v této větě využijeme.

Lemma 3.13. [9] *Každá logaritmicky konkávní posloupnost s kladnými členy je unimodální.*

Důkaz:

Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálná posloupnost a platí

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; x_n > 0,$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\; n \geq 2 \;\; x_{n-1}x_{n+1} \leq x_n^2.$$

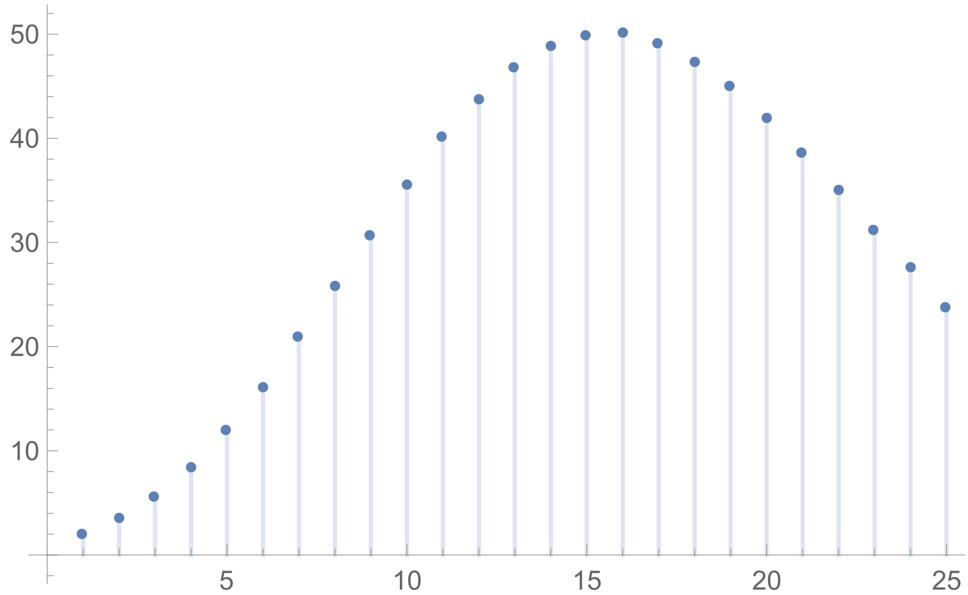
Nerovnost v definici logaritmické konkávnosti vydělíme kladným součinem $x_{n-1}x_n$ a dostaneme

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{x_n}{x_{n-1}}.$$

Pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$, pak je posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající, a tedy je unimodální. V opačném případě zvolme nejmenší $n_0 \in \mathbb{N}$ s vlastností $\frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}} < 1$. Pak ale platí

$$1 > \frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}} \geq \frac{x_{n_0+2}}{x_{n_0+1}} \geq \frac{x_{n_0+3}}{x_{n_0+2}} \geq \cdots .$$

[9] Převzato z [8], str. 121



Obrázek 3.5: Závislost objemu jednotkových koulí v prostorech l_3^n na dimenzi n

Odtud plyne, že

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n_0} \geq x_{n_0+1} \geq x_{n_0+2} \geq \cdots .$$

$\square$

Věta 3.14. *Nechť $p > 0$ a $\{V_n(1)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost objemů jednotkových koulí $B_n(1) \subset (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, potom tato posloupnost je logaritmicky konkávní, a tedy unimodální.*

Důkaz:

Pro větší přehlednost v tomto důkazu pišme V_n místo $V_n(1)$. Posloupnost $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ má zřejmě kladné členy, stačí tedy díky lemmatu 3.13 dokázat, že je logaritmicky konkávní. Chceme tedy dokázat, že platí

$$V_{n-1}V_{n+1} \leq V_n^2.$$

Upravme nejdříve levou stranu nerovnosti.

$$V_{n-1}V_{n+1} = \frac{2^{n-1}\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)^{n-1}}{\Gamma\left(1+\frac{n-1}{p}\right)} \cdot \frac{2^{n+1}\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)^{n+1}}{\Gamma\left(1+\frac{n+1}{p}\right)} = \frac{2^{2n}\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)^{2n}}{\Gamma\left(1+\frac{n-1}{p}\right)\Gamma\left(1+\frac{n+1}{p}\right)}$$

Nyní rozepišme pravou stranu.

$$V_n^2 = \frac{2^{n}\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)^{n}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)} \cdot \frac{2^{n}\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)^{n}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)} = \frac{2^{2n}\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)^{2n}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)^2}$$

Na levé i pravé straně naší nerovnosti je výraz $2^{2n}\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)^{2n}$, můžeme tedy obě strany tímto výrazem vydělit. Zbývá tedy ukázat, že

$$\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{n-1}{p}\right)\Gamma\left(1+\frac{n+1}{p}\right)} \leq \frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)^2}$$

nebo ekvivalentně

$$\frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{n-1}{p}\right)} \le \frac{\Gamma\left(1+\frac{n+1}{p}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)}.$$

Definujeme funkci f předpisem

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(1+\frac{x+1}{p}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{x}{p}\right)}$$

a snadno nahlédneme, že k dokončení důkazu stačí ukázat, že funkce f je rostoucí. Udělejme to tak, že zderivujeme funkci f a dokážeme, že tato derivace je kladná.

$$f'(x) = \frac{\Gamma'\left(1+\frac{x+1}{p}\right)\frac{1}{p}\Gamma\left(1+\frac{x}{p}\right) - \Gamma\left(1+\frac{x+1}{p}\right)\Gamma'\left(1+\frac{x}{p}\right)\frac{1}{p}}{\Gamma\left(1+\frac{x}{p}\right)^2} =$$

$$= \frac{\Gamma'\left(1+\frac{x+1}{p}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{x+1}{p}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(1+\frac{x+1}{p}\right)}{p\cdot\Gamma\left(1+\frac{x}{p}\right)} - \frac{\Gamma'\left(1+\frac{x}{p}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{x}{p}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(1+\frac{x+1}{p}\right)}{p\cdot\Gamma\left(1+\frac{x}{p}\right)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(1+\frac{x+1}{p}\right)}{p\cdot\Gamma\left(1+\frac{x}{p}\right)}\left[\frac{\Gamma'\left(1+\frac{x+1}{p}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{x+1}{p}\right)} - \frac{\Gamma'\left(1+\frac{x}{p}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{x}{p}\right)}\right].$$

Je zřejmé, že výrazy $\Gamma\left(1+\frac{x+1}{p}\right)$, $\Gamma\left(1+\frac{x}{p}\right)$, p jsou kladné a to, že i výraz v hranaté závorce je kladný, plyne z poznámky 3.5 (d). Tento výraz můžeme totiž přepsat do tvaru

$$\frac{\Gamma'\left(1+\frac{x+1}{p}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{x+1}{p}\right)} - \frac{\Gamma'\left(1+\frac{x}{p}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{x}{p}\right)} = \Psi\left(1+\frac{x+1}{p}\right) - \Psi\left(1+\frac{x}{p}\right),$$

kde Ψ je takzvaná digama funkce definovaná vztahem $\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. Podle poznámka 3.5 (d) platí, že $\Psi'(x) > 0$ pro $x > 0$, a tedy funkce $\Psi(x)$ je rostoucí, což dokazuje, že výraz v hranaté závorce je kladný. Tím pádem funkce f je skutečně rostoucí a věta je dokázána.

