MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lydia Ceháková

Prostor-vyplňující křivky

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D.
Studijní program: Fyzika
Studijní obor: Fyzika zaměřená na vzdělávání

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Českých Velenicích dne 27.5.2020 ....
Podpis autora

Na tomto místě bych ráda poděkovala RNDr. Martinu Rmoutilovi, PhD. nejen za odborné vedení, užitečné rady a cenné připomínky, které vytrvale poskytoval po celou dobu vzniku této bakalářské práce, ale také za mnoho zajímavých námětů k dalšímu studiu.

Název práce: Prostor-vyplňující křivky

Autor: Lydia Ceháková

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: První část této práce je věnována Cantorově bijekci a historickému vývoji pojmu křivka. Přibližuje význam Cantorovy bijekce v oblasti zkoumání křivek a podává důkaz její existence. Historický vývoj sleduje především definice a interpretace pojmu křivka, které se v průběhu rozvoje matematiky objevovaly, a to od dob starého Řecka do 20. století. Druhá část práce je pak věnována seznámení s prostor-vyplňujícími křivkami, jejich konstrukcím a vlastnostem. Podrobně je popsán princip geometrické a aritmetické konstrukce na příkladech Peanovy a Hilbertovy křivky, jakožto prvních popsaných křivek tohoto typu. Z vlastností je zaměřena pozornost především na nediferencovatelnost některých prostor-vyplňujících křivek v každém bodě. V práci jsou uvedeny také příklady dalších prostor-vyplňujících křivek dvojrozměrného i trojrozměrného prostoru. Součástí práce jsou názorné obrázky uvedené v průběhu celého textu.

Klíčová slova: dimenze, Hilbertova křivka, Peanova křivka, spojitá křivka

Title: Space-filling curves

Author: Lydia Ceháková

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: The first part of this thesis deals with Cantor's bijection and the historical development of the notion of curve. Here, the proof of existence of Cantor's bijection is introduced and it is followed by a discussion of the importance of this bijection for further advancement of mathematics and the theme of space-filling curves. The section about historical development of curves explores different approaches to the definition and its changing interpretation through time, from the Ancient Greece up until the 20$^{\text{th}}$ century. The second part of the thesis introduces the issue of space-filling curves. The segment describes different methods of space-filling curves construction, particularly the geometric and the arithmetic construction of the Hilbert and the Peano Curve, as these were the first examples of the said curve. Furthermore, typical properties of the space-filling curves are discussed, explained and proofed with special attention dedicated to their nowhere differentiability. There are also some additional examples of 2D space-filling curves – including the Sierpiński Curve – and some 3D variations of some of them. The illustrative figures presented throughout the text are also a crucial component of the thesis.

Keywords: continuous curve, dimension, Hilbert curve, Peano curve

Obsah

Úvod

Na několika následujících stranách se čtenář seznámí s tématem prostor-vyplňujících křivek. Celá práce je koncipována především jako úvod do problematiky. Čtenáři jsou krok za krokem předkládány jednotlivé poznatky tak, aby do jisté míry pronikl do tématu a v případě dalšího zájmu se dokázal lépe orientovat v odborné literatuře věnované právě prostor-vyplňujícím křivkám.

Práce je cílena především na čtenáře, který se s prostor-vyplňujícími křivkami dosud (vědomě) nesetkal, ovšem má jisté znalosti předně v oblasti matematické analýzy; stejně tak ale na čtenáře, který již v oblasti prostor-vyplňujících křivek nějaké znalosti má a hledá ucelený přehled základních myšlenek a poznatků. Celá teorie je skutečně vystavěna od začátku, s podrobnějším vysvětlením důležitých myšlenek, které pro čtenáře, jenž se teprve seznamuje s tématem, mohou být obtížné. Zároveň ale text předpokládá určitou znalost matematických pojmů, které používá bez uvedení definic či komentáře, považuje je tedy za čtenáři známé. Zkušenějšímu čtenáři pak může práce nabídnout některé zajímavé podněty k dalšímu studiu.

Cílem práce je představit zajímavý matematický koncept, který může na některé čtenáře z počátku působit jako paradox. Práce vychází z poznatků Georga Cantora z druhé poloviny 19. století, na kterých čtenáři blíže vysvětluje princip vzájemně jednoznačného zobrazení mezi jednotkovým intervalem a čtvercem. Tím by měly být případné pochybnosti čtenáře o logické správnosti myšlenky vyvráceny, a tak lze přistoupit k podrobnějšímu představení tématu prací Giuseppe Peana (Peano, 1890) a Davida Hilberta (Hilbert, 1891), tj. prostor-vyplňujících křivek.

Především v druhé kapitole práce je kladen důraz na propojování získávaných poznatků čtenáře s názornou představou, která tak napomáhá k lepšímu porozumění. Jeden z typů konstrukce prostor-vyplňujících křivek, představených v práci, je na geometrické představě přímo založen. Četné ilustrace jsou přímo součástí textu, neboť je na ně hojně odkazováno, a tvoří tak jeho nedílnou součást. Veškeré ilustrace jsou autorské a byly vytvořeny za použití programu *Wolfram Mathematica*.

1. O křivkách

1.1 Cantorova bijekce

Pro teorii prostor-vyplňujících křivek je klíčová práce Georga Cantora, který roku 1878 dokázal existenci bijekce jednotkového intervalu na jednotkový čtverec (Sagan, 2012, str. 1). Z pohledu kardinality množin to znamená, že interval $[0,1]$ má stejný *nekonečný* počet prvků jako jednotkový čtverec $[0,1] \times [0,1] = [0,1]^2$. Tato skutečnost je velmi neintuitivní, neboť říká, že celý čtverec obsahuje stejný počet bodů jako jednotkový interval, který reprezentuje pouhou jednu stranu tohoto čtverce.

Jelikož se jedná o zásadní myšlenku nejen pro vývoj matematiky v té době, ale také pro celou konstrukci námi zkoumaných křivek, ukážeme, jak takové zobrazení nalézt. V důkazu bude užitečné využít zápis čísel pomocí rozvoje v desítkové soustavě.

Poznámka. Desítková soustava využívá k zápisu čísel deset cifer, 0–9, a každé číslo tak lze rozepsat jako součet násobků mocnin deseti. Chceme-li zdůraznit soustavu, v jaké číslo zapisujeme, přidáme index se základem požadované číselné soustavy, tj. $314_{10} = 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$.

Při zápisu čísla z intervalu $[0,1]$ postupujeme analogicky. Na první pozici za desetinnou čárkou je počet desetin, následuje počet setin… Index se základem soustavy budeme psát před řádovou (desetinnou) čárku, tedy k řádu jednotek. Např.: $0_{10}{,}14 = 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$. Libovolné číslo $x \in [0,1]$ zapíšeme rozvojem $x = 0_{10}{,}b_1b_2b_3b_4\dots$, kde $b_i \in \{0,1,2,\dots,9\}$.

Úmluva 1. *Abychom se vyvarovali nejednoznačnosti, vyloučíme*[1] *všechny zápisy čísel, jejichž rozvoj končí nekonečnou posloupností nul. Tedy číslu* $\frac{1}{2}$ *přísluší rozvoj* $0_{10}{,}4999\dots$ *(nikoli* $0_{10}{,}5000\dots$*). Výjimku tvoří nula, pro kterou je zápis ve tvaru* $0{,}000\dots$ *povolený (ve všech soustavách).*

Nyní je zajištěna vzájemná jednoznačnost zobrazení mezi bodem $t \in [0,1]$ (případně $(a,b) \in [0,1]^2$) a desetinným rozvojem jeho souřadnic. Definujme dále zobrazení $f : [0,1] \to [0,1]^2$:

$$f(t) = \begin{pmatrix} 0_{10}{,}t_1t_3t_5\dots \\ 0_{10}{,}t_2t_4t_6\dots \end{pmatrix}, \text{ kde } t = 0_{10}{,}t_1t_2t_3t_4t_5t_6\dots, \quad t \in [0,1].$$

Obraz $f(t) \in [0,1]^2$ bodu $t \in [0,1]$ je určen jednoznačně, protože rozvoj t je jednoznačný. Zobrazení se tak zdá být dobře definované. Jedná se o velice jednoduché zobrazení, kdy první souřadnici bodu ve čtverci sestavíme z cifer na lichých pozicích rozvoje zadaného t a druhou souřadnici sestavíme z cifer na pozicích sudých.

Podobným způsobem můžeme definovat zobrazení $g : [0,1]^2 \to [0,1]$, které bude naopak přiřazovat každému bodu $(a,b) \in [0,1]^2$ bod z intervalu $[0,1]$:

$$a = 0_{10}{,}a_1a_2a_3\dots, \quad b = 0_{10}{,}b_1b_2b_3\dots$$

[1] Vyloučení rozvoje znamená, že takový rozvoj můžeme získat jako výstup nějaké úlohy (není zakázaný), ale nereprezentuje žádné číslo.

$$g\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} 0_{10},a_1a_2a_3\dots \\ 0_{10},b_1b_2b_3\dots \end{pmatrix} = 0_2,a_1b_1a_2b_2a_3b_3\dots$$

Obraz bodu (a, b) je určen jednoznačně, neboť rozvoje a, b jsou jednoznačné, tedy i zobrazení g je dobře definované. Zároveň jsou obě zobrazení f, g prostá.

V tomto duchu provedl Cantor svůj první, ovšem neúplný, důkaz existence zmíněné bijekce.

Podíváme se znovu na definovaná zobrazení a přiblížíme chybu tak, že najdeme obraz konkrétního bodu $t_0 \in [0, 1]$. Budiž

$$t_0 = 0_{10},12020202\dots$$

V rozvoji se od třetího desetinného místa dál střídá nulová a nenulová cifra. Aplikováním zobrazení f získáme obraz

$$f(t_0) = \begin{pmatrix} 0_{10},1000\dots \\ 0_{10},2222\dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Skutečně je obraz $f(t_0)$ určen jednoznačně, ovšem $a_0 = 0_{10},1000\dots$ není v povoleném tvaru. Proto nemůžeme následně zobrazit bod (a_0, b_0), a získat t_0 jako obraz $g\left(\begin{smallmatrix} a_0 \\ b_0 \end{smallmatrix}\right)$. Zkusme ještě nahradit nepovolený rozvoj povoleným, tedy $a_0 = 0_{10},0999$. Dostaneme

$$g\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} 0_{10},099\dots \\ 0_{10},222\dots \end{pmatrix} = 0_{10},029292\dots \neq t_0.$$

Našli jsme tak bod jednotkového intervalu, který není obrazem při g žádného bodu čtverce. Můžeme ještě zkusit povolit zakázané rozvoje. Pro jeden bod ve čtverci

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{10},100\dots \\ 0_{10},222\dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{10},099\dots \\ 0_{10},222\dots \end{pmatrix}$$

tak aplikováním zobrazení g získáme dva různé obrazy: $t_{0_1} = 0_{10},120202\dots$ a $t_{0_2} = 0_{10},029292\dots$, kde $t_{0_1}, t_{0_2} \in [0, 1]$, $t_{0_1} \neq t_{0_2}$. Obraz bodu (a_0, b_0) při g tudíž není určen jednoznačně a zobrazení g pak není dobře definované. Samotná zobrazení f a g tedy nepostačují k důkazu existence bijekce.

Na nedostatky v důkazu upozornil Cantora Dedekind, který si uvědomil, že hodnoty zobrazení g nevyčerpají celý interval $[0, 1]^2$ (Balcar a Štěpánek, 1986, str. 15). Cantor svůj důkaz následně přepracoval a sestrojil jiné zobrazení pomocí řetězových zlomků. Náš důkaz nebude onen historicky první. Využijeme myšlenku desetinného rozvoje a především Cantorovu-Bernsteinovu větu[3]:

Věta (Cantorova-Bernsteinova, 1898)**.** *(Nicolay a Simons, 2014)*
Nechť A a B jsou množiny. Existuje-li prosté zobrazení A do B a prosté zobrazení B do A, pak existuje bijekce mezi těmito dvěma množinami.

[2] Uvažoval číslo t, které má, počínaje šestým místem, na sudých pozicích nuly. Zobrazíme-li takové číslo pomocí f, dostaneme druhou souřadnici bodu čtverce v nepovoleném tvaru, tj. s nekonečnou řadou nul. Pokud bychom získané číslo vyjádřili pomocí nekonečného desetinného rozvoje, nezískáme již obraz požadovaného bodu t. Dedekindem nalezenému bodu t z intervalu $[0, 1]$ tedy není přiřazen žádný bod ve čtverci.

[3] V anglické literatuře je tato věta uváděna jako *Schröder-Bernstein theorem*. Byla dokázána až deset let po Cantorově důkazu existence bijekce mezi $[0, 1]$ a $[0, 1]^2$ s řetězovými zlomky.

Tato věta říká, že stačí najít dvě různá prostá zobrazení $g : A \to B$ a $h : B \to A$ mezi zkoumanými množinami, která mohou být libovolná, vzájemně nemusí souviset, a jejich existence už stačí k tomu, aby existovala dokonce bijekce mezi A a B. Věta ovšem již nezmiňuje podobu bijektivního zobrazení.

Následuje důkaz existence Cantorovy bijekce s využitím zmíněné Cantorovy-Bernsteinovy věty.

Důkaz. Mějme množiny $[0, 1]$ a $[0, 1]^2$. Definujeme zobrazení $h : [0, 1] \to [0, 1]^2$ předpisem

$$h(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \, x \in [0, 1].$$

Zobrazení si lze představit tak, že se jednotkový interval resp. úsečka zobrazí na úsečku ve čtverci s nulovou y-ovou souřadnicí.[4] Pak je již snadno nahlédnutelné, že zobrazení h je prosté.

Dále využijeme již zkonstruovaného prostého zobrazení g čtverce do jednotkového intervalu. Tedy definujme zobrazení

$$g : [0, 1]^2 \to [0, 1], \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in [0, 1]^2, \quad a = 0_{10}{,}a_1a_2a_3 \ldots, \quad b = 0_{10}{,}b_1b_2b_3 \ldots$$

$$g \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} 0_{10}{,}a_1a_2a_3 \ldots \\ 0_{10}{,}b_1b_2b_3 \ldots \end{pmatrix} = 0_{10}{,}a_1b_1a_2b_2a_3b_3 \ldots$$

Zobrazení g, h jsou obě zobrazeními množiny *do* množiny a jsou prostá. Splnili jsme tedy předpoklady Cantorovy-Bernsteinovy věty pro neprázdné množiny $[0, 1]$ a $[0, 1]^2$, neboť jsme zkonstruovali prostá zobrazení $g : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ a $h : [0, 1] \to [0, 1]^2$. Mezi množinami $[0, 1]$ a $[0, 1]^2$ tedy existuje bijekce. □

Samotný důkaz existence takové bijekce zvedl vlnu dalších otázek, především ohledně možné spojitosti zobrazení (Sagan, 2012, str. 1–2). S jasnou odpovědí přichází roku 1879 Eugene Netto, který jako důsledek obecnější věty ukáže, že zobrazení $f : [0, 1] \to [0, 1]^2$, je-li bijekcí, nemůže být spojité (Sagan, 2012, str. 6).

1.2 Vývoj definice křivky

Upustíme-li od požadavku na bijekci, a místo toho budeme chtít zobrazení, které je spojité, dostaneme se k zásadnímu pojmu *křivky*.

Křivku si v nejjednodušší podobě můžeme představit jako klikatou či rovnou čáru, kružnici nebo třeba trajektorii letu mouchy. V matematice byla křivka od doby svého vzniku definována různými způsoby.

Pokud se budeme zajímat o původ myšlenky z pohledu matematiky, musíme se zaměřit na geometrickou interpretaci. Historicky první pokus o definici, přestože pouze deskriptivní, nalezneme v samotných *Základech*, které sepsal Eukleidés.

Definice (Eukleidova)**.** (Servít, 1907, str. 1)

1. Bod jest, co nemá dílu,

[4]Tato představa funguje, pokud jsou jednotkový interval a čtverec vhodně umístěny do soustavy souřadnic.

2. čára pak délka bez šířky.

3. Hranicemi čáry jsou body.

4. Přímá jest čára, která svými body táhne se rovně ...

Přestože není zmíněn přímo pojem křivky, druhý bod popisné definice zachycuje důležitou vlastnost obvykle připisovanou křivkám, která je odlišuje od rovinných útvarů. Eukleidés věnuje pozornost především přímkám a kružnicím, ale z uvedené definice vidíme, že čáru považuje za obecně křivou (Koudela, 2012). I další křivky jsou ve starém Řecku známy, zmiňme alespoň kuželosečky, spirály či kvadratrix.[5] Křivky jsou dále zkoumány především ze zájmu o nalezení příslušné rektifikace[6].

Dalšího významného pokroku v chápání křivek se dočkáme až v 17. století s příchodem souřadnicového systému, s počátky analytické geometrie a spisem *Geometrie* Reného Descarta. Ten upřesňuje a dále rozvíjí antické pojetí křivek, rozděluje je na geometrické a mechanické, a dále křivky definuje především na základě možností jejich konstrukce. Ve svém díle tak uvádí hned několik možných způsobů, jakými poznat křivku. Descartes neuvádí přímo definice, spíše shrnuje své poznatky v krátkých odstavcích. Uveďme tedy alespoň jednu z úvodních myšlenek:

Definice (Descartova, 1637)**.** (Descartes, 1637, str. 43)
Abych popsal všechny křivky, které zde hodlám zavést, potřebuji dodat[7] *pouze jediný předpoklad, a sice, dvěma nebo více přímkami lze současně pohybovat a ty svým průsečíkem určují jiné křivky...* (křivky) *mohou být popsány spojitým pohybem či několika takovými pohyby, z nichž každý následující je úplně určen předcházejícími.*

Díky pohledu analytické geometrie na problematiku křivek dochází mezi lety 1649-1748 k velkému rozvoji tohoto odvětví matematiky. Ve „století křivek“, jak je období také nazýváno, se význam pojmu křivky téměř propojuje se vznikajícím pojmem funkce, což sice umožní další zkoumání vlastností křivek, ovšem v samotném jejich definování nedochází k významným změnám. Prvním, kdo se pokouší o definování křivky (linie) novým způsobem, je Bernard Bolzano[8] v roce 1817. Vidí křivku jako množinu bodů a snaží se ji tak charakterizovat:

Definice (Bolzanova, 1817)**.** (Koudela, 2012, str. 117)
Prostorový objekt, k jehož každému bodu, v jisté vzdálenosti a pro všechny menší vzdálenosti, existuje alespoň jeden a nejvýše konečná množina bodů coby sousedů, se obecně nazývá linií.

