ARITMETICKÉ POSLOUPNOSTI VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

Vlastimil Dlab, Praha

Resumé. Cílem článku je objasnit postavení aritmetických posloupností vyšších řádů v množině všech posloupností. Ty je nutno chápat jako dvojice posloupností těsně svázaných jednoduchými relacemi diferenčních či sumabilních posloupností, tj. operacemi označenými v textu symboly Δ a ∇. Tato dualita přirozenou cestou přináší definici alternujících aritmetických posloupností. Všechny tyto posloupnosti je možno identifikovat s polynomy a velmi speciálními, explicitně popsanými rekurzivními posloupnostmi. Uvedené výsledky poukazují na úzkou souvislost mezi řadou matematických objektů, na důležitost kombinačních čísel a vztahů mezi nimi (vlastnosti Pascalova trojúhelníku). Jsou zde podávány formou přístupnou dobrým absolventům gymnaziální matematiky.

ÚVOD

Tento příspěvek má svůj původ v úmyslu oprášit jeden ze zajímavých pojmů elementární matematiky, který býval součástí středoškolského učiva (viz např [3]). S tímto cílem jsem na posledním, 11. setkání učitelů matematiky v Srní nabídl narychlo sepsaný elaborát. Byl jsem velmi potěšen zájmem o toto téma, a zvláště přáními tyto poznámky publikovat. Činím tak z několika důvodů, z nichž alespoň jeden bych rád uvedl. Toto téma dává příležitost experimentovat s jednoduchými (ale ne zcela jednoduchými) vztahy mezi čísly a pohrát si s nimi. Přispívá tak k hlubšímu porozumění elementární matematice a aritmetice, dává příležitost učitelům středních škol vzbudit u žáků zájem o matematiku. S tímto záměrem jsem se též snažil tento text sepsat. Obzvláště poslední poznámky dávají žákům i učitelům hodně námětů k nacházení nových a nových vztahů mezi pojmy, které se jinak v hodinách matematiky mohou zdát nezáživnými.

Před sepsáním poslední verze tohoto článku jsem si uvědomil, že chceme-li dospět k důkladnému porozumění aritmetickým posloupnostem, musíme je zařadit do širšího rámce obecných posloupností. To vysvětluje uvedení několika poznámek v úvodní sekci tohoto příspěvku.

Dovolíte-li mi malou osobní poznámku, zmínil bych své gymnaziální poznámky na toto téma [1], které jsem nedávno nalezl a které přispěly k mému přesvědčení, že téma aritmetických posloupností vyšších řádů je vhodné a přiměřené středoškolské matematice. Rád bych též upozornil na práce F. J. Studničky [3], V. Veselého [4] a J. Vyšína [5], kteří užívají podle mého názoru vhodnější termín *posloupnosti vyšších stupňů* místo současně užívaného *posloupnosti vyšších řádů.*

OBECNÉ POSLOUPNOSTI

Nechť Π je množina všech posloupností reálných čísel.* Je-li $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots) = (a_s \mid 1 \leq s)$, pišme $\Delta_{1,s} = a_s$ a definujme rekurzivně (nekonečnou čtvercovou) matici $\mathbf{M}(\mathbf{a}) = (\Delta_{r,s})_{1 \leq r,s}$, kde

$$\Delta_{r,\,s} = \Delta_{r-1,\,s+1} - \Delta_{r-1,\,s} \quad \text{pro všechna} \quad 1 < r \quad \text{a} \quad 1 \leq s. \tag{1}$$

Posloupnost $(\Delta_{r,1} \mid 1 \leq r)$ označme $\mathbf{b}$. Tedy $\mathbf{b} = (b_r \mid 1 \leq r)$, kde $b_r = \Delta_{r,1}$; poznamenejme, že $b_1 = a_1$. Je tedy $\mathbf{a}$ první řádek matice $\mathbf{M}(\mathbf{a})$ a $\mathbf{b}$ její první sloupec.