□

Na závěr této kapitoly se ještě podíváme na souvislost parametru p v definici normy a dimenze, v níž nabývá objem jednotkové koule v příslušné normě svého maxima.

Věta 3.15. *Posloupnost objemů $\{V_n(1)\}$ jednotkových koulí $B_n(1) \subset (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ nabývá maxima pro $n = 1$ právě tehdy, když $p \in (0, 1]$.*

Důkaz:

Jak již víme, vzorec pro $V_n(1)$ vypadá takto

$$V_n(1) = 2^n \frac{\Gamma(1+1/p)^n}{\Gamma(1+n/p)},$$

a z předchozí věty vyplývá, že pokud existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $V_{n_0}(1) \geq V_{n_0+1}(1)$, potom $V_{n_0}(1) \geq V_n(1)$ pro každé $n > n_0$. Tedy k tomu, abychom ukázali, že posloupnost $\{V_n(1)\}$ nabývá maxima pro $n = 1$, stačí ukázat, že $V_2(1) \leq V_1(1) = 2$. Chceme tedy dokázat, že nerovnost

$$2 \geq 2^2 \frac{\Gamma(1+1/p)^2}{\Gamma(1+2/p)}$$

platí právě tehdy, když $p \in (0, 1]$. Vydělením obou stran čtyřmi upravíme nerovnost do tvaru

$$\frac{1}{2} \geq \frac{\Gamma(1+1/p)^2}{\Gamma(1+2/p)}.$$

Zaprvé snadno ověříme, že pro $p = 1$ nabývá pravá strana hodnoty $\frac{1}{2}$ a zadruhé ukážeme, že funkce $\frac{\Gamma(1+1/p)^2}{\Gamma(1+2/p)}$ je rostoucí, a tedy uvedená nerovnost platí skutečně pouze pro hodnoty p z intervalu $(0, 1]$. Derivujme tedy tuto funkci a ukažme, že tato derivace je kladná.

$$\left(\frac{\Gamma(1+\frac{1}{p})^2}{\Gamma(1+\frac{2}{p})}\right)' = 2\frac{-\Gamma(1+\frac{1}{p})\Gamma'(1+\frac{1}{p})\Gamma(1+\frac{2}{p}) + \Gamma(1+\frac{1}{p})^2\Gamma'(1+\frac{2}{p})}{p^2\Gamma(1+\frac{2}{p})^2} =$$

$$= \frac{2}{p^2}\left(\frac{\Gamma'(1+\frac{2}{p})\Gamma(1+\frac{1}{p})^2}{\Gamma(1+\frac{2}{p})\Gamma(1+\frac{2}{p})} - \frac{\Gamma'(1+\frac{1}{p})\Gamma(1+\frac{1}{p})^2}{\Gamma(1+\frac{1}{p})\Gamma(1+\frac{2}{p})}\right) =$$

$$= \frac{2\Gamma(1+\frac{1}{p})^2}{p^2\Gamma(1+\frac{2}{p})}\left(\frac{\Gamma'(1+\frac{2}{p})}{\Gamma(1+\frac{2}{p})} - \frac{\Gamma'(1+\frac{1}{p})}{\Gamma(1+\frac{1}{p})}\right) = \frac{2\Gamma(1+\frac{1}{p})^2}{p^2\Gamma(1+\frac{2}{p})}\left[\Psi\left(1+\frac{2}{p}\right) - \Psi\left(1+\frac{1}{p}\right)\right],$$

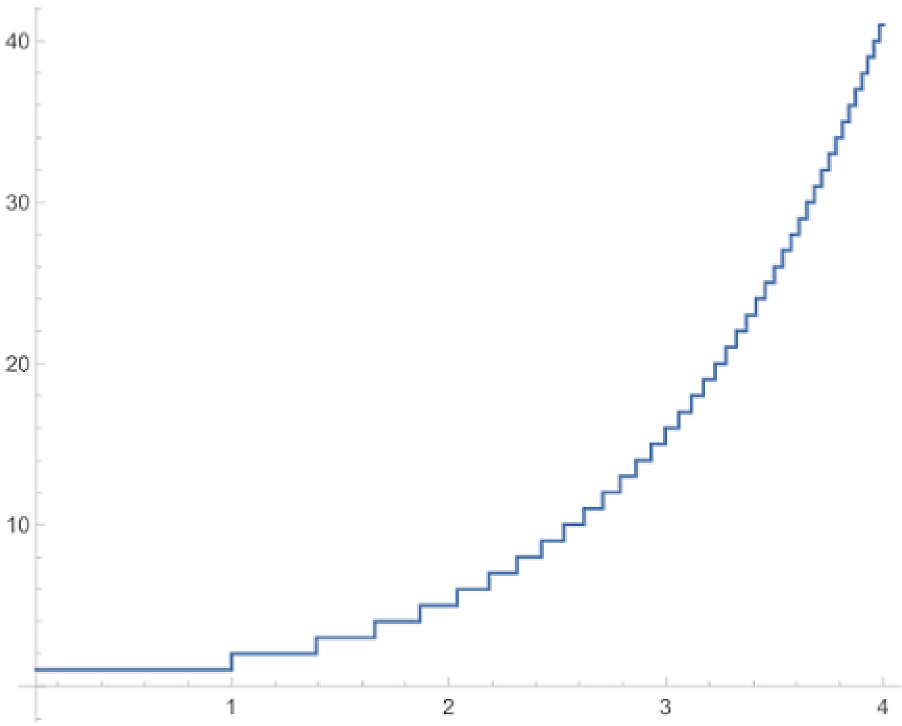
kde

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

tak jako v předchozí větě, je digama funkce, která je podle poznámky 3.5 rostoucí, a tedy výraz v hranaté závorce je kladný. Ze zřejmého důvodu je kladný i výraz před závorkou, tedy derivace naší funkce je kladná, a tím pádem funkce na pravé straně dokazované nerovnosti je rostoucí. Spolu s faktem, že tato funkce nabývá v bodě 1 hodnoty $1/2$, odtud vyplývá, že tato nerovnost skutečně platí právě tehdy, když $p \in (0, 1]$.

$\square$

Obrázek 3.6 ukazuje, jak s rostoucí hodnotou parametru p roste i dimenze n, v níž nabývá posloupnost jednotkových koulí $B_n(1)$ v normě $\|\cdot\|_p$ svého maxima.