Bolzano používá pojem „soused“, který ovšem blíže nespecifikuje. Pokusíme se Bolzanovu představu přiblížit na obrázku 1.1. K libovolnému bodu X na objektu

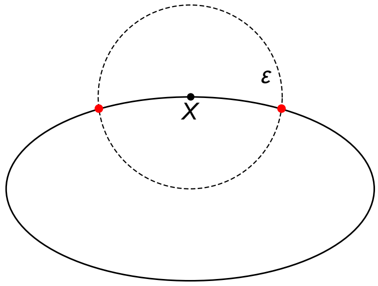
[5]Kvadratrix je název pro takovou křivku, kterou lze využít ke kvadratuře kruhu.

[6] „Rektifikací rozumíme určení délky oblouku křivky.“ (Koudela, 2012, str. 11).

[7]Míněno dodat k dvěma Eukleidovým předpokladům: i) Budiž úkolem od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu vésti přímku. ii) A z jakéhokoli středu a jakýmkoli poloměrem narýsovati kruh (Servít, 1907, str. 2).

[8]Bolzano svými myšlenkami významně předběhl dobu a to nejen v oblasti zkoumání křivek. O jeho nadčasových myšlenkách více pojednává např. Simon (1981).

(křivce) najdeme vzdálenost popsanou v Bolzanově definici, označme ji ε. *Sousedy* bodu X můžeme chápat jako všechny body, které náleží křivce a zároveň kružnici se středem v X a poloměrem ε.



Obrázek 1.1: Přiblížení geometrického významu Bolzanovy definice křivky na příkladu kružnice. Červeně jsou zvýrazněny body, které Bolzano označuje jako *sousedy*.

S rozvojem mechaniky v 19. století přichází pohled na křivku jako na trajektorii pohybujícího se bodu. Na základě této představy formuloval Camille Jordan svou definici křivky:

Definice (Jordanova, 1887)**.** (Lomtatidze, 2007, str. 200)
Rovinnou křivkou nazveme soubor bodů $X = [x, y]$ v rovině, jejichž souřadnice jsou dány rovnicemi

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t),$$

kde ϕ, ψ jsou spojité funkce proměnné $t \in [0, 1]$.

Zde je parametr t chápán jako čas. Jordan zavádí křivku jako množinu bodů, ale je možné ji chápat i jako spojité zobrazení intervalu. Jordanově definici ovšem vyhovuje mnoho patologických případů křivek[9], jak mezi prvními ukázal Giuseppe Peano na příkladu prostor-vyplňujících křivek, kterým se podrobněji věnuje tato práce. Poznamenejme ještě, že Jordanovu definici křivky lze analogicky rozšířit i na křivky ve vyšších dimenzích, a to jednoduše pomocí příslušného většího počtu funkcí[10].

Matematika na počátku 20. století opouští mechanickou představu pohybujícího se bodu, přestože se vyskytlo ještě několik pokusů o definování křivek obdobným způsobem, a vrací se k myšlenkám Bolzana. Vzniká nová matematická teorie — teorie množin, a obor topologie. Teorii množin významně rozvíjí Cantor a v jejím duchu přichází také další definice křivky, založená na Cantorově[11] definici kontinua:

Definice (Cantorova, 1905)**.** (Lomtatidze, 2007, str. 207)
Rovinnou křivkou nazveme rovinné kontinuum[12] *neobsahující žádný vnitřní bod.*

---

[9]Povšimněme si, že Bolzanova definice křivky požadavkem na neprázdnost, ale také konečnost množiny sousedů zaručuje, že za křivku nebude považována např. právě plocha čtverce. Mnoha patologickým případům se tak vyhýbá.

[10]Pro prostorovou křivku bychom do současné definice přidali rovnici $z = \chi(t)$, kde χ je spojitá funkce proměnné $t \in [0,1]$.

[11]Podle (Koudela, 2012, str. 125–126) s názvem Cantorova křivka nepřišel sám Cantor, nýbrž Ludovic Zoretti, který dále rozvíjel Cantorovu myšlenku kontinua v oblasti křivek.

[12]Kontinuem myslíme souvislou kompaktní množinu.

Topologie a teorie množin poskytují nástroje k uchopení pojmu *křivky*, a mnozí další matematici přichází s novými úpravami definic. Tyto snahy završuje práce Pavla S. Urysohna, který si uvědomuje nedostatky Cantorovy definice (především v souvislosti s rozšířením pojmu křivka z roviny do prostoru). Velice důkladně buduje pojem *dimenze*[13], a dále definuje:

Definice (Urysohnova, 1927[14])**.** (Lomtatidze, 2007, str. 214)
Křivkou rozumíme kontinuum topologické dimenze 1.

Z uvedeného přehledu jsou patrné rozdíly v definování křivky v antice a na konci 20. století. Vývoj zkoumaného pojmu nebyl jednoduchý a lze říct, že do jisté míry neexistuje uspokojivá všeobecná definice ani dnes. Některá pojetí křivky vyhovují více geometrickým představám, jiná jsou vhodná spíše pro zkoumání z pohledu topologie či algebry. V této práci budeme dále vycházet z rozšířené[15] Jordanovy definice, která připouští i křivky, jejichž trajektorie vyplní kladnou plochu, například plný čtverec. Zároveň jako křivku označíme přímo zobrazení, které Jordanova definice popisuje, nikoli množinu bodů. Takto rozšířená definice Jordanovy křivky následuje:

Definice 1 (Křivka)**.**
Prostorovou křivkou nazveme zobrazení $f : I \to \mathbb{R}^3, I \subseteq \mathbb{R}$*, pro které* $f(t) = (\phi(t), \psi(t), \chi(t))$ *a* ϕ*,* ψ*,* χ *jsou spojité funkce proměnné* $t \in I$*.*

[13]Zde odkážeme čtenáře na práci Lomtatidze (2007), kde jsou Urysohnovy myšlenky, včetně vybudování pojmu dimenze a definice křivky, podrobněji zpracovány.
[14]Výsledky Urysohnovy práce týkající se křivek byly publikovány ve druhém dílu *Mémoire* v roce 1927, tedy tři roky po jeho smrti.
[15]Rozšíření do trojrozměrného prostoru, tj. pro prostorovou křivku.

2. Křivky vyplňující prostor

Křivky, které budeme nyní zkoumat, jsou označovány jako prostor-vyplňující[1] či také Peanova typu. Peano byl vůbec prvním, kdo zkonstruoval křivku, která je spojitá a navštíví každý bod čtverce alespoň jednou (vyplní tak jeho plochu). Své výsledky představil roku 1890 (Peano, 1890). David Hilbert (Hilbert, 1891) nalezl o rok později geometrickou interpretaci Peanova příkladu a popsal tak další prostor-vyplňující křivku, kterou dnes nazýváme *Hilbertova křivka.* Především pracem Peana a Hilberta jsou věnovány následující odstavce.

Definice 2 (Prostor-vyplňující křivka)**.** *Nechť $f : I \to \mathbb{R}^n$, kde $I \subseteq \mathbb{R}$ je libovolný interval, je spojité zobrazení takové, že* $\operatorname{Int} f(I) \neq \emptyset$*. Zobrazení f nazveme* prostor-vyplňující křivka*.*

V definici 2 využíváme *vnitřek množiny* označený $\operatorname{Int} f(I)$, který definujeme následovně:

Definice 3 (Vnitřek množiny)**.** *Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $x \in M$ je vnitřní bod M, jestliže $\exists \varepsilon > 0 : \mathcal{B}(x, \varepsilon) \subseteq M$, kde $\mathcal{B}(x, \varepsilon)$ označuje otevřenou kouli na množině M se středem v x a poloměrem ε. Množinu všech vnitřních bodů M nazveme* vnitřek množiny *M. Značíme* $\operatorname{Int} M := \{x \in M, x \text{ je vnitřní bod } M\}$*.*

Poznámka. Definici 2 bychom mohli volně shrnout slovy: Prostor-vyplňující křivka je taková křivka, která „vyplní“ (i velmi malou) kouli s kladným poloměrem.

Proč je zkoumáme?

Pozastavme se nad samotným pojmem prostor-vyplňující křivky. Ať už ji zkonstruujeme jakýmkoli způsobem, samotná křivka není snadná na pochopení[2].

Zkusme si představit křivku vyplňující prostor, pro jednoduchost volme dvoudimenzionální prostor tj. plochu. Představa může být následující: Máme nit navinutou na špulce a na vypnutém plátně ohraničenou plochu, kterou nití postupně vyšijeme. Jistě vyplníme plochu. Při vyšívání ovšem využijeme i rub plátna, což by ve dvoudimenzionálním prostoru nebylo možné.

Zkusme tedy ještě jednodušší představu: Tužkou vybarvíme část papíru, například čtverec. Po celou dobu se pohybujeme pouze na jedné straně papíru, na ploše. Tahy tužky dokážeme určitou část plochy vyplnit.

Nabízí se otázka, zda jsme skutečně nalezli křivku. Pokud z papíru tužku nezvedneme, bude její stopa jistě spojitá. Stopy se budou lišit pro „tupou“ a „ostrou“ tužku. Intuitivně se stopa ostré tužky zdá být představě křivky bližší, neboť křivka by měla být „tenká“; lépe řečeno, měla by být délkou bez tloušťky (viz Eukleidova definice v části 1.2). Abychom vyhověli takovému požadavku, můžeme tloušťku dále zmenšovat. S využitím počítačové grafiky se nám pak podaří dosáhnout *téměř* neviditelné stopy.

Nyní začínáme narážet na skutečnou podstatu problematiky vnímání nejen prostor-vyplňujících křivek, ale křivek obecně. Křivka je matematicky vykonstruovaný ideální objekt, který v reálném světě nenajdeme. Pomocí *reálného* modelu dosáhneme vždy jen určité aproximace takové křivky.

[1] V anglické literatuře nalezneme pod heslem *space-filling.*

[2] Chtělo by se říci, že je až podivná.

To, co umožní dovést aproximaci k přesnosti, je nekonečné zmenšování tloušťky, tedy limitní proces. Se zmenšováním tloušťky jde ruku v ruce prodlužování délky křivky. Zřejmě tedy, pokud dosáhneme nulové tloušťky, má prostor-vyplňující křivka zároveň nekonečnou délku. Představit si nekonečně tenkou křivku tj. křivku s nulovou tloušťkou, jak vyplňuje plochu (byť konečnou), je skutečně netriviální úkol. Přesto je možné ji matematicky konstruovat, a to několika způsoby.

2.1 Konstrukce

Konstrukci prostor-vyplňující křivky nejprve provedeme po vzoru Hilberta, jehož postup je názorný a vytváří dobrou představu o obecném principu konstruování křivek stejného typu.

Myšlenku celé konstrukce si nyní představíme ve třech krocích následujícího schématu. Na tomto obecném postupu budeme dále stavět při rozebírání konstrukcí konkrétních prostor-vyplňujících křivek.

Úmluva 2 (Značení). *Zavedeme značení pro posouvání a násobení množin následujícím způsobem:*

- *Nechť* $A \subseteq \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$. *Značíme:* $a + A = A + a = \{a + x : x \in A\}$.
- *Nechť* $B \subseteq \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R}^2$. *Značíme:* $b + B = B + b = \{b + x : x \in B\}$.
- *Nechť* $A \subseteq \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$. *Značíme:* $a \cdot A = A \cdot a = \{a \cdot x : x \in A\}$.
- *Nechť* $B \subseteq \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R}^2$. *Značíme:* $b \cdot B = B \cdot b = \{b \cdot x : x \in B\}$.

1. krok: Dokážeme zobrazit interval $[0, 1]$, který můžeme chápat jako úsečku délky 1, do čtverce $[0, 1]^2$. Jestliže může být celý interval zobrazen do čtverce, může být stejně zobrazena i jeho část. Tyto části budeme nazývat subintervaly a subčtverce.

Definice 4 (Subintervaly a subčtverce). *Mějme* $\mathcal{I}_0 \coloneqq \{[0, 1]\}$. *Nechť* $n \in \mathbb{N}_0$ *a* $\mathcal{I}_n$ *je definováno. Pak*

$$\mathcal{I}_{n+1} \coloneqq \left\{\frac{1}{4}I : I \in \mathcal{I}_n\right\} \cup \left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}I : I \in \mathcal{I}_n\right\} \cup \\ \cup \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}I : I \in \mathcal{I}_n\right\} \cup \left\{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}I : I \in \mathcal{I}_n\right\}.$$

Dále $\mathcal{Q}_0 \coloneqq \{[0, 1]^2\}$. *Nechť* $n \in \mathbb{N}_0$ *a* $\mathcal{Q}_n$ *je definováno. Pak*

$$\mathcal{Q}_{n+1} \coloneqq \left\{\frac{1}{2}Q : Q \in \mathcal{Q}_n\right\} \cup \left\{\left(0, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}Q : Q \in \mathcal{Q}_n\right\} \cup \\ \cup \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right) + \frac{1}{2}Q : Q \in \mathcal{Q}_n\right\} \cup \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}Q : Q \in \mathcal{Q}_n\right\}.$$

Prvkům $\mathcal{I}_n$ *říkáme subintervaly* n*-té generace. Prvkům* $\mathcal{Q}_n$ *říkáme subčtverce* n*-té generace.*

Příklad. První generace subintervalů je tedy $\mathcal{I}_1 = \Big\{[0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}], [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}], [\frac{3}{4}, 1]\Big\}$. Obdobně $\mathcal{Q}_1 = \Big\{[0, \frac{1}{2}]^2, [0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1], [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]^2\Big\}$ je první generace subčtverců.

Poznámka. Definice 4 není zcela obecná. Zavádí totiž $\mathcal{I}_{n+1}$ a $\mathcal{Q}_{n+1}$ pouze pro dělení na čtyři stejné subintervaly či subčtverce v každé generaci. Dělení ovšem nemusí být vždy pouze na čtyři části. Jak uvidíme později (např. v části 2.1.2), je možné provést dělení na jiný počet stejných částí v jedné generaci. Subintervaly a subčtverce by pak byly definovány analogicky.

Rozdělíme-li interval[3] na subintervaly první generace a čtverec na subčtverce první generace, můžeme každý subinterval zobrazit do subčtverce. Stejné dělení lze aplikovat i na jednotlivé subintervaly o generaci výš. Postup opakovaný ad infinitum nás dovede ke kýžené křivce.

2. krok: Máme zavedené dělení intervalu na subintervaly a čtverce na subčtverce. Ve druhém kroku definujeme zobrazení mezi $\mathcal{I}_n$ a $\mathcal{Q}_n$, tedy přiřazení subčtverce subintervalu bez dalších požadavků[4].

Obecná konstrukce křivky Nechť jsou dána zobrazení $\mathcal{F}_n : \mathcal{I}_n \to \mathcal{Q}_n, n \in \mathbb{N}_0$. Nechť $x \in [0, 1]$. Pak existuje posloupnost[5] $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ splňující

$$\left.\begin{aligned} I_n &\in \mathcal{I}_n, n \in \mathbb{N}_0; \\ I_{n+1} &\subseteq I_n, n \in \mathbb{N}_0; \\ x &\in I_n, n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Protože $|I_n| = \frac{1}{4^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, zřejmě $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} I_n = \{x\}$. Pokud je průnik $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(I_n)$ neprázdný, pak obsahuje jediný bod, neboť $\mathcal{F}_n(I_n) = Q_n \in \mathcal{Q}_n$, a tedy $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_n(I_n)) = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$; v tom případě definujeme $f(x)$ jako jediný bod tohoto průniku.

Zobrazení $\mathcal{F}_n$ tedy nějakým způsobem přiřazuje subčtverce subintervalům stejné generace. Takové přiřazení označuje také pojem n-tá iterace[6].

Povšimněme si, že subintervaly n-té generace jsou v rámci intervalu přirozeným způsobem uspořádány „za sebou", což ovšem neplatí pro subčtverce n-té generace. Popsat zobrazení $\mathcal{F}_n$ tedy odpovídá tomu najít lineární uspořádání subčtverců n-té generace či popsat „pořadí průchodu" těmito subčtverci.

3. krok: U konkrétní konstrukce je naším cílem zajistit, aby zobrazení f (přiřazení subčtverce subintervalu) mělo vhodné vlastnosti a splňovalo požadavky definice 2. Tedy:

[3] Celý jednotkový interval je také subinterval nulté generace. Podobně pak je jednotkový čtverec také subčtverec nulté generace, jak ostatně plyne z definice 4.

[4] V tomto kroku nám jde skutečně jen o to zavést libovolné zobrazení mezi $\mathcal{I}_n$ a $\mathcal{Q}_n$ bez požadavků definice 2 na spojitost apod.

[5] Jedná se o klesající posloupnost intervalů, v jejímž průniku je x.

[6] V literatuře (Sagan, 2012), (Bader, 2012) se pojem *iterace* ve smyslu zobrazení $\mathcal{F}_n$ objevuje velmi často. Budeme jej používat i později v této práci, především pro popis obrázků.

a) $\mathbb{D}_f = [0,1]$,

b) f je dobře definované,

c) f je *na*,

d) f je spojité.