Pomocí vztahu (1) ihned odvodíme, že

$$\Delta_{r,\,s} = \Delta_{r+1,\,s-1} + \Delta_{r,\,s-1} \quad \text{pro všechna} \quad 1 \leq r \;\; \text{a} \;\; 2 \leq s. \tag{2}$$

Relace (1) nás upozorňují, že *horizontálně odčítáme*, tj. řádky matice $\mathbf{M}(\mathbf{a})$ reprezentují diferenční posloupnosti (posloupnosti rozdílů). Sloupce matice $\mathbf{M}(\mathbf{a})$ reprezentují podle předpisu (2) sumabilní posloupnosti (posloupnosti součtů): vertikálně sčítáme.

---

* Všechna tvrzení platí pro prvky jakéhokoli nekonečného oboru integrity. V tomto článku však budeme věnovat zvláštní pozornost posloupnostem celých čísel.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\Delta_{1,1}{=}a_1{=}b_1 & \Delta_{1,2}{=}a_2 & \Delta_{1,3}{=}a_3 & \Delta_{1,4}{=}a_4 & \Delta_{1,5}{=}a_5 & \Delta_{1,6}{=}a_6 & \cdots & \Delta_{1,s}{=}a_s & \cdots \\
\Delta_{2,1}{=}b_2 & \Delta_{2,2} & \Delta_{2,3} & \Delta_{2,4} & \Delta_{2,5} & \Delta_{2,6} & \cdots & \Delta_{2,s} & \cdots \\
\Delta_{3,1}{=}b_3 & \Delta_{3,2} & \Delta_{3,3} & \Delta_{3,4} & \Delta_{3,5} & \Delta_{3,6} & \cdots & \Delta_{3,s} & \cdots \\
\Delta_{4,1}{=}b_4 & \Delta_{4,2} & \Delta_{4,3} & \Delta_{4,4} & \Delta_{4,5} & \Delta_{4,6} & \cdots & \Delta_{4,s} & \cdots \\
\Delta_{5,1}{=}b_5 & \Delta_{5,2} & \Delta_{5,3} & \Delta_{5,4} & \Delta_{5,5} & \Delta_{5,6} & \cdots & \Delta_{5,s} & \cdots \\
\Delta_{6,1}{=}b_6 & \Delta_{6,2} & \Delta_{6,3} & \Delta_{6,4} & \Delta_{6,5} & \Delta_{6,6} & \cdots & \Delta_{6,s} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
\Delta_{r,1}{=}b_r & \Delta_{r,2} & \Delta_{r,3} & \Delta_{r,4} & \Delta_{r,5} & \Delta_{r,6} & \cdots & \Delta_{r,s} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

V této matici snadno vyčíslíme vazby mezi vyznačenými údaji. Užitím vztahů (1) dostaneme rovnost

$$\Delta_{3,4} = \Delta_{2,5} - \Delta_{2,4} = \Delta_{1,6} - \Delta_{1,5} - (\Delta_{1,5} - \Delta_{1,4}) = \Delta_{1,6} - 2\Delta_{1,5} + \Delta_{1,4}$$

a užitím vztahů (2) rovnost

$$\Delta_{3,4} = \Delta_{4,3} + \Delta_{3,3} = \Delta_{5,2} + \Delta_{4,2} + \Delta_{4,2} + \Delta_{3,2} = \Delta_{6,1} + \Delta_{5,1} + \Delta_{5,1} + \Delta_{4,1} + \Delta_{5,1} + \Delta_{4,1} + \Delta_{4,1} + \Delta_{3,1} =$$

$$= \Delta_{6,1} + 3\Delta_{5,1} + 3\Delta_{4,1} + \Delta_{3,1}.$$

Tyto vztahy jsou speciálními případy následujícího důležitého tvrzení. Jedná se o vzorce, které vyjadřují prvek stojící na místě rs pomocí prvků prvního řádku, resp. prvního sloupce.