Obrázek 3.6: Závislost dimenze n, v níž nabývá objem $V_n(1)$ maxima, na hodnotě parametru p

Kapitola 4

π

4.1 Interval pro hodnoty π

Stejně jako objem koule také hodnota konstanty π je dávno známá a má se za samozřejmé, že je to iracionální číslo, které dnes umíme určit s téměř libovolmou přesností.

$\pi \approx 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230$

V této části se podíváme na to, jak se toto číslo může měnit, pokud budeme uvažovat jinou normu než eukleidovskou. Uvažujme tedy na prostoru $\mathbb{R}^2$ libovolnou normu $\|\cdot\|$ a definujme $\pi_{\|\cdot\|}$ jako poměr obvodu kruhu a dvojnásobku jeho poloměru měřenými touto normou. Vzhledem k vlastnostem normy stačí pracovat s jednotkovým kruhem. Uveďme příklad pro normu $\|\cdot\|_1$. Jednotkový kruh v této normě vypadá jako eukleidovský čtverec, jak je znázorněno na obrázku 4.1. Jeho obvod spočítáme jako čtyřnásobek délky vektoru $(1,0)-(0,1)$. Pro $\pi_{\|\cdot\|_1}$ tedy platí:

$$\pi_{\|\cdot\|_1} = 4\|(1,0)-(0,1)\|_1 \frac{1}{2} = 4\|(1,-1)\|_1 \frac{1}{2} = 4.$$

Nyní ještě definujme délku křivky a uveďme, jak ji lze ve speciálním případě počítat, což později využijeme.

Definice 4.1. Pro parametrizovanou křivku $f:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ definujeme její délku l vztahem

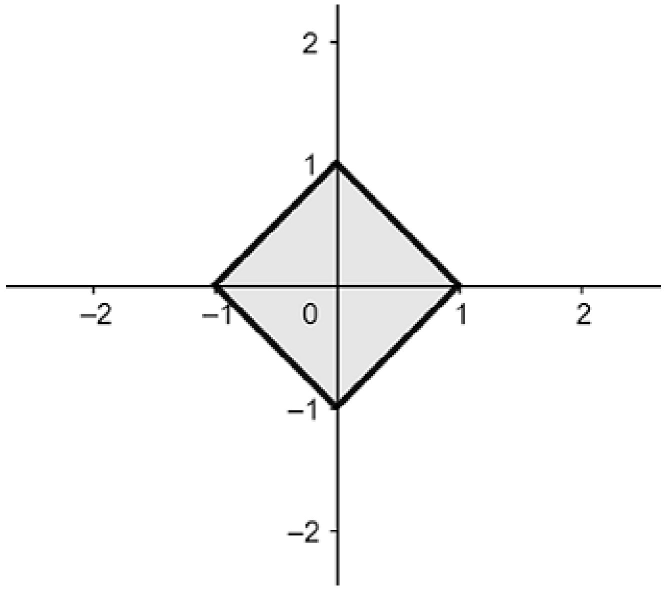
$$l = \sup_D \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|z_i - z_{i-1}\| \right\},$$

kde supremum se bere přes všechna dělení D intervalu $[0,1]$ s dělícími body $0 = u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_n = 1$, přičemž $z_j = f(u_j),\quad j\in\{0,\dots,n\}$.

My zde budeme pracovat hlavně s kružnicemi. Poznamenejme tedy, že každou kružnici budeme chápat jako prostou uzavřenou křivku a pro $n\in\mathbb{N}$ budeme dělením $D_n = \{z_0,\dots,z_n\}$ příslušným kružnici S rozumět takovou posloupnost bodů $z_0,\dots,z_n\in S$, pro kterou platí $z_j = f(u_j),\quad j\in\{0,\dots,n\}$, kde $f(u),\quad u\in[0,1]$ je nějaká parametrizace S a $u_j < u_k$ pro $j<k$.

Poznámka 4.2. Délku l po částech spojitě diferencovatelné parametrizované křivky $z:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ lze spočítat vzorcem:

$$l = \int_0^1 \|z'(u)\| du.$$



Obrázek 4.1: Jednotkový kruh v l_1^2

Ještě než formulujeme následující větu, dokážeme jedno pomocné lemma, které říká, že můžeme bez újmy na obecnosti pracovat pouze s normovanými prostory, které mají jisté speciální vlastnosti.

Lemma 4.3. [10] *Pro každou normu $\|\cdot\|$ na prostoru $\mathbb{R}^2$ existuje norma $\|\cdot\|_\star$ na $\mathbb{R}^2$ taková, že*

$$\pi_{\|\cdot\|} = \pi_{\|\cdot\|_\star}$$

a zároveň

$$\|(1,0)\|_\star = \|(0,1)\|_\star = 1 \quad \& \quad \|z\|_\star \geq \max\{|x|,|y|\}, \quad z = (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Důkaz:

Nechť S je jednotková kružnice v prostoru $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$. Nechť M je takový rovnoběžník, který obsahuje S a mezi všemi takovými má nejmenší obsah (nemusí být určen jednoznačně). Ukažme, že středy stran M leží na kružnici S. Předpokládejme tedy pro spor, že bod p je střed nějaké jeho strany a zároveň $\|p\| > 1$. Potom existuje bod p', který je vnitřním bodem úsečky s krajními body 0 a p takový, že $\|p'\| = 1$. Můžeme tedy nahradit strany obsahující p a $-p$ dvojicí rovnoběžných stran, které budou obsahovat body p' a $-p'$ a v těchto bodech se budou dotýkat S. To můžeme udělat proto, že S je konvexní. Jelikož obsah rovnoběžníka závisí pouze na délce strany, která se zmenšila díky tomu, že $\|p' - (-p')\| < \|p - (-p)\|$, a na vzdálenosti této strany a strany s ní rovnoběžné, která se nezměnila, celkový obsah se zmenší. Máme tedy rovnoběžník, jehož strany se dotýkají S, s menším obsahem než má M, což je spor. Nyní označme q_1, q_2 středy sousedních stran rovnoběžníka M a uvažme lineární transformaci T, která převádí bod q_1 na bod $(1,0)$ a bod q_2 na bod $(0,1)$. Zobrazení T tedy převádí rovnoběžník M na jednotkový čtverec N (vzhledem k eukleidovské normě) a jednotkovou kružnici S (vzhledem k normě $\|\cdot\|$) na jinou jednotkovou kružnici S', vzhledem k nějaké jiné normě,