Následuje několik podmínek a způsobů, jakými lze ověřit tyto čtyři požadavky. Splnění těchto požadavků budeme podrobněji rozebírat a zkoumat jednotlivě u konkrétních konstrukcí, které dále představíme v této kapitole.

Tvrzení 1 (Postačující podmínka pro požadavek a))**.** *Jestliže je splněna podmínka*

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \; \forall I \in \mathcal{I}_n \; \forall J \in \mathcal{I}_{n+1} : J \subseteq I \Rightarrow \mathcal{F}_{n+1}(J) \subseteq \mathcal{F}_n(I),$$

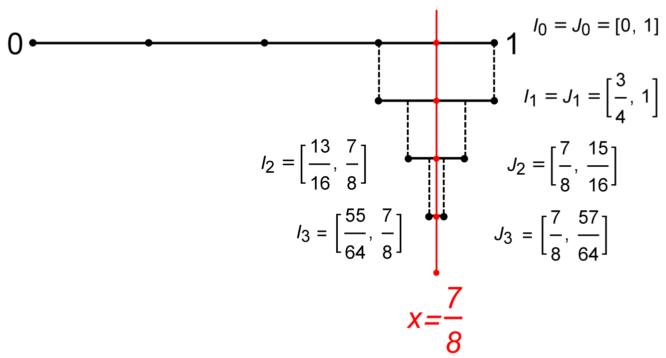
pak průnik $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(I_n)$ *existuje a je neprázdný.*

Požadavek a) není splněn například v případě, že zobrazení $\mathcal{F}_n$ zobrazují subintervaly do subčtverců chaoticky takovým způsobem, že je průnik $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(I_n)$ prázdný. Podmínka z tvrzení 1 zajistí existenci takového neprázdného průniku. Provedeme náznak důkazu: Klesající posloupnosti subintervalů $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ odpovídá klesající posloupnost subčtverců $(\mathcal{F}_n(I_n))_{n=0}^{\infty}$. Průnik takové klesající posloupnosti je již nutně neprázdný, neboť se jedná o klesající posloupnost kompaktních množin.

Požadavek b) můžeme vyjádřit také následujícím způsobem: Pro některé body $x \in [0,1]$ existuje více vhodných posloupností $(I_n)_{n=0}^{\infty}$; v takových případech hodnota zobrazení $f(x)$ nezáleží na volbě takové vhodné posloupnosti. Následující úvahy nám umožní formulovat postačující podmínku pro splnění požadavku b).

Pozorování 2. *Různé posloupnosti* $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ *a* $(J_n)_{n=0}^{\infty}$ *splňující 2.1 existují právě tehdy, když* $\exists N \in \mathbb{N}_0 \; \exists k \in \left\{0, 1, \ldots, 4^N\right\} : x = \frac{k}{4^N}$, *tj.* x *je krajní bod některého subintervalu.*

Navíc je-li x *krajním bodem některého subintervalu, potom lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že pro* $n \geq N$ *je* $I_n = [x - \frac{1}{4^n}, x]$, $J_n = [x, x + \frac{1}{4^n}]$.



Obrázek 2.1: Rozdělení posloupností $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(J_n)_{n=0}^{\infty}$ u členu $N = 2$ pro krajní bod $x = \frac{7}{8}$.

Tedy potřebujeme vědět, že platí $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(I_n) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(J_n)$. K tomu postačuje, aby se sousedící subintervaly zobrazily na sousedící[7] subčtverce.

Druhá část pozorování 2 říká, že posloupnosti $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(J_n)_{n=0}^{\infty}$ se „navždy rozdělí" u N-tého členu, viz obrázek 2.1.

Pro splnění požadavku c) stačí, aby platilo $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \mathcal{F}_n$ je *na*. Podrobněji toto vysvětlíme v konkrétním případě důkazu věty 3. Poslední z požadavků, tedy d), budeme pro konkrétní prostor-vyplňující křivky ověřovat typicky přímo z definice spojitosti nalezením vhodného okolí δ. Podstatná bude ovšem opět podmínka, že se sousedící subintervaly zobrazí na sousedící subčtverce.

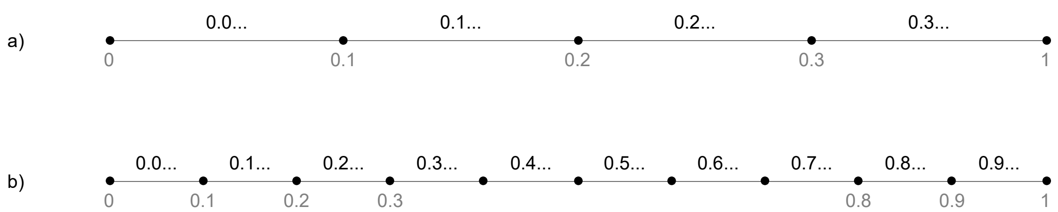
2.1.1 Hilbertova křivka

Geometrická konstrukce

V první konstrukci využijeme dělení původního intervalu na čtyři subintervaly, tedy přesně tak, jak je uvedeno v definici 4. K popisu jednotlivých dělení bude výhodné využít kvartérní (čtyřkovou) soustavu.

Poznámka. Zápis čísel v kvartérní soustavě je analogický tomu v desítkové. Využíváme cifry $0, 1, 2, 3$ a základem je 4^n. V desítkové soustavě platí $14_{10} = 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$, pro kvartérní soustavu dostaneme analogicky $32_4 = 3 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 (= 14_{10})$. Čísla v intervalu $[0, 1]$ zapíšeme ve tvaru $0_4{,}32 = 3 \cdot 4^{-1} + 2 \cdot 4^{-2} = 0_{10}{,}875$.

Každé číslo z jednotkového intervalu zapsané v kvartérní soustavě lze zařadit do jedné ze čtyř částí intervalu dle první číslice za řádovou čárkou. Dělení lze chápat obdobně jako v desítkové soustavě rozdělení úsečky na deset dílů. Každé číslo tak najdeme v jednom z deseti subintervalů označených 0.0 až 0.9, jak ostatně ukazuje obrázek 2.2.



Obrázek 2.2: Srovnání dělení jednotkového intervalu v kvartérní soustavě *a)* a v desítkové soustavě *b)*.

Následně dokážeme každou ze čtyř částí intervalu znovu rozdělit na čtyři části. Takové dělení jednoho ze subintervalů první generace na subintervaly druhé generace znázorňuje obrázek 2.3. Analogicky bychom mohli dělení opakovat donekonečna.

Stejným způsobem dělíme také čtverec na čtyři subčtverce první generace, z nichž každý potom dělíme na čtyři subčtverce o jednu generaci vyšší atd. Nyní můžeme mezi subintervaly a subčtverci n-té generace zavést zobrazení $\mathcal{F}_n$ (druhý krok obecné konstrukce).

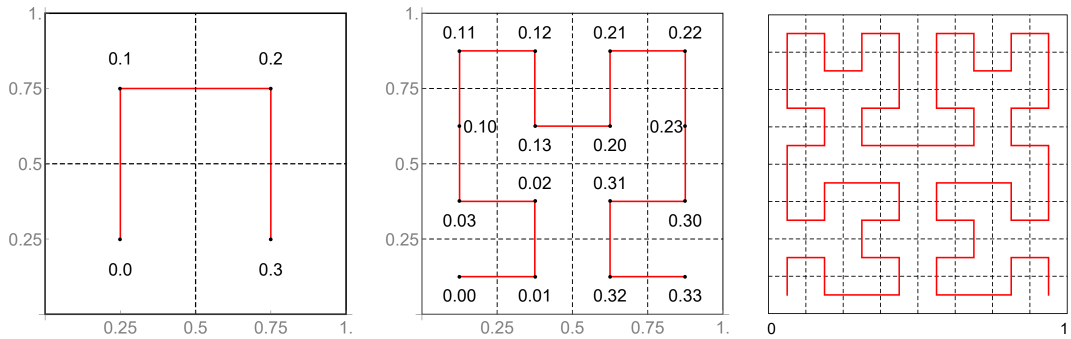
Aby toto zobrazení splňovalo podmínky prostor-vyplňující křivky (resp. definice 2), je třeba procházet čtverce ve vhodném pořadí. Hilbert toto pořadí stanovil

[7] Subčtverce jsou sousedící, když mají společnou stranu.

Obrázek 2.3: *a)* První dělení: jednotkový interval je rozdělen na čtyři subintervaly. *b)* Druhé dělení: subinterval 0.1 je dále dělen na čtyři subintervaly 0.10 až 0.13.

podmínkou[8]: *Sousedící subintervaly odpovídají sousedícím subčtvercům, a zároveň odpovídá-li čtverec intervalu, pak i jeho subčtverce odpovídají subintervalům tohoto intervalu.*

Princip konstrukce je graficky znázorněn na obrázku 2.4, kde jsou zachycena dělení čtverce na subčtverce první, druhé a třetí generace. Zároveň je červenou lomenicí naznačeno jedno vhodné pořadí[9] procházení subčtverců tak, aby byla splněna Hilbertova podmínka spojitého zobrazení.



Obrázek 2.4: Vlevo: Subčtverce první generace, tj. dělení čtverce na 4 části. Uprostřed: Subčtverce druhé generace tj. dělení čtverce na 16 částí. Vpravo: Subčtverce třetí generace. Pořadí, ve kterém jsou subčtverce procházeny, je naznačeno červenou čarou a číselným označením subčtverců, které koresponduje s příslušnými subintervaly stejné generace.

Poznámka. Dělení čtverce na subčtverce první a druhé generace na obrázku 2.4 v podstatě odpovídá zobrazením $\mathcal{F}_1$ a $\mathcal{F}_2$. Tato zobrazení jsou spolu kompatibilní ve smyslu tvrzení 1 a pozorování 2. Subinterval $[0_4{,}1; 0_4{,}2]$[10] se v obou případech zobrazí do subčtverce $[0; 0{,}5] \times [0{,}5; 1]$[11], tj. subčtverec první generace označený jako 0.1. Zobrazení $\mathcal{F}_2$ jen poskytuje podrobnější informaci o způsobu průchodu tímto subčtvercem, a to právě pomocí subčtverců druhé generace. S rostoucím n tedy stále zpřesňujeme pořadí průchodu subčtverci.

[8] Tato podmínka je obdobou požadavků ze třetího kroku obecné konstrukce. Zda skutečně zajistí požadované vlastnosti zobrazení, budeme muset samozřejmě ještě ověřit.

[9] Jedná se o pořadí, které ve své práci popsal a použil právě Hilbert (Hilbert, 1891).

[10] Jestliže jedna z mezí intervalu vyžaduje ve svém zápisu řádovou čárku, používáme pro označení intervalu místo čárky středník.

[11] Čtenář si jistě povšiml, že zde jsou intervaly zapsány v desítkové soustavě.

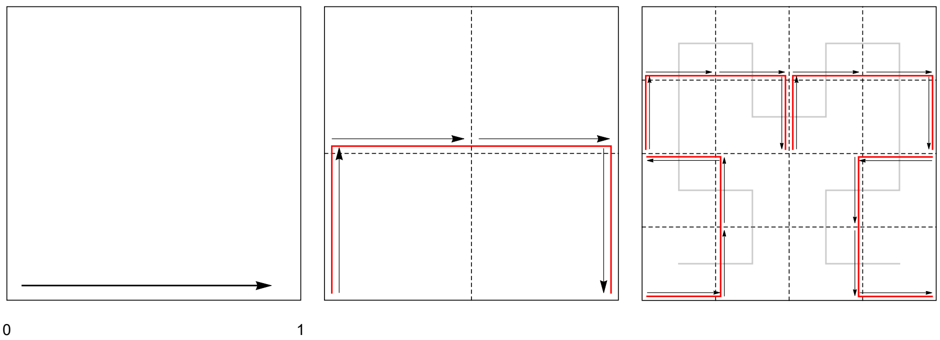
Na obrázku 2.4 je zachyceno přiřazení subčtverce subintervalu n-té generace postupně pro $n = 1, 2, 3$. Červeně je vykreslena stopa vhodného procházení subčtverců. Přiřazení subčtverce subintervalu stejné generace budeme dále označovat jako *iterace* konstrukce. Tedy pro přiřazení subčtverce subintervalu první generace dostáváme první iteraci konstrukce, pro druhou generaci je to druhá iterace, a konečně přiřazení subčtverců n-té generace subintervalům n-té generace, tj. zobrazení $\mathcal{F}_n$, nazveme n-tou iterací konstrukce. Stopy procházení jednotlivých subčtverců n-té generace ve vhodném pořadí (viz obrázek 2.4) nazveme n-tou iterací (konstrukce) křivky.

Na tomto místě shrneme několik poznatků, které jsme získali při popisu konstrukce a které budeme využívat dále (např. v důkazu Věty 3):

1. Počet subčtverců n-té generace je 4^n.
2. Délka subintervalu je rovna $\frac{1}{4^n}$, neboť každá iterace znamená dělení části intervalu předchozí iterace na čtyři stejně dlouhé úseky.
3. Délka strany subčtverce n-té generace je tedy $\frac{1}{2^n}$, tj. druhá odmocnina délky příslušného intervalu.

Aritmetické vyjádření

Z obrázku 2.4 vidíme, že druhá iterace konstrukce[12] je tvořena zmenšenými a různě otočenými či posunutými tvary, které odpovídají první iteraci. Nazvěme tvar první iterace *základní*.



Obrázek 2.5: Vlevo: Nultá iterace Hilbertovy křivky – *čtverec*. Uprostřed: Červeně je zvýrazněn *základní tvar* pro konstrukci Hilbertovy křivky. Šipky znázorňují vhodné pořadí uspořádání subčtverců. Vpravo: Složená zobrazení aplikovaná na základní tvar ve srovnání s druhou iterací z obrázku 2.4.

Základní tvar má počátek v levém dolním subčtverci a koncový bod v pravém dolním subčtverci. Pro lepší představu upravíme základní tvar do podoby na obrázku 2.5 uprostřed. Pomocí šipek je znázorněna orientace čtverců. Povšimněme si také, že základní tvar je jen určitý způsob uspořádání čtyř subčtverců první generace, resp. konkrétní způsob jejich přiřazení subintervalům první generace. Jelikož klesající posloupnosti subčtverců $1., 2., 3., \ldots$ generace konvergují do bodu, lze očekávat, že výsledná křivka bude začínat v počátku soustavy (levý

[12]Sledujeme červenou čáru, která představuje stopu průchodu jednotlivými subčtverci.

dolní vrchol jednotkového čtverce) a končit v bodě $(1,0)$ (pravý dolní vrchol čtverce).

Abychom získali požadovaný[13] tvar druhé iterace, je třeba, aby byly subčtverce jisté generace vhodně uspořádány. Druhou iteraci získáme ze základního tvaru tedy tak, že zmenšený základní tvar vložíme[14] do každého subčtverce Q první generace, tj. využijeme jeho čtyři subčtverce druhé generace. Samotné zmenšení základního tvaru ale nemusí postačit ke splnění Hilbertových zásad, proto je nutné jej různě zrcadlit a otáčet. To provedeme pomocí zobrazení uvedených v následující části a na obrázku 2.6.

Každou iteraci lze z předchozí získat pomocí složených zobrazení, která na rozdíl od základního tvaru poskytují kompletní informaci o postupu konstrukce.[15] Představme si nyní tato zobrazení na nulté iteraci tj. vytvoření základního tvaru.

Obrázek 2.5 vlevo je „orientovaný čtverec“; jeho orientace je znázorněna šipkou. V několika následujících řádcích jej nazýváme jednoduše *čtverec.*

1. Chceme získat část základního tvaru odpovídající levému dolnímu subčtverci. Nejprve tedy zmenšíme *čtverec* v poměru $2:1$ směrem k počátku. Dále jej otočíme o $+90^\circ$ [16] a překlopíme zrcadlově podle vlastní svislé osy. Jestliže složíme právě popsaná zobrazení, získáme zobrazení $\mathfrak{H}_0$:

$$\mathfrak{H}_0\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

   Aplikováním $\mathfrak{H}_0$ na *čtverec* pak skutečně dostaneme levý dolní subčtverec základního tvaru.

2. Levý horní subčtverec získáme opět stejným zmenšením *čtverce* a posunutím o $\frac{1}{2}$ jednotky nahoru.

$$\mathfrak{H}_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

3. Pravý horní subčtverec získáme stejnými zobrazeními jako levý horní, jen přidáme posunutí o $\frac{1}{2}$ jednotky vpravo.

$$\mathfrak{H}_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

4. Pravý dolní subčtverec získáme složením zobrazení: stejné zmenšení *čtverce* směrem k počátku, zrcadlové překlopení podle osy $y=-x$, následuje posun o $\frac{1}{2}$ jednotky nahoru a o celou jednotku vpravo.

$$\mathfrak{H}_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

[13] Nezapomínejme, že tato pravidla stanovil Hilbert kvůli požadavku na spojitost zobrazení, tedy aby výsledný objekt byl vůbec křivkou.

[14] Pokud $Q=F_n(I)$ je subčtverec generace $n-1$ a I je subinterval téže generace, pak na 4 subčtverce n-té generace subčtverce Q zobrazíme 4 subintervaly n-té generace intervalu I podle základního tvaru.