Věta 1. (a) *Pro všechna* $1 \le r, s$ *je*

$$\Delta_{r,s} = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \Delta_{1,r+s-1-k}, \tag{3}$$

a tedy

$$b_r = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{r-k} \binom{r-1}{k-1} a_k. \tag{4}$$

(b) *Pro všechna* $1 \le r, s$ *je*

$$\Delta_{r,s} = \sum_{k=0}^{s-1} \binom{s-1}{k} \Delta_{r+s-1-k,1}, \tag{5}$$

a tedy

$$a_s = \sum_{k=1}^{s} \binom{s-1}{k-1} b_k. \tag{6}$$

Důkaz. Rovnosti (4) a (6) jsou jednoduchými důsledky rovností (3) a (5); stačí zaměnit pořadí sčítanců. Ukazují, jak se prvky prvního řádku matice $\mathbf{M}(\mathbf{a})$ vyjádří pomocí prvků prvního sloupce a naopak.

Jelikož důkaz rovnosti (3) je obdobný důkazu rovnosti (5), dokažme zde (5) a ponechejme důkaz vztahu (3) čtenářům.

Rovnost (5) dokážeme indukcí podle $n = r + s$. Vzorec je triviální pro $n = 2$. Předpokládejme tedy jeho platnost pro všechna $\Delta_{i,j}$, kde $i + j < n$. Pro $r + s = n$, pišme $\Delta_{n-s,s}$. V tomto případě je (5) opět triviální pro $s = 1$. V dalším postupujme indukcí podle s. Za předpokladu, že (5) platí pro s, dokážeme platnost (5) pro $s + 1$. Užitím vztahu (2) a indukčních předpokladů dostáváme

$$\Delta_{n-(s+1),s+1} = \Delta_{n-s,s} + \Delta_{n-(s+1),s} = \sum_{k=0}^{s-1} \binom{s-1}{k} \Delta_{n-1-k,1} + \sum_{k=1}^{s} \binom{s-1}{k-1} \Delta_{n-1-k,1} =$$

$$= \Delta_{n-1,1} + \sum_{k=1}^{s-1} \binom{s}{k} \Delta_{n-1-k,1} + \Delta_{n-1-s,1} = \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} \Delta_{n-1-k,1},$$

což bylo dokázat.

Formulujme ještě jednoduchý vztah pro posloupnost $\mathbf{s} = (s_n = \sum_{s=1}^{n} a_s \mid 1 \leq n)$ částečných součtů posloupnosti $\mathbf{a}$. Ukazuje, jak se součet prvních n prvků prvního řádku matice $\mathbf{M}(\mathbf{a})$ vyjádří jako lineární kombinace prvních n prvků prvního sloupce této matice, přičemž koeficienty jsou kombinační čísla.

Věta 2. *Pro všechna* $1 \leq n$ *je*

$$s_n = \sum_{s=1}^{n} a_s = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_k. \tag{7}$$

Důkaz. Rovnost (7) dostaneme okamžitě užitím vztahu (6) a záměnou pořadí sčítanců:

$$s_n = \sum_{s=1}^{n} a_s = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{s} \binom{s-1}{k-1} b_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{s=k}^{n} \binom{s-1}{k-1} \right) b_k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_k.$$

Zde jsme pouze použili dobře známého součtu

$$\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \cdots + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}.$$

Nyní definujme následující dvě zobrazení $\boldsymbol{\Delta} : \Pi \to \Pi$ a $\nabla : \Pi \to \Pi$, tj. transformace množiny všech posloupností reálných čísel: Je-li $\mathbf{a} = (a_s \mid 1 \leq s)$ a $\mathbf{b} = (b_r \mid 1 \leq r)$, potom

$$\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}, \quad \text{kde } b_r \text{ jsou dány vztahem (4) a}$$

$$\nabla(\mathbf{b}) = \mathbf{a}, \quad \text{kde } a_s \text{ jsou dány vztahem (6).}$$

Věta 3. *Zobrazení* $\boldsymbol{\Delta}$ *a* ∇ *jsou navzájem inverzní (a tedy bijektivní) transformace množiny* Π*, tj.*

$$\boldsymbol{\Delta}\nabla = \nabla\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{I}_{\Pi},$$

kde $\mathbf{I}_\Pi$ *je identické zobrazení množiny* Π.