[10] Převzato z [9], str. 87

kterou označíme $\|\cdot\|'$. Ukažme, že tato norma může být hledanou normou $\|\cdot\|_\star$. Jelikož S' se dotýká čtverce N v bodech $(1,0),(0,1),(-1,0),(-1,-1)$, platí, že $\|(1,0)\|' = \|(0,1)\|' = 1$ a protože $S' \subset N$, platí i $\|(x,y)\|' \geq \max\{|x|,|y|\}$ pro všechny body $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Hranice čtverce N je totiž množina právě těch bodů $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pro které platí $\max\{|x|,|y|\} = 1$, tedy pro každý bod $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ uvnitř tohoto čtverce platí $\max\{|x'|,|y'|\} < 1$. Hranice S' je jednotková kružnice, takže její body mají normu rovnou 1. Ukažme konečně, že $\pi_{\|\cdot\|} = \pi_{\|\cdot\|'}$. Uvažujme body $a,b \in S, \quad a \neq b$ a označme $\gamma = \|a-b\|$. Potom platí, že bod $c = \gamma^{-1}(a-b)$ má normu 1, a tedy leží na S, což znamená, že $Tc \in S'$. Máme tedy:

$$\|Ta - Tb\|' = \|T(a-b)\|' = \|\gamma T[\gamma^{-1}(a-b)]\|' = \gamma\|Tc\|' = \gamma = \|a-b\|.$$

Získáváme tedy $\pi_{\|\cdot\|} \leq \pi_{\|\cdot\|'}$ a opačnou nerovnost lze dokázat pomocí zobrazení T^{-1} inverzního k T.

□

Věta 4.4. [11] *a) Pro každou normu $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^2$ platí:* $3 \leq \pi_{\|\cdot\|} \leq 4$.
b) Pro každé α splňující $3 \leq \alpha \leq 4$ existuje norma $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^2$ taková, že $\pi_{\|\cdot\|} = \alpha$.

Důkaz:

Pro jednoduchost zápisu budeme v důkazu ztotožňovat prostory $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$.
a) Díky platnosti lemmatu 4.3 stačí uvažovat pouze prostory s normou, která splňuje podmínku, která je v tomto lemmatu uvedena. Nejprve ukažme, že $\pi_{\|\cdot\|} \leq 4$. Uvažujme jednotkovou kružnici S vzhledem k normě $\|\cdot\|$ a nechť $z_0, z_1, ..., z_n$ je posloupnost bodů v prvním kvadrantu, které leží na S a které jsou uspořádány vzestupně podle pořadí při průchodu S z bodu $[1,0]$ do $[0,1]$. Pokud označíme

$$z_i = (x_i, y_i), \quad i = 0, ..., n,$$

dostaneme z konvexity jednotkového kruhu ohraničeného S, že platí:

$$x_0 \geq x_1 \geq ... \geq x_n, \quad y_0 \leq y_1 \leq ... \leq y_n.$$

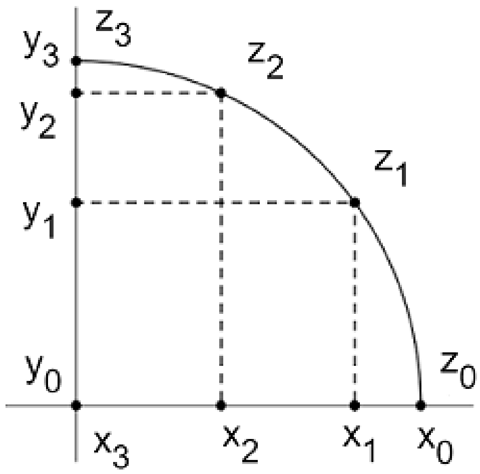
Dále platí:

$$\sum_{i=1}^{n} \|z_i - z_{i-1}\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|(x_i, y_i) - (x_i, y_{i-1})\| + \sum_{i=1}^{n} \|(x_i, y_{i-1}) - (x_{i-1}, y_{i-1})\| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |y_i - y_{i-1}| + \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| = 1 + 1 = 2$$

Přechodem k supremu získáváme, že délka S v prvním kvadrantu je nejvýše 2 a obdobně pro ostatní kvadranty. Tedy obvod jednotkového kruhu je nejvýše 8 a tím pádem platí $\pi_{\|\cdot\|} \leq 4$.
Nyní ukažme, že $3 \leq \pi_{\|\cdot\|}$. Uvažujme v prvním kvadrantu bod a, pro který platí $a \in S \cap S+1$, kde $S+1$ značí kružnici, která vznikne posunutím kružnice S o jednu jednotku ve směru osy x. Dále uvažujme bod b takový, že $b \in S \cap S-1$, který leží ve druhém kvadrantu. Pro bod b nyní platí $b = a-1$ a odtud dostáváme následující:

$$\pi_{\|\cdot\|} \geq \|a-1\| + \|b-a\| + \|-1-b\| = \|b\| + \|-1\| + \|-a\| = 1+1+1 = 3$$



Obrázek 4.2: Posloupnost bodů z_i

b) Pro důkaz tohoto tvrzení zvolme $t, 0 \leq t \leq 1$ a uvažujme šestiúhelník s vrcholy

$$(1,0),(t,1),(-1,1),(-1,0),(-t,-1),(1,-1).$$

Útvar ohraničený tímto šestiúhelníkem je kompaktní a konvexní množina, která je symetrická kolem počátku a obsahuje otevřenou kouli kolem počátku, tedy podle věty 2.9 existuje norma $\|\cdot\|$ taková, že tento útvar je jednotkový kruh vzhledem k této normě. Platí:

$$\pi_{\|\cdot\|} = \|(t,1)-(-1,1)\| + \|(1,0)-(t,1)\| + \|(1,-1)-(1,0)\| =$$

$$= \|(t+1,0)\|+\|(1-t,-1)\|+\|(0,-1)\| = (t+1)\|(1,0)\|+\|(1-t,-1)\|+\|(0,-1)\|$$

Body $(1,0),(1-t,-1),(0,-1)$ leží na jednotkové kružnici (na zvoleném šestiúhelníku), tedy mají normu 1, a tedy $\pi_{\|\cdot\|} = 3+t$.