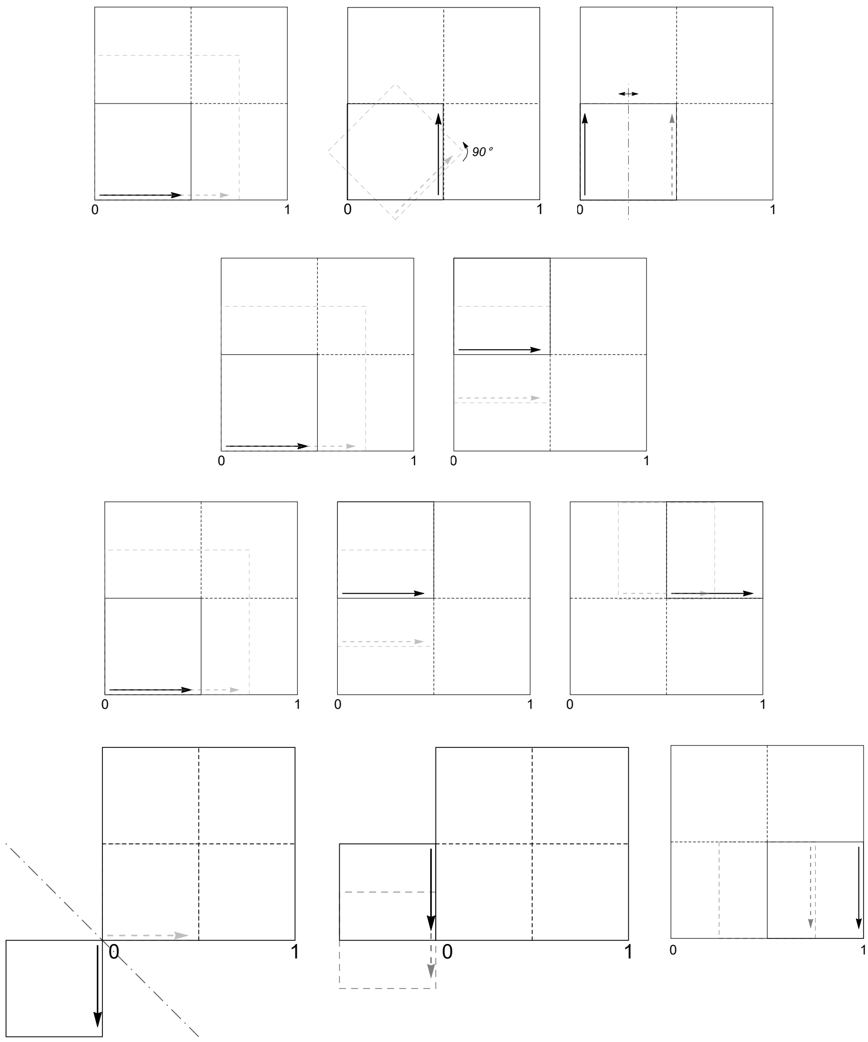
[15] Ze základního tvaru můžeme totiž v dalších iteracích postupovat různými způsoby, viz část 2.2.

[16] Znaménko „+“ značí otočení proti směru pohybu hodinových ručiček tj. v kladném smyslu.

Souhrnné schéma jednotlivých kroků složených zobrazení ukazuje obrázek 2.6. Uvedená zobrazení *čtverce* nejsou jediná, která vytvoří základní tvar ve smyslu uspořádání subčtverců první generace, ovšem samotnou konstrukci (z mnoha podobných) určují jednoznačně (Sagan, 2012, str. 13–17).

Zdůrazněme ještě, že podoba základního tvaru, tj. vhodné uspořádání subčtverců první generace v subčtverci nulté generace, obecně nepostačuje k jednoznačnému určení konstrukce, neboť neobsahuje informaci o rekurzivním algoritmu pro jednoznačné získání další iterace.

Základní tvar je ale vhodný pro odvození a popsání složených zobrazení, která konstrukci již určují. Druhá a třetí iterace na obr. 2.4 neplynou ze základního tvaru, nýbrž z aplikování zobrazení $\mathfrak{H}_i, i = 0, 1, 2, 3$ na iteraci předchozí. Výsledek těchto zobrazení aplikovaných na základní tvar zachycuje obrázek 2.5 vpravo. Šedě je ve čtverci znázorněna druhá iterace konstrukce Hilbertovy křivky z obrázku 2.4. Obrázek 2.6 pak znázorňuje samotná zobrazení $\mathfrak{H}_i$.



Obrázek 2.6: Schéma kroků transformací (zde aplikovaných konkrétně na *čtverec*) pro konstrukci iterace $(n + 1)$ z n-té iterace. Řádky odpovídají popsaným zobrazením, tj. první řádek zachycuje zobrazení $\mathfrak{H}_0$ atd. Pro $\mathfrak{H}_3$ není vyobrazen první krok – zmenšení *čtverce*.

V předchozích odstavcích je popsán způsob, jakým získat Hilbertovu křivku. Napišme tedy její definici:

Definice 5 (Hilbertova křivka)**.** *Každé $t \in [0,1]$ je jednoznačně určeno posloupností do sebe vnořených uzavřených subintervalů $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ generovaných dělením (viz definice 4 a podmínky 2.1). Posloupnosti $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ jednoznačně odpovídá posloupnost do sebe vnořených uzavřených subčtverců $(Q_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $\mathcal{F}_n(I_n) = Q_n$. Tyto subčtverce jednoznačně určují bod v $[0,1]^2$. Tento bod označíme $f_h(t)$. Zobrazení $f_h : [0,1] \to [0,1]^2$ nazveme* Hilbertova křivka.

Nyní je třeba ověřit korektnost definice. Využijeme tvrzení 1 a pozorování 2. Postačující podmínka z tvrzení 1 je splněna přímo z Hilbertových podmínek konstrukce, které zajišťují $\forall n \in \mathbb{N}_0\ \forall I \in \mathcal{I}_n\ \forall J \in \mathcal{I}_{n+1} : J \subseteq I$.

Mějme bod $t \in [0,1]$, který je krajním bodem některého ze subintervalů I_{n_0}. Podle pozorování 2 existují dvě různé posloupnosti vnořených uzavřených intervalů $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(J_n)_{n=0}^{\infty}$. Podle podmínek stanovených při konstrukci zobrazení se sousedící subintervaly zobrazí na sousedící subčtverce. To znamená: pokud $\exists n_0 : t = \sup I_{n_0} = \inf J_{n_0}$, pak $\forall n \geq n_0 : t = \sup I_n = \inf J_n$. V našem případě tedy čtverce sousedí od určité n_0-té iterace dále. Výsledný obraz z obou posloupností je proto stejný.

Věta 3. *Hilbertova křivka je prostor-vyplňující křivka.*

Důkaz. Nejprve dokážeme, že zobrazení f_h z definice 5 je surjektivní. Ve druhém kroku důkazu pak ukážeme, že zobrazení je spojité.

i) Zobrazení $f_h : [0,1] \to [0,1]^2$ je surjekce.[17]

a) Každé zobrazení $\mathcal{F}_n$ je *na*.[18] To ovšem plyne přímo z konstrukce v n-té generaci, neboť každému subčtverci $Q \in \mathcal{Q}_n$ přísluší právě jeden subinterval $I \in \mathcal{I}_n$. Zároveň pro generaci n je *konečný* počet prvků $\mathcal{I}_n$ stejný jako $\mathcal{Q}_n$, tj. 4^n. Zobrazení $\mathcal{F}_n$ je tak dokonce bijekce.

b) Nyní dokážeme, že fakt a) postačuje pro surjektivitu f_h. Mějme libovolný bod $(\xi_0, \eta_0) \in [0,1]^2$. Tento bod leží v průniku jisté posloupnosti do sebe vnořených uzavřených subčtverců $(Q_n)_{n=0}^{\infty}$. Takové posloupnosti subčtverců $(Q_n)_{n=0}^{\infty}$ odpovídá posloupnost $(I_n)_{n=0}^{\infty}$, neboť platí $I_n = \mathcal{F}_n^{-1}(Q_n)$, kde $\mathcal{F}_n^{-1}$ je inverzní zobrazení k bijekci $\mathcal{F}_n$. Posloupnost $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ určuje jedinečný bod $t_0 \in [0,1]$. Tedy dostáváme $f_h(t_0) = (\xi_0, \eta_0)$.

ii) Zobrazení $f_h : [0,1] \xrightarrow{na} [0,1]^2$ je spojité.[19] Nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Pro toto ε dokážeme vždy najít $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\frac{\sqrt{5}}{2^n} < \varepsilon.$$

Položme $\delta = \frac{1}{4^n}$. Zvolíme-li nyní body $t_1, t_2 \in [0,1]$ takové, že platí $|t_1 - t_2| < \delta$, protne se interval $[t_1, t_2]$ s nejvýše dvěma sousedícími subintervaly n-té

[17] Jinými slovy dokazujeme, že Hilbertova křivka navštíví každý bod čtverce.

[18] Tedy je splněna postačující podmínka pro c) z třetího kroku obecné konstrukce.

[19] Tedy dokážeme, že $f_h([0,1])$ je křivka.

generace. Obraz intervalu $[t_1, t_2]$ tedy leží nejvýše ve dvou subčtvercích[20] se společnou stranou, jejíž délka je $\frac{1}{2^n}$. Tyto subčtverce společně tvoří obdélník s úhlopříčkou délky $\frac{\sqrt{5}}{2^n}$, odkud plyne

$$|f_h(t_1) - f_h(t_2)| \leq \frac{\sqrt{5}}{2^n} < \varepsilon.$$

V případě[21], že obraz intervalu $[t_1, t_2]$ leží v jediném subčtverci o straně $\frac{1}{2^n}$, je vzdálenost obrazů $|f_h(t_1) - f_h(t_2)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2^n}$, což odpovídá délce úhlopříčky subčtverce n-té generace. Platí tedy

$$|f_h(t_1) - f_h(t_2)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2^n} < \frac{\sqrt{5}}{2^n} < \varepsilon.$$

Zobrazení $f_h : [0, 1] \xrightarrow{na} [0, 1]^2$ je spojité.

□

Poznámka. Dokázali jsme spojitost zobrazení (funkce) na uzavřeném intervalu. Jako důsledek automaticky získáváme dokonce stejnoměrnou spojitost.

Povšimněme si, že stejnoměrnou spojitost potvrdíme již v samotném důkazu, přestože v jeho závěru konstatujeme pouze obyčejnou spojitost zkoumaného zobrazení[22]. Nalezené okolí δ je totiž univerzální pro libovolné $t_1, t_2 \in [0, 1]$ takové, že $|t_1 - t_2| < \delta$, a závisí tak pouze na ε. Hilbertova křivka je tedy stejnoměrně spojitá.

Jak najít bod ve čtverci

Uvedli jsme způsob jakým konstruovat Hilbertovu křivku. Nyní si ukažme na příkladu, jak najít obraz konkrétního bodu $[0, 1]$, alespoň pro nějakou aproximaci.

Příklad. Mějme bod $t_0 = 0_4{,}02301\ldots$, $t_0 \in [0, 1]$. Hledejme, ve kterém subčtverci třetí generace bod leží. Zajímají nás tedy pouze tři číslice za řádovou čárkou, tj. $t_0 \doteq 0_4{,}023$.

Ze samotného zápisu čísla můžeme vyčíst, do jakého subčtverce je potřeba se v daném kroku aproximace dívat, a tedy v jakém čtverci sledovat další dělení na subčtverce. Konkrétně pro t_0 dostaneme, že leží ve třetím subčtverci třetího dělení, které přísluší druhému subčtverci druhého dělení, které probíhá v nultém subčtverci prvního dělení. Připomeňme, že čtverce číslujeme od 0 do 3. Číslování pro první dělení vidíme na obrázku 2.7.

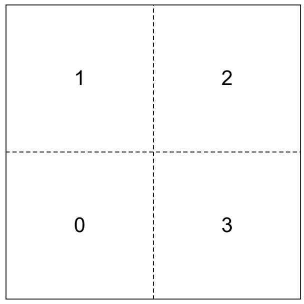
Nyní potřebujeme vhodně očíslovat zmenšené čtverce. Číslování nelze dělat ve stále stejném pořadí, viz obrázek 2.8, neboť bychom nedodrželi již dříve zmiňované podmínky spojitosti.

Číslování subčtverců musí odpovídat transformacím popsaným dříve v této kapitole. Tedy pro vhodné očíslování subčtverců např. nultého čtverce je nutné provést zmenšení, rotaci a reflexi, jak ukazuje obrázek 2.9 (uprostřed), nebo také první řádek obrázku 2.6.

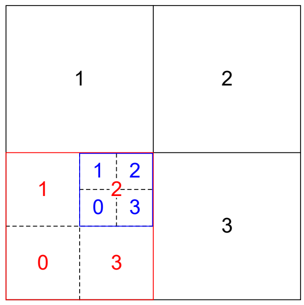
[20] Což můžeme tvrdit díky kompatibilitě posloupností subčtverců na inkluzi, tj. posloupnosti subčtverců $(Q_n)_{n=0}^{\infty}$ vyhovují podmínce z tvrzení 1.

[21] Tato část důkazu rozebírá pouze podrobněji jeden z možných případů, který je předchozí úvahou již dokázán. Nejedná se o speciální případ, který by bylo nutné pro fungující důkaz rozebírat.

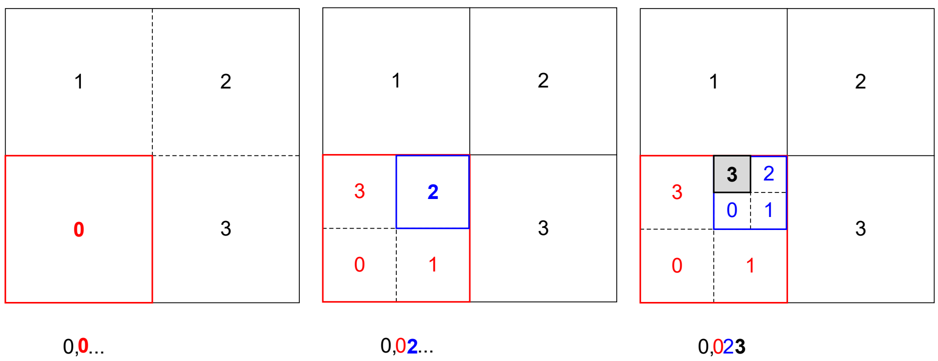
[22] Neboť ta je pro naše požadavky postačující.



Obrázek 2.7: Pořadí prvního dělení jednotkového čtverce na čtyři subčtverce v souladu s podmínkami spojitosti.



Obrázek 2.8: Chybné číslování subčtverců pro první, druhou a třetí iteraci. Zanedbává transformace subčtverců a nesplňuje tak podmínky spojitosti.



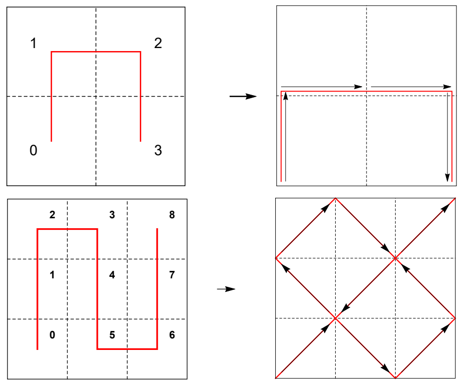
Obrázek 2.9: Číslování vybraných subčtverců: první iterace (vlevo), druhá iterace (uprostřed), třetí iterace (vpravo). Šedě zvýrazněný je výsledný čtverec, do kterého se zobrazí bod $t_0 \doteq 0_4{,}023$.

V následujících krocích je vždy potřeba aplikovat složené zobrazení na celý jemněji rozdělený čtverec. Postup s číslováním subčtverců a výsledný subčtverec, do kterého se zobrazí bod t_0, je na obrázku 2.9.

Aproximující lomenice

Pro přiblížení geometrické konstrukce Hilbertovy křivky v iteracích jsme využívali lomenou křivku pro propojení a vhodné uspořádání subčtverců ve čtverci n-té iterace. Tyto lomené křivky nazýváme *aproximující lomenice.*[23]

[23] V anglicky psané literatuře se objevuje pod heslem *approximating polygons.*

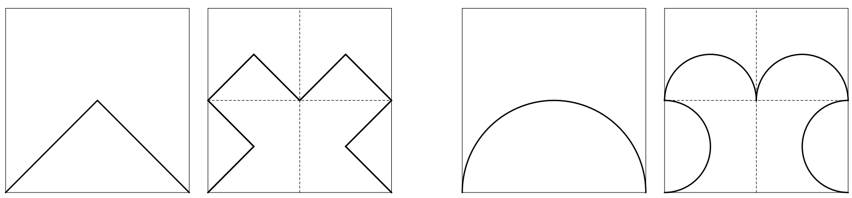


Obrázek 2.10: Původní i upravené tvary aproximujících lomenic pro konstrukci Hilbertovy (nahoře) a Peanovy (dole) křivky.

Na obrázku 2.10 je aproximující lomenice pro Hilbertovu a Peanovu křivku (viz níže). Lomenice musí splňovat několik podmínek, aby mohla být aproximující lomenicí pro nějakou prostor-vyplňující křivku.

1. Počáteční a koncový bod lomenice odpovídá počátečnímu a koncovému bodu prostor-vyplňující křivky.
2. V limitě pro $n \to \infty$ splývá lomenice s prostor-vyplňující křivkou.
3. Aproximující lomenici lze získat rekurzivním procesem základního motivu pro nultou iteraci.

Jedna prostor-vyplňující křivka může být aproximována různými vzory lomenic. V některých případech lze lomenici vytvořit ze základního motivu, křivky, s nenulovou křivostí (půlkruh, oblouk apod.), viz obrázek 2.11.



Obrázek 2.11: Příklady různých základních motivů aproximující lomenice a její podoby první iterace pro prostor-vyplňující křivku s počátečním bodem $(0, 0)$ a koncovým bodem $(1, 0)$.