Důkaz. Dokažme, že $\boldsymbol{\Delta}\nabla = \mathbf{I}_\Pi$, důkaz rovnosti $\nabla\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{I}_\Pi$ je obdobný. Z předchozích definicí vyplývá, že pro $\boldsymbol{\Delta}\nabla(\mathbf{b}) = (\mathbf{c}) = (c_t \mid 1 \le t)$ platí

$$c_t = \sum_{k=1}^{t}(-1)^{t-k}\binom{t-1}{k-1}\sum_{l=1}^{k}\binom{k-1}{l-1}b_l = \sum_{l=1}^{t}\sum_{k=l}^{t}(-1)^{t-k}\binom{t-1}{k-1}\binom{k-1}{l-1}b_l =$$

$$= \sum_{l=1}^{t}(-1)^{t}\binom{t-1}{t-l}\left(\sum_{k=l}^{t}(-1)^{k}\binom{t-l}{k-l}\right)b_l,$$

neboť

$$\binom{t-1}{k-1}\binom{k-1}{l-1} = \binom{t-1}{t-l}\binom{t-l}{k-l}.$$

Navíc je

$$\sum_{k=l}^{t}(-1)^{k}\binom{t-l}{k-l} = \sum_{p=0}^{t-l}(-1)^{p+l}\binom{t-l}{p}$$

což se rovná 0 pro $l < t$ a $(-1)^l$ pro $l = t$. Proto $c_t = (-1)^{2t}\binom{t-1}{0}b_t = b_t$, a tedy $\boldsymbol{\Delta}\nabla(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$.

Poznámka 1. Důkaz Věty 3 bezprostředně získáme užitím matice $\mathbf{M}(\mathbf{a})$, konkrétně relací (1) a (2) svazujících její členy. Ty byly vlastně podstatou formulí (4) a (6), které jsme v předchozím výpočtu použili. Jak jsme viděli, důležitou částí důkazu byla rovnost

$$\sum_{k=s}^{r}(-1)^{k}\binom{r}{k}\binom{k}{s} = 0 \quad \text{pro všechna} \quad s < r.$$

Nyní je jistě na místě ilustrovat užití zobrazení $\boldsymbol{\Delta}$ a ∇, tj. význam relací (4) a (6). Často tímto způsobem, tj. zvolením vhodné posloupnosti $\mathbf{a}$ a užitím vztahu (6), dostaneme zajímavé vyjádření členů a_s. Tak např. volba populární Fibonacciho posloupnosti $\mathbf{F} = (F_s \mid 1 \le s)$ splňující $F_1 = F_2 = 1$ a $F_{s+2} = F_{s+1} + F_s$ vede k *alternující Fibonacciho posloupnosti* $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{F})$, a odtud podle vzorce (6) k následujícímu vyjádření n-tého Fibonacciho čísla:

$$F_n = 1 + \sum_{k=2}^{n-1}(-1)^{k}\binom{n-1}{k}F_{k-1}.$$

Rovněž je snadné se přesvědčit, že $\mathbf{\Delta}$-obrazem geometrické posloupnosti je opět geometrická posloupnost. Jinými slovy, podmnožina všech geometrických posloupností je vzhledem k zobrazení $\mathbf{\Delta}$ (a tedy i k zobrazení ∇) invariantní podmnožinou. Formulujme tento fakt jako samostatné tvrzení.

Věta 4. *Označíme-li geometrickou posloupnost, jejíž první člen je a a kvocient q symbolem $\mathbf{g}_{(a,q)}$, je $\mathbf{\Delta}(\mathbf{g}_{(a,q)}) = \mathbf{g}_{(a,q-1)}$, a tedy též $\nabla(\mathbf{g}_{(a,q)}) = \mathbf{g}_{(a,q+1)}$. To znamená, že zobrazení $\mathbf{\Delta}$ a ∇ indukují na podmnožině $\Pi_{(\mathbf{q})} \subset \Pi$ všech geometrických posloupností bijektivní zobrazení.*

Podobnou větu můžeme též formulovat pro podmnožinu $\Pi_{(\mathbf{p},\mathbf{q})} \subset \Pi$ všech rekurzivních posloupností $\mathbf{a} = (a_1, a_2;\ p, q)$, kde $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ pro všechna $1 \leq n$ (viz [D]).