$\square$

4.2 π je nejmenší $\pi_{\|\cdot\|_p}$

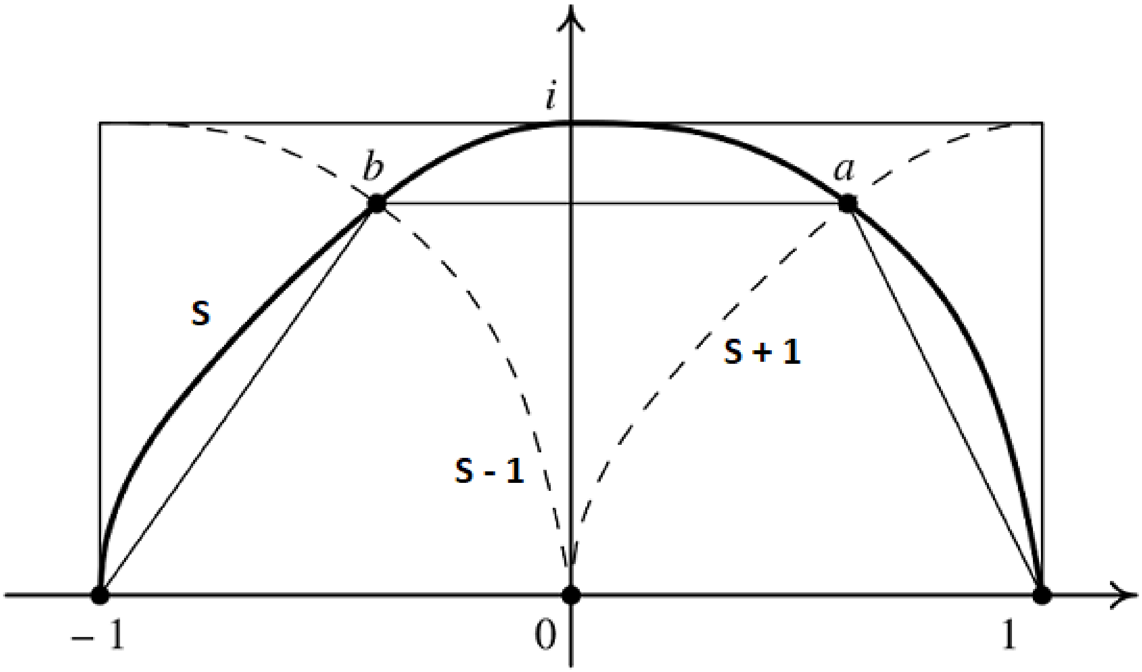
Ukažme nyní, že pokud budeme uvažovat pouze normy, které mají tvar $\|(x,y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$, bude omezení pro hodnotu $\pi_{\|\cdot\|} = \pi_{\|\cdot\|_p}$ ještě silnější. Konkrétně platí, že $\pi \leq \pi_{\|\cdot\|_p} \leq 4$. Nejprve však bude třeba dokázat několik tvrzení. Předpokládejme tedy, že na prostoru $\mathbb{R}^2$ je dána norma $\|\cdot\|_p$ pro nějaké $p \geq 1$. Jednotková kružnice se středem v počátku je množina

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^p + |y|^p = 1\}.$$

Parametrizujme tuto množinu v 1. kvadrantu předpisem

$$x = u^{1/p}, \quad y = (1-u)^{1/p}, \quad u \in [0,1].$$

[11] Převzato z [9], str. 88



Obrázek 4.3: Kružnice $S, S-1, S+1$

Máme tedy parametrizovanou křivku k, která leží v 1. kvadrantu a pro kterou platí

$$\left\|\frac{dk}{du}\right\|_p = \left(\left|\frac{dx}{du}\right|^p + \left|\frac{dy}{du}\right|^p\right)^{1/p} = \frac{1}{p}\left[u^{1-p} + (1-u)^{1-p}\right]^{1/p}.$$

Jelikož $\pi_{\|\cdot\|_p}$ je rovno polovině obvodu jednotkového kruhu a zároveň obvod tohoto kruhu je roven čtyřnásobku délky křivky k, máme:

$$\pi_{\|\cdot\|_p} = \frac{2}{p}\int_0^1 \left[u^{1-p} + (1-u)^{1-p}\right]^{1/p} du = \frac{2}{p}\int_0^1 \left(\frac{1}{(1-u)^{p-1}} + \frac{1}{u^{p-1}}\right)^{1/p} du =$$

$$= \frac{2}{p}\int_0^1 \left(\frac{u^{p-1} + (1-u)^{p-1}}{[u(1-u)]^{p-1}}\right)^{1/p} du = \frac{2}{p}\int_0^1 \left(\frac{(u^{p-1} + (1-u)^{p-1})^{1/p}}{[u(1-u)]^{\frac{p-1}{p}}}\right) du.$$

V následující části odvodíme dolní odhad $\prod_{\|\cdot\|_p}$ pro $\pi_{\|\cdot\|_p}$ a ukážeme, že $\prod_{\|\cdot\|_2} = \pi_{\|\cdot\|_2} = \pi$ a poté dokážeme, že $\prod_{\|\cdot\|_p}$ jakožto funkce proměnné p má globální minimum, kterého se nabývá právě pro $p = 2$. Definujme funkci $\prod_{\|\cdot\|_p}$ proměnné p předpisem

$$\prod\nolimits_{\|\cdot\|_p} = \frac{2}{p}\int_0^1 \left(\frac{u^{2\frac{p-1}{p}} + (1-u)^{2\frac{p-1}{p}}}{[u(1-u)]^{\frac{p-1}{p}}}\right) du.$$

Vztah pro $\prod_{\|\cdot\|_p}$ vznikl ze vztahu pro $\pi_{\|\cdot\|_p}$ z předchozí části nahrazením čitatele výrazem $u^{2\frac{p-1}{p}} + (1-u)^{2\frac{p-1}{p}}$. Nyní ještě upravíme výraz pro $\prod_{\|\cdot\|_p}$ do tvaru, který využijeme v následující části.

$$\prod\nolimits_{\|\cdot\|_p} = \frac{2}{p}\int_0^1 \left(\frac{u^{2\frac{p-1}{p}} + (1-u)^{2\frac{p-1}{p}}}{[u(1-u)]^{\frac{p-1}{p}}}\right) du = \frac{2}{p}\int_0^1 \left(\frac{u^{\frac{p-1}{p}}}{(1-u)^{\frac{p-1}{p}}} + \frac{(1-u)^{\frac{p-1}{p}}}{u^{\frac{p-1}{p}}}\right) du =$$

$$= \frac{2}{p}\int_0^1 \left(u^{\frac{p-1}{p}}(1-u)^{-\frac{p-1}{p}} + u^{-\frac{p-1}{p}}(1-u)^{\frac{p-1}{p}}\right) du =$$

$$= \frac{2}{p}\int_0^1 \left(u^{\frac{p-1}{p}}(1-u)^{-\frac{p-1}{p}}\right) du + \frac{2}{p}\int_0^1 \left(u^{-\frac{p-1}{p}}(1-u)^{\frac{p-1}{p}}\right) du$$

Tyto dva integrály se rovnají, což lze ověřit například substitucí $v = 1-u$, a tedy dostáváme

$$\prod\nolimits_{\|\cdot\|_p} = \frac{4}{p}\int_0^1 u^{\frac{p-1}{p}}(1-u)^{-\frac{p-1}{p}} du.$$

Směřujeme k důkazu toho, že $\prod_{\|\cdot\|_p} \leq \pi_{\|\cdot\|_p}$. K tomu se nám bude hodit následující lemma, ze kterého nerovnost přímo plyne.