Uvědomme si, že ke každé zde uvažované prostor-vyplňující křivce existuje více posloupností aproximujících lomenic konečné délky, ale pouze jedna posloupnost $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $\mathcal{F}_n$ je zobrazení množiny subintervalů n-té generace na množinu subčtverců n-té generace. To tedy znamená, že jakmile víme, jak libovolnému subintervalu přiřadit nějaký subčtverec stejné generace a toto přiřazení je v souladu s Hilbertovou zásadou, pak dostaneme nějakou křivku, a sice prostor-vyplňující křivku. Existuje ale více posloupností aproximujících lomenic konečné délky, které respektují tato přiřazení. Všechny tyto posloupnosti křivek mají tu samou limitu.

Úpravou pořadí průchodu aproximující lomenice subčtverci, změnou počátečního nebo koncového bodu prostor-vyplňující křivky lze získat další prostor-vyplňující křivky. Některým z nich se více věnujeme v následující části, dále pak v části 2.2.

2.1.2 Peanova křivka

Zatím jsme viděli, že Hilbert svou prostor-vyplňující křivku konstruoval na základě geometrické představy, ze které jsme následně přešli k aritmetickému vyjádření. Peano však představil prostor-vyplňující křivku přímo pomocí předpisu zobrazení. Proto se v této části práce nejprve podíváme na aritmetickou konstrukci Peanovy křivky tak, jak ji zavedl Peano, a teprve poté na její geometrickou interpretaci.

Podobně jako Peano ve svém článku (Peano, 1890) definujme zobrazení $f_p : [0,1] \to [0,1]^2$ předpisem:

$$f_p(0_3{,}t_1t_2t_3t_4) = \begin{pmatrix} 0_3{,}t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\dots \\ 0_3{,}(k^{t_1}t_2)(k^{t_1+t_3}t_4)\dots \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

kde $kt_j = 2 - t_j, (t_j = 0, 1, 2)$ a k^n označuje n-tou iteraci operátoru k a

$$0_3{,}t_1t_2t_3\dots = \frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \frac{t_3}{3^3} + \dots, t_j = 0, 1, 2$$

je ternární rozvoj $x \in [0, 1]$.

Věta 4. *Zobrazení $f_p : [0,1] \to [0,1]^2$ definované předpisem 2.2 je prostor-vyplňující křivka. Nazýváme ji Peanova křivka.*

Nejprve ověříme, že je zobrazení f_p dobře definované. Následně ukážeme, že je spojité a na.

Lemma 5. *Zobrazení f_p je dobře definované.*

Důkaz. Zvolme bod $x \in [0, 1]$, který má v ternární soustavě dva různé rozvoje jako v rovnici 2.3:

$$0_3{,}t_1t_2t_3\dots t_nt\bar{0} = 0_3{,}t_1t_2t_3\dots t_n(t-1)\bar{2}, \quad t = 1, 2. \tag{2.3}$$

Naším cílem je ukázat, že hodnota f_p je nezávislá na volbě reprezentace. Označme složky f_p po řadě jako φ_p, ψ_p. Rozlišíme dále dva případy, $n = 2m$ pro nějaké m (tj. n je sudé) nebo $n = 2m - 1$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $n = 2m$. Všimněme si, že platí

$$k^{2l+1}t_j = 2 - t_j \quad \text{a} \quad k^{2l}t_j = t_j, \quad \text{kde} \quad l \in \mathbb{N}, \quad t_j = 0, 1, 2.$$ [24]

Mějme tedy $n = 2m$ a pro zjednodušení označme $\tau = t_2 + t_4 + \dots + t_{2m}$. Pro první složku φ_p platí

$$\begin{aligned}\varphi_p(0_3{,}t_1t_2t_3\dots t_{2m}t\bar{0}) &= 0_3{,}t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\dots(k^{\tau}t)(\overline{k^{\tau}0}) = \\ &= \begin{cases} 0_3{,}t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\dots t, & \text{je-li } \tau \text{ sudé,} \\ 0_3{,}t_1(k^{t_2}t_3)\dots(k^{t_2+\dots+t_{2m-2}}t_{2m-1})(3-t), & \text{je-li } \tau \text{ liché.} \end{cases}\end{aligned}$$

[24] Tento vztah je důsledkem skládání operátorů: $k^2t_j = k(kt_j) = k(2-t_j) = 2-(2-t_j) = t_j$.

Ovšem podle druhého možného tvaru rozvoje také platí

$$\varphi_p(0_3{,}t_1t_2t_3\dots t_{2m}(t-1)\bar{2}) = 0_3{,}t_1(k^{t_2}t_3)\dots(k^{\tau}(t-1))(k^{\tau+2}2)(k^{\tau+4}2)\dots =$$

$$= \begin{cases} 0_3{,}t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\dots(t-1)\bar{2} \\ = 0_3{,}t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\dots t, & \text{je-li } \tau \text{ sudé,} \\ \\ 0_3{,}t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\dots(2-(t-1)) \\ = 0_3{,}t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\dots(3-t), & \text{je-li } \tau \text{ liché.} \end{cases}$$

Pro oba rozvoje se výsledné hodnoty složky φ_p shodují. Zcela analogicky lze provést důkaz pro druhou složku f_p tj. ψ_p. To již necháme na čtenáři a dále budeme předpokládat, že i pro zbývající případy platí tentýž závěr. Celkem tedy můžeme shrnout, že hodnota zobrazení nezávisí na volbě rozvoje. Zobrazení f_p dané předpisem 2.2 je tedy dobře definované. □

Z předpisu 2.2 není na první pohled zřejmá jeho geometrická interpretace. Před podáním důkazu spojitosti a surjektivity zobrazení f_p si geometrickou představu vybudujeme.

Geometrická konstrukce

Sagan (2012, str. 34–35) uvádí způsob, jakým lze dojít k odvození geometrické představy a principu generování křivky[25] z předpisu 2.2. Platí:

$$f_p(0_3{,}00t_3t_4) = \begin{pmatrix} 0_3{,}0\xi_2\xi_3\xi_4\dots \\ 0_3{,}0\eta_2\eta_3\eta_4\dots \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad f_p(0_3{,}01t_3t_4) = \begin{pmatrix} 0_3{,}0\xi_2'\xi_3'\xi_4'\dots \\ 0_3{,}1\eta_2'\eta_3'\eta_4'\dots \end{pmatrix}.$$

Odtud vidíme, že subinterval $\left[0, \frac{1}{9}\right]$ se zobrazí do subčtverce $\left[0, \frac{1}{3}\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right]$ a subinterval $\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$ do subčtverce $\left[0, \frac{1}{3}\right] \times \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

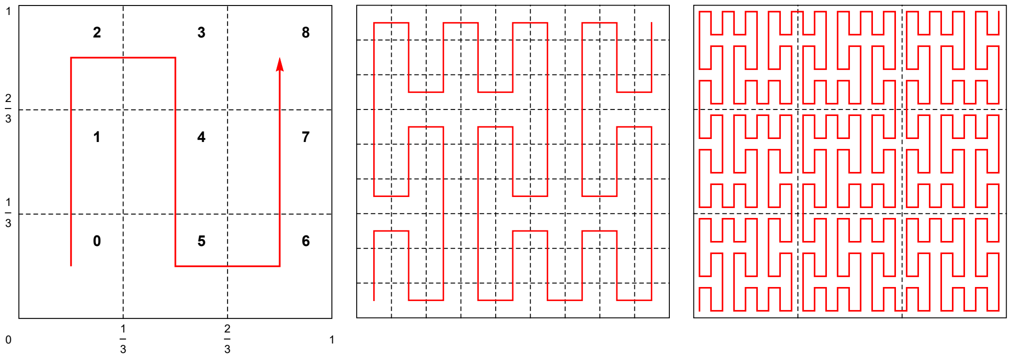
Poznámka. Prozatím jsme v souvislosti s Peanovou křivkou pracovali v trojkové soustavě, ovšem při budování geometrické představy křivky, zdá se, bude výhodnější (vzhledem k analogii s Hilbertovou křivkou, kde základ soustavy, ve které jsme pracovali, odpovídal počtu subčtverců první generace) pracovat v devítkové soustavě. Mezi zápisy v trojkové a devítkové soustavě lze přecházet také podle následujícího vztahu:

$$\begin{aligned} 0_3{,}t_1t_2t_3t_4\dots &= \frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \frac{t_3}{3^3} + \frac{t_4}{3^4} + \dots = \\ &= \frac{3t_1+t_2}{9} + \frac{3t_3+t_4}{9^2} + \dots = 0_9{,}(3t_1+t_2)(3t_3+t_4)\dots \end{aligned}$$

Podívejme se ještě, kam se zobrazí interval $\left[\frac{5}{9}, \frac{6}{9}\right]$. Máme tedy[26]

[25] Sagan dokonce píše: „Although there is no hint about a geometric interpretation anywhere in Peano [míněna práce (Peano, 1890)], Hilbert was undoubtedly led to his generating principle by the following consideration…“ (Sagan, 2012, str. 34). Tedy volně přeloženo: Přestože v Peanově práci není o geometrické interpretaci zmínka, Hilberta k jeho generujícímu principu bezpochyby dovedla následující úvaha…

[26] Příslušný přepis intervalu do trojkové soustavy uděláme na základě uvedené poznámky: $\frac{5}{9} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}$, a tedy $t_1 = 1, t_2 = 2$.



Obrázek 2.12: Vlevo: Rozdělení jednotkového čtverce na 9 subčtverců, šipka udává orientaci subčtverců, aby byly splněny podmínky spojitosti. Uprostřed: Druhá iterace Peanovy křivky, jednotkový čtverec dělen na 81 subčtverců. Vpravo: Třetí iterace.

$$f_p(0_3{,}12t_3t_4) = \begin{pmatrix} 0_3{,}1\xi_2''\xi_3''\xi_4''\dots \\ 0_3{,}(k2)\eta_2''\eta_3''\eta_4''\dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_3{,}1\xi_2''\xi_3''\xi_4''\dots \\ 0_3{,}0\eta_2''\eta_3''\eta_4''\dots \end{pmatrix},$$

což odpovídá subčtverci $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right]$, jehož levý dolní vrchol má souřadnice $\left[\frac{1}{3}, 0\right]$. V subčtverci se dále uplatní podobné souřadnice, ovšem v závislosti na umístění subčtverce vzhledem k subčtverci předchozí generace se liší způsob, v jakém je procházen. Tyto způsoby průchodu subčtverci, konkrétněji se jedná o možnosti zprava/zleva či shora/zdola, udávají právě zobrazení k. Například subčtverec $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right]$ budeme procházet zleva a shora, jak je vidět i z obrázku 2.13.

Dalším zkoumáním obrazů konkrétních bodů dojdeme k rozdělení jednotkového intervalu na devět subintervalů první generace a jednotkového čtverce na devět subčtverců první generace, jak ukazuje obrázek 2.12 vlevo. Zobrazení f_p tedy udává křivku, kterou můžeme získat podle principu obecné konstrukce. Tentokrát ovšem dělíme jednotkový interval $[0, 1]$ na 9^n subintervalů n-té generace, kterým přiřazujeme 9^n subčtverců n-té generace. Definice 4 tedy bude mít jinou, ovšem analogickou podobu.

Hilbertovy podmínky kladené na zobrazení subintervalů do subčtverců jsou splněny: Sousedící subintervaly jsou zobrazeny do sousedících subčtverců se společnou stranou a každé zobrazení zachovává to předchozí (tj. subinterval daného intervalu se zobrazí do subčtverce příslušného čtverce, přesně dle tvrzení 1). První tři iterace jsou na obrázku 2.12. Červená lomená čára určuje pořadí, ve kterém je nutné čtverce procházet (v souladu s podmínkami).

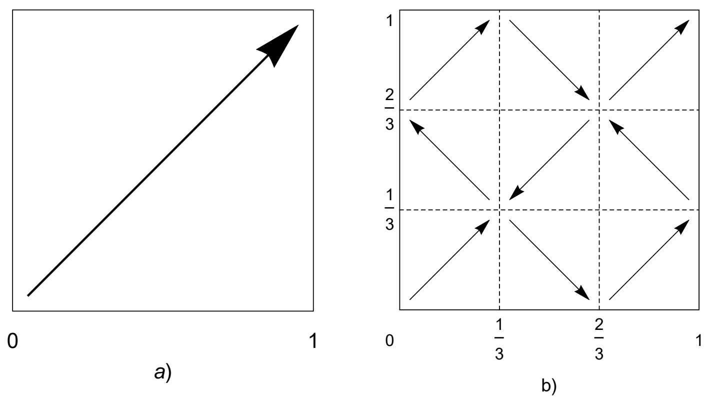
Na základě geometrické interpretace Peanovy křivky můžeme definovat zobrazení $f_p : [0, 1] \to [0, 1]^2$ obdobným způsobem jako zobrazení $f_h : [0, 1] \to [0, 1]^2$ v definici 5. Důkaz, že zobrazení f_p definuje prostor-vyplňující křivku, by vypadal obdobně jako důkaz věty 3.

Peano ve svém článku (Peano, 1890) uvádí analytický důkaz vlastností zobrazení f_p a ukazuje, že se jedná o prostor-vyplňující křivku. Podobně postavený důkaz uvádí i Sagan (2012, str. 32–33), který dále dokazuje ekvivalenci geometrického vyjádření křivky a toho analytického (Sagan, 2012, str. 36–40). V této práci uvedeme odlišný důkaz, který využívá kompaktnosti intervalu $[0, 1]$ a dále pracuje s pojmem stejnoměrné konvergence.

Důkaz vlastností zobrazení

Naším cílem je nyní podat jinou definici přesně stejného zobrazení f_p definujícího Peanovu křivku, a to pomocí zjednodušené geometrické představy. To, že se bude jednat o skutečně stejná zobrazení, plyne ze zachování stejného pořadí průchodu subčtverců n-té generace jako v konstrukci výše pro každé n. Výsledná křivka je totiž dána právě tímto uspořádáním subčtverců na nekonečně mnoha úrovních.

Peanova křivka má počáteční bod v levém dolním vrcholu čtverce (souřadnice $(0,0)$) a koncový bod na souřadnicích $(1,1)$, tedy v pravém horním vrcholu čtverce. Tuto vlastnost splňuje křivka na obrázku 2.13 a), která je úhlopříčkou čtverce a její počáteční a koncový bod splývají s těmi Peanovy křivky.



Obrázek 2.13: Iterace zobrazení f_n (spojitých křivek) pro $n = 0, 1$.

Pro každé n definujeme křivku f_n tak, že výsledná posloupnost $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje ke křivce f_p popsané výše. Zobrazení f_n definujeme pomocí dělení intervalu $[0,1]$ na 9^n subintervalů a jim příslušícího dělení čtverce $[0,1]^2$ na 9^n subčtverců, kde n udává iteraci. Pro uspořádání subčtverců ve čtverci platí podmínky spojitosti, tj. koncový bod křivky jednoho subčtverce splývá s počátečním bodem křivky navazujícího subčtverce, viz 2.1.1. Zobrazení f_n pro první dvě iterace je na obrázku 2.13, přičemž subčtverce procházíme ve stejném pořadí jako na obrázku 2.12, pouze po diagonálách.

Definice 6. *Pro každé n definujeme křivku f_n jako lomenici procházející diagonálně každým subčtvercem $Q \in \mathcal{Q}_n$, která kopíruje pořadí uspořádání těchto subčtverců pro zobrazení f_p a splňuje podmínky spojitosti (způsobem uvedeným výše).*

Křivku f_n je možné zavést pomocí rekurentního algoritmu, tzn. aplikovat řadu pravidel na iteraci $n-1$ tak, abychom získali správný tvar n-té iterace. Jedná se o složená zobrazení podobná těm, která pro Hilbertovu křivku popisujeme v části 2.1.1. Protože tentokrát rozdělujeme čtverec na 9 subčtverců, je potřeba definovat celkem 9 různých transformací.[27] Připomeňme, že subčtverce číslujeme v pořadí,

[27]Lze si povšimnout, že subčtverce se často liší pouze o posunutí, proto si dovolíme neuvádět všech devět transformací. Kompletní seznam lze najít například v (Sagan, 2012, str. 37).

jakým jimi procházíme, od 0 do 8, stejně tak indexujme složené zobrazení, kterým daný subčtverec získáme:

$$\mathfrak{F}_0\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \mathfrak{F}_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$
$$\mathfrak{F}_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\mathfrak{F}_4\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\dots$$

Tyto transformace (celkem devět předpisů) jsou definované tak, aby jejich aplikování na nultou iteraci křivky f_n na obrázku 2.13 vlevo odpovídalo první iteraci na obrázku 2.13 vpravo, a to ve stejném smyslu jako v případě Hilbertovy křivky odpovídají zobrazení $\mathfrak{H}_i, i=0,1,2,3$ obrázku 2.5, resp. 2.6.

Složky křivky f_n označíme φ_n a ψ_n. Abychom z n-té iterace, jejíž tvar známe, přešli k následující iteraci, aplikujeme na složky postupně všech devět transformací. Protože chceme zachovat definiční obor celé křivky, tj. $[0,1]$, musíme zobrazení $\varphi_n(t),\psi_n(t)$, kde $t\in[0,1]$, složit ještě s lineární transformací τ i-té devítiny intervalu $[0,1]$ na $[0,1]$, tj. $\tau_i=9x-i$, kde $x\in[\frac{i}{9},\frac{i+1}{9}]$, $i=0,1,\dots,8$. Označme $\varphi_n^i(x)=\varphi_n(\tau_i(x))$, $\psi_n^i(x)=\psi_n(\tau_i(x))$, kde x je z i-té devítiny $[0,1]$. Pro složky φ_{n+1} a ψ_{n+1} křivky pro iteraci $n+1$ tedy na i-té devítině jednotkového intervalu platí $\left(\begin{smallmatrix}\varphi_{n+1}\\\psi_{n+1}\end{smallmatrix}\right)=\mathfrak{F}_i\left(\begin{smallmatrix}\varphi_n^i\\\psi_n^i\end{smallmatrix}\right)$, kde $i=0,1,\dots,8$.

