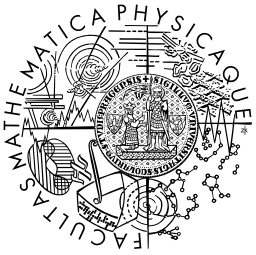


MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Katka Urbánková

Soddyho kružnice

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martina Škorpilová, Ph.D.

Studijní program: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání se sdruženým studiem Deskriptivní geometrie se zaměřením na vzdělávání

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne ....

Podpis autora

Mé největší poděkování patří RNDr. Martině Škorpilové, Ph.D., za každou vteřinu, kterou strávila s mojí bakalářskou prací (ať už při výběru tématu, při konzultacích nebo opravě mé krkolomné stylistiky).

Dále bych chtěla poděkovat Michaele Dvořákové a Pavlíně Šteflové za rady a podporu nejen při psaní této práce.

Název práce: Soddyho kružnice

Autor: Katka Urbánková

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martina Škorpilová, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Práce pojednává o problematice Soddyho kružnic. První kapitola se věnuje definici a historii kružnic. V následujících dvou kapitolách jsou prezentovány konstrukce Soddyho kružnic a vyjádřeny jejich poloměry. Čtvrtá kapitola seznamuje čtenáře s dalšími geometrickými útvary, které jsou, stejně jako kružnice, pojmenovány podle anglického chemika Fredericka Soddyho. Poslední podkapitola zmiňujeme analogii kružnic v třírozměrném prostoru. V příloze je pak popsán experiment, v němž zjišťujeme, zda jsou středoškolští studenti schopni sestrojit tři kružnice o daných středech, které mají po dvou vnější dotyk.

Klíčová slova: dotýkající se kružnice, Frederick Soddy, konstrukce, historie matematiky, kruhová inverze

Title: Soddy Circles

Author: Katka Urbánková

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Martina Škorpilová, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: This thesis discusses the problem of Soddy circles. The first chapter is devoted to the definition and history of these circles. In the following two chapters, we present constructions of Soddy circles and the formulas of their radii. The fourth chapter introduces other geometric shapes, which, like the circles, are named after the English chemist Frederick Soddy. The last sub-chapter mentions the analogy of Soddy circles in three-dimensional space. We conducted an experiment that examines the skills of high school students. Their task was to construct three circles with given centers which touch each other externally. We describe this experiment in more detail in the appendix.

Keywords: touching circles, Frederick Soddy, construction, history of mathematics, circular inversion

Obsah

Úvod **2**

1 Definice a historie **3**
1.1 Definice a příslušné značení 3
1.2 Problém čtyř mincí 4
1.3 Apollóniovy kružnice 4
1.4 Historie 7
1.4.1 René Descartes 7
1.4.2 Frederick Soddy 7

2 Konstrukce kružnic **10**
2.1 Konstrukce určujících kružnic 10
2.2 Kruhová inverze 11
2.3 Konstrukce Soddyho kružnic 12

3 Poloměry Soddyho kružnic **15**
3.1 Poloměr vnitřní Soddyho kružnice 21
3.2 Poloměr vnější Soddyho kružnice 23

4 Další Soddyho útvary **26**
4.1 Soddyho trojúhelníky 26
4.2 Soddyho hyperboly 27
4.3 Soddyho hexlet 29

Závěr **33**

Seznam použité literatury **34**

Seznam obrázků **36**

A Přílohy **37**
A.1 Experiment 37

Úvod

V této bakalářské práci se čtenář seznámí se speciálním případem Apollóniových kružnic, s tzv. Soddyho kružnicemi.

Jedním z hlavních cílů práce je v češtině jednotně zpracovat anglicky psané texty.

Práci mohou využít pokročilejší středoškolští studenti, pokud se již setkali s pojmy kruhová inverze a mocnost bodu ke kružnici, nebo studenti vysokoškolští, kteří tyto pojmy ovládají. Věříme, že práci mohou využít i středoškolští a vysokoškolští pedagogové ke zpestření svých hodin geometrie.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol, které jsou členěny na několik podkapitol. V první kapitole definujeme pojem Soddyho kružnice a zavedeme příslušné značení, které využíváme v celé práci. Tato kapitola také objasňuje souvislosti Soddyho kružnic s Apollóniovými kružnicemi a uvádí základní historická data. Největší část se věnuje životu anglického chemika Fredericka Soddyho, po němž jsou kružnice pojmenovány.

Nejkratší, druhá kapitola uvádí, jak Soddyho kružnice sestrojit. Pro konstrukce využijeme kruhovou inverzi, která je v této kapitole definována a jsou uvedeny některé její důležité vlastnosti.

Třetí kapitola vznikla překladem a značným rozpracováním anglicky psaného textu [3]. Cílem této části je vyjádřit poloměry Soddyho kružnic v závislosti na poloměrech určujících kružnic. K vyjadřování těchto hodnot musí čtenář znát nejen středoškolskou látku, kruhovou inverzi, ale i mocnost bodu ke kružnici, kterou definujeme a uvedeme její důležité vlastnosti.

Poslední kapitola není, oproti ostatním částem, věnována Soddyho kružnicím. Seznámí nás s dalšími dvourozměrnými geometrickými útvary nesoucími jméno Fredericka Soddyho (se Soddyho trojúhelníky a Soddyho hyperbolami). Poslední podkapitola v celé bakalářské práci je věnována Soddyho hexletu, rozšíření Soddyho kružnic do třírozměrného prostoru. Bez důkazu jsou zde uvedeny některé zajímavé vlastnosti a souvislosti s jinými partiemi geometrie.

V příloze je popsán experiment, v němž zjišťujeme, zda jsou studenti střední školy schopni vyřešit netradiční planimetrickou úlohu, se kterou jsme se setkali při konstrukci Soddyho kružnic. Respondenti dostali za úkol sestrojit tři kružnice o daných středech, které se vzájemně vně dotýkají.

Práce je vysázena pomocí systému LaTeX a obrázky jsou (pokud není uvedeno jinak) vytvořeny v grafickém softwaru GeoGebra.

1. Definice a historie

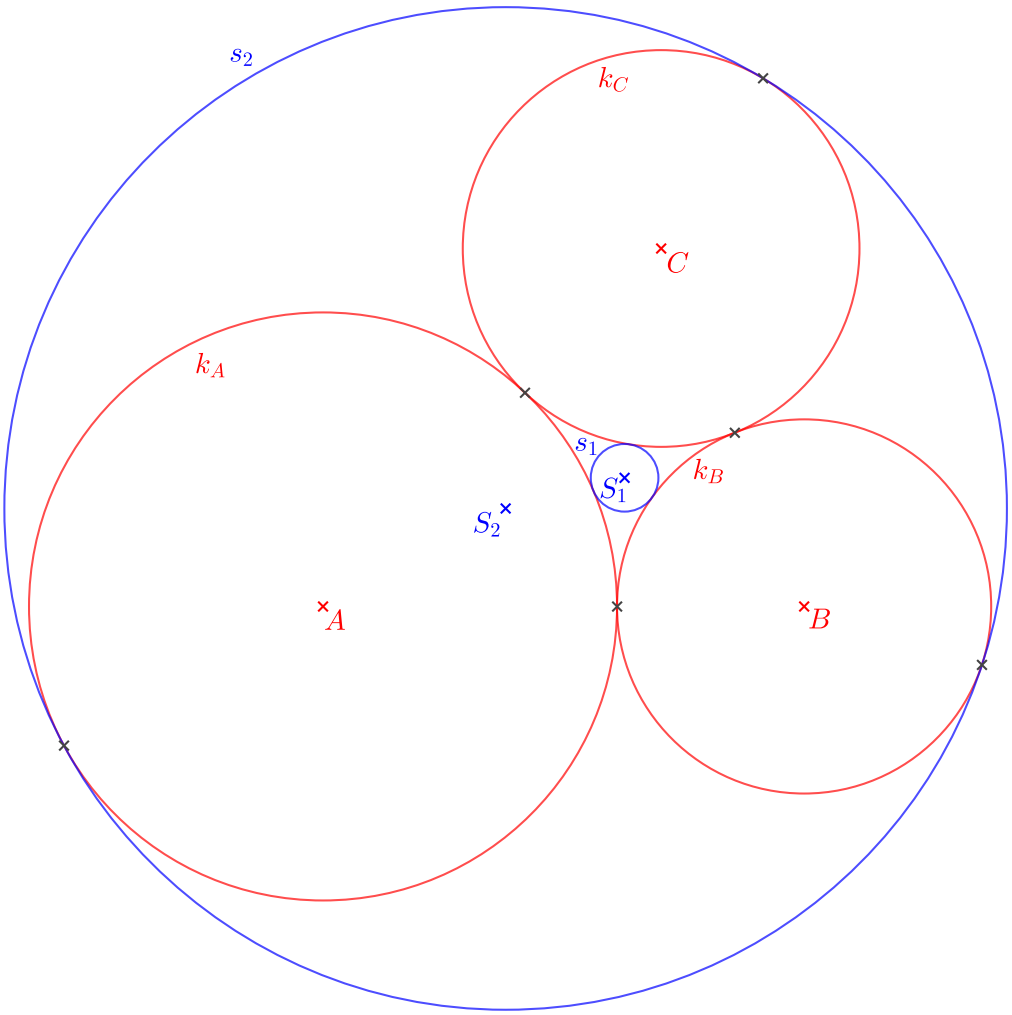
V první kapitole zavedeme Soddyho kružnice. Dále představíme značení, příbuzné pojmy a nakonec uvedeme základní historická data.

První tři podkapitoly byly zpracovány na základě zdrojů [7], [9] a [12].

1.1 Definice a příslušné značení

Definice 1 *Nechť k_A, k_B, k_C jsou kružnice, z nichž každé dvě mají vnější dotyk. Dvě kružnice s_1, s_2, které se dotýkají všech tří kružnic k_A, k_B, k_C, se nazývají* ***vnitřní a vnější Soddyho kružnice*** *(viz obrázek 1.1).*

V celé práci budeme střed vnitřní, resp. vnější Soddyho kružnice s_1, resp. s_2 značit S_1, resp. S_2, kružnice k_A, k_B, k_C budeme nazývat *určující* a jejich středy budeme značit po řadě A, B, C (viz obrázek 1.1).



Obrázek 1.1: Soddyho kružnice.

1.2 Problém čtyř mincí

Vnitřní Soddyho kružnice (resp. tato kružnice spolu s její vnitřní oblastí) je řešením tzv. *problému čtyř mincí* (přeloženo z anglického názvu *Four Coins Problem*).

Problém spočívá v hledání čtvrté mince ke třem různě velkým mincím, které jsou uspořádány tak, že se každé dvě vzájemně dotýkají.

Na obrázku 1.2 jsou vyfotografované tři různě velké mince: česká padesátikoruna, americký dolar a evropský cent.

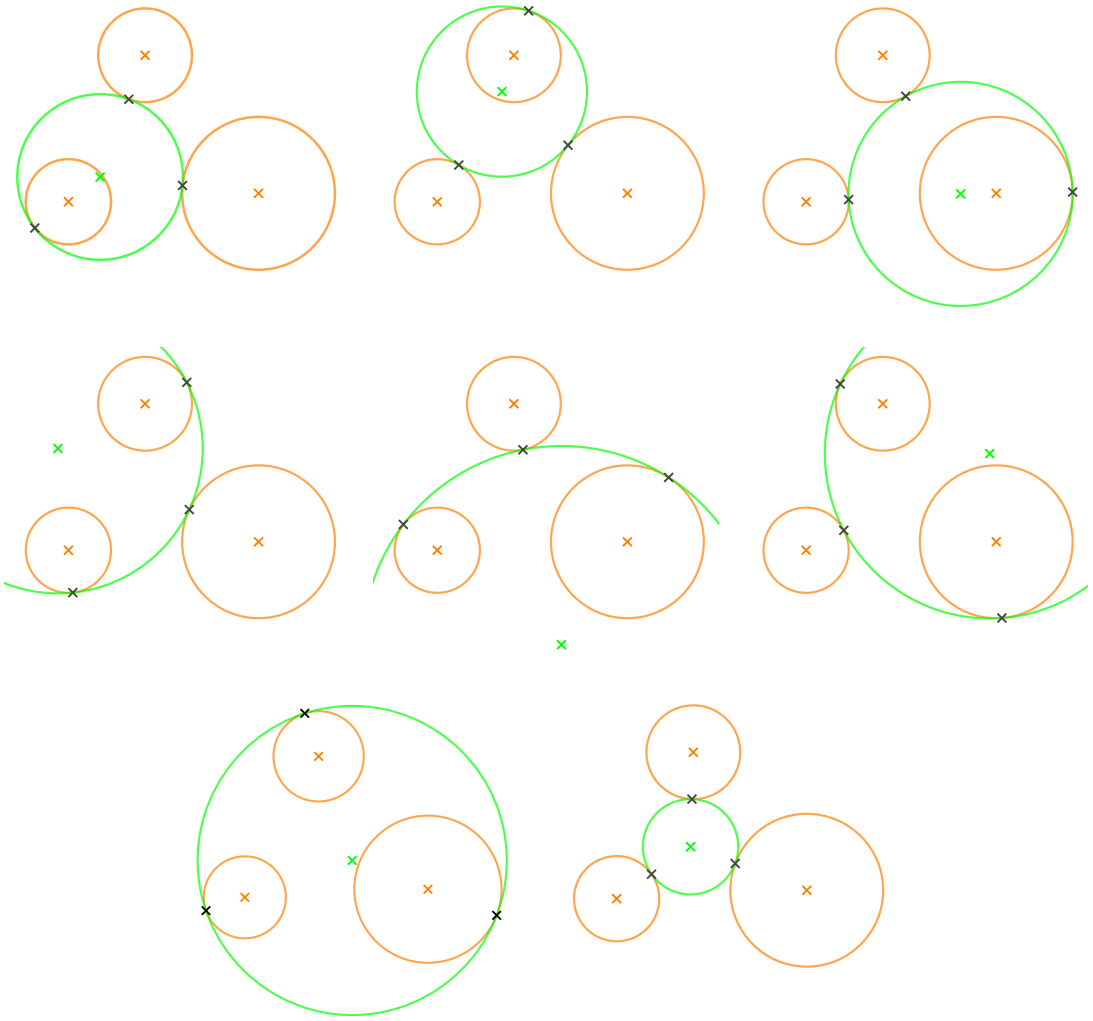
Obrázek 1.2: Problém čtyř mincí.