Lemma 4.5. [12] *Pro všechna reálná čísla $\alpha > 0, \quad x \geq 0$ platí:*

$$(1 + x^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}})^{\alpha+1} \leq (1+x)^{\alpha}(1+x^{\alpha}).$$

Důkaz:

Pokud $x = 0$, lemma zřejmě platí. Dále tedy předpokládejme, že $x > 0$. Pro pevné x definujme funkci $f(y) = y\ln(1+x^{1/y}), \quad y > 0$. Platí

$$f'(y) = \ln(1+x^{1/y}) - \frac{\ln(x)x^{1/y}}{y(1+x^{1/y})},$$

$$f''(y) = -\frac{\ln(x)x^{1/y}}{y^2(1+x^{1/y})} +$$

$$+\frac{x^{1/y}\ln^2(x)(1+x^{1/y})1/y + x^{1/y}\ln(x)\left(1+x^{1/y} - x^{1/y}\ln(x)1/y\right)}{y^2(1+x^{1/y})^2}.$$

Po úpravě dostaneme

$$f''(y) = \frac{\ln^2(x)x^{1/y}}{y^3(1+x^{1/y})^2}.$$

Druhá derivace f je tedy kladná a tím pádem f je konvexní. Odtud dostáváme

$$f\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) \leq \frac{f(y_1)+f(y_2)}{2}.$$

Zvolíme-li $y_1 = 1, \quad y_2 = 1/\alpha$, máme

$$\left(\frac{\alpha+1}{2\alpha}\right)\ln(1+x^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}) \leq \frac{\ln(1+x)}{2} + \frac{\ln(1+x^{\alpha})}{2\alpha},$$

což je ekvivalentní s tím, že

$$\ln\left([1+x^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}]^{\alpha+1}\right) \leq \ln([1+x]^{\alpha}.[1+x^{\alpha}]).$$

Jelikož logaritmus je rostoucí funkce, stejná nerovnost jako pro tyto logaritmy platí i pro jejich argumenty, což jsme chtěli dokázat.

□

[12] Převzato z [10], str. 104

Nyní již můžeme přistoupit k hlavnímu bodu této sekce, k odhadu pro $\pi_{\|\cdot\|_p}$.

Tvrzení 4.6. [13] *Pro $p > 0$ platí $\prod_{\|\cdot\|_p} \leq \pi_{\|\cdot\|_p}$.*

Důkaz:

Vzhledem k tomu, jak byly $\prod_{\|\cdot\|_p}$ a $\pi_{\|\cdot\|_p}$ definovány, stačí příslušnou nerovnost dokázat pro integrandy integrálů v těchto definicích. A protože jmenovatelé těchto integrandů se rovnají, stačí dokázat

$$u^{2\frac{p-1}{p}} + (1-u)^{2\frac{p-1}{p}} \leq \left(u^{p-1} + (1-u)^{p-1}\right)^{1/p}$$

pro $0 \leq u \leq 1$. K tomu však stačí v nerovnosti z lemmatu 4.5 zvolit $x = \frac{u}{1-u}$ a $\alpha = p-1$:

$$\left[1 + \left(\frac{u}{1-u}\right)^{\frac{2p-2}{p}}\right]^p \leq \left(1 + \frac{u}{1-u}\right)^{p-1} \left[1 + \left(\frac{u}{1-u}\right)^{p-1}\right]$$

$$1 + \left(\frac{u}{1-u}\right)^{\frac{2p-2}{p}} \leq \left(1 + \frac{u}{1-u}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left[1 + \left(\frac{u}{1-u}\right)^{p-1}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$(1-u)^{2\frac{p-1}{p}} + u^{2\frac{p-1}{p}} \leq \frac{(1-u)^{2\frac{p-1}{p}}}{(1-u)^{\frac{p-1}{p}}} \left[1 + \left(\frac{u}{1-u}\right)^{p-1}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$u^{2\frac{p-1}{p}} + (1-u)^{2\frac{p-1}{p}} \leq (1-u)^{\frac{p-1}{p}} \left[1 + \left(\frac{u}{1-u}\right)^{p-1}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$u^{2\frac{p-1}{p}} + (1-u)^{2\frac{p-1}{p}} \leq \left((1-u)^{p-1} \left[1 + \left(\frac{u}{1-u}\right)^{p-1}\right]\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$u^{2\frac{p-1}{p}} + (1-u)^{2\frac{p-1}{p}} \leq \left[u^{p-1} + (1-u)^{p-1}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$\square$

Chtěli bychom ukázat, že $\prod_{\|\cdot\|_2} = \pi_{\|\cdot\|_2}$. Zkusme tedy $\prod_{\|\cdot\|_p}$ upravit do tvaru, ze kterého budeme schopni pro libovolné p určit jeho číselnou hodnotu. Pro $p > 1/2$ platí

$$\prod_{\|\cdot\|_p} = \frac{4}{p}\int_0^1 u^{\frac{p-1}{p}}(1-u)^{-\frac{p-1}{p}}du = \frac{4}{p}\frac{\Gamma(2-\frac{1}{p})\Gamma(\frac{1}{p})}{\Gamma(2)} = 4\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(2-\frac{1}{p}\right) =$$

$$= 4\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(2-\frac{1}{p}\right).$$

Druhá rovnost plyne z Poznámky 3.5 b), třetí rovnost dostaneme z toho, že $\Gamma(2) = 1$ a poslední rovnost platí díky Poznámce 3.5 (a).
Dosazením do tohoto vztahu získáme, že

$$\prod_{\|\cdot\|_2} = 4\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{1}{2}\right) = 4\Gamma^2\left(1+\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \pi,$$

[13] Převzato z [10], str. 104

kde poslední rovnost plyne z Poznámky 3.5 (c). Nyní víme, že $\prod_{\|\cdot\|_p} \leq \pi_{\|\cdot\|_p}$ a také, že $\prod_{\|\cdot\|_2} = \pi_{\|\cdot\|_2} = \pi$. K důkazu hlavního tvrzení této části tedy stačí dokázat následující lemma.