Důkaz. Křivka f_n je zřejmě spojitá, neboť jsme ji definovali tak, aby na sebe jednotlivé úseky křivky mezi subčtverci jedné generace vždy navazovaly. Nyní chceme dokázat, že platí $f_n\rightrightarrows f$, tedy ve složkách

$$\varphi_n\rightrightarrows\varphi:[0,1]\to[0,1],\quad \psi_n\ \rightrightarrows\ \psi:\ [0,1]\to\ [0,1].$$

Nechť je dáno $\varepsilon>0$. Vždy najdeme n_0 takové, že $3^{-n_0}<\frac{\varepsilon}{2}$. Buďte dána $m,n\geq n_0$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $m\leq n$. Nechť I je subinterval m-té generace obsahující $t\in[0,1]$. Ten se křivkou f_m zobrazí do jistého subčtverce m-té generace; označme jej Q. Podle definice posloupnosti křivek je také $f_n(t)\in Q$. Proto

$$\|f_n(t)-f_m(t)\|\leq\operatorname{diam}(Q)<\frac{2}{3^m}\leq\frac{2}{3^{n_0}}<\varepsilon,$$

tudíž platí $f_n\rightrightarrows f$.

Stejným způsobem najdeme největší vzdálenost dvou obrazů obou složek zobrazení f_n. Obrazy jsou od sebe pro n-tou iteraci vzdáleny nejvýše o délku strany subčtverce tj. $\frac{1}{3^n}$. Máme tedy stejnoměrnou konvergenci složek φ_n,ψ_n spojitého zobrazení f_n. Odtud dostáváme spojitost složek φ a ψ, tj. $\left(\begin{smallmatrix}\varphi\\\psi\end{smallmatrix}\right)=f$ je spojité.

Nyní dokážeme, že zobrazení $f:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ je *na.* Interval $[0,1]$ je kompaktní. Obraz $f([0,1])\subseteq[0,1]^2$ je také kompaktní. Je-li $f([0,1])$ kompaktní, pak $f([0,1])$ je uzavřená a omezená.

Ukážeme, že $f([0,1])$ je hustá v $[0,1]^2$. To znamená, že
$\forall a\in[0,1]^2\quad\forall\varepsilon>0\quad\exists t\in[0,1]:f(t)\in\mathcal{B}(a,\varepsilon)$. Protože je zobrazení $f([0,1])$ spojité a dílčí křivka prochází napříč každým subčtvercem, jsou pro důkaz hustoty $f([0,1])$ v $[0,1]^2$ zásadní tzv. síťové body. V síťových bodech mají společný vrchol vždy 4 subčtverce. Mějme zadané pevné $\varepsilon>0$ a bod $a\in[0,1]^2$. Najdeme síťový bod, který je ε blízko bodu a. Díky nekonečnému procesu zjemňování iterací takový síťový bod existuje a křivka jej navštíví.

Dokázali jsme tedy, že $f([0,1])$ je uzavřená a hustá v $[0,1]^2$. Nyní využijeme lemmatu (lze najít například v (Sagan, 2012, str. 94)):

Lemma 6. *Jestliže D je hustá v kompaktní množině K a D je kompaktní, potom $D = K$.*

Ovšem $[0,1]^2$ je kompaktní, splňuje tak podmínku lemmatu 6, podle kterého tedy nutně platí $f([0,1]) = [0,1]^2$, tj. $f([0,1])$ je *na*. Peanova křivka je opravdu prostor-vyplňující křivka. $\square$

Na závěr této části práce se ještě zamysleme nad otázkou, proč vlastně při konstrukci Hilbertovy či Peanovy křivky přecházíme k podobám na obrázku 2.5, resp. 2.13. Nebylo by lepší iterovat přímo obrázky 2.4, resp. 2.12? V takovém případě bychom totiž dostali posloupnost f_n (dokonce prostých) křivek, které konvergují k téže limitě, téže prostor-vyplňující křivce.

Pracovat s „hezkými“ křivkami je samozřejmě možné, ovšem nepraktické: hůře by se definovaly vztahy pro obecné n. V principu takovému přístupu ale nic nebrání, neboť i v oněch hezkých případech (při nalezení vhodné parametrizace) křivky stejnoměrně konvergují k té samé limitě jako v těch „ošklivých“ verzích, a tedy dostaneme stejnou výslednou prostor-vyplňující křivku. Problematické může být právě nalezení vhodné parametrizace, která by často byla zbytečně složitá a také mnohem méně elegantní než ta, kterou nám umožňují formulovat právě „ošklivější“ verze.

2.2 Další zajímavé křivky

Na příkladu Hilbertovy a Peanovy křivky jsme popsali a vysvětlili několik základních konstrukcí prostor-vyplňujících křivek. Existuje mnoho dalších modifikací těchto křivek, některé nyní představíme, jsou s nimi spojena jména E. Moore, W. Wunderlich, W. Sierpiński nebo H. S. Lebesgue.

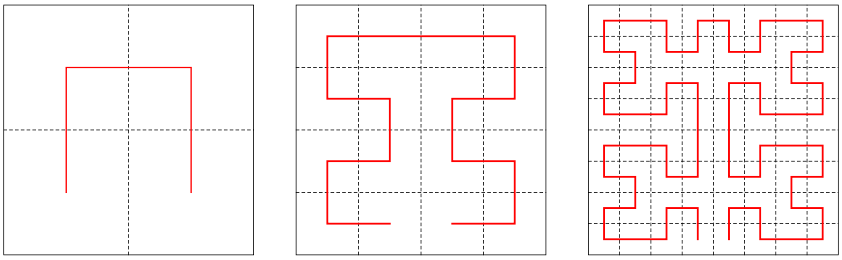
2.2.1 Moorova křivka

Eliakim Hastings Moore využil stejně jako Hilbert dělení intervalu (čtverce) na 4^n subintervalů (subčtverců). Ukázal, že Hilbertův způsob uspořádání subčtverců při takovém dělení není jediný[28], který vede ke konstrukci prostor-vyplňující křivky (Sagan, 2012, str. 24).

Moorova křivka má stejnou podobu aproximující lomenice pro první iteraci jako Hilbertova křivka. Liší se v počátečním bodě, kterým je $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, a koncovém bodě, který splývá s počátečním. Výsledkem Moorovy konstrukce je tak *uzavřená*[29] prostor-vyplňující křivka. Na obrázku 2.14 jsou znázorněny první tři iterace Moorovy křivky aproximující lomenicí.

[28] Hilbertův způsob je jediný (až na zrcadlení a otočení), pokud požadujeme prostor-vyplňující křivku s počátečním bodem vzdáleným o jednotku horizontálně nebo vertikálně od koncového bodu.

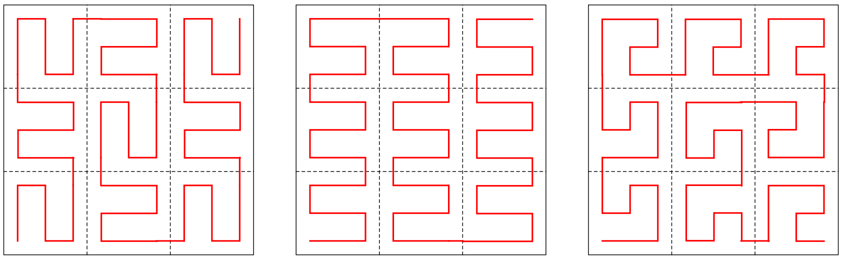
[29] Křivku nazveme uzavřenou, pokud splývá její počáteční a koncový bod (Bader, 2012, str. 24).



Obrázek 2.14: První tři iterace Moorovy prostor-vyplňující křivky.

2.2.2 Serpentiny a meandry

Walter Wunderlich přichází s novými možnostmi uspořádání subčtverců pro Peanovu křivku, používá tedy ke konstrukci dělení intervalu (čtverce) na 9^n subintervalů (subčtverců). Získané křivky dělí na *serpentinového* a *meandrového* typu[30], přičemž ve své práci (Wunderlich, 1973) konkrétně uvádí tři příklady, viz obrázek 2.15. Podle způsobů konstrukce aproximující lomenice najdeme celkem 272 křivek[31] serpentinového typu, zatímco meandrového existují pouze dvě. Z nich jednu vidíme na obrázku 2.15, druhá je s ní symetrická podle úhlopříčky čtverce (Sagan, 2012, str. 45).



Obrázek 2.15: Tři Wunderlichovy varianty Peanovy křivky (druhá iterace): Křivky serpentinového typu (vlevo a uprostřed) a meandrového typu (vpravo).

Povšimněme si, že aproximující lomenice serpentinového typu mají stejný počáteční a koncový bod jako křivka, kterou jsme konstruovali v části 2.1.2, viz obrázek 2.12. Podle tvaru a konstrukce lze Peanovu křivku zařadit k těm serpentinového typu. Křivky meandrového typu se od těch serpentinových liší v koncovém bodě, kterým je pravý dolní (v případě symetrické varianty levý horní) vrchol čtverce, jak je patrné i z obrázku 2.15.

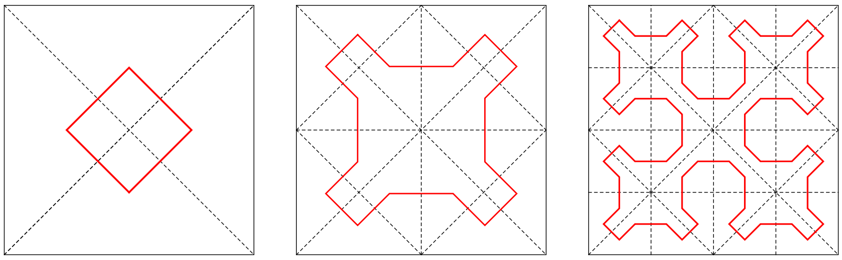
2.2.3 Sierpińského křivka

Waclaw Sierpiński představil v roce 1912 (Sagan, 2012) nový předpis zobrazení udávající prostor-vyplňující křivku. Na obrázku 2.16 je znázorněna geometrická konstrukce této křivky. Sierpińského křivka vznikne dělením celého čtverce na

[30]Pro první zmíněný typ používá Wunderlich označení *Serpentinentyp*, v anglicky psané literatuře se vyskytuje pojem *switch-back*. Druhý typ je i v anglické literatuře uváděn jako *meander type*. Název může odkazovat na podobnost mezi tvarem aproximující lomenice a zákruty na řece — meandry.

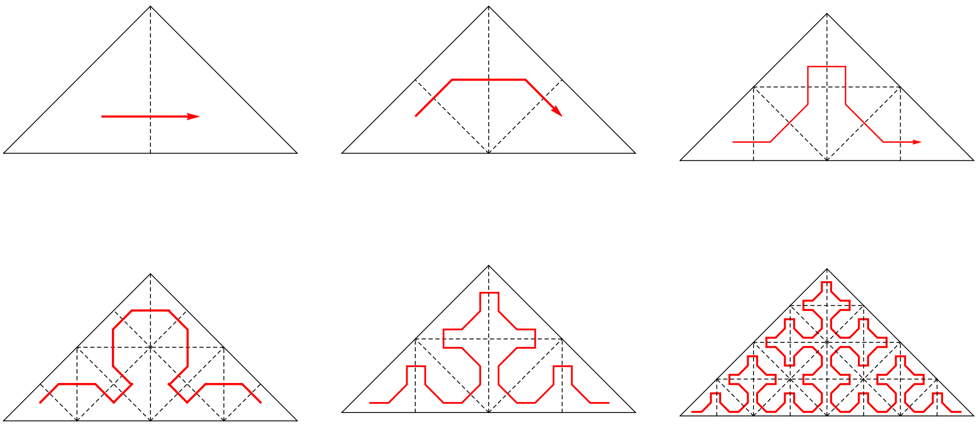
[31]Bez zanedbání symetrických možností by takových křivek bylo 2^9, neboť v každém z devíti subčtverců lze volit ze dvou podob vzoru.

4^n částí. Těmi jsou tentokrát pravoúhlé rovnoramenné subtrojúhelníky, nikoli subčtverce, jak tomu bylo doposud.



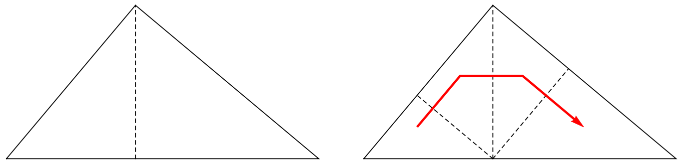
Obrázek 2.16: První tři iterace Sierpińského křivky. Přerušovanou černou čarou je naznačeno dělení na pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky.

Sierpińského křivka má ještě další zajímavou vlastnost, které si všiml Georg Pólya (Sagan, 2012): Rozdělením celého čtverce úhlopříčkou vzniknou dva pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky. V jednom z těchto trojúhelníku leží právě polovina křivky, tedy ve druhém trojúhelníku leží její druhá polovina. Odtud dostaneme, že interval lze zobrazit na plochu pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku.



Obrázek 2.17: Aproximující lomenice Knoppovy křivky pro prvních 5 iterací včetně naznačeného dělení trojúhelníku na subtrojúhelníky. Křivka v dolním řádku vpravo odpovídá sedmé iteraci.

Jak uvádí Sagan (2012), takové zobrazení $g_s : [0, 1] \to \mathcal{T}$, kde $\mathcal{T}$ je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s vrcholy v $(0, 0), (2, 0), (1, 1)$, skutečně existuje. Upravenou podobou Sierpińského křivky se zabýval Konrad Knopp. Dospěl k předpisu zobrazení, které lze geometricky reprezentovat jako na obrázku 2.17. Označuje se jako Knoppova či Sierpińského-Knoppova křivka a vznikne dělením rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku na 2^n subtrojúhelníků. Povšimněme si, že je možné přejít od aproximující lomenice Knoppovy křivky (např. pátá iterace (dolní řádek uprostřed) na obrázku 2.17) k aproximující lomenici Sierpińského křivky na obrázku 2.16 (vpravo). Knoppova křivka skutečně odpovídá polovině Sierpińského křivky při úhlopříčném řezu čtverce.



Obrázek 2.18: Dělení pravoúhlého trojúhelníku na podobné subtrojúhelníky, jak provedl Pólya. Červená šipka určuje pořadí vhodného uspořádání subtrojúhelků.

Knoppovu-Sierpińského křivku zobecnil Pólya, který ukázal, že $\mathcal{T}$ nemusí být nutně rovnoramenný trojúhelník. Rozděloval pravoúhlý trojúhelník vždy na dva podobné subtrojúhelníky, jak ukazuje obrázek 2.18.

2.2.4 Lebesgueova křivka

Lze ukázat[32], že zobrazení $f_\Gamma : \Gamma \to [0,1]^2$ dané předpisem

$$f_\Gamma(0_3{,}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots) = \begin{pmatrix} 0_2{,}t_1t_3t_5\dots \\ 0_2{,}t_2t_4t_6\dots \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

kde $\Gamma = \{0_3{,}(2t_1)(2t_2)(2t_3)\dots, t_j = 0 \,\text{nebo}\, 1\}$ značí Cantorovo diskontinuum, je spojité a na.

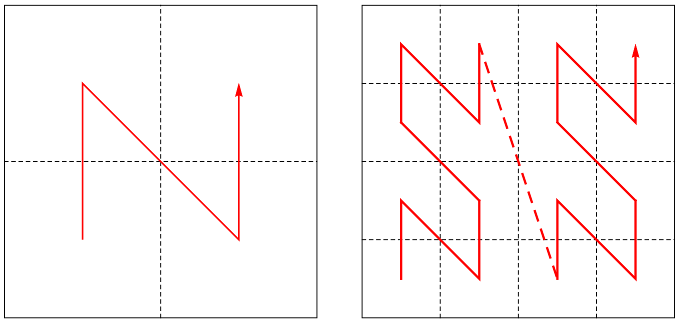
Poznámka. Cantorovo diskontinuum Γ je podmnožina $[0,1]$, kterou získáme odebráním všech prvků, které mají ve svém ternárním rozvoji alespoň na jedné pozici 1. Výjimkou jsou konečné ternární rozvoje s poslední cifrou 1, které lze přepsat pomocí nekonečného rozvoje ($0_3{,}1 = 0_3{,}0\overline{2}$).

Alternativně: Cantorovo diskontinuum získáme opakovaným odebíráním prostředních třetin intervalů, jak ukazuje obrázek 2.19. V prvním kroku je to odebrání otevřeného intervalu $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ z $[0,1]$ — zůstanou tedy intervaly $[0, \frac{1}{3}]$ a $[\frac{2}{3}, 1]$, které dále dělíme stejným způsobem.

Obrázek 2.19: Grafické znázornění konstrukce Cantorova diskontinua opakovaným odebíráním třetin intervalu. Červeně je zvýrazněna část intervalu, která v daném kroku náleží Cantorovu diskontinuu.

Zobrazení f_Γ lze interpretovat geometricky. Na obrázku 2.20 je naznačeno uspořádání subčtverců v $[0,1]^2$ při zobrazení Γ_2 (druhé dělení intervalu $[0,1]$ tzn. máme celkem 4 uzavřené intervaly). V dalším kroku, tj. Γ_3, je patrné, že subčtverce na sebe přímo nenavazují v místech odebraných subintervalů $[0,1]$, a je tak nutné přeskočit mezi subčtverci úhlopříčně.

[32] Důkaz uvádí například Sagan (2012, str. 70).