1.3 Apollóniovy kružnice

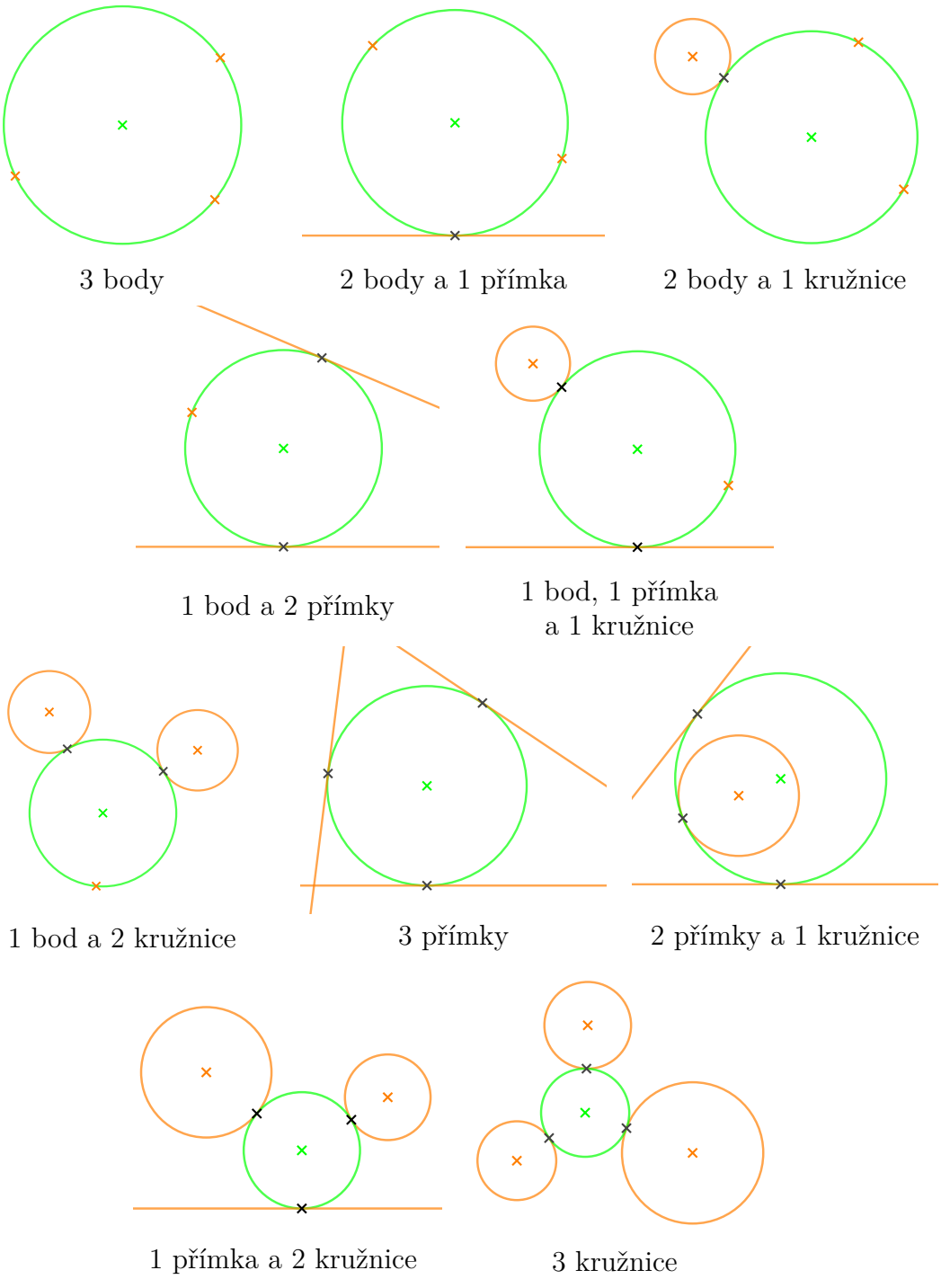
Soddyho kružnice jsou speciálním případem *Apollóniových kružnic*, které jsou řešeními tzv. *Apollóniových úloh*. Jejich podstatou je ke třem daným různým kružnicím v rovině nalézt takovou kružnici, která se jich dotýká (neboli má s každou z nich společný jediný bod)[1]. Pro tři dané kružnice existuje obecně osm různých kružnic, které se jich dotýkají (viz obrázek 1.3). Pokud mají tři dané kružnice po dvou vnější dotyk, existují dvě řešení, kterými jsou Soddyho kružnice. Dále bývá studováno rovněž zobecnění úlohy, v němž mají některé ze tří daných kružnic nulový, resp. nekonečně velký poloměr, tj. jedná se o body, resp. o přímky. Hledá se tedy kružnice, která prochází daným bodem (danými body), dotýká se dané přímky (daných přímek) a dané kružnice (daných kružnic). Tím vzniká deset různých variant, které mají různý počet řešení. Jednotlivé případy jsou zobrazeny na obrázku 1.4, přičemž dané útvary jsou zakresleny oranžově a řešení zeleně. V každé z deseti ilustrací je (kvůli přehlednosti) vždy znázorněno pouze jediné řešení.

[1]Způsobů, jak vyřešit *Apollóniovy úlohy*, je mnoho. Postupy, které jsou pochopitelné i pro středoškolské studenty a byly využity při konstrukci obrázku 1.4, jsou uvedeny v práci [9]. Lze ale také využít *cyklografii, plochy rotačního paraboloidu* či *stereografickou projekci*. Všechny tyto konstrukce můžeme nalézt v textu [7].

Apollóniovy úlohy jsou pojmenovány podle starořeckého geometra, matematika a astronoma Apollónia z Pergy (asi 262 př. n. l.–asi 190 př. n. l.), který se těmto úlohám věnoval v knize *Επαφαι* (*Epafaí*). Do češtiny se název knihy překládá jako *O dotycích*. Tato práce se bohužel nedochovala. Přežil ale text od Pappa z Alexandrie (290–350), který dokládá, že Apollónios nad třemi kružnicemi bádal a byl si vědom existence osmi řešení.



Obrázek 1.3: Osm různých kružnic, které se dotýkají tří kružnic.



Obrázek 1.4: Deset různých případů Apollóniovy úlohy.

1.4 Historie

Historie Soddyho kružnic byla zprácována na základě literatury [1], [2], [4], [8], [13], [14], [15] a [16].

1.4.1 René Descartes

Významný posun v řešení problému, jak ke třem daným kružnicím, které mají po dvou vnější dotyk, sestrojit čtvrtou, která se každé z nich dotýká, udělal francouzský filozof a matematik René Descartes (1596–1650).

Snažil se analyticky vyřešit Apollóniovu úlohu. Tento problém zadal v rámci vzájemné dlouholeté korespondence jako domácí cvičení princezně Alžbětě Falcké (1618–1680, též zvaná Anežka Česká či Alžběta z Herfordu).[2] Po několika dopisech, v nichž si sdělili své problémy s řešením, nakonec Descartes navrhl studovat pouze případ, v němž se tři dané kružnice dotýkají, a to vně. Roku 1643 dospěl ke vztahu pro poloměry čtyř takto se dotýkajících kružnic. Přestože Descartes vztah nikdy nepublikoval, je dnes označován jako *Descartesova věta*.[3]

Věta 1 ***Descartesova věta.***
Nechť jsou dány čtyři kružnice, z nichž každé dvě mají vnější dotyk a každá kružnice má křivost k_i (pro $i = 1, 2, 3, 4$). Potom platí

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2 \cdot (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2),$$

kde křivosti k_i jsou převrácené hodnoty poloměrů r_i jednotlivých kružnic, tj. $k_i = \frac{1}{r_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Descartovu větu tedy můžeme přepsat do tvaru

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right)^2 = 2 \cdot \left[\left(\frac{1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_4}\right)^2\right]. \tag{1.1}$$

Stejné téma studoval v roce 1826 rovněž Švýcar Jakob Steiner (1749–1863) v článku [16] a v roce 1842 na něj navázal Angličan Phillip Beecroft (1818–1862) v práci [1]. Kružnice nejvíce proslavil Frederick Soddy (1877–1956), který se jimi zabýval v druhé polovině třicátých let 20. století.

1.4.2 Frederick Soddy

Frederick Soddy (viz obrázek 1.5[4]) byl anglický radiochemik, který se narodil (jako poslední dítě ze sedmi sourozenců) 2. září roku 1877 v Eastbournu do rodiny obchodníka s kukuřicí. V roce 1898 promoval s vyznamenáním z chemie

[2] Více o takřka šedesáti dopisech s filozofickou a matematickou tematikou, které si René Descartes s Alžbětou Falckou poslali, viz [2] či [13].

[3] Dnes víme, že platí obdobný vztah i pro kružnice, které nemusí mít nutně vnější dotyk. V tomto obecnějším případě se musí ošetřit znaménka u křivostí, tj. uvažovat *znaménkové křivosti*.

[4] Obrázek je přejat z webové stránky
`https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Frederick_Soddy.jpg`

na Merton College v Oxfordu. Na zdejší univerzitě poté mezi lety 1898 a 1900 působil jako výzkumný pracovník. Od roku 1900 pracovně vystřídal řadu institucí, kde se zabýval zejména radioaktivitou a izotopy. Na výzkumu spolupracoval s britským fyzikem a chemikem novozélandského původu Ernestem Rutherfordem (1871–1937). Za tyto výzkumy Soddy získal v roce 1921 Nobelovu cenu za chemii.[5]

V roce 1908 se oženil s Winifred Moller Beilby (1885–1936), dcerou průmyslového chemika. Pár spolupracoval i odborně a v roce 1910 společně publikoval článek o absorpci gama záření z radia.

Jeho objevy z oboru radioaktivity mimo jiné inspirovaly anglického spisovatele Herberta Georga Wellse (1860–1946) k napsání válečného románu *Osvobození světa* (1914)[6], jehož děj se odehrává v budoucnosti a v němž se předpovídá vynalezení atomové bomby.

Mezi lety 1921 až 1934 se Frederick Soddy věnoval především ekonomice. Napsal čtyři knihy, v nichž nabízel pohled na ekonomii s využitím fyziky, zejména termodynamiky. Kromě těchto děl je také autorem několika knih o radioaktivitě.

Obrázek 1.5: Frederick Soddy.

Soddy o kružnicích nesoucích jeho jméno napsal báseň nazvanou „The Kiss Precise“, která vyšla v časopise Nature v roce 1936 [14]. Podle názvu básně jsou Soddyho kružnice někdy označovány jako tzv. *líbající se kružnice*. První sloka poeticky vykresluje Soddyho kružnice, druhá hovoří o *Descartesově větě* a třetí naznačuje celou situaci v prostoru.

[5]Rovněž Ernest Rutherford je držitelem Nobelovy ceny za chemii, a to již z roku 1908.

[6]V originálu *The World Set Free*, Macmillan & Co., London, rovněž E. P. Dutton, New York, 1914. V českém překladu Přemysla Bohuslava: *Osvobození světa*, M. Rošický, Praha, 1919.

The Kiss Precise

For pairs of lips to kiss maybe
Involves no trigonometry.
This not so when four circles kiss
Each one the other three.
To bring this off the four must be
As three in one or one in three.
If one in three, beyond a doubt
Each gets three kisses from without.
If three in one, then is that one
Thrice kissed internally.

Four circles to the kissing come.
The smaller are the benter.
The bend is just the inverse of
The distance from the center.
Though their intrigue left Euclid dumb
There's now no need for rule of thumb.
Since zero bend's a dead straight line
And concave bends have minus sign,
The sum of the squares of all four bends
Is half the square of their sum.

To spy out spherical affairs
An oscular surveyor
Might find the task laborious,
The sphere is much the gayer,
And now besides the pair of pairs
A fifth sphere in the kissing shares.
Yet, signs and zero as before,
For each to kiss the other four
The square of the sum of all five bends
Is thrice the sum of their squares.

V roce 1937 v článku [15] Frederick Soddy svoji teorii o kružnicích rozšířil do třírozměrného prostoru. Vytvořil tzv. *Soddyho hexlet*, tj. šestici koulí, které se dotýkají tří daných koulí majících po dvou vnější dotyk (více o hexletu viz kapitola 4).

Frederick Soddy zemřel 22. září 1956 v anglickém Brightonu.

Jsou po něm (kromě geometrických útvarů) pojmenovány např. kráter na odvrácené straně Měsíce či radioaktivní uranový minerál *soddyit*.

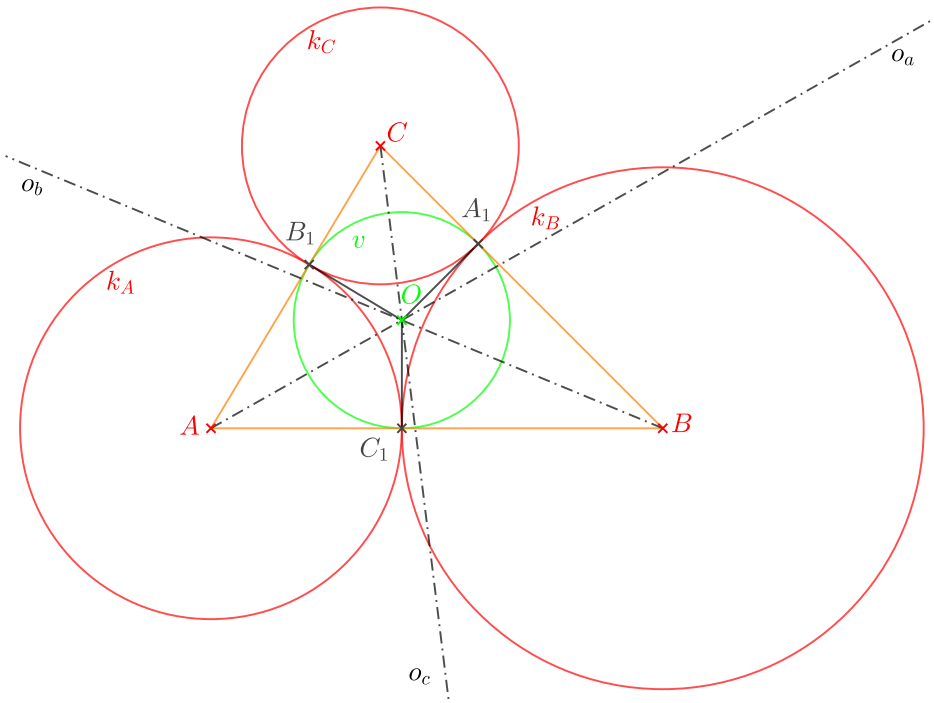
2. Konstrukce kružnic

V této kapitole se zaměříme na konstrukci Soddyho kružnic, kterou provedeme pomocí kruhové inverze. Jelikož nás však může napadnou i otázka, jak narýsovat určující kružnice k_A, k_B, k_C o daných středech, představíme nejprve konstrukci těchto kružnic.[1] Poté uvedeme vlastnosti kruhové inverze, které následně využijeme při sestrojení Soddyho kružnic.

Druhá kapitola byla sepsána na základě zdrojů [3] a [6].

2.1 Konstrukce určujících kružnic

Nechť nekolineární body A, B, C jsou středy určujících kružnic k_A, k_B, k_C, které chceme sestrojit. Uvědomme si, že body A, B, C jsou vrcholy trojúhelníku ABC, kterému lze vepsat kružnici (viz obrázek 2.1). Tuto kružnici označme v a její body dotyku se stranami AB, BC, AC trojúhelníku ABC označme po řadě C_1, A_1 a B_1. Strany trojúhelníku ABC leží na tečnách kružnice v vedených body A, B, C a platí $|AB_1| = |AC_1|$, $|BC_1| = |BA_1|$ a $|CA_1| = |CB_1|$. Spojnice OA_1 je kolmice na stranu BC trojúhelníku ABC, tudíž je společnou tečnou kružnic k_B a k_C v bodě A_1. Bod A_1 je proto jediným společným bodem kružnic k_B a k_C. Obdobné platí pro spojnice OB_1 a OC_1 a zbývající dvě dvojice kružnic. Odtud již vyplývá konstrukce, kterou popíšeme krok po kroku (viz obrázek 2.1).



Obrázek 2.1: Konstrukce určujících kružnic.

[1] Jedná se o netypickou planimetrickou úlohu, kterou jsme zadali středoškolským studentům (viz příloha A.1) a zjišťovali, jestli ji zvládnou správně vyřešit.

Nechť jsou tedy dány tři nekolineární body A, B, C, které jsou středy hledaných určujicích kružnic k_A, k_B, k_C. Nejprve sestrojíme trojúhelník ABC a jemu vepsanou kružnici v. Její střed O je průsečíkem os o_a, o_b, o_c vnitřních úhlů trojúhelníku ABC. Body dotyku kružnice v a stran AB, BC, AC trojúhelníku ABC označíme po řadě C_1, A_1 a B_1 (jedná se o paty kolmic vedených bodem O na strany trojúhelníku ABC). Nyní narýsujeme kružnici k_A se středem A procházející body B_1 a C_1. Zbývající kružnice sestrojíme analogicky, tj. narýsujeme kružnici k_B se středem B a poloměrem $|BA_1| = |BC_1|$ a kružnici k_C se středem C a poloměrem $|CA_1| = |CB_1|$.

2.2 Kruhová inverze

Při konstrukci Soddyho kružnic a rovněž při některých dále uvedených výpočtech bude hrát podstatnou roli kruhová inverze. Uveďme proto nyní definici tohoto zobrazení a jeho vlastnosti.

Definice 2 *Nechť je v rovině ρ dána kružnice ω o středu R a poloměru r_ω.* ***Kruhová inverze určená kružnicí*** *$\omega(R, r_\omega)$ je zobrazení v rovině ρ, které každému bodu $X \neq R$ přiřadí bod X' tak, že platí:*

(i) *bod X' náleží polopřímce RX, tj. $X' \in \overrightarrow{RX}$,*

(ii) $|RX| \cdot |RX'| = r_\omega^2$.

Kružnice *ω se nazývá* ***řídicí*** *(též* ***základní****).*

Z definice snadno plyne, že kruhová inverze je *involutorní zobrazení*, tj. je-li bod X' obrazem bodu X, potom je bod X obrazem bodu X'.

Dále je evidentní, že bod ležící ve vnější, resp. vnitřní oblasti řídicí kružnice se zobrazí na bod ležící ve vnitřní, resp. vnější oblasti řídicí kružnice a že bod řídicí kružnice je samodružný.

Nyní bez důkazů[2] uvedeme další základní vlastnosti kruhové inverze.[3]

Věta 2 *Je-li kruhová inverze určená kružnicí $\omega(R, r_\omega)$, potom platí:*

(i) *Přímka procházející bodem R se zobrazí na tutéž přímku.*

(ii) *Přímka neprocházející bodem R se zobrazí na kružnici procházející bodem R.*

(iii) *Kružnice procházející bodem R se zobrazí na přímku neprocházející bodem R.*

(iv) *Dvě kružnice, které se dotýkají v bodě R, se zobrazí na dvě rovnoběžné přímky, které jsou kolmé na spojnici středů kružnic.*

[2] Více o kruhové inverzi viz např. [6].

[3] Vzhledem k definici 2, v níž bod R nemá obraz, bychom u některých dále uvedených útvarů měli vyloučit jeden jejich bod. Pro jednoduchost toto nebudeme výslovně uvádět. (Někdy se proto pracuje v tzv. *Möbiově rovině*, což je *Eukleidova rovina* rozšířená o jeden nevlastní bod, a v definici kruhové inverze se bodu $X = R$ přiřazuje tento bod v nekonečnu.) Takto je kruhová inverze definována např. v práci [10].

(v) *Kružnice neprocházející bodem R se zobrazí na kružnici neprocházející bodem R. (Středy odpovídajících si kružnic si nemusí odpovídat.)*

(vi) *Je-li T bod dotyku dvou rovinných geometrických útvarů, potom je jeho obraz T' bodem dotyku obrazů těchto útvarů.*

(vii) *Slabě samodružnými útvary jsou přímky procházející bodem R a kružnice, které protínají ortogonálně řídicí kružnici (dvě kružnice se protínají ortogonálně, jestliže tečny této dvojice kružnic v každém z jejich společných průsečíků jsou na sebe kolmé).*

2.3 Konstrukce Soddyho kružnic

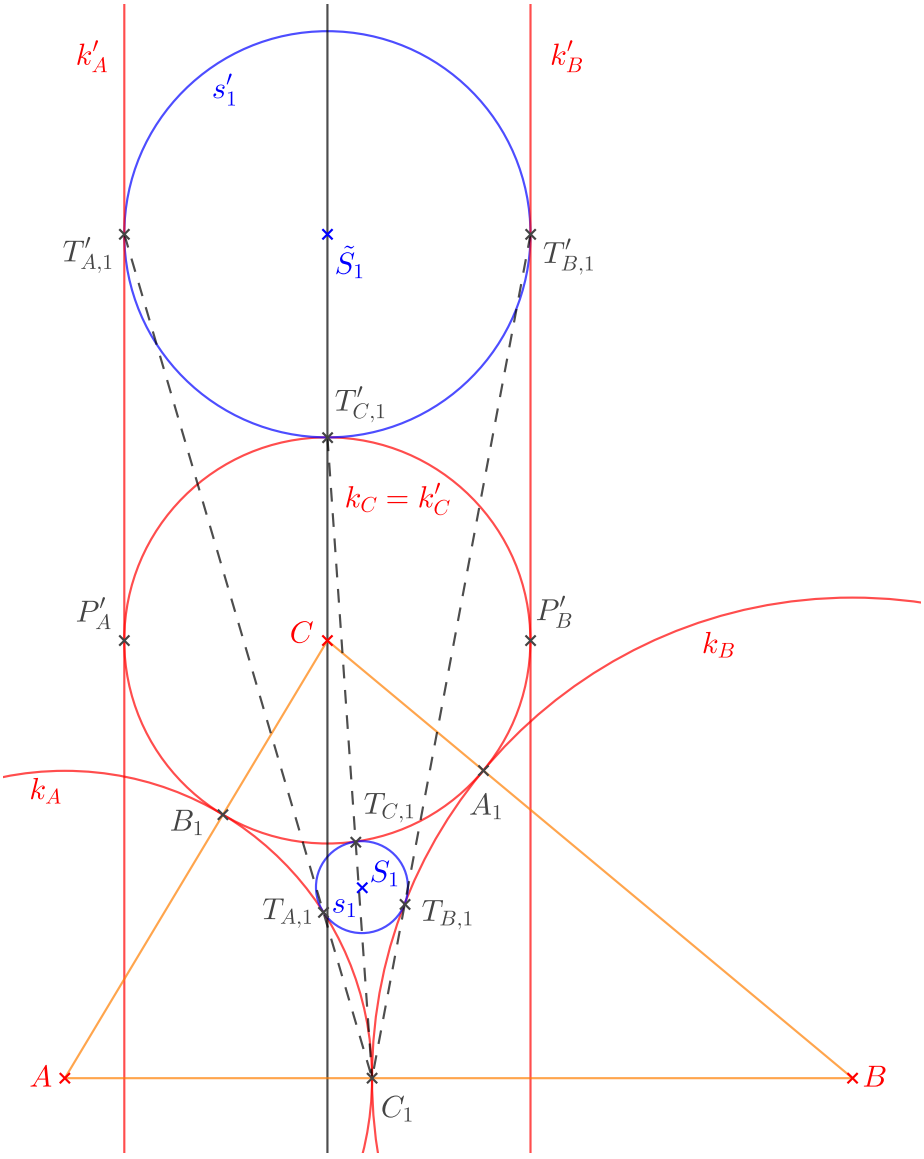
Při konstrukci Soddyho kružnic využijeme kruhovou inverzi, ve které se určující kružnice zobrazí na dvě rovnoběžné přímky a jednu slabě samodružnou kružnici. K obrazům určujících kružnic, tj. ke dvou přímkám a kružnici, nalezneme takovou kružnici, která má s každým z obrazů právě jeden společný bod. Takové kružnice existují dvě a jsou to obrazy Soddyho kružnic ve zvolené kruhové inverzi.

Uvažujme takovou kruhovou inverzi určenou kružnicí ω a středem C_1, která zobrazuje kružnici k_C na kružnici k_C (tj. $k_C = k'_C$ protíná kružnici ω ortogonálně a je slabě samodružná) a kružnice k_A, k_B zobrazuje na dvě rovnoběžné přímky k'_A, k'_B kolmé na stranu AB trojúhelníku ABC. Přímky k'_A, k'_B jsou zároveň tečny kružnice $k_C = k'_C$. Body dotyku tečen k'_A, k'_B a kružnice k'_C označme P'_A a P'_B (viz obrázky 2.2 a 2.3).

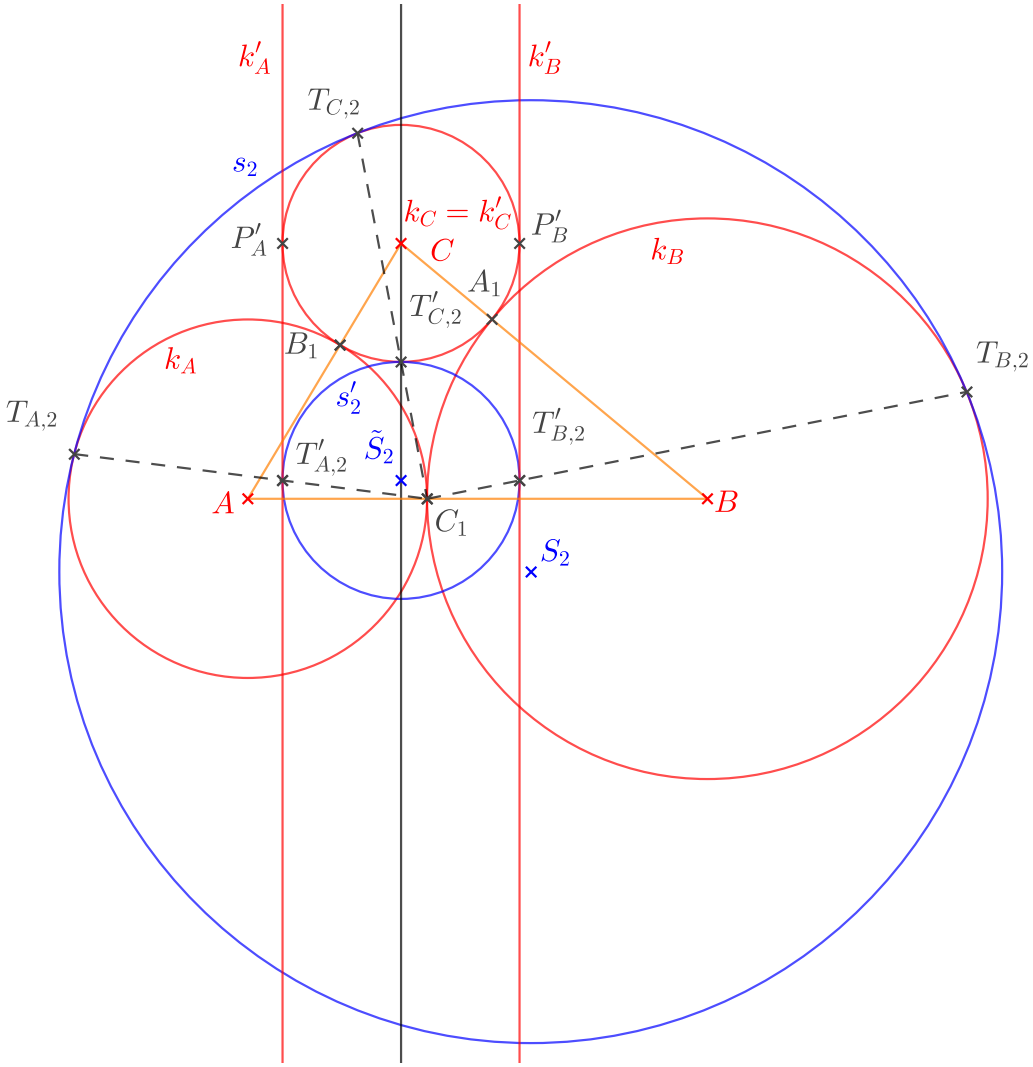
Obrazy s'_1, s'_2 Soddyho kružnic s_1, s_2 v kruhové inverzi určené kružnicí ω jsou kružnice, které se zároveň dotýkají přímek k'_A a k'_B a kružnice k'_C. Body dotyku kružnice s'_1 s přímkami k'_A, k'_B a s kružnicí k'_C označme po řadě $T'_{A,1}, T'_{B,1}$ a $T'_{C,1}$ (viz obrázek 2.2) a body dotyku kružnice s'_2 s přímkami k'_A, k'_B a s kružnicí k'_C označme $T'_{A,2}, T'_{B,2}$ a $T'_{C,2}$ (viz obrázek 2.3).

Středy kružnic s_1, s_2 neodpovídají v uvažované kruhové inverzi středům kružnic s'_1, s'_2. Z tohoto důvodu nejsou středy kružnic s'_1, s'_2 značeny S'_1, S'_2, ale $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2$.

Bodům $T'_{A,1}, T'_{B,1}, T'_{C,1}$, resp. $T'_{A,2}, T'_{B,2}, T'_{C,2}$ najdeme jejich vzory $T_{A,1}, T_{B,1}$, $T_{C,1}$, resp. $T_{A,2}, T_{B,2}, T_{C,2}$. Jedná se o průsečíky přímek $C_1T'_{A,1}, C_1T'_{B,1}, C_1T'_{C,1}$, resp. $C_1T'_{A,2}, C_1T'_{B,2}, C_1T'_{C,2}$ s kružnicemi k_A, k_B, k_C různé od bodů $T'_{C,1}$, C_1, resp. od bodů $T'_{C,2}$, C_1. Tyto nalezené body jsou body dotyku vnitřní, resp. vnější Soddyho kružnice s určujícími kružnicemi k_A, k_B a k_C. Vnitřní, resp. vnější Soddyho kružnici sestrojíme jako kružnici opsanou trojúhelníku $T_{A,1}T_{B,1}T_{C,1}$, resp. $T_{A,2}T_{B,2}T_{C,2}$.



Obrázek 2.2: Konstrukce vnitřní Soddyho kružnice.



Obrázek 2.3: Konstrukce vnější Soddyho kružnice.

3. Poloměry Soddyho kružnic

V této kapitole chceme vyjádřit poloměry Soddyho kružnic pouze v závislosti na poloměrech určujících kružnic.

Ke vztahům bychom mohli dospět úpravami *Descartesovy věty* 1. Nejprve bychom umocnili rovnost (1.1) a pak vypočítali kvadratickou rovnici s neznámou $\frac{1}{r_4}$. Naším cílem je však poloměry Soddyho kružnic vyjádřit bez znalosti Descartesovy věty.

Hlavním zdrojem pro tuto část je článek [3].

V níže uvedených výpočtech a úvahách využijeme některé vzorce týkající se trojúhelníku a také pojem *mocnost bodu ke kružnici*. Připomeňme si proto nejprve několik vztahů, definujme mocnost bodu ke kružnici a uveďme její základní vlastnosti.

Obsah $S_\triangle$ trojúhelníku ABC můžeme vypočítat několika způsoby. Zřejmě nejčastějším je využití vztahu

$$S_\triangle = \frac{a \cdot v_a}{2}, \tag{3.1}$$

kde a je délka strany trojúhelníku ABC a v_a je výška trojúhelníku ABC kolmá na stranu a.

Jinou možností je výpočet obsahu $S_\triangle$ trojúhelníku ABC pomocí tzv. *Heronova vzorce*.

Věta 3 ***(Heronův vzorec).*** *Jsou-li a, b, c délky stran libovolného trojúhelníku ABC, potom pro jeho obsah $S_\triangle$ platí*

$$S_\triangle = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}, \tag{3.2}$$

kde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, tj. s je polovina obvodu trojúhelníku ABC.

Budeme pracovat rovněž se vzorcem pro výpočet poloměru kružnice vepsané trojúhelníku, který lze využít, známe-li délky stran trojúhelníku.

Věta 4 *Jsou-li a, b, c délky stran libovolného trojúhelníku ABC a s je polovina jeho obvodu, potom pro poloměr r kružnice vepsané trojúhelníku ABC platí*

$$r = \sqrt{\frac{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}{s}}. \tag{3.3}$$

Nyní pomocí uvedených vzorců vyjádříme poloměr r_v kružnice vepsané trojúhelníku ABC v závislosti na poloměrech určujících kružnic, resp. v závislosti na těchto poloměrech a na obsahu $S_\triangle$ trojúhelníku ABC.

Mějme tedy trojúhelník ABC, jehož vrcholy jsou středy určujících kružnic $k_A(A, r_a), k_B(B, r_b), k_C(C, r_c)$, ke kterým hledáme Soddyho kružnice (viz obrázek 3.1). Označíme-li a, b a c délky stran trojúhelníku ABC, pak se tyto délky rovnají součtům poloměrů dotýkajících se kružnic, tj.

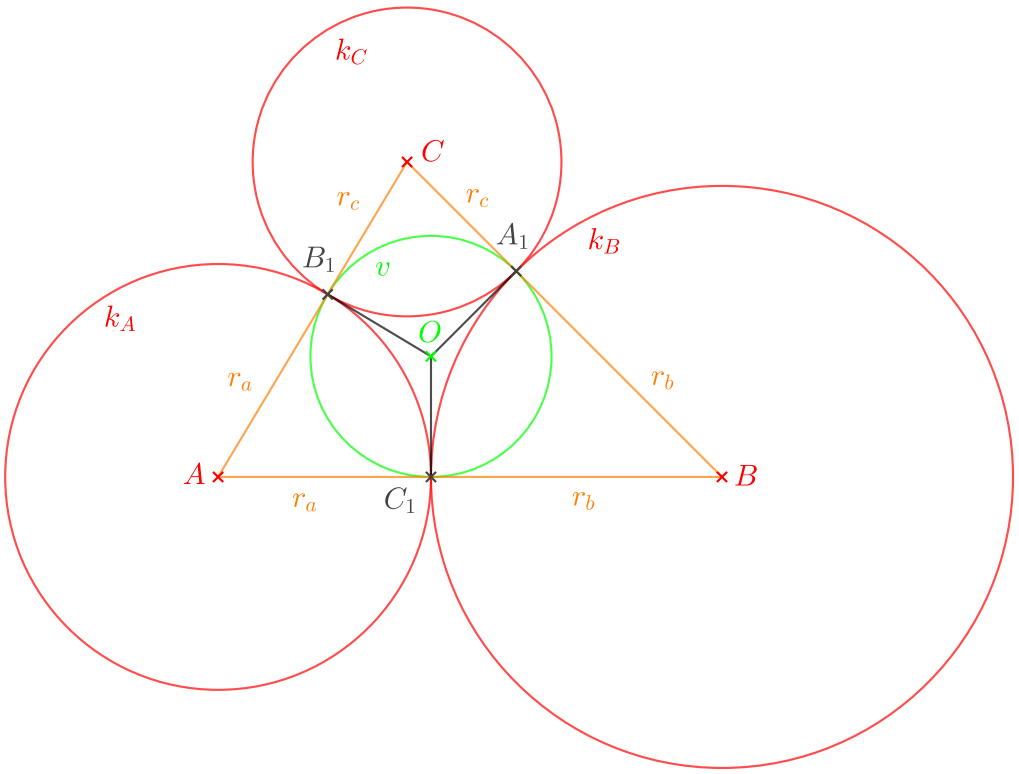
$$a = r_b + r_c, \qquad b = r_a + r_c, \qquad c = r_a + r_b. \tag{3.4}$$

Dosazením těchto rovností do vztahu $s = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$ pro polovinu obvodu trojúhelníku dostáváme

$$s = \frac{1}{2} \cdot (r_b + r_c + r_a + r_c + r_a + r_b),$$

a tedy

$$s = r_a + r_b + r_c. \tag{3.5}$$



Obrázek 3.1: Poloměry určujících kružnic.

Pomocí vztahů (3.4) a (3.5) vyjádříme poloměry určujících kružnic:

$$r_a = s - a, \qquad r_b = s - b, \qquad r_c = s - c. \tag{3.6}$$

Dosazením rovností (3.5) a (3.6) do Heronova vzorce (3.2) můžeme vypočítat obsah $S_\triangle$ trojúhelníku ABC následovně:

$$S_\triangle = \sqrt{(r_a + r_b + r_c) \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}. \tag{3.7}$$

Vyjádření poloměru kružnice $v(O, r_v)$ vepsané trojúhelníku ABC v závislosti na poloměrech určujících kružnic získáme pomocí vztahů (3.3), (3.5) a (3.6):

$$r_v = \sqrt{\frac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a + r_b + r_c}}. \tag{3.8}$$

Pokud bychom chtěli vyjádřit poloměr r_v v závislosti nejen na poloměrech r_a, r_b, r_c, ale i na obsahu $S_\triangle$ trojúhelníku ABC, využijeme vzorců (3.8) a (3.7):

$$r_v = \sqrt{\frac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a + r_b + r_c} \cdot \frac{r_a + r_b + r_c}{r_a + r_b + r_c}},$$

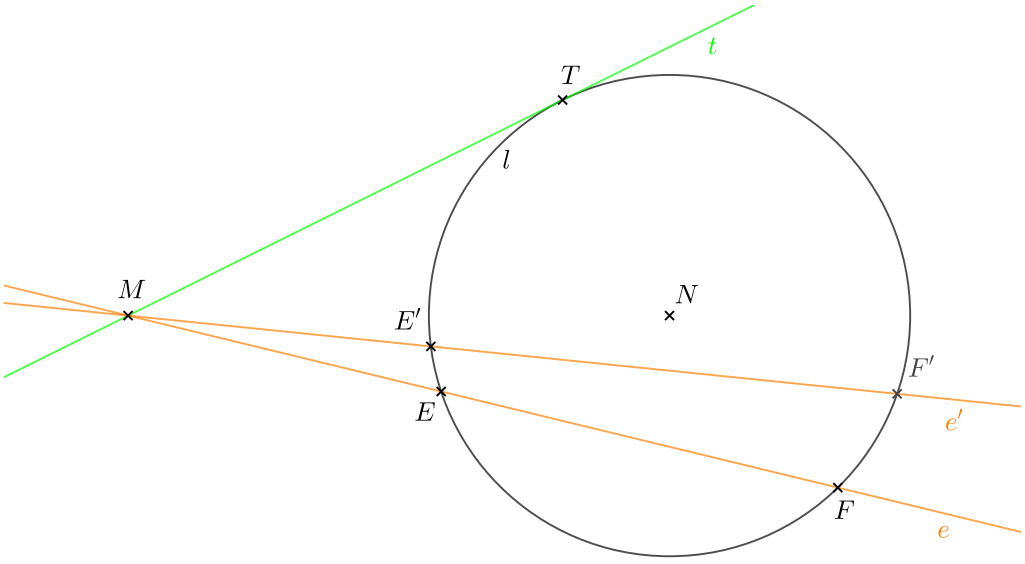
$$r_v = \frac{S_\triangle}{r_a + r_b + r_c}. \tag{3.9}$$

Dále připomeneme pojem *mocnost bodu ke kružnici* a uvedeme její níže využívané vlastnosti.[1]

Definice 3 *Je dán bod M a kružnice $l(N, q)$. Číslo $m = |MN|^2 - q^2$ nazýváme* ***mocností bodu M ke kružnici l****.*

Věta 5 *Je dána kružnice $l(N, q)$ a bod M, který leží v její vnější oblasti (viz obrázek 3.2). Nechť e je sečna kružnice l procházející bodem M, která kružnici l protíná v bodech E, F. Potom pro mocnost m bodu M ke kružnici l platí $m = |ME| \cdot |MF|$.*

Pokud budeme uvažovat dvě sečny e, e' kružnice l, resp. mezní polohu sečny e, kdy $E = F$ (tj. sečna se stane tečnou t kružnice l), vyplývají z věty 5 následující dva teorémy.



Obrázek 3.2: Mocnost bodu M ke kružnici l.

Věta 6 *Je dána kružnice $l(N, q)$ a bod M, který leží v její vnější oblasti (viz obrázek 3.2). Nechť e a e' jsou sečny kružnice l procházející bodem M, které kružnici l protínají v bodech E, F a E', F'. Potom $|ME| \cdot |MF| = |ME'| \cdot |MF'|$.*

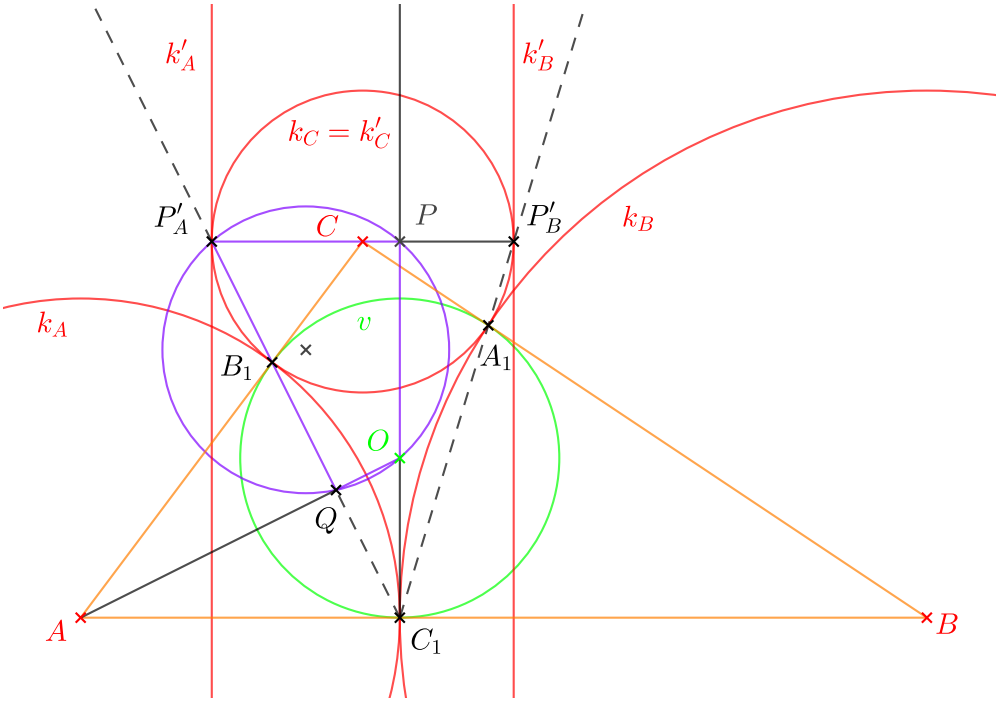
[1] Více o mocnosti bodu ke kružnici viz např. [10].

Věta 7 *Je dána kružnice $l(N, q)$ a bod M, který leží v její vnější oblasti (viz obrázek 3.2). Nechť t je tečna kružnice l vedená bodem M, jejímž bodem dotyku je bod T. Potom pro mocnost m bodu M ke kružnici l platí $m = |MT|^2$.*

Nyní se vraťme k zobrazení určujících kružnic k_A, k_B, k_C v uvažované kruhové inverzi s řídicí kružnicí ω o středu C_1 (viz kapitola 2) a vyjádřeme poloměr r_ω kružnice ω v závislosti na poloměrech určujících kružnic.

Jelikož je bod B_1 bodem dotyku kružnic k_A, k_C a bod P'_A je bodem dotyku přímky k'_A a kružnice k'_C (viz obrázek 3.3), zobrazí se bod B_1 v uvažované kruhové inverzi na bod P'_A (z analogických důvodů se bod A_1 zobrazí na bod P'_B). Body C_1, B_1, P'_A (obdobně body C_1, A_1, P'_B) tudíž leží na jedné (polo)přímce.

Označíme Q průsečík úseček C_1B_1 a OA, kde O je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, a dále označíme P průsečík úsečky $P'_AP'_B$ a kolmice na úsečku AB procházející bodem C_1.



Obrázek 3.3: Zobrazení bodů v kruhové inverzi ω.

Protože je trojúhelník B_1AC_1 rovnoramenný a přímka $OA = QA$ je osou jeho vnitřního úhlu B_1AC_1, je úsečka AQ jeho výškou na základnu B_1C_1. Proto $|\sphericalangle AQB_1| = |\sphericalangle AQP'_A| = |\sphericalangle OQP'_A| = 90°$. Jelikož jsou tečny k'_A, k'_B kružnice k'_C kolmé na úsečku AB, jsou úsečky $P'_AP'_B$ a AB rovnoběžné. Proto je rovněž $|\sphericalangle OPP'_A| = 90°$ a platí

$$|\sphericalangle OQP'_A| + |\sphericalangle OPP'_A| = 90° + 90° = 180°.$$

Součet velikostí vnitřních úhlů libovolného čtyřúhelníku je 360°, tudíž

$$|\sphericalangle PP'_AQ| + |\sphericalangle QOP| = 360° - (|\sphericalangle OQP'_A| + |\sphericalangle OPP'_A|) = 360° - 180° = 180°.$$

Z toho vyplývá, že součet protějších vnitřních úhlů čtyřúhelníku $QOPP'_A$ je úhel přímý, tj. jedná se o tětivový čtyřúhelník a lze mu opsat kružnici.

Nyní jsme schopni vyjádřit poloměr r_ω řídicí kružnice $\omega(C_1, r_\omega)$ v závislosti na poloměrech r_a, r_b, r_c určujících kružnic.

Protože se bod B_1 zobrazí v kruhové inverzi s řídicí kružnicí $\omega(C_1, r_\omega)$ na bod P'_A, platí na základě definice 2 kruhové inverze

$$r_\omega^2 = |C_1B_1| \cdot |C_1P'_A|,$$

$$r_\omega^2 = 2 \cdot |C_1Q| \cdot |C_1P'_A|. \tag{3.10}$$

Z vlastností mocnosti bodu C_1 ke kružnici opsané čtyřúhelníku $QOPP'_A$ dále plyne

$$|C_1Q| \cdot |C_1P'_A| = |C_1O| \cdot |C_1P|,$$

$$|C_1Q| = \frac{|C_1O| \cdot |C_1P|}{|C_1P'_A|},$$

a tedy dosazením do rovnosti (3.10) získáme

$$r_\omega^2 = 2 \cdot |C_1O| \cdot |C_1P|,$$

$$r_\omega^2 = 2 \cdot r_v \cdot v_c, \tag{3.11}$$

kde v_c je výška trojúhelníku ABC kolmá na stranu AB. Výšku v_c vyjádříme pomocí vzorců (3.1) a (3.4):

$$S_\triangle = \frac{c \cdot v_c}{2},$$

$$v_c = \frac{2 \cdot S_\triangle}{c},$$

$$v_c = \frac{2 \cdot S_\triangle}{r_a + r_b}. \tag{3.12}$$

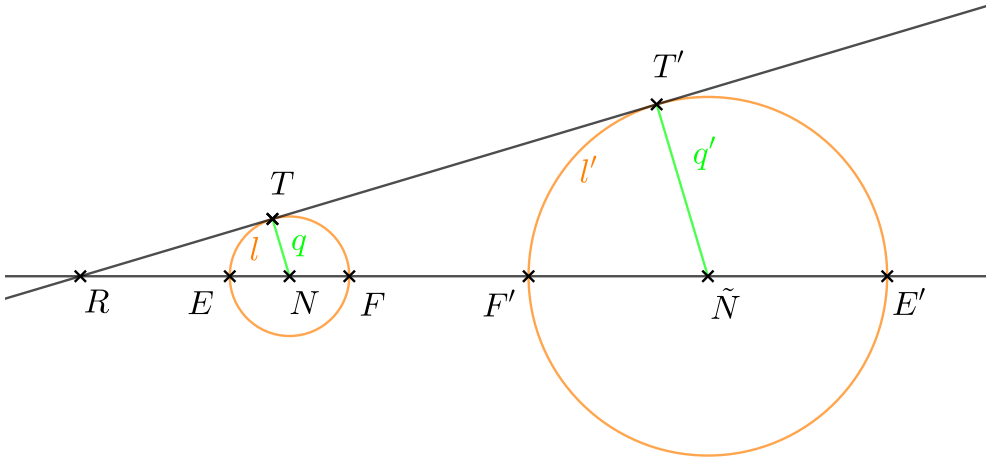
Dosazením rovností (3.9) a (3.12) do vztahu (3.11) a následně využitím rovnosti (3.7) dostáváme

$$r_\omega^2 = 2 \cdot \frac{S_\triangle}{r_a + r_b + r_c} \cdot \frac{2 \cdot S_\triangle}{r_a + r_b} = \frac{4 \cdot (r_a + r_b + r_c) \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}{(r_a + r_b + r_c) \cdot (r_a + r_b)},$$

a tedy

$$r_\omega^2 = \frac{4 \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a + r_b}. \tag{3.13}$$

Dále odvoďme vztah mezi poloměrem kružnice l a poloměrem kružnice l', která je obrazem kružnice l v kruhové inverzi. Zdrojem pro odvození je [18].



Obrázek 3.4: Odvození poměru poloměrů kružnic.

Mějme kružnici $l(N, q)$ a její obraz $l'(\tilde{N}, q')$ v kruhové inverzi s řídicí kružnicí $\omega(R, r_\omega)$ (viz obrázek 3.4). Průsečíky přímky $N\tilde{N} = RN = R\tilde{N}$ s kružnicí l označme E, F (jejich obrazy E', F' jsou průsečíky přímky $N\tilde{N}$ s kružnicí l') a body dotyku jedné ze společných tečen kružnic l a l' vedené bodem R označme T a T'. Pak

$$|RF| - |RE| = 2q \qquad a \qquad |RE'| - |RF'| = 2q'.$$

Pro poměr poloměrů q a q' kružnic l a l' tedy platí

$$\frac{q}{q'} = \frac{|RF| - |RE|}{|RE'| - |RF'|}. \tag{3.14}$$

Z definice 2 kruhové inverze máme vztahy

$$|RE| = \frac{r_\omega^2}{|RE'|}, \qquad |RF| = \frac{r_\omega^2}{|RF'|}. \tag{3.15}$$

Dosazením vyjádření (3.15) do vztahu (3.14) získáváme poměr

$$\frac{q}{q'} = \frac{\dfrac{r_\omega^2}{|RF'|} - \dfrac{r_\omega^2}{|RE'|}}{|RE'| - |RF'|} = \frac{r_\omega^2 \cdot \dfrac{|RE'| - |RF'|}{|RE'| \cdot |RF'|}}{|RE'| - |RF'|},$$

a proto

$$\frac{q}{q'} = \frac{r_\omega^2}{|RE'| \cdot |RF'|}. \tag{3.16}$$

S využitím mocnosti bodu R ke kružnici l' a *Pýthagorovy věty* pro pravoúhlý trojúhelník $R\tilde{N}T'$ dostáváme

$$m = |RE'| \cdot |RF'| = |RT'|^2,$$

$$m = |RT'|^2 = |R\tilde{N}|^2 - |T'\tilde{N}|^2,$$

a tedy

$$|RE'| \cdot |RF'| = |R\tilde{N}|^2 - q'^2. \tag{3.17}$$

Pomocí rovností (3.16), (3.17) vyjádříme poměr poloměrů kružnic l a l':

$$\frac{q}{q'} = \frac{r_\omega^2}{|R\tilde{N}|^2 - q'^2}$$

a následně

$$q = q' \cdot \frac{{r_\omega}^2}{|R\tilde{N}|^2 - q'^2}. \tag{3.18}$$

Nyní máme vše připravené k vyjádření poloměrů vnitřní, resp. vnější Soddyho kružnice.

3.1 Poloměr vnitřní Soddyho kružnice

Pro poloměr vnitřní Soddyho kružnice $s_1(S_1, r_1)$, jejíž obrazem v kruhové inverzi s řídicí kružnicí $\omega(C_1, r_\omega)$ je kružnice $s_1'(\tilde{S}_1, r_c)$, pomocí vztahu (3.18) získáváme

$$r_1 = r_c \cdot \frac{r_\omega^2}{|C_1\tilde{S}_1|^2 - r_c^2}. \tag{3.19}$$

Označíme-li D patu kolmice vedenou bodem C na stranu AB trojúhelníku ABC (viz obrázek 3.5), jsou trojúhelníky DC_1C a $DC_1\tilde{S}_1$ pravoúhlé a podle *Pýthagorovy věty* platí

$$|C_1C|^2 = |C_1D|^2 + |CD|^2$$

a

$$|C_1\tilde{S}_1|^2 = |C_1D|^2 + |\tilde{S}_1D|^2.$$

Odečteme od sebe druhé mocniny délek přepon obou trojúhelníků:

$$|C_1\tilde{S}_1|^2 - |C_1C|^2 = |C_1D|^2 + |\tilde{S}_1D|^2 - (|C_1D|^2 + |CD|^2) =$$

$$= |\tilde{S}_1D|^2 - |CD|^2 = (|\tilde{S}_1D| - |CD|) \cdot (|\tilde{S}_1D| + |CD|) = |\tilde{S}_1C| \cdot 2 \cdot |T_{C,1}D| =$$

$$= 2 \cdot r_c \cdot 2 \cdot (r_c + v_c),$$

a tudíž

$$|C_1\tilde{S}_1|^2 - |CC_1|^2 = 4 \cdot r_c \cdot (r_c + v_c). \tag{3.20}$$

Označme I a I' průsečíky přímky CC_1 s kružnicí $k_C = k_C'$ (viz obrázek 3.6). Jelikož je kružnice k_C v uvažované kruhové inverzi slabě samodružná, je obrazem bodu I právě bod I'. Proto

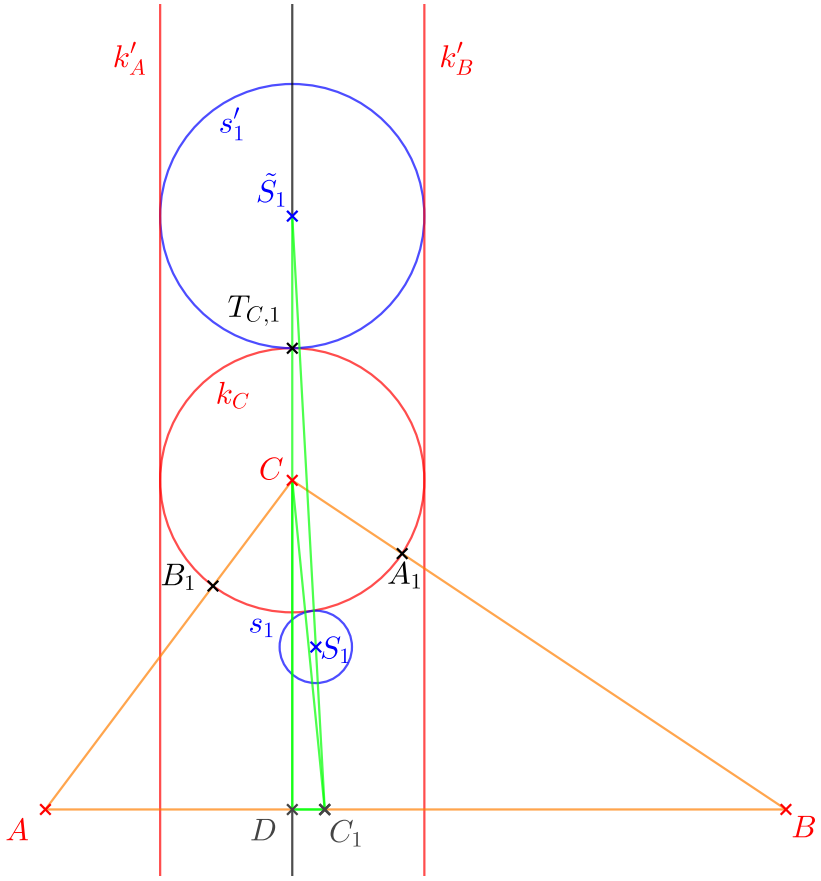
$$r_\omega^2 = |C_1I| \cdot |C_1I'|.$$

Odtud plyne

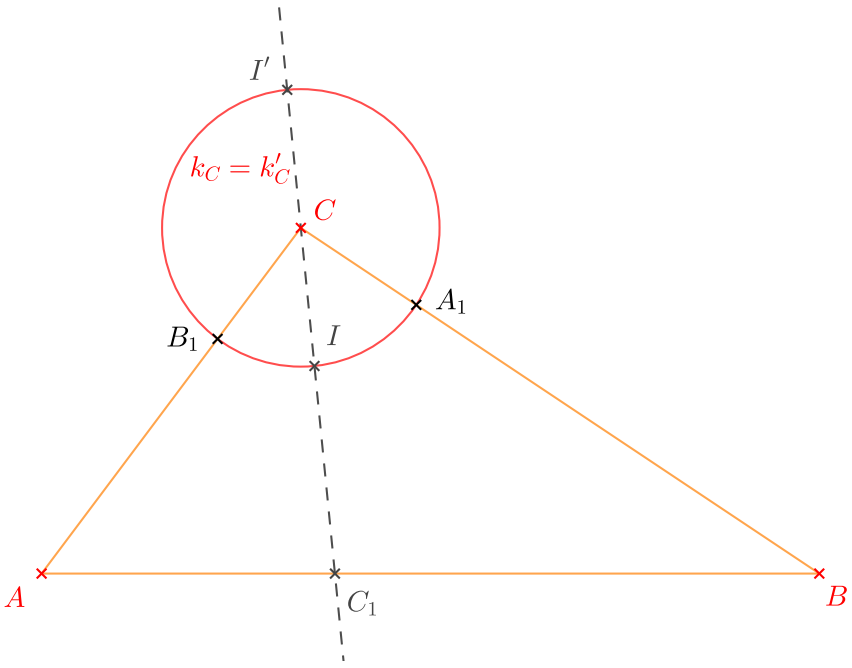
$$r_\omega^2 = (|C_1C| - r_c) \cdot (|C_1C| + r_c) = |C_1C|^2 - r_c^2$$

a následně

$$|C_1C|^2 = r_\omega^2 + r_c^2. \tag{3.21}$$



Obrázek 3.5: Pravoúhlé trojúhelníky I.



Obrázek 3.6: Průsečíky I a I' přímky CC_1 s kružnicí $k_C = k'_C$.

Dosazením vztahu (3.21) do rovnosti (3.20) získáme

$$|C_1\tilde{S}_1|^2 - (r_\omega^2 + r_c^2) = 4 \cdot r_c \cdot (r_c + v_c)$$

a po úpravě

$$|C_1\tilde{S}_1|^2 - r_c^2 = r_\omega^2 + 4 \cdot r_c \cdot (r_c + v_c). \tag{3.22}$$

Dosadíme-li rovnosti (3.13), (3.22) do vztahu (3.19) a využijeme-li poté vyjádření (3.12), dostáváme

$$r_1 = r_c \cdot \frac{\dfrac{4 \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a + r_b}}{\dfrac{4 \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a + r_b} + 4 \cdot r_c \cdot (r_c + v_c)} =$$

$$= r_c \cdot \frac{\dfrac{4 \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a + r_b}}{\dfrac{4 \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a + r_b} + 4 \cdot {r_c}^2 + 4 \cdot r_c \cdot \dfrac{2 \cdot S_\triangle}{r_a + r_b}} =$$

$$= \frac{4 \cdot r_c \cdot \dfrac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a + r_b}}{4 \cdot r_c \cdot \dfrac{r_a \cdot r_b + r_c \cdot r_a + r_c \cdot r_b + 2 \cdot S_\triangle}{r_a + r_b}} = \frac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c + 2 \cdot S_\triangle}.$$

Pro poloměr r_1 vnitřní Soddyho kružnice tedy platí vztah

$$r_1 = \frac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c + 2 \cdot S_\triangle}.$$

A když do něj dosadíme za $S_\triangle$ z rovnosti (3.7), získáme poloměr vnitřní Soddyho kružnice vyjádřený pouze v závislosti na poloměrech určujících kružnic:

$$r_1 = \frac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c + 2 \cdot \sqrt{(r_a + r_b + r_c) \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}}.$$

3.2 Poloměr vnější Soddyho kružnice

V případě poloměru vnější Soddyho kružnice postupujeme analogicky jako u poloměru vnitřní Soddyho kružnice.

Pro poloměr vnější Soddyho kružnice $s_2(S_2, r_2)$, která se v kruhové inverzi s řídicí kružnicí $\omega(C_1, r_\omega)$ zobrazí na kružnici $s_2'(\tilde{S}_2, r_c)$, s využitím rovnosti (3.18) získáváme

$$r_2 = r_c \cdot \frac{r_\omega^2}{|C_1\tilde{S}_2|^2 - r_c^2}. \tag{3.23}$$

Uvažujeme-li opět patu D kolmice vedenou bodem C na stranu AB trojúhelníku ABC (viz obrázek 3.7), jsou trojúhelníky DC_1C a $DC_1\tilde{S}_2$ pravoúhlé a podle *Pýthagorovy věty* platí

$$|C_1C|^2 = |C_1D|^2 + |CD|^2$$

a

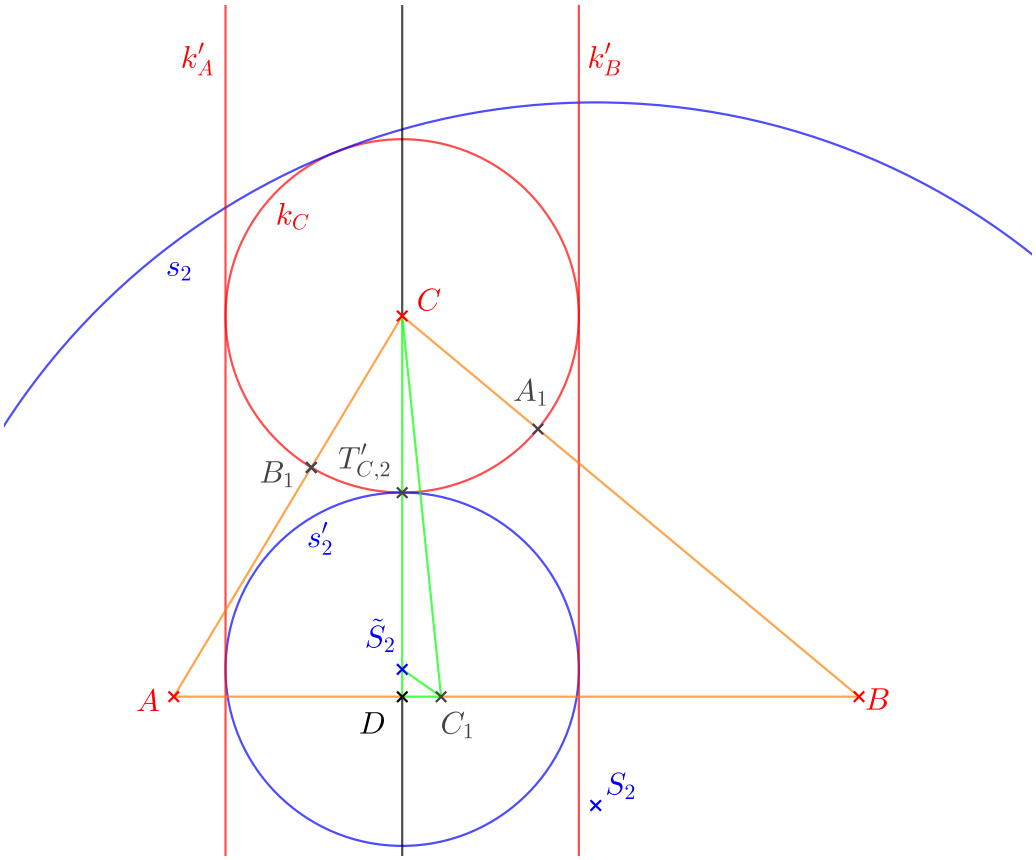
$$|C_1\tilde{S}_2|^2 = |C_1D|^2 + |\tilde{S}_2D|^2.$$

Odečteme-li od sebe druhé mocniny délek přepon uvedených trojúhelníků, máme

$$|C_1C|^2 - |C_1\tilde{S}_2|^2 = |C_1D|^2 + |CD|^2 - (|C_1D|^2 + |\tilde{S}_2D|^2) =$$
$$= |CD|^2 - |\tilde{S}_2D|^2 = (|CD| - |\tilde{S}_2D|) \cdot (|CD| + |\tilde{S}_2D|) = |\tilde{S}_2C| \cdot 2 \cdot |T'_{C,2}D| =$$
$$= 2 \cdot r_c \cdot 2 \cdot (v_c - r_c)$$

neboli

$$|CC_1|^2 - |C_1\tilde{S}_2|^2 = 4 \cdot r_c \cdot (v_c - r_c). \tag{3.24}$$



Obrázek 3.7: Pravoúhlé trojúhelníky II.

Pomocí vztahů (3.21) a (3.24) postupně získáme

$$r_\omega^2 + r_c^2 - |C_1\tilde{S}_2|^2 = 4 \cdot r_c \cdot (v_c - r_c),$$

$$|C_1\tilde{S}_2|^2 - r_c^2 = r_\omega^2 - 4 \cdot r_c \cdot (v_c - r_c). \tag{3.25}$$

Nyní dosadíme vztahy (3.13), (3.25) do rovnosti (3.23) a následně dosadíme také vztah (3.12). Tím dostáváme

$$r_2 = r_c \cdot \frac{\dfrac{4 \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a + r_b}}{\dfrac{4 \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a + r_b} - 4 \cdot r_c \cdot (v_c - r_c)} =$$

$$= r_c \cdot \frac{\dfrac{4 \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a + r_b}}{\dfrac{4 \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a + r_b} - 4 \cdot r_c \cdot \dfrac{2 \cdot S_\triangle}{r_a + r_b} + 4 \cdot {r_c}^2} =$$

$$= \frac{4 \cdot r_c \cdot \dfrac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a + r_b}}{4 \cdot r_c \cdot \dfrac{r_a \cdot r_b + r_c \cdot r_a + r_c \cdot r_b - 2 \cdot S_\triangle}{r_a + r_b}} = \frac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c - 2 \cdot S_\triangle}.$$

Poloměr r_2 vnější Soddyho kružnice tudíž lze vyjádřit vztahem

$$r_2 = \frac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c - 2 \cdot S_\triangle}.$$

Chceme-li vyjádřit poloměr vnější Soddyho kružnice pouze v závislosti na poloměrech určujících kružnic, stačí do posledního vztahu dosadit opět rovnost (3.7):

$$r_2 = \frac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c - 2 \cdot \sqrt{(r_a + r_b + r_c) \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}}.$$

Povšimněme si, že vyjádření poloměrů r_1, r_2 Soddyho kružnic se liší pouze ve znaménkách u obsahu trojúhelníku $S_\triangle$. Tedy tyto poloměry r_1 a r_2 lze souhrnně vyjádřit následujícím způsobem:

$$r_{1,2} = \frac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c \pm 2 \cdot S_\triangle}.$$

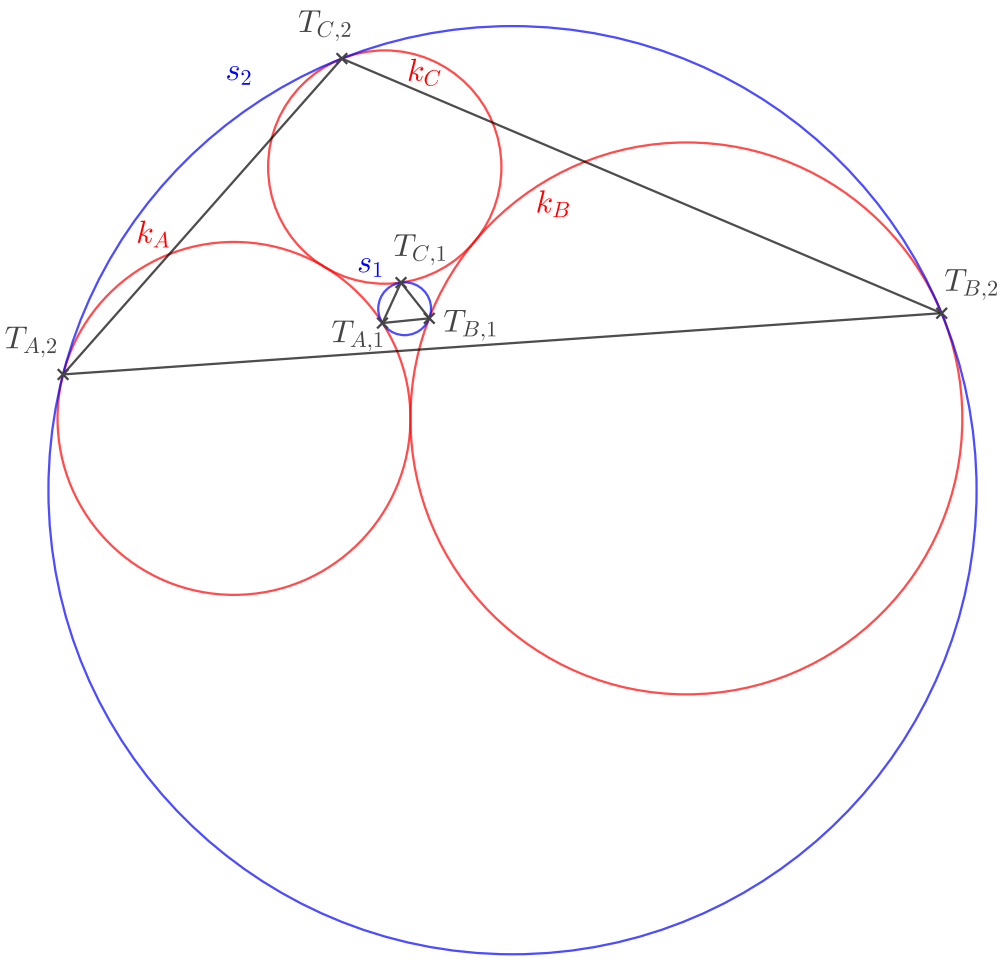
4. Další Soddyho útvary

Poslední kapitola je věnována dalším geometrickým útvarům nesoucím příjmení Fredericka Soddyho. Jedná se o přehled těchto zajímavých útvarů (a jejich vlastností), které se Soddyho kružnicemi souvisejí. Veškerá tvrzení jsou proto uvedena bez důkazů.

Kapitola byla sepsána na základě zdrojů [11], [15], [17] a [19].

4.1 Soddyho trojúhelníky

Definice 4 *Mějme určující kružnice a vnitřní, resp. vnější Soddyho kružnici. Pak trojúhelník, jehož vrcholy jsou body dotyku určujících kružnic se Soddyho vnitřní, resp. vnější kružnicí, se nazývá* ***Soddyho trojúhelník*** *(viz obrázek 4.1).*



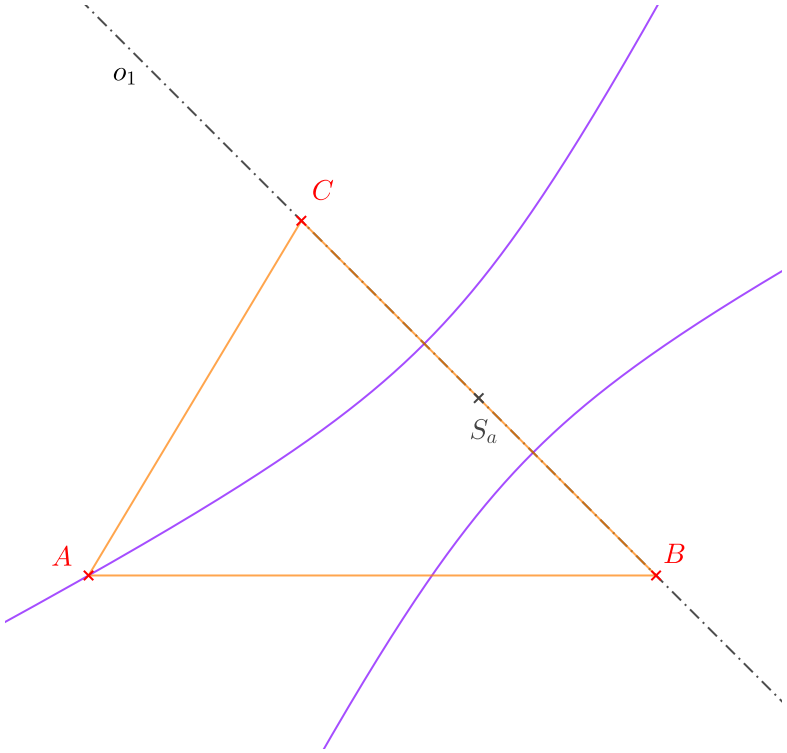
Obrázek 4.1: Soddyho trojúhelníky.

Soddyho trojúhelníky existují dva.Vrcholy trojúhelníků jsme již označili na obrázku 2.2 jako body $T_{A,1}, T_{B,1}, T_{C,1}$, resp. na obrázku 2.3 jako body $T_{A,2}, T_{B,2}, T_{C,2}$.

4.2 Soddyho hyperboly

Definice 5 *Uvažujme trojúhelník ABC. Hyperbola s ohnisky B, C, která prochází bodem A, se nazývá* ***Soddyho hyperbola*** *nebo též přesněji* ***a-Soddyho hyperbola*** *(viz obrázek 4.2).*

Z definice vyplývá, že střed úsečky BC je střed a-Soddyho hyperboly (na obrázku 4.2 označen jako bod S_a). Strana BC trojúhelníku leží na hlavní ose hyperboly (na obrázku 4.2 přímka o_1 vyznačena čerchovaně).

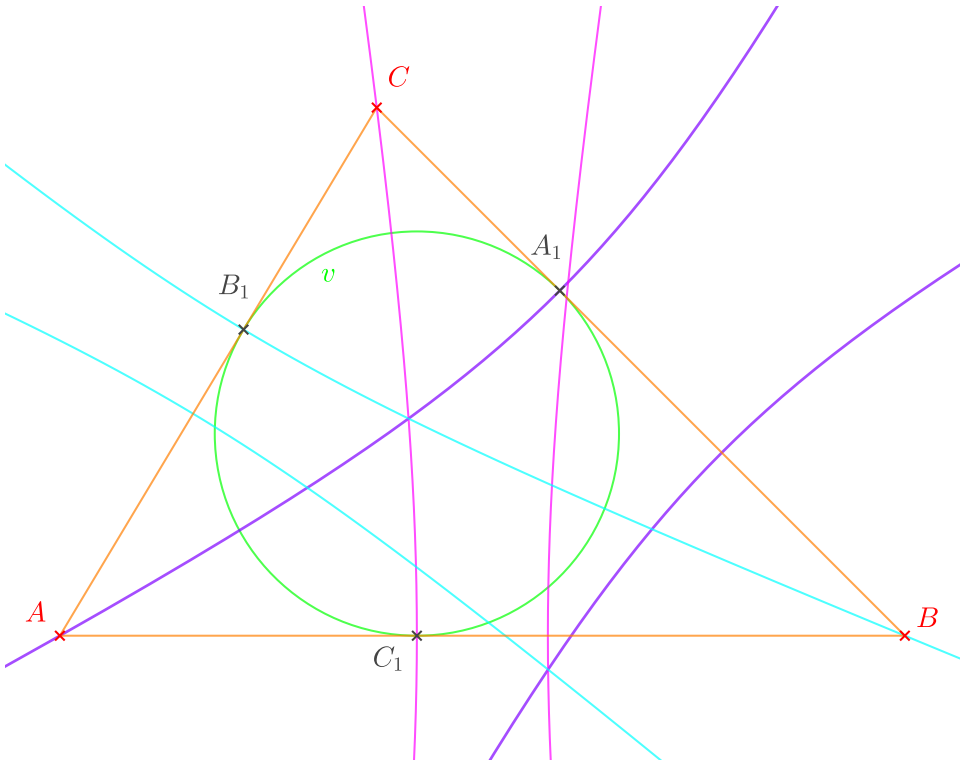


Obrázek 4.2: a-Soddyho hyperbola.

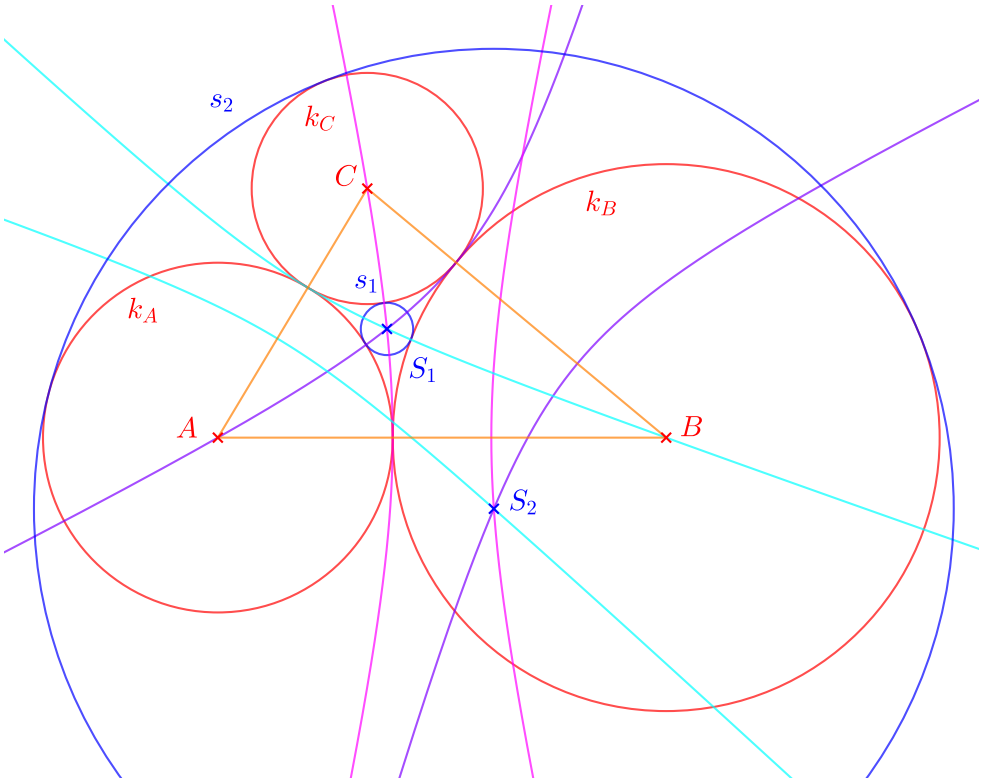
Obdobně bychom definovali i další Soddyho hyperboly, *b-Soddyho hyperbolu* mající ohniska A, C a procházející bodem B a *c-Soddyho hyperbolu* mající ohniska A, B a procházející bodem C.

Pro Soddyho hyperboly platí, že jeden z vrcholů každé z nich je bodem dotyku kružnice v vepsané trojúhelníku ABC a jeho příslušné strany (viz obrázek 4.3, kde jsou body dotyku označeny A_1, B_1, C_1). Jedná se o vrchol hyperboly, který leží na její větvi procházející vrcholem A, resp. B, resp. C trojúhelníku ABC.

Také platí, že existují právě dva body, v nichž se všechny tři hyperboly protínají. Tyto průsečíky jsou středy Soddyho kružnic (viz obrázek 4.4).



Obrázek 4.3: Soddyho hyperboly a kružnice vepsaná trojúhelníku ABC.



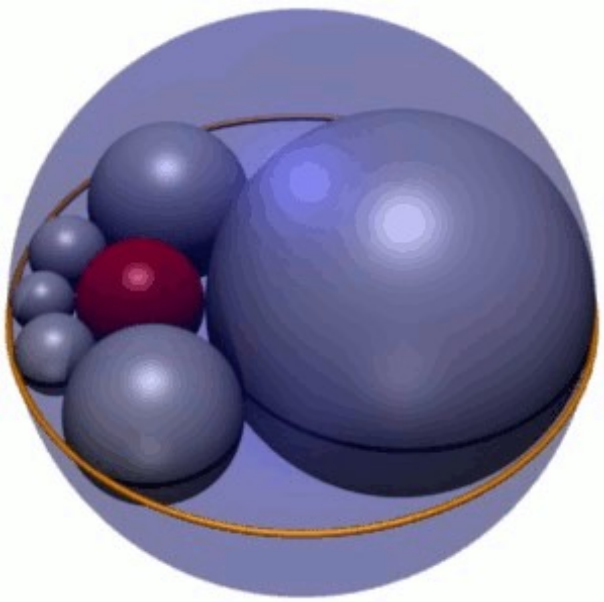
Obrázek 4.4: Středy Soddyho kružnic jako průsečíky Soddyho hyperbol.

4.3 Soddyho hexlet

Tato poslední podkapitola uvádí bez důkazů některé zajímavé vlastnosti Soddyho hexletu, který můžeme vnímat jako rozšíření pojmu Soddyho kružnice do tří-rozměrného prostoru.

Definice 6 *Nechť $\kappa_A, \kappa_B, \kappa_C$ jsou koule, které se vzájemně dotýkají. Potom lze sestrojit šest koulí $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5, \kappa_6$, které tvoří řetězec (tj. koule κ_i se dotýká koulí κ_{i-1} a κ_{i+1}, $i = 2, 3, 4, 5$, a koule κ_6 se dotýká koulí κ_5 a κ_1) a z nichž každá má vnější dotyk s každou z koulí $\kappa_A, \kappa_B, \kappa_C$. Seskupení šesti koulí nazýváme* ***Soddyho hexlet*** *nebo též zkráceně* ***hexlet*** *(viz obrázek 4.5[1]).*

Na obrázku 4.5 je červeně znázorněna jedna z koulí $\kappa_A, \kappa_B, \kappa_C$, zbylé dvě koule nejsou kvůli přehlednosti uvedeny. Šestice koulí $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5, \kappa_6$ Soddyho hexletu je zakreslena modře.



Obrázek 4.5: Soddyho hexlet.

Budeme uvažovat pouze případy, v nichž mají koule $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5, \kappa_6$ hexletu konečný poloměr.

Koule hexletu mají nejen dotyk s koulemi (a tedy i kulovými plochami) $\kappa_A, \kappa_B, \kappa_C$, ale mají i dotyk s další, tj. čtvrtou kulovou plochou, kterou označme κ_D (viz obrázek 4.5). S ní však mají dotyk vnitřní.

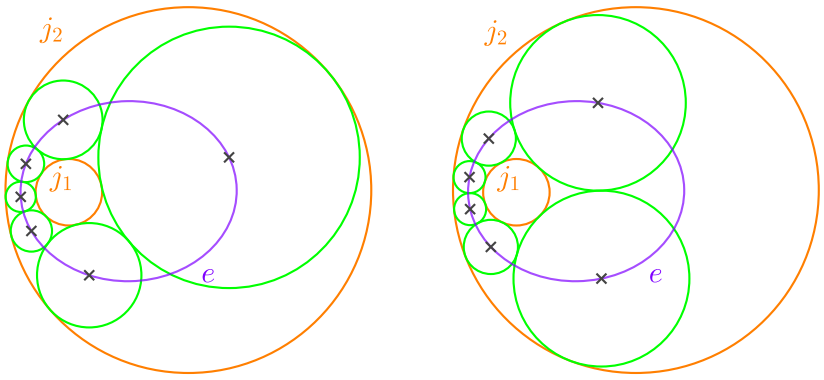
Někdy se Soddyho hexlet definuje jako řetězec koulí, které mají vnější dotyk se dvěma danými navzájem se vně dotýkajícími koulemi κ_a, κ_b a vnitřní dotyk s kulovou plochou κ_D. Zároveň platí, že koule κ_a, κ_b mají vnitřní dotyk s kulovou plochou κ_D.[2]

[1] Obrázek je přejat z webové stránky
`https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rotating_hexlet_equator_opt.gif`

[2] Povšimněme si, že koule κ_A a κ_B nemají vnitřní dotyk s kulovou plochou κ_D.

Pro koule Soddyho hexletu platí, že jejich středy leží v jedné rovině, a to na elipse. Tuto skutečnost dokázal až v roce 1990 americký matematik a námořník Charles Stanley Ogilvy (1913–2000)[3] v práci [11].

Uvědomme si, že Soddyho hexlet je také trojrozměrné zobecnění tzv. *Steinerova řetězce šesti kružnic* (viz obrázek 4.6). Steinerův řetězec n kružnic je řetězec n kružnic, z nichž každé dvě, které v řetězci sousedí, mají vnější dotyk a zároveň se každá kružnice Steinerova řetězce dotýká dvou daných kružnic j_1, j_2, které se neprotínají (kružnice j_1, j_2 jsou na obrázku 4.6 zobrazeny oranžově).



a) b)

Obrázek 4.6: Dva různé Steinerovy řetězce.

Tento pojem je pojmenován po švýcarském matematikovi Jakobu Steinerovi, který se také zabýval Soddyho kružnicemi (viz část 1.4.1).

Kružnice Steinerova řetězce šesti kružnic jsou řezy povrchů koulí Soddyho hexletu rovinou obsahující středy těchto koulí. Kružnice j_2 je řezem kulové plochy κ_D. Na této kružnici leží body dotyku jednotlivých koulí $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5, \kappa_6$ Soddyho hexletu a kulové plochy κ_D (viz obrázek 4.5).

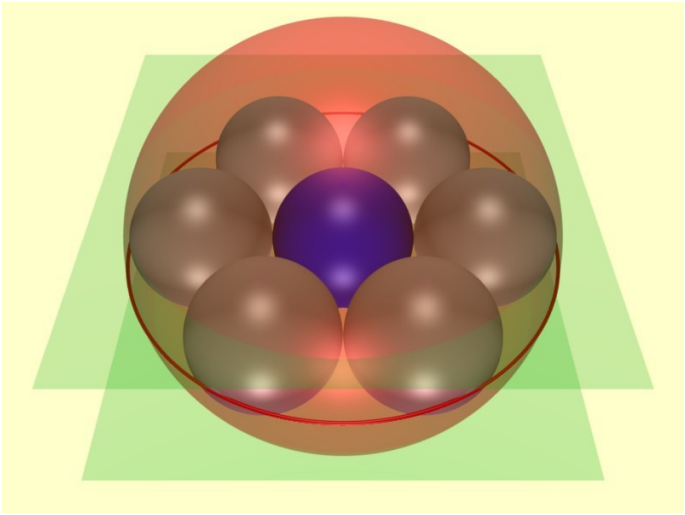
Soddy přišel na to, že nezávisle na volbě tří vzájemně se dotýkajících koulí $\kappa_A, \kappa_B, \kappa_C$ lze Soddyho hexlet vždy najít. Soddyho hexletů přitom pro dané tři koule existuje nekonečno mnoho. Pro dané kružnice j_1, j_2 totiž existuje nekonečně mnoho Steinerových řetězců šesti kružnic (dva různé řetězce viz obrázek 4.6) a každému z nich přísluší jeden Soddyho hexlet.

Pokud bychom připustili, že dvě z koulí $\kappa_A, \kappa_B, \kappa_C$ mají nekonečně velký poloměr, potom vzniká speciální případ hexletu, který se v anglicky psané literatuře nazývá *annular hexlet* a my ho budeme nazývat *prstencový hexlet* (viz obrázek 4.7[4]). Pokud mají nekonečně velký poloměr například koule κ_A, κ_B, jedná se o dvě navzájem rovnoběžné roviny dotýkající se koule κ_C. Na obrázku 4.7 jsou tyto koule s nekonečně velkým poloměrem (tj. rovnoběžné roviny) vyznačeny zeleně a koule κ_C modře.

[3] Ogilvyho životní vášní byla nejen matematika, ale i plachtění. Sepsal řadu publikací z obou odvětví. Byl uznávaným profesorem matematiky na Hamilton College v New Yorku. Několikrát se zúčastnil mistrovství světa v plachtění. Jeho nejlepší umístění je druhé místo z roku 1947, kdy závodil společně s Hilary Smart (1925–2000).

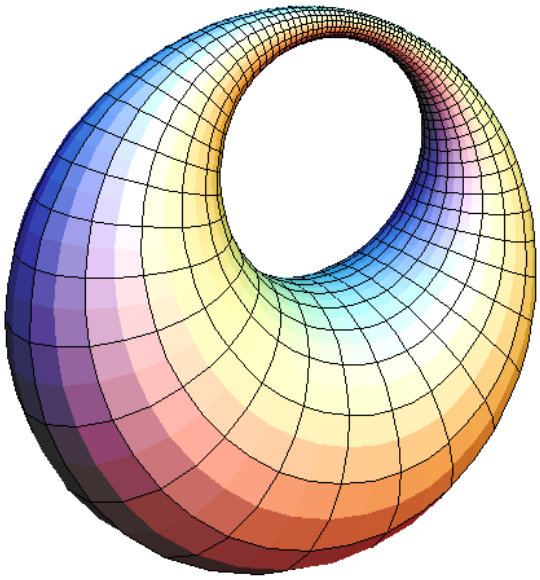
[4] Obrázek je přejat z webové stránky
`https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Annular_Soddy_hexlet.jpg`

Je-li r_{κ_c} poloměr koule κ_C, je vzdálenost rovin κ_A, κ_B rovna $2 \cdot r_{\kappa_c}$ a koule Soddyho hexletu jsou navzájem shodné koule o poloměru r_{κ_c} (jsou tudíž shodné i s koulí κ_C).



Obrázek 4.7: Prstencový hexlet.

Obálka šesti koulí hexletu je tzv. *Dupinův cyklid* (viz obrázek 4.8[5]). Byl zaveden francouzským matematikem, ekonomem a politikem Charlesem Dupinem (1784–1873) v roce 1803 v jeho závěrečné vysokoškolské práci vedené Gaspardem Mongem (1746–1818), francouzským matematikem a politikem, který je považován za zakladatele deskriptivní geometrie.



Obrázek 4.8: Dupinův cyklid.

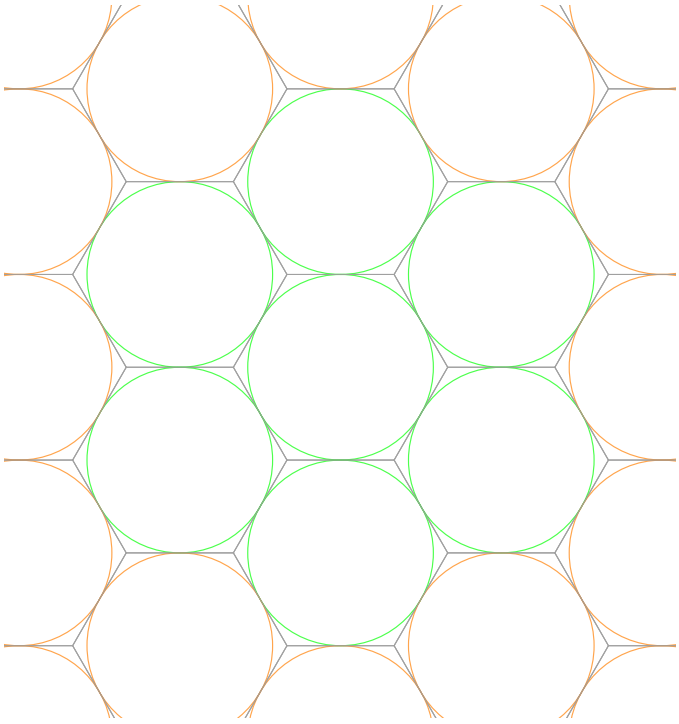
V případě prstencového hexletu je Dupinovým cyklidem anuloid (neboli torus).

[5]Obrázek je přejat z webové stránky
`https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cyclide.png`

Skutečnost, že koulí v řetězci je právě šest, se dokazuje pomocí *sférické inverze*, na níž můžeme pohlížet jako na obdobu kruhové inverze v třírozměrném prostoru. Inverze se zvolí tak, aby se koule κ_A, κ_B zobrazily na dvě rovnoběžné roviny, které mají vnější dotyk se samodružnou koulí κ_C. Nyní se hledají koule, které se dotýkají obrazů koulí $\kappa_A, \kappa_B, \kappa_C$, tj. dvou rovnoběžných rovin a koule κ_C. Sestrojujeme tedy koule prstencového hexletu. Skutečnost, že jich bude právě šest plyne z tzv. *hexagonal circle packing*.

Circle packing je uspořádání kruhů v rovině takové, že se žádné dva kruhy neprotínají a při zvětšení poloměru některého z kruhů by došlo k překrytí s jiným kruhem.

„Nejhustější“ uspořádání kruhů v rovině (tedy – zjednodušeně řečeno – kruhy pokrývají maximální možnou část roviny) je šestiúhelníkové (viz obrázek 4.9), v němž jsou kruhy vepsány do šestiúhelníků, které zcela pokrývají rovinu.



Obrázek 4.9: Hexagonal circle packing.

Podotkněme, že již více než 100 let před Soddym byl hexlet objeven i v Japonsku, jak dokazují matematické tabulky sangaku z roku 1822.

Závěr

Úkolem této bakalářské práce bylo seznámit čtenáře s problematikou Soddyho kružnic, popřípadě jeho znalosti o této problematice rozšířit. V první kapitole jsme uvedli definici, příslušné značení a historii Soddyho kružnic, také jsme zmínili životní milníky anglického chemika Fredericka Soddyho, po něm jsou kružnice pojmenovány. V následující kapitole jsme s využitím kruhové inverze kružnice zkonstruovali. Ve třetí, nejdelší kapitole jsme vyjádřili poloměry Soddyho kružnic v závislosti na poloměrech tzv. určujících kružnic. Poslední kapitola obsahuje zajímavosti o dalších geometrický útvarech, které, stejně jako kružnice, nesou jméno Fredericka Soddyho. V příloze je pak popsán experiment, v němž jsme zjišťovali, zda jsou středoškolští studenti schopni sestrojit tzv. určující kružnice.

Pokud by čtenáře zajímaly další vlastnosti Soddyho kružnic (např. vyjadření jejich středů v barycentrických souřadnicích), doporučujeme k přečtení v této bakalářské práci nezpracované části článku [3].

Seznam použité literatury

[1] Beecroft Philip: *Properties of circles in mutual contact.* The Lady's and Gentleman's Diary 139 (1842), str. 91–96.

[2] Bos Erik-Jan: *Princess Elizabeth of Bohemia and Descartes' letters (1650–1665).* Historia Mathematica 37 (2010), str. 485–502.

[3] Dergiades Nikolaos: *The Soddy Circles.* Forum Geometricorum 7 (2007), str. 191–197.

[4] Fleck Alexander: *Frederick Soddy, 1877–1956.* The Royal Society Publishing, Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society, 1957. Dostupné online `https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsbm.1957.0014`

[5] Gisch David, Ribando Jason M.: *Apollonius' Problem: A Study of Solutions and Their Connections.* American Journal of Undergraduate Research 3 (2004), str. 15–25.

[6] Hartshorne Robin: *Geometry: Euclid and Beyond.* Springer-Verlag, New York, 2000.

[7] Holubář Josef: *O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů.* Jednota československých matematiků a fysiků. Cesta k vědění, svazek 47, Praha, 1948.

[8] Leischner Pavel: *Polibky kružnic: René Descartes a Alžběta Falcká.* Matematika-fyzika-informatika 24 (2015), str. 17–23.

[9] Liška Jan: *Apolloniova úloha.* Bakalářská práce, Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno, 2007.

[10] Moravcová Vlasta, Hromadová Jana: *Základy planimetrie pro učitelské studium.* MatfyzPress, Praha, 2021.

[11] Ogilvy Charles Stanley: *Excursions in geometry.* Dover Publications, Inc., New York, 1990.

[12] Oldknow Adrian: *The Euler-Gergonne-Soddy Triangle of a Triangle.* The American Mathematical Monthly 103 (1996), str. 319–329.

[13] Princess Elisabeth of Bohemia, René Descartes: *The Correspondence between Princess Elisabeth of Bohemia and René Descartes.* Editor a překladatel Lisa Shapiro, edice The Other Voice in Early Modern Europe, Chicago University Press, Chicago, 2007. ISBN 978-0-226-20444-4

[14] Soddy Frederick: *The Kiss Precise.* Nature 137 (1936), str. 1021.

[15] Soddy Frederick: *The bowl of integers and the hexlet.* Nature 139 (1937), str. 77–79.

[16] Steiner Jakob: *Fortsetzung der geometrischen Betrachtungen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 1 (1826), str. 252–288.

[17] Yiu Paul: *Introduction to the Geometry of the Triangle.* Florida Atlantic University, 2002. Dostupné online
http://math.fau.edu/Yiu/GeometryNotes020402.pdf

[18] *Circular Inversion.* Art of Problem Solving. Dostupné online
https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Circular_Inversion

[19] *Soddy's hexlet.* Wikipedia. The Free Encyclopedia. Dostupné online
https://en.wikipedia.org/wiki/Soddy%27s_hexlet

Seznam obrázků

1.1 Soddyho kružnice. 3
1.2 Problém čtyř mincí. 4
1.3 Osm různých kružnic, které se dotýkají tří kružnic. 5
1.4 Deset různých případů Apollóniovy úlohy. 6
1.5 Frederick Soddy. 8

2.1 Konstrukce určujících kružnic. 10
2.2 Konstrukce vnitřní Soddyho kružnice. 13
2.3 Konstrukce vnější Soddyho kružnice. 14

3.1 Poloměry určujících kružnic. 16
3.2 Mocnost bodu M ke kružnici l. 17
3.3 Zobrazení bodů v kruhové inverzi ω. 18
3.4 Odvození poměru poloměrů kružnic. 20
3.5 Pravoúhlé trojúhelníky I. 22
3.6 Průsečíky I a I' přímky CC_1 s kružnicí $k_C = k'_C$. 22
3.7 Pravoúhlé trojúhelníky II. 24

4.1 Soddyho trojúhelníky. 26
4.2 a-Soddyho hyperbola. 27
4.3 Soddyho hyperboly a kružnice vepsaná trojúhelníku ABC. 28
4.4 Středy Soddyho kružnic jako průsečíky Soddyho hyperbol. 28
4.5 Soddyho hexlet. 29
4.6 Dva různé Steinerovy řetězce. 30
4.7 Prstencový hexlet. 31
4.8 Dupinův cyklid. 31
4.9 Hexagonal circle packing. 32

A. Přílohy

A.1 Experiment

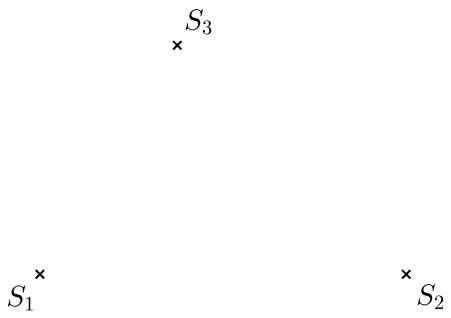
V podkapitole 2.1 sestrojujeme určující kružnice. Jedná se o středoškolskou planimetrickou konstrukci, která není příliš typická (v současných učebnicích se nevyskytuje). Přesto by studenti měli být schopni tuto konstrukci vymyslet a kružnice narýsovat.

Provedli jsme experiment, v němž jsme zjišťovali, zda studenti dokáží narýsovat tři kružnice o daných středech, které se vzájemně vně dotýkají.

Úloha byla zadána na jedné pražské střední průmyslové škole, kde jsou tři studijní obory: obor informační technologie (s čtyřhodinovou dotací matematiky v prvním ročníku a tříhodinovou dotací ve zbývajících ročnících), obor technické lyceum (s čtyřhodinovou dotací matematiky během celého středoškolského studia), obor strojírenství (s čtyřhodinovou dotací matematiky v prvním ročníku a tříhodinovou dotací ve zbývajících ročnících, navíc s čtyřhodinovou dotací technického kreslení v prvním ročníku a s dvouhodinovou dotací ve druhém ročníku). Na všech oborech se planimetrie vyučuje na začátku druhého ročníku a je jí věnováno celé první čtvrtletí.

Respondenti dostali následující zadání:

Sestrojte tři kružnice k_1, k_2, k_3, které mají středy po řadě S_1, S_2, S_3 a které mají po dvou vnější dotyk.

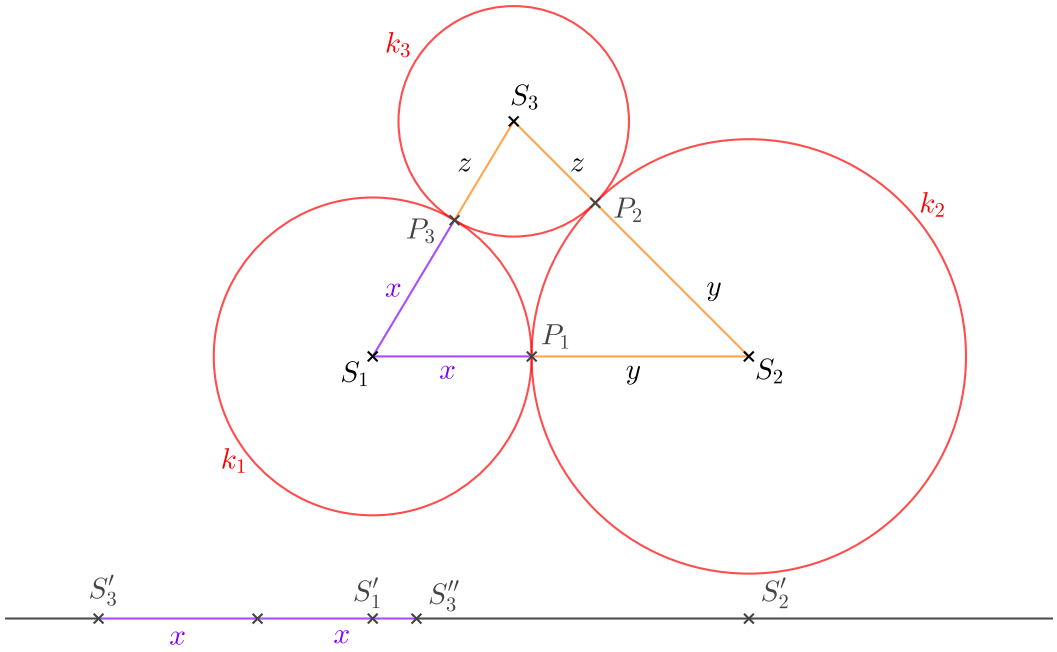


Na vyřešení příkladu měli studenti patnáct minut a práce byla zcela dobrovolná.

Očekávali jsme, že by studenti mohli problém řešit dvěma způsoby. První z nich je uvedený v podkapitole 2.1 a k sestrojení kružnic využívá kružnici vepsanou trojúhelníku $S_1S_2S_3$ (toto řešení dále nazývejme *Řešení 1*).

I při druhém způsobu (označme ho jako *Řešení 2*) je zapotřebí provést důkladný rozbor úlohy a uvědomit si následující důležité vztahy.

Průsečíky určujících kružnic se stranami trojúhelníku $S_1S_2S_3$ označme P_1, P_2 a P_3 (viz obrázek níže). Poloměr kružnice k_1 označme x. Z obrázku je patrné, že je roven vzdálenosti bodů S_1, P_1 (resp. S_1, P_3). Obdobně označme y poloměr kružnice k_2, který je roven vzdálenosti bodů S_2, P_1 (resp. S_2, P_2), a z poloměr kružnice k_3, který je roven vzdálenosti bodů S_3, P_2 (resp. S_3, P_3).



Získáváme tedy následující rovnosti:

$$|S_1S_2| = x + y,$$
$$|S_2S_3| = y + z,$$
$$|S_1S_3| = x + z.$$

Z toho vyplývá, že pokud např. sečteme délky $|S_1S_2|$ a $|S_1S_3|$, následně odečteme délku $|S_2S_3|$, získáme dvojnásobek poloměru x kružnice k_1:

$$|S_1S_2| + |S_1S_3| - |S_2S_3| = x + y + x + z - (y + z) = 2 \cdot x.$$

Poté už jsme schopni úlohu narýsovat.

Nejprve sestrojíme (viz předchozí obrázek, kde jsou operace prováděny na přímce rovnoběžné se stranou S_1S_2 trojúhelníku $S_1S_2S_3$) úsečku $S_3'S_2'$, jejíž délka je rovna součtu délek $|S_1S_2|$ a $|S_1S_3|$. Následně odečteme délku $|S_2S_3|$, čímž získáme úsečku $S_3'S_3''$, jejíž délka je rovna dvojnásobku poloměru x kružnice k_1.

Polovina této délky je tedy rovna poloměru x. Sestrojíme proto kružnici $k_1(S_1, x)$ a její průsečíky P_1, P_3 se stranami S_1S_2, S_1S_3 uvažovaného trojúhelníku. Nakonec sestrojíme zbývající kružnice k_2, k_3, které mají po řadě středy S_2, S_3 a procházejí body P_1, P_3.

Pokud jsou tyto operace provedeny zcela konstrukčně, považujeme toto řešení za správné (budeme ho značit *Řešení 2a*).

V případě, že jsou operace provedeny početně pomocí přibližného měření vzdáleností bodů S_1, S_2 a S_3, je toto řešení považováno za nevyhovující (budeme ho značit *Řešení 2b*).

Dne 17. dubna 2023 byl experiment uskutečněn ve třídě 2.B (studijní obor strojírenství) v hodině technického kreslení. Přítomno bylo dvacet jedna studentů, z nichž osm studentů příklad odevzdalo. Pouze jeden student zvládl příklad vyřešit, a to podle *Řešení 1*. Čtyři respondenti uvažovali, že by poloměry mohly být rovny polovičním vzdálenostem jednotlivých dvojic středů S_1, S_2, S_3 kružnic. Zjistili, že takto konstrukci nelze provést, a dál v úloze nepokračovali. Tři zadání byla odevzdána zcela prázdná.

Stejný den byla do experimentu zapojena i třída 2.A (studijní obor strojírenství), v níž byla úloha opět zadána v hodině technického kreslení. Příkladem se zabývalo třináct studentů z přítomných dvaceti čtyř. Zadávající nejprve zadal méně specifikovanou úlohu, v níž si studenti mohli sami libovolně zvolit body S_1, S_2 a S_3. Na tuto úlohu nechal řešícím 15 minut a konstrukci měli provést na své vlastní papíry. Sedm z nich zvolilo papír čtverečkovaný, čímž si úlohu značně ulehčili (středy stran trojúhelníku $S_1S_2S_2$ viděli ihned ve čtverečkované síti). Jedenáct studentů si zvolilo body tak, aby jim vznikl rovnostranný trojúhelník. Následně si řešitelé uvědomili, že poloměr všech tří kružnic bude shodný, a úlohu řádně dorýsovalo deset řešitelů. Jeden respondent si zvolil body S_1, S_2, S_3 tak, že tvořily vrcholy rovnoramenného trojúhelníku a dva poloměry hledaných kružnic jsou tedy shodné. Bohužel není patrné, jak získal poloměr třetí kružnice, a tedy řešení považujeme za nesprávné. Poslední z dotazovaných si úlohu nijak nespecifikoval, ale řešení není správné, poloměry kružnic jsou pouze odhadnuté. Z této části je patrné, že středoškolští studenti znají vlastnosti rovnostranného (popřípadě rovnoramenného) trojúhelníku a dokáží je využít.

Tato třída dostala následně i naši výše uvedenou, konkrétně zadanou úlohu. Řešení odevzdalo sedm studentů. Dva studenti úlohu vyřešili podle *Řešení 1*, jeden student postupoval podle *Řešení 2b*, další student narýsoval osy vnitřních úhlů trojúhelníku $S_1S_2S_3$, ale dál v úloze nepokračoval. Poslední student, který neodevzdal papír pouze se zadáním, se snažil vyřešit úlohu pomocí středů stran trojúhelníku. Zbylé papíry byly odevzdány bez jakéhokoliv řešení.

Dne 19. dubna 2023 byl proveden experiment ve třídě 1.I (obor informační technologie) v hodině matematiky. Jedná se o studenty prvního ročníku, kteří zatím na hodinách matematiky planimetrické úlohy neprobírali. Vyučující zadal příklad v posledních 15 minutách hodiny pouze čtyřem žákům (z přítomných dvaceti osmi), kteří měli předchozí práci již hotovou. Můžeme tedy předpokládat, že se jedná o matematicky nadané studenty. Jedno řešení je narýsováno kompletně správně podle postupu *Řešení 1*. Další dva řešitelé chtěli úlohu řešit pomocí nevhodných vlastností trojúhelníku $S_1S_2S_3$ (první řešitel chtěl využít výšky trojúhelníku, druhý jeho střední příčky). Poslední odevzdaný arch se zadáním

zůstal bez jakékoliv konstrukce.

Experiment byl proveden dne 19. dubna 2023 také ve třídě 3.I (obor informační technologie) v hodině matematiky. Studenti nebyli připraveni na rýsování, a tak řada z nich neměla rýsovací pomůcky. Experimentu se zúčastnilo osmnáct studentů z dvaadvaceti přítomných. K řádnému konci dospěl pouze jeden řešitel, který s rýsovacími pomůckami postupoval podle *Řešení 1.* Dva řešitelé mají zdánlivě správný výsledek, ale neprovedli žádnou konstrukci a poloměry hledaných kružnic zřejmě pouze odhadli. Dva další respondenti si rozepsali vlastnosti poloměrů podle *Řešení 2b*, ale výpočty nedotáhli do konce. Sedm studentů se snažilo úlohu vyřešit pomocí středů stran trojúhelníku $S_1S_2S_3$. Tři papíry obsahují rukou nakreslené náčrtky dotýkajících se kružnic, bez jakýchkoliv jiných konstrukcí. Poslední tři papíry byly odevzdány bez úprav.

Překvapilo nás, že v této třídě je na jednom (nesprávném) řešení velkým hůlkovým písmem napsáno *Soddyho kružnice*. Student při odevzdání zadávajícímu přiznal, že tento pojem někde slyšel a v souvislosti s našim zadání si na název vzpomněl. Do rozboru úlohy načrtl i *vnitřní Soddyho kružnici*.

Závěrem můžeme říct, že se experimentu zúčastnilo čtyřicet tři studentů, z nichž třicet sedm řešilo konkrétně zadanou úlohu, kterou vyřešilo pouze pět z nich.

V průběhu experimentu jsme si všímali řady zajímavých jevů. Pět úspěšných řešitelů napadlo využít vlastností kružnice vepsané trojúhelníku, avšak pouze jeden z nich vedl ze středu kružnice vepsané trojúhelníku $S_1S_2S_3$ kolmice na jeho strany, a získal tak poloměr kružnice vepsané (postupy s chybějícími kolmicemi jsme nepovažovali za chybná řešení). Dále jsou patrné studentské nepřesnosti v rýsování, které byly způsobeny neořezanou tužkou či malým citem pro detail. Musíme si však uvědomit, že experiment byl proveden na průmyslové škole, kde jsou třídy plné chlapců (nanejvýše tři dívky v jedné třídě).

Někteří respondenti doplnili svá řešení i slovními komentáři (obzvláště ve třídě 3.I, kde chyběly rýsovací pomůcky), kterým není příliš rozumět kvůli špatné volbě (ne)matematických termínů.

Téměř v žádném řešení nejsou popsány nově vzniklé geometrické útvary (body a kružnice).