Lemma 4.7. [14] *Na intervalu $[1, \infty)$ nabývá $\prod_{\|\cdot\|_p}$ globálního minima pro $p = 2$.*

Důkaz:

Platí

$$\frac{d}{dp}\prod_{\|\cdot\|_p} = 4\left[\frac{1}{p^2}\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\Gamma'\left(2-\frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p^2}\Gamma'\left(1+\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(2-\frac{1}{p}\right)\right] =$$

$$= \frac{4}{p^2}\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(2-\frac{1}{p}\right)\left[\Psi\left(2-\frac{1}{p}\right) - \Psi\left(1+\frac{1}{p}\right)\right],$$

kde

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx}\ln\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Jelikož $\Gamma(x) > 0$ pro $x > 0$, dostáváme, že $\frac{d}{dp}\prod_{\|\cdot\|_p}$ je rovna nule právě tehdy, když

$$\Psi\left(2-\frac{1}{p}\right) = \Psi\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

Víme, že $\Psi(x)$ je rostoucí pro $x > 0$, tedy tato podmínka je ekvivalentní s tím, že $2 - \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{p}$ a dostáváme, že $\frac{d}{dp}\prod_{\|\cdot\|_p} = 0$ právě tehdy, když $p = 2$. Protože znaménko výrazu $\left(2-\frac{1}{p}\right) - \Psi\left(1+\frac{1}{p}\right)$ je na intervalu $(0, 2]$ záporné a na intervalu $[2, \infty)$ kladné, platí, že $\frac{d}{dp}\prod_{\|\cdot\|_p}$ je na $(0, 2]$ klesající a na $[2, \infty)$ rostoucí, tedy $\prod_{\|\cdot\|_2}$ je globální minimum.
Výsledky z této části shrneme v následující větě.

Věta 4.8. [15] *Pro každé $p \geq 1$ platí, že $\pi_{\|\cdot\|_p} \geq \pi$.*

Důkaz:

Tvrzení 4.6 říká, že pro $p > 0$ platí $\prod_{\|\cdot\|_p} \leq \pi_{\|\cdot\|_p}$. V lemmatu 4.7 jsme dokázali, že $\prod_{\|\cdot\|_p}$ nabývá globálního minima pro $p = 2$ a spočítali jsme, že pro toto minimum platí $\prod_{\|\cdot\|_2} = \pi_{\|\cdot\|_2} = \pi$. Tedy $\pi_{\|\cdot\|_p}$ nabývá na intervalu $[1, \infty)$ globálního minima pro $p = 2$ a hodnota tohoto minima je π. Tvrzení věty pro $p = 1$ jsme ukázali na začátku této kapitoly, když jsme spočítali, že $\pi_{\|\cdot\|_1} = 4$.

□

[14] Převzato z [10], str. 105
[15] Převzato z [10], str. 106

4.3 Odhad π pro symetrické kruhy

V této části ukážeme, že předpoklady předchozí věty lze zeslabit. Pro zjednodušení vyjadřování ztotožníme prostory $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$ a dokážeme, že stejný závěr jako v předchozí větě platí i pro jednotkové kruhy, které se nezmění po otočení o 90°, tedy $iS = S$. Nejprve ale uvedeme lemma, které se v důkazu tohoto tvrzení bude využívat.
V tomto lemmatu budeme značit symbolem C_0 množinu všech kružnic se středem v počátku vzhledem k libovolné normě a množinu všech mnohoúhelníků označme P. Pro $C_1, C_2 \in C_0 \cup P$ budeme používat zápis $C_1 \leq C_2$ k vyjádření toho, že kruh (mnohoúhelník) C_1 leží v omezené oblasti určené kruhem (mnohoúhelníkem) C_2. (Uzavřená prostá křivka rozděluje rovinu na 2 oblasti, z nichž jedna je omezená a druhá je neomezená.) Dále budeme značit symbolem S_X jednotkovou kružnici v normovaném prostoru $\mathbb{R}^2$ s normou $\|\cdot\|_X$.

Lemma 4.9. [16] *a) Nechť $C_1, C_2 \in C_0$, $C_1 \leq C_2$ a označme l_1, l_2 délky kružnic C_1, C_2. Potom, vzhledem k jakékoliv normě, platí: $l_1 \leq l_2$.*
b) Nechť X, Y jsou prostory $\mathbb{R}^2$ s normami $\|\cdot\|_X$ a $\|\cdot\|_Y$, l_X je délka kružnice S_X vzhledem k normě $\|\cdot\|_X$, l_Y je délka kružnice S_Y vzhledem k normě $\|\cdot\|_Y$ a $\alpha S_X \leq S_Y \leq \beta S_X$, kde $0 < \alpha < \beta$. Potom

$$\frac{\alpha}{\beta}\pi_{\|\cdot\|_X} \leq \pi_{\|\cdot\|_Y} \leq \pi_{\|\cdot\|_X}\frac{\beta}{\alpha}.$$

Důkaz:

a) Pro každé dělení $D_n^1 = \{z_0, \dots, z_n\}$, kde $z_0 = z_n$, příslušné kružnici C_1 existuje dělení $D_n^2 = \{w_0, \dots, w_n\}$, kde $w_0 = w_n$, příslušné kružnici C_2 takové, že z_j leží na úsečce spojující body w_j a z_{j-1} pro $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.
Pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ tedy platí

$$\|w_j - z_j\| + \|z_j - z_{j-1}\| = \|w_j - z_{j-1}\| \leq \|w_j - w_{j-1}\| + \|w_{j-1} - z_{j-1}\|.$$

Po sečtení přes všechna j a s využitím faktu $\|w_n - z_n\| = \|w_0 - z_0\|$ dostaneme:

$$\sum_{j=1}^{n} \|z_j - z_{j-1}\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|w_j - w_{j-1}\| \leq l_2$$

a odtud přechodem k supremu přes všechna dělení získáme, že $l_1 \leq l_2$.
b) Z předpokladu $\alpha S_X \leq S_Y \leq \beta S_X$ a z části a) plyne následující:

$$\alpha l_Y S_X = l_Y \alpha S_X \leq l_Y S_Y \leq l_Y \beta S_X = \beta l_Y S_X.$$

Tvrdíme, že podmínka $\alpha S_X \leq S_Y \leq \beta S_X$ je ekvivalentní s podmínkou $\frac{1}{\beta}\|\cdot\|_X \leq \|\cdot\|_Y \leq \frac{1}{\alpha}\|\cdot\|_X$. Ukážeme, že $S_Y \leq \beta S_X$ je ekvivalentní s tím, že $\frac{1}{\beta}\|\cdot\|_X \leq \|\cdot\|_Y$. Ekvivalence zbývajících dvou nerovností se dokáže analogicky.
Předpokládejme, že $S_Y \leq \beta S_X$. Nechť $z \in \mathbb{R}^2$. Chceme ukázat, že $\frac{1}{\beta}\|z\|_X \leq \|z\|_Y$. Označme $c := \|z\|_Y$ a uvažujme $z_0 \in S_Y$ takové, že $z = cz_0$. Potom platí:

$$\|z\|_X = \|cz_0\|_X = c\|z_0\|_X \leq c\beta$$

[16] Převzato z [9], str. 86

a po vydělení dostáváme

$$\frac{1}{\beta}\|z\|_X \leq c = \|z\|_Y.$$

Předpokládejme, že $\frac{1}{\beta}\|\cdot\|_X \leq \|\cdot\|_Y$. Nechť $z \in S_Y$, pak platí $\frac{1}{\beta}\|z\|_X \leq \|z\|_Y = 1$. Tedy $\|z\|_X \leq \beta$. Jelikož z byl libovolný, máme pro každý bod $z \in S_Y$: $\|z\|_X \leq \beta$, a tedy $S_Y \leq \beta S_X$.