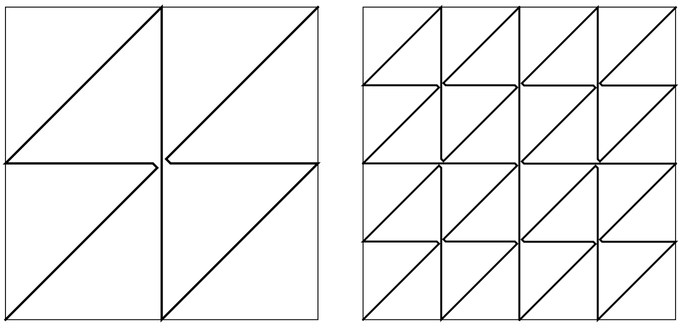


Obrázek 2.20: Geometrická interpretace zobrazení f_Γ pro Γ_2 a Γ_3. Přerušovanou čarou je naznačen skok mezi nenavazujícími subčtverci.

Henri Leon Lebesgue rozšířil zobrazení f_Γ ze vztahu 2.4 tak, aby zobrazovalo celý jednotkový interval $[0,1]$.[33] Získal tak zobrazení f_l, které definuje Lebesgueovu prostor-vyplňující křivku:

$$f_l(t) = \begin{cases} \frac{[f_\Gamma(a)(b-t)+f_\Gamma(b)(t-a)]}{b-a}, & \text{je-li}\, t \in (a,b), \text{kde}\, (a,b) \cap \Gamma = \emptyset \text{ a } a,b \in \Gamma, \\ f_\Gamma(t), & \text{je-li}\, t \in \Gamma, \end{cases} \tag{2.5}$$

Na obrázku 2.21 je zachycena aproximující lomenice pro geometrickou konstrukci této křivky.



Obrázek 2.21: Aproximující lomenice Lebesgueovy křivky pro $n = 1$ a 2.

Lebesgueova křivka, na rozdíl od prostor-vyplňujících křivek, se kterými jsme se dosud setkali, postrádá některé lokální vlastnosti. Není zaručeno, že každá restrikce f_l na subinterval $[0,1]$ bude také prostor-vyplňující křivka, protože obrazy subintervalů nemusí odpovídat uspořádaným[34] subčtvercům v $[0,1]^2$. Maximální intervaly, přes které není Lebesgueova křivka prostor-vyplňující, jsou právě ty z doplňku Cantorova diskontinua Γ^c. Jakmile libovolný z těchto intervalů zvětšíme, zahrneme okamžitě i část, která již prostor-vyplňující je.

Zároveň je Lebesgueova křivka skoro všude diferencovatelná, což pro ostatní námi zkoumané prostor-vyplňující křivky neplatí, jak ukážeme v části 2.3.

[33] Rozšíření zobrazení 2.4 na doplněk Cantorova diskontinua Γ^c (tzn. intervaly odebrané z $[0,1]$) muselo zachovat spojitost, využil proto lineární interpolaci.

[34] Obrazy jsou rozmístěny napříč celým jednotkovým čtvercem.

2.3 Nediferencovatelnost

Prostor-vyplňující křivky, které jsme popsali v kapitole 2.1[35], jsou nediferencovatelné. Později v této kapitole provedeme důkaz, že danou vlastnost mají Hilbertova a Peanova křivka. Nejprve se ale podíváme na význam samotného pojmu nediferencovatelnost.

Definice 7. *Funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je diferencovatelná v bodě* $a \in \mathbb{R}$*, jestliže* $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *existuje a je konečná.*

Nediferencovatelnost v bodě pak znamená, že derivace funkce v daném bodě neexistuje nebo je nevlastní. Nemá-li funkce vlastní derivaci v žádném bodě $a \in \mathbb{R}$, nabízí se označení *nikde nediferencovatelná* funkce. Vzhledem k povaze českého jazyka[36] ovšem raději zůstaneme u srozumitelnějšího opisu „nemá derivaci v žádném bodě“.

Poznámka. Později v této části práce se budeme zabývat křivkami, které nemají v žádném bodě derivaci. Nediferencovatelnost křivek nebudeme speciálně definovat, neboť budeme pracovat s jednotlivými složkami zobrazení, které chápeme jako spojité funkce jedné proměnné.

Funkce, které nemají v bodě (typicky je to místo nespojitosti či „zlomu“) derivaci, jsou čtenáři jistě dobře známé, nebudeme proto základní představu podrobně budovat. Dále budeme uvažovat již funkce, které nemají derivaci v žádném bodě.

Funkce nespojité ve všech bodech jsou jistě vhodnými reprezentanty takových funkcí. Příkladem může být Dirichletova funkce[37] daná předpisem:

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ pokud } x \text{ je racionální číslo,} \\ 0, \text{ pokud } x \text{ je iracionální číslo.} \end{cases}$$

Naproti tomu existence spojitých funkcí, které nemají derivaci v žádném bodě, není na první pohled tak zřejmá. Na počátku 19. století bylo nalezení takové funkce velkým překvapením, neboť byl rozšířen názor, že všechny spojité funkce musí nutně být téměř všude diferencovatelné[38] (Thim, 2003).

2.3.1 Monstra

Bolzano byl prvním, kdo (kolem roku 1830) popsal spojitou funkci, která nemá derivaci v žádném bodě. Vlivem nepříznivých okolností došlo ke zveřejnění těchto jeho výsledků až o téměř sto let později, v roce 1922 (Thim, 2003, str. 11).

Prvním publikovaným příkladem spojité funkce, která nemá v žádném bodě derivaci, se tak stala Weierstrassova funkce, dnes známá také jako Weierstrassovo

[35] s výjimkou Lebesgueovy křivky

[36] V českém jazyce běžný dvojitý zápor vnáší možnost chybné interpretace. Anglickému pojmu *nowhere differentiable function* odpovídá překlad nikde nediferencovatelná funkce, ovšem v české literatuře se s tímto označením příliš nesetkáváme.

[37] O její znázornění se ani s využitím počítačové grafiky nebudeme pokoušet.

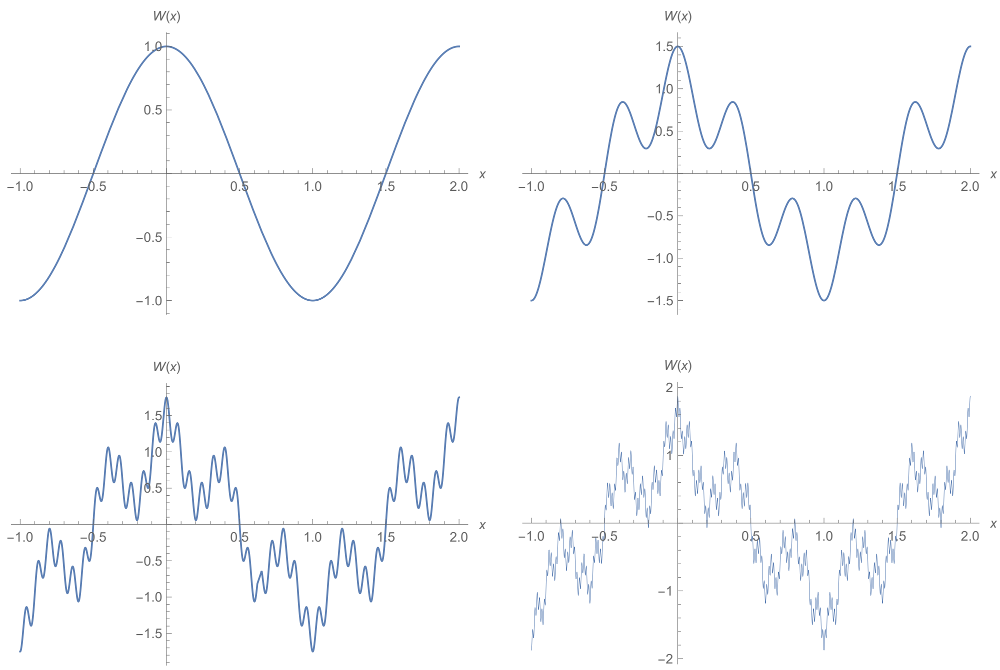
[38] A. M. Ampère se dokonce pokusil tvrzení dokázat na základě „intuitivně evidentního“ faktu o lokálních vlastnostech křivek (Kucharski, 2014, str. 21).

monstrum, kterou představil K. Weierstrass roku 1872 (Thim, 2003, str. 20–21). Je dána předpisem

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos b^k \pi x,$$

kde $0 < a < 1, \quad ab > 1 + \frac{3\pi}{2}, \quad b > 1$ je liché celé číslo.[39]

Graf Weierstrassovy funkce, viz obrázek 2.22, si lze představit pro $k = 0$ jako kosinovou vlnu, v dalším kroku, tj. $k + 1$, se zavlní i v místě, kde se vlna nenacházela. Takto v dalších krocích dochází opakovaně k eliminování míst bez vln a výsledkem je „nekonečně zubatá“ funkce.



Obrázek 2.22: Přiblížení grafické konstrukce Weierstrassova monstra konkrétně pro $a = \frac{1}{2}$, $b = 5$. Postupně zvyšujeme $k = 0, 1, 2, 3$.

Na obrázku 2.22 je také patrná další vlastnost Weierstrassovy funkce, a sice soběpodobnost. Každá část grafu má podobný tvar jako graf při různém zmenšení či zvětšení. Volně řečeno, libovolný zoom bude vypadat „stejně“ jako jeho předloha. Stejné chování jsme pozorovali již u prostor-vyplňujících křivek, dokonce je na tomto principu založena jejich konstrukce (viz 2.1.1).

Po Weierstrassově příkladu bylo představeno mnoho dalších ze skupiny spojitých funkcí, které nemají v žádném bodě derivaci. V matematice jsou často nazývány *monstry.*[40] Jejich podrobnější přehled, kterému se ale v této práci nebudeme věnovat, uvádí Thim (2003) či Jarnicki a Pflug (2015). Ukážeme ale, že i některé prostor-vyplňující křivky (resp. jejich složky) spadají do skupiny těchto *monster.*

[39] Později bylo dokázáno, že podmínku lze zjednodušit na $0 < a < 1$, $ab \geq 1, b > 1$. Důkaz uvádí např. Thim (2003, str. 22–25).

[40] Jako první s tímto označením přišel Henri Poincaré při popisu právě Weierstrassovy funkce (Kucharski, 2014, str. 21).

2.3.2 Nediferencovatelnost Peanovy a Hilbertovy křivky

Již Peano v práci (Peano, 1890), kde popisuje svou prostor-vyplňující křivku, poznamenává, že tato (spojitá) křivka nemá v žádném bodě derivaci. Peano ovšem nepřipojuje žádné další vysvětlení či důkaz tohoto tvrzení.

Stejnou poznámku nalezneme i u Hilberta (Hilbert, 1891), opět bez podání důkazu. Důkazy vět 7 a 8, které nyní provedeme, uvádí Sagan (2012).

Věta 7. *Složky φ_h, ψ_h Hilbertovy křivky $f_h([0,1])$ definované v definici 5 nemají v žádném bodě derivaci.*

Důkaz. Důkaz provedeme pro první složku φ_h zobrazení $f_h([0,1])$, pro druhou složku je postup analogický.

Zvolme libovolné $t \in [0,1]$. Pro jakékoli $n \geq 3$ najdeme $t_n \in [0,1]$ takové, že $|t - t_n| \leq \frac{10}{4^n}$ a souřadnice $\varphi_h(t)$ obrazu t se liší od souřadnice $\varphi_h(t_n)$ obrazu t_n alespoň o subčtverec o straně $\frac{1}{2^n}$, tj. $|\varphi_h(t) - \varphi_h(t_n)| \geq \frac{1}{2^n}$. To je možné vždy, neboť víme, že libovolný subčtverec n-té generace je obklopen[41] nejvýše osmi subčtverci n-té generace. Přidáme-li k těmto osmi subčtvercům libovolný jeden další, máme jistotu, že dokážeme vybrat z těchto celkem deseti[42] subčtverců dva, které se budou lišit alespoň o subčtverec o straně $\frac{1}{2^n}$. Deset subčtverců pak odpovídá deseti subintervalům n-té generace, jejichž celková délka je tak $\frac{10}{4^n}$.

Dostáváme

$$\left| \frac{\varphi_h(t) - \varphi_h(t_n)}{t - t_n} \right| \geq \frac{2^n}{10} \to \infty \quad \text{pro} \quad n \to \infty. \tag{2.6}$$

Máme tedy diferenční podíl 2.6, ve kterém t_n pro $n \to \infty$ představuje posloupnost vnořených subintervalů. Nyní chceme přejít pomocí limitního procesu k derivaci. Pro libovolnou posloupnost $(t_n)_{n=0}^{\infty}$ jsou splněny podmínky Heineho věty, neboť $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = s$, kde $s \in [0,1]$, a $\forall n \in \mathbb{N} : t_n \neq s$. Podle 2.6 je $\lim\limits_{n\to\infty} |\varphi_h(t_n)| = \infty$, a tedy podle Heineho věty je $\lim\limits_{t\to s} |\varphi_h(t)| = \infty$, pokud limita existuje. Odtud dostaneme, že konečná limita diferenčního podílu neexistuje.

Tedy φ_h je nediferencovatelná v t. Protože jsme provedli důkaz s předpokladem volby jakéhokoli $t \in [0,1]$, nemá φ_h derivaci v žádném bodě. Totéž lze dokázat pro druhou složku ψ_h. □

Právě podaný důkaz je do určité míry vystavěn na geometrické představě konstrukce křivky. Využíváme znalost vzdálenosti obrazů na základě délky strany subčtverce pro danou iteraci. Je možné větu 7 dokázat ještě jiným způsobem, který využívá analytického vyjádření předpisu zobrazení f_h, jehož odvození vychází z druhého (aritmetického) typu konstrukce Hilbertovy křivky (viz 2.1.1). Toto odvození společně s alternativním důkazem věty 7 je provedeno podrobně v (Sagan, 2012, str. 18–21), zde jej uvádět nebudeme.

Věta 8. *Peanova křivka f_p ze vztahu 2.2 nemá derivaci v žádném bodě.*

Důkaz. Pro jakékoli $x = 0_3{,}t_1t_2t_3 \dots t_{2n}t_{2n+1}t_{2n+2} \cdots \in [0,1]$ definujme $x_n = 0_3{,}t_1t_2t_3 \dots t_{2n}\tau_{2n+1}t_{2n+2}$, kde $\tau_{2n+1} = t_{2n+1} + 1 \pmod 2$. Potom se x a x_n liší

[41] Skutečně záměrně nevolíme slovo soused, neboť nyní zahrnujeme i subčtverce, které mají s jedním zvoleným společný i pouze vrchol.

[42] Nezapomeňme na subčtverec, který je obklopován.

právě na pozici řádu $\frac{1}{3^{2n+1}}$ a platí $|x - x_n| = \frac{1}{3^{2n+1}}$. Pro první složku φ_p zobrazení f_p podle 2.2 dostaneme, že ternární rozvoje $\varphi_p(x)$ a $\varphi_p(x_n)$ se liší pouze na pozici $(n+1)$. Odtud

$$|\varphi_p(x) - \varphi_p(x_n)| = \frac{|k^{t_2+t_4\cdots+t_{2n}}t_{2n+1} - k^{t_2+t_4\cdots+t_{2n}}\tau_{2n+1}|}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^{n+1}},$$

dostaneme tedy

$$\left|\frac{\varphi_p(x) - \varphi_p(x_n)}{x - x_n}\right| = 3^n \to \infty \quad \text{pro} \quad n \to \infty,$$

φ_p je tak nediferencovatelná v x. Protože $x \in [0,1]$ bylo voleno libovolně, nemá φ_p derivaci v žádném bodě. Pro druhou složku ψ_p plyne důkaz nediferencovatelnosti ze vztahu $\psi_p(x) = 3\varphi_p(\frac{x}{3})$. □

2.3.3 Derivace jako rychlost

Podívejme se na nediferencovatelnost některých prostor-vyplňujících křivek ještě z jednoho pohledu. Na parametr $t \in [0,1]$ lze nahlížet jako na plynoucí čas. V tom případě by křivka byla trajektorií nějakého pohybu a derivaci v bodě t bychom označili jako jeho okamžitou rychlost v čase t. Již víme, že délka křivky se s každou iterací prodlužuje, ale časový interval zůstává neměnný.

Příklad. Porovnejme dvě situace na příkladu letící mouchy: Moucha má za úkol doletět z levého dolního vrcholu čtverce do pravého horního vrcholu, přičemž musí vždy proletět středem všech subčtverců n-té generace v jednotkovém čtverci. Pro $n = 0$ není jednotkový čtverec rozdělen - moucha za jednu jednotku času urazí dráhu l_1. Ve druhém případě je jednotkový čtverec rozdělen na 9 subčtverců. Moucha poletí po dráze l_2, která je nutně[43] delší než v předchozím případě, platí tedy $l_2 > l_1$. Čas, za který urazí novou dráhu l_2, je ale stále stejný, neboť t probíhá opět tentýž jednotkový interval $[0,1]$. Můžeme tedy usoudit, že rychlost, kterou se moucha pohybuje, je ve druhém případě větší.

Tentýž závěr lze učinit pro dvě iterace řádu n a m, kde $n > m$. S rostoucí jemností dělení (rostoucím řádem iterace n), bude narůstat i rychlost. Jelikož délka výsledné prostor-vyplňující křivky je nekonečná a časový interval zůstává jednotkový, poroste rychlost nade všechny meze. Pojem rychlosti v takovém limitním případě nemá smysl zavádět. A tedy se zdá, že ani derivaci nebude možné zavést.

Jak už jsme zmínili v části 2.2.4, ne všechny prostor-vyplňující křivky nemají derivaci v žádném bodě. Například Lebesgueova křivka je skoro všude diferencovatelná, konkrétně je diferencovatelná na Γ^c. Naopak prostor-vyplňující křivku, která by měla derivaci v každém bodě, nenajdeme, jak dokázal roku 1980 M. Morayne (Sagan, 2012, str.78–79).

2.4 3D prostor-vyplňující křivky

Doposud jsme se věnovali křivkám, které vyplní plochu nějakého dvojrozměrného objektu. Pomocí vhodných zobrazení je možné konstruovat křivky vyplňující

[43] Platí za předpokladu, že moucha volí vždy nejkratší možnou trajektorii.

prostor i vyšších dimenzí. Představíme si stručně alespoň některé podoby těchto křivek ve 3D, neboť ty si lze stále poměrně snadno představit. Podrobněji se trojrozměrným prostor-vyplňujícím křivkám věnuje (Bader, 2012) a Sagan (2012)[44].

Jak přejít o dimenzi výš?

Naším cílem je získat alespoň princip zobrazení $\Phi : [0,1] \xrightarrow{na} [0,1]^3$, kde $[0,1]^3$ nazýváme jednotkovou krychlí. Již známe zobrazení, které dokáže zobrazit $[0,1]$ na čtverec. V trojrozměrném prostoru, dosáhneme téhož zobrazení volbou konstantní třetí souřadnice, v našem případě si zvolíme souřadnici $z = 0$. Máme tak zobrazení $f_A : [0,1] \to [0,1]^3$ jednotkového intervalu na dolní podstavu jednotkové krychle. Obrazem bodu $t \in [0,1]$ je bod $f_A(t) = (\varphi(t), \psi(t), 0)$.

Chceme vyplnit celou krychli, potřebujeme tedy zobrazení, které přiřadí takto získanému bodu z-ovou souřadnici. Takové může být například zobrazení $f_B : (x, y, 0) \mapsto (\varphi(x), y, \psi(x))$, kde $x, y \in [0,1]$. Obrazem bodu $(x, y, 0)$ pro konkrétní $y \in [0,1]$ je jednotkový čtverec, který je řezem krychle.

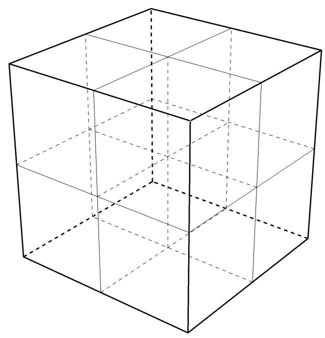
Požadované zobrazení Φ tak získáme složením zobrazení f_A a f_B, tedy $\Phi \coloneqq f_B \circ f_A$. Dostaneme $\Phi(t) = f_B(\varphi(t), \psi(t), 0) = (\varphi(\varphi(t)), \psi(t), \psi(\varphi(t)))$.

Obě zobrazení f_A a f_B jsou spojitá, jejich složením vzniklé zobrazení Φ bude tedy také spojité. Zároveň je zobrazení Φ surjekce, což lze nahlédnout z následujícího. Zobrazení f_B zobrazí každou úsečku dolní podstavy krychle rovnoběžnou s osou x (tedy pro dané y) jako řez krychle v daném y rovinou rovnoběžnou s rovinou xz. Zobrazení f_A ale proběhne takové úsečky pro všechna y. Výsledné složené zobrazení Φ tedy proběhne popsané řezy pro všechna y[45], tudíž je skutečně zobrazením *na* $[0,1]^3$.

Obdobně, tedy skládáním dalších zobrazení, lze tvořit zobrazení do vyšších dimenzí.

2.4.1 3D Hilbertova křivka

Geometrická konstrukce trojrozměrné Hilbertovy prostor-vyplňující křivky musí splňovat analogické podmínky jako ta dvojrozměrná. V principu stále provádíme opakované dělení, tentokrát krychli v n-tém kroku dělíme na 8^n subkrychlí. První dělení je naznačeno na obrázku 2.23.

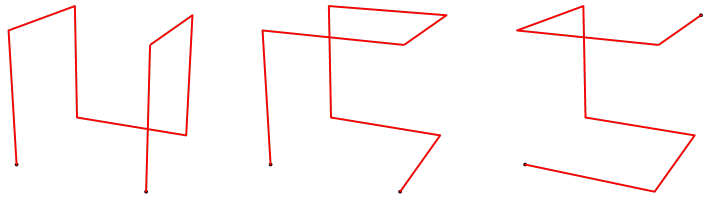


Obrázek 2.23: První dělení jednotkové krychle na 8 subkrychlí.

[44]Sagan (2012) dále rozebírá právě i konstrukce prostor-vyplňujících křivek vyšších dimenzí.
[45]Přestože to není „jeden po druhém“.

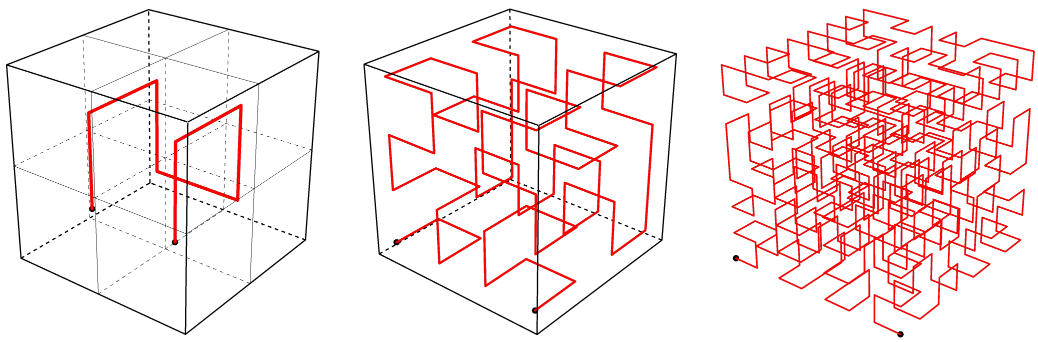
Musíme dodržet vhodné uspořádání subkrychlí, abychom zachovali spojitost zobrazení. Tedy i pro trojrozměrnou variantu křivky platí: Sousedící subintervaly se zobrazí na sousedící subkrychle se společnou stěnou a každé zobrazení zachovává to předchozí ve smyslu analogickém k Hilbertovým podmínkám.

Podmínky splňují celkem tři podoby základního tvaru pro konstrukci 3D Hilbertovy křivky (Bader, 2012). Na obrázku 2.24 jsou tyto podoby zachyceny, přičemž tvar vlevo je nejpodobnější dvojrozměrné variantě. Povšimněme si ještě, že trojrozměrná Hilbertova křivka může být konstruována i ze základního tvaru, jehož počáteční a koncový bod leží na opačných koncích tělesové úhlopříčky krychle, viz obrázek 2.24 (vpravo).



Obrázek 2.24: Tři možné podoby základního tvaru 3D Hilbertovy prostor-vyplňující křivky.

Konstrukce 3D Hilbertovy křivky ani při výběru konkrétního základního tvaru není jediná. Díky různým otočením a symetriím v jednotlivých krocích je možné získat celou skupinu křivek, které lze nazvat trojrozměrnými Hilbertovými křivkami. Počet způsobů, jakými procházet jednotlivé subkrychle, a tedy i počet různých aproximujících lomenic převyšuje 1500.[46] Na obrázku 2.25 je naznačena jedna z možných konstrukcí trojrozměrné Hilbertovy křivky v první a druhé iteraci.



Obrázek 2.25: První iterace zachycující vhodné pořadí uspořádání subkrychlí —procházíme postupně středy všech subkrychlí (vlevo), druhá iterace pro rozdělení na 64 subkrychlí (uprostřed) a pro větší přehlednost samostatně vykreslená aproximující lomenice třetí iterace (vpravo).

[46] Jedná se o různé podoby aproximujících lomenic, kdy za dvě různé považujeme i symetrické verze. Samozřejmě také nyní uvažujeme pouze různé podoby aproximujících lomenic pro jednu iteraci, přičemž pro iterace vyšší předpokládáme využití stále stejného způsobu procházení subkrychlí, který odpovídá principu rozebíranému v předchozích částech práce. V případě, že bychom v každé iteraci volili jinou aproximující lomenici, resp. pořadí průchodu subkrychlemi, počet možností by byl, zdá se, nekonečný.

Podobně jako tomu bylo v části 2.1.1, i pro trojrozměrnou verzi křivky existuje aritmetické vyjádření, pomocí něhož lze provést její konstrukci. Tentokrát využíváme zápis v oktální (osmičkové) soustavě, neboť v každém kroku dělíme interval na 8 subintervalů. Zároveň definujeme složená zobrazení, která následně opakovaně aplikujeme v prvním kroku na základní tvar, dále na příslušnou iteraci. Předpisy těchto zobrazení zde nebudeme uvádět[47], neboť se opět liší dle příslušné volby uspořádávání subkrychlí v krychli.

2.4.2 3D Peanova křivka

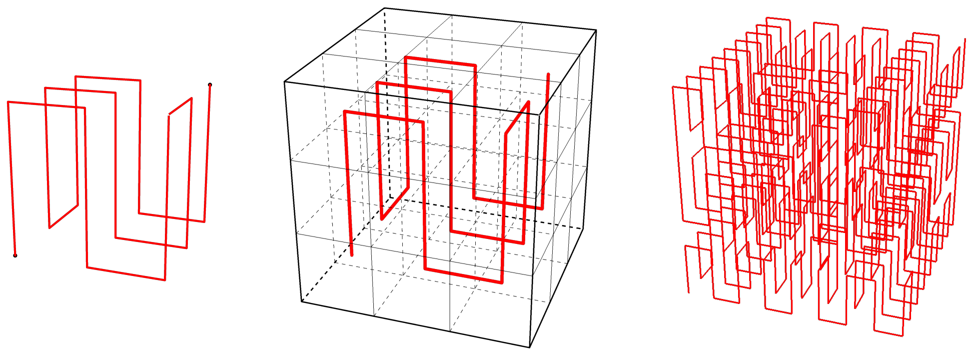
Společně s první prostor-vyplňující křivkou, které jsme se věnovali v části 2.1.2, představuje Peano ve své práci (Peano, 1890) trojrozměrný případ takové křivky. Zavádí ji pomocí zobrazení $f_p : [0,1] \to [0,1]^3$, pro jehož složky $\varphi_p, \psi_p, \chi_p$ platí:

$$\begin{aligned}
\varphi_p(0_3{,}t_1t_2t_3\dots) &= 0_3{,}b_1b_2b_3\dots,\\
\psi_p(0_3{,}t_1t_2t_3\dots) &= 0_3{,}c_1c_2c_3\dots,\\
\chi_p(0_3{,}t_1t_2t_3\dots) &= 0_3{,}d_1d_2d_3\dots,
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
b_n &= k^{c_1+\dots+c_{n-1}+d_1\dots+d_{n-1}}t_{3n-2},\\
c_n &= k^{b_1+\dots+b_{n-1}+d_1\dots+d_{n-1}}t_{3n-1},\\
d_n &= k^{b_1+\dots+b_{n-1}+c_1\dots+c_{n-1}}t_{3n}, \quad n = 1,2,3\dots,
\end{aligned}$$

pro $kt_j = 2 - t_j$, $t_j = 0,1,2$. Důkaz, že zobrazení f_p má požadované vlastnosti, tedy je spojité a *na*, uvádět nebudeme, neboť je obdobný jako pro 2D variantu Peanovy křivky.[48]



Obrázek 2.26: Základní tvar konstrukce 3D Peanovy křivky (vlevo), první iterace tj. rozdělení na 27 subkrychlí (uprostřed) a pro větší přehlednost samostatně vykreslená aproximující lomenice druhé iterace (vpravo).

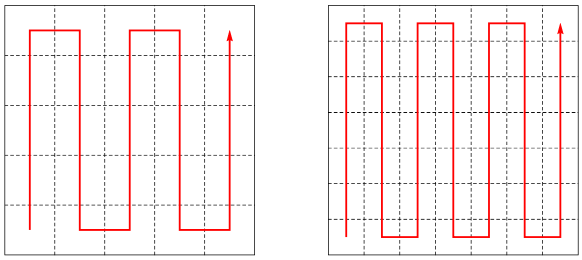
Trojrozměrnou Peanovu křivku je možné konstruovat také geometricky. Již jsme uvedli, že existuje celá skupina trojrozměrných Hilbertových křivek. Pro Peanovu křivku jsme narazili na mnoho různých variant již ve dvojrozměrném

[47] Čtenáře odkážeme na literaturu (Sagan, 2012, str. 26–29) a (Bader, 2012, str. 113), ze které je možné konkrétní příklady předpisů transformací čerpat.

[48] Způsob, jakým důkaz lze provést, popisuje např. Sagan (2012).

prostoru. Není tedy překvapením, že i trojrozměrnými Peanovými křivkami lze nazvat celou skupinu křivek. Vzhledem k rozmanitosti případů uvedeme přiblížení Peanovy křivky ve 3D pro základní tvar, který se podobá dvojrozměrnému (viz část 2.1.2). Samotná geometrická konstrukce opět vychází z principu dělení jednotkového intervalu a jednotkové krychle, tentokrát na 27^n částí.

Díky vlastnostem základního tvaru (podoba s otočeným písmenem S, viz obrázek 2.12 a 2.26) je možné provést dělení v jednom kroku i jemněji. Pro dvojrozměrný případ je to na 5^{2n} či 7^{2n} částí v každém kroku, jak je znázorněno na obrázku 2.27, pro trojrozměrný pak 5^{3n} či 7^{3n}. Lze dojít k závěru, že s využitím základního tvaru na obrázku 2.26 (vlevo) je možné konstruovat celou novou *rodinu* Peanových křivek, na základě dělení krychle na $k^n \times l^n \times m^n$, kde k, l, m jsou lichá přirozená čísla a $n \to \infty$ označuje iteraci (Bader, 2012).



Obrázek 2.27: První iterace Peanovy křivky pro dělení na 25 a 49 subčtverců.

Závěr

Prostor-vyplňující křivky, pomineme-li Lebesgueovu křivku, mají další typickou vlastnost, na kterou jsme narazili již v části věnované matematickým monstrům. Jedná se o soběpodobnost. Podle geometrické konstrukce prostor-vyplňujících křivek, která stojí na principu nekonečného opakování podobného motivu pro jemnější a jemnější přiblížení, je jasné, že soběpodobné budou.

Se soběpodobností je úzce spjat pojem fraktálů. Nabízí se otázka, zda se prostor-vyplňující křivky řadí mezi fraktální objekty. Skutečně je tomu tak, prostor-vyplňující křivky, které jsme popsali v této práci, jsou (až na výjimky) speciálním případem fraktálů. Pro podrobnější zdůvodnění již ale odkážeme čtenáře na literaturu. Prostor-vyplňující křivky v souvislosti s tzv. L-systémy rozebírá Bader (2012). Dále pak Sagan (2012) věnuje fraktálům devátou kapitolu, ve které uvádí širší souvislosti také z pohledu fraktální dimenze.

Fraktály proto mohou být vhodným navazujícím tématem pro čtenáře se zájmem o matematické koncepty podobné těm právě popsaným či dalším nástrojem pro nahlížení na prostor-vyplňující křivky a zkoumání jejich vlastností.

V moderní matematice je možné existenci prostor-vyplňujících křivek dokázat i obecněji, než jak jsme ukázali zde. Ovšem cílem této práce bylo představit zajímavý matematický koncept tak, aby i čtenář, který se s podobným tématem setkává poprvé, si osvojil určitý způsob uvažování, pochopil princip konstruování křivek vyplňujících prostor a pronikl do problematiky natolik, aby se v této oblasti dokázal sám dále vzdělávat. S moderním pojetím bychom dosáhli obecnějších výsledků, ale přišli bychom o mnohé zajímavé myšlenky, které přispívají k celkovému lepšímu porozumění na požadované úrovni.

Celá práce vycházela především z pojetí prostor-vyplňujících křivek, které uvádí Sagan (2012), jehož kniha je podrobným souhrnem problematiky prostor-vyplňujících křivek. Některé představené principy se dále využívají v matematické informatice. Bader (2012) se ve své knize těmto aplikacím věnuje a uvádí také ucelený přehled prostor-vyplňujících křivek a jejich konstrukcí. Čtenáře, který by měl zájem toto téma studovat podrobněji dále, odkazujeme především na tyto dvě publikace.

Seznam použité literatury

Bader, M. (2012). *Space-filling curves: an introduction with applications in scientific computing*, volume 9. Springer Science & Business Media.

Balcar, B. a Štěpánek, P. (1986). *Teorie množin*. Academia.

Descartes, R. (1637). *The Geometry of René Descartes: Přeložili z francoužštiny David Eugene Smith a Marcia L. Lathamová*. Dover Publications.

Hilbert, D. (1891). Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. *Mathematische Annalen*, **38**, 459–460.

Jarnicki, M. a Pflug, P. (2015). Continuous nowhere differentiable functions. *Springer Monographs in Mathematics, New York*.

Koudela, L. (2012). O pojetí křivky.

Kucharski, A. (2014). Math's beautiful monsters; how a destructive idea paved the way to modern math. *Nautilus Q.(11)*.

Lomtatidze, L. (2007). *Historický vývoj pojmu křivka*. Nadace Universitas v Brně. URL `http://eudml.org/doc/202335`.

Nicolay, S. a Simons, L. (2014). Building Cantor's Bijection. *arXiv preprint arXiv:1409.1755*.

Peano, G. (1890). Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane. *Mathematische Annalen*, **36**(1), 157–160.

Sagan, H. (2012). *Space-filling curves*. Springer Science & Business Media.

Servít, F. (1907). Eukleidovy základy. *Praha: Jednota Českých matematiků a fysiků*.

Simon, P. (1981). Bernard Bolzano a teorie dimenze. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, **26**(5), 248–258.

Thim, J. (2003). *Continuous nowhere differentiable functions*.

Wunderlich, W. (1973). Über Peano-Kurven. *Elemente der Mathematik*, **28**, 1–10. URL `http://eudml.org/doc/141086`.

Seznam obrázků