Věta 5. *Zobrazení $\mathbf{\Delta}$ a ∇ indukují na podmnožině $\Pi_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}$ bijektivní zobrazení:*

$$\mathbf{\Delta}(a_1, a_2;\ p, q) = (a_1, a_2 - a_1;\ p-2, p+q-1), \quad \text{a tedy} \quad \nabla(a_1, a_2;\ p, q) = (a_1, a_1 + a_2;\ p+2, q-p-1).$$

Označme nyní symbolem $\mathbf{a}_{(a,d)}$ aritmetickou posloupnost, jejíž první člen je a a diference d. Ihned vidíme, že pro $\mathbf{b} = \mathbf{\Delta}(\mathbf{a}_{(a,d)})$ je $b_1 = a$, $b_2 = d$ a $b_r = 0$ pro všechna $r \geq 3$. Toto je ten nejjednodušší případ, který je hlavním předmětem tohoto článku.

Uveďme v této souvislosti méně triviální příklad. Uvažujme posloupnost $\mathbf{a}$, pro níž $a_s = \binom{n+s-1}{k}$. Píšeme-li opět $\mathbf{b} = \mathbf{\Delta}(\mathbf{a})$, potom $b_r = \binom{n}{k-r+1}$ pro $r \leq k+1$ a $b_r = 0$ pro $r \geq k+2$. Užitím vztahu (6) dostáváme

$$a_s = \sum_{l=0}^{s-1} \binom{s-1}{l} \binom{n}{k-l} \quad \text{pro} \quad s \leq k+1$$

a

$$a_s = \sum_{l=0}^{k} \binom{s-1}{l} \binom{n}{k-l} \quad \text{pro} \quad s > k+1.$$

Například pro $k = 2$ to znamená, že pro $s > 3$ je

$$a_s = \binom{s-1}{0}\binom{n}{2} + \binom{s-1}{1}\binom{n}{1} + \binom{s-1}{2}\binom{n}{0},$$

a jak uvidíme v následující sekci, a_s je hodnota polynomu

$$P_{\mathbf{a}}(x) = \frac{1}{2}[x^2 + (2n-3)x + n^2 - 3n + 2]$$

pro $x = s$.

ARITMETICKÉ POSLOUPNOSTI VYŠŠÍCH ŘÁDŮ.

Konečně se dostáváme k samotnému tématu tohoto článku. V předchozí sekci jsme uvedli příklad posloupnosti $\mathbf{a}$, pro niž posloupnost $\mathbf{b} = \mathbf{\Delta}(\mathbf{a})$ měla od určitého indexu n_0 samé nuly, tj. $b_r = 0$ pro všechna $r \geq n_0$. Na základě vzorce (2), je tato vlastnost ekvivalentní tomu, že $\Delta_{n_0,s} = 0$ pro všechna $1 \leq s$, tj. n_0-tý řádek matice $\mathbf{M}(\mathbf{a})$ je nulový (a všechny další rovněž). To nás vede k následující definici.

Definice 1. *Posloupnost* $\mathbf{a} = (a_s \mid 1 \leq s\}$ *se nazývá* **aritmetická posloupnost vyššího řádu**, *jestliže existuje* r *takové, že* $\Delta_{r,\, s} = 0$ *pro všechna* $1 \leq s$. *Nejmenší* d *takové, že* $\Delta_{d+2,\, s} = 0$ *pro všechna* $1 \leq s$, *se nazývá* **řád** *této aritmetické posloupnosti.*

Poznámka 2. V tomto názvosloví jsou nestacionární aritmetické posloupnosti, jak je známe z elementární algebry, aritmetickými posloupnostmi řádu 1. Aritmetické posloupnosti, pro které je $a_s = c \neq 0$ pro všechna $1 \leq s$, jsou aritmetickými posloupnostmi řádu 0, zatímco posloupnost nulová je aritmetickou posloupností řádu -1.

Poznámka 3. V souhlase se vztahem (2), je posloupnost $\mathbf{a}$ aritmetickou posloupností řádu d právě tehdy, když $\mathbf{b} = \mathbf{\Delta}(\mathbf{a})$ splňuje podmínku

$$b_{d+1} \neq 0 \ \text{ a } \ b_r = 0 \ \text{ pro všechna } \ d+2 \leq r.$$

Tedy aritmetické posloupnosti vyšších řádů jsou právě ty posloupnosti $\mathbf{a}$, pro něž má $\mathbf{\Delta}(\mathbf{a})$ pouze konečný počet nenulových členů.

Poznámka 4. Jelikož se v některých dále uvedených rovnostech budou vyskytovat symboly $\binom{x}{k}$, připomeňme, že definice kombinačních čísel může být snadno rozšířena pro libovolná čísla x (a přirozená čísla k):

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{k!}.$$

Např. $\binom{\pi}{2}$ je prostě reálné číslo $\frac{\pi(\pi-1)}{2}$, totiž hodnota kvadratického polynomu $y = \frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{8}$ v bodě $x = \pi$. Snad je na místě připomenout, že naše posloupnosti nemusí být celočíselné.

Nyní už formulujme několik vět, totiž důsledků Věty 1.

Věta 6. *Ke každé aritmetické posloupnosti* $\mathbf{a} = (a_s \mid 1 \leq s)$ *řádu* d *existují jednoznačně určené polynomy* $V_{\mathbf{a}}(x)$ *stupně* d, *pro nějž platí* $V_{\mathbf{a}}(s) = a_s$, *a* $S_{\mathbf{a}}(x)$ *stupně* $d+1$ *s nulovým absolutním členem, pro nějž platí* $S_{\mathbf{a}}(n) = \sum_{s=1}^{n} a_s$.

Důkaz. Užitím Věty 1 a Věty 2 (totiž rovností (6) a (7)) snadno ukážeme, že

$$V_{\mathbf{a}}(x) = \sum_{k=1}^{d+1} \binom{x-1}{k-1} b_k \tag{8}$$

a

$$S_{\mathbf{a}}(x) = \sum_{k=1}^{d+1} \binom{x}{k} b_k. \tag{9}$$

Je snadné se přesvědčit, že každý polynom $P(x) = \sum_{n=0}^{d} A_n x^n$ má tvar $V_{\mathbf{a}}(x)$ pro vhodně zvolenou konečnou posloupnost $\mathbf{b} = (b_r \mid 1 \leq r \leq d+1)$. Tuto skutečnost je možno zapsat explicitně v následujícím tvaru.

Věta 7. *Nechť* $P(x) = \sum_{n=0}^{d} A_n x^n$ *je libovolný polynom stupně* d *(tj.* $A_d \neq 0$*) a* $M = (z_{m,r})$ *je matice typu* $(d+1) \times (d+1)$ *definovaná pomocí rovností*

$$z_{m,r} = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} (r-k)^{m-1}.$$

Označíme-li $\mathbf{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_d)$ *a definujeme-li* $\mathbf{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_{d+1})$ *pomocí*

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}M,$$

potom pro posloupnosti $\mathbf{a} = (a_s = P(s) \mid 1 \leq s)$ *a* $\mathbf{b} = (b_r \mid b_r = 0$ *pro* $d+2 \leq r)$ *je*

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{a}), \quad \text{a tedy také} \quad \mathbf{a} = \nabla(\mathbf{b}).$$

Důkaz. Důkaz je velmi jednoduchý. Podle (3) nebo (4) je

$$b_r = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} a_{r-k} = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \sum_{t=0}^{d} A_t (r-k)^t =$$

$$= \sum_{t=0}^{d} \left(\sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} (r-k)^t \right) A_t = \sum_{t=0}^{d} A_t z_{t+1,r}.$$

Důsledek. *Mezi polynomy a aritmetickými posloupnostmi vyšších řádů existuje bijektivní korespondence. Polynomu $P(x)$ stupně d odpovídá aritmetická posloupnost $\mathbf{a}_P = (a_s = P(s) \mid 1 \leq s)$ řádu d a naopak, aritmetické posloupnosti $\mathbf{a}$ řádu d odpovídá polynom (8) stupně d, kde b_k je k-tý člen posloupnosti $\mathbf{b} = \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{a})$.*

Poznámka 5. Využitím formule (9