S použitím právě dokázaného vztahu dostáváme

$$\frac{1}{\beta} l_X S_X \leq l_Y S_X \leq \frac{1}{\alpha} l_X S_X.$$

Tedy

$$l_Y S_Y \geq \alpha l_Y S_X \geq \frac{\alpha}{\beta} l_X S_X,$$

$$l_Y S_Y \leq \beta l_Y S_X \leq \frac{\beta}{\alpha} l_X S_X.$$

Platí tedy

$$\frac{\alpha}{\beta} l_X S_X \leq l_Y S_X \leq \frac{\beta}{\alpha} l_X S_X.$$

Nyní stačí každý výraz vydělit číslem 2, což je průměr jednotkové kružnice, a dotaneme dokazované nerovnosti.

□

Věta 4.10. [17] *Nechť $\|\cdot\|$ je norma na $\mathbb{R}^2$. Pokud pro jednotkový kruh S vzhledem k této normě platí: $iS = S$, potom $\pi \leq \pi_{\|\cdot\|} \leq 4$.*

Důkaz:

Horní odhad byl dokázán ve větě 4.4, ukažme tedy, že $\pi \leq \pi_{\|\cdot\|}$. Díky předchozímu lemmatu můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že hranice S je mnohoúhelník. Pokud by hranice S nebyla mnohoúhelník, definujeme posloupnost (α_n, β_n), $n \in \mathbb{N}$ takovou, že $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$, $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 1$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ najdeme normovaný prostor $\mathbb{R}^2$, jehož jednotkový kruh je mnohoúhelník M_n takový, že $\alpha_n M_n \leq S \leq \beta_n M_n$ a podle lemmatu 4.9 dostaneme $\frac{\alpha_n}{\beta_n}\pi_{\|\cdot\|_X} \leq \pi_{\|\cdot\|}$. Jelikož $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$, platí $\pi_{\|\cdot\|_X} \leq \pi_{\|\cdot\|}$. Označme tedy strany mnohoúhelníka S jako L_i, $i = 1, ..., n$ a úhel mezi spojnicemi počátku a koncovými body L_i označme θ_i. Jelikož jednotková kružnice musí být symetrická kolem počátku, musí platit $0 < \theta_i \leq \pi/2$. Nechť L je strana mnohoúhelníka spojující body $z = (x, y) = re^{i\phi}$ a $\overline{z} = (\overline{x}, \overline{y}) = \overline{r}e^{i\overline{\phi}}$. Pro úhel θ příslušný straně L platí $0 < \theta = \phi - \overline{\phi} \leq \pi/2$. Dále označme d kolmou vzdálenost L od počátku a $\overline{d}$ vzdálenost S od počátku ve stejném směru. Vektor tohoto směru a velikosti $\overline{d}$ označme s a vektor, který vznikne otočením s o $\pi/4$ označme s_k. Díky tomu, že jednotková koule je konvexní, máme $\overline{d} \leq d$. Jelikož S je invariantní vůči otočení o $\pi/4$, vzdálenost počátku od S ve směru s_k kolmém k s je stejná jako ve směru s. Vektory s_k a $z - \overline{z}$ určují stejný směr a pro takové vektory platí:

[17] Převzato z [9], str. 90

$z-\overline{z} = \lambda s_k$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Jelikož $s_k \neq 0$, máme $\frac{\|z-\overline{z}\|}{\|s_k\|} = \frac{|z-\overline{z}|}{|s_k|} = |\lambda|$. A protože $\|s_k\| = 1$, platí $\|z-\overline{z}\| = \frac{|z-\overline{z}|}{|s_k|}$. Odtud dostáváme:

$$\|z-\overline{z}\| = \frac{|z-\overline{z}|}{|s_k|} = \frac{|z-\overline{z}|}{\overline{d}} \geq \frac{|z-\overline{z}|}{d} = \frac{|z-\overline{z}|^2}{|x\overline{y}-y\overline{x}|}.$$

K ověření poslední rovnosti nahlédneme, že $d|z-\overline{z}| = |x\overline{y}-y\overline{x}|$. Uděláme to tak, že dvěma způsoby spočítáme obsah T trojúhelníku s vrcholy $0, z, \overline{z}$.

- $T = \frac{\overline{d}|z-\overline{z}|}{2}$
- $T = \frac{|(z-0)\times(\overline{z}-0)|}{2} = \frac{|x\overline{y}-y\overline{x}|}{2}$

Odtud již rovnost plyne. Po dosazení goniometrických tvarů čísel dostaneme:

$$\frac{|z-\overline{z}|^2}{|x\overline{y}-y\overline{x}|} = \frac{(r\cos\phi - \overline{r}\cos\overline{\phi})^2 + (r\sin\phi - \overline{r}\sin\overline{\phi})^2}{|r\overline{r}\cos\phi\sin\overline{\phi} - r\overline{r}\cos\overline{\phi}\sin\phi|} =$$

$$= \frac{r/\overline{r} + \overline{r}/r - 2\cos\theta}{\sin\theta} \geq \frac{2-2\cos\theta}{\sin\theta} = 2\tan(\theta/2) \geq \theta.$$

Celkem tedy dostáváme, že $\|z-\overline{z}\| \geq \theta$ a po sečtení přes všechny strany mnohoúhelníka:

$$2\pi_{\|\cdot\|} \geq \sum_{i=1}^{n} L_i \geq \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 2\pi.$$

$\square$

Literatura

[1] J. Belk: *Convexity, Inequalities and Norms*, http://faculty.bard.edu/belk/math461/Inequalities.pdf

[2] R. D. Poodiack: *Squigonometry, Hyperellipses, and Supereggs*, Mathematics Magazine 8 (2016), 92–102

[3] A. C. Thompson: *Minkowski geometry*, Cambridge University Press, 1996

[4] V. Jarník: *Integrální počet 2, Academia, Praha, 1984*

[5] J. Borwein, D.Bailey: *Mathematics by Experiment*, CRC Press, 2008

[6] X. Wang: *Volumes of Generalized Unit Balls*, Mathematics Magazine 78 (2005), 390–395

[7] D. J. Smith, M. K. Vamanamurthy: *How Small Is a Unit Ball?*, Mathematics Magazine 62 (1989), 101–107

[8] A. Slavík: *Od unimodálních posloupností k narozeninovému paradoxu*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 61 (2016) , 119–130

[9] J. Duncan, D. H. Luecking, C. M. McGregor: *On the Values of Pi for Norms on R^2*, College Mathematics Journal 35 (2004), 84–92

[10] C. L. Adler, James Tanton: π *is the Minimum Value for Pi*, College Mathematics Journal 31 (2000), 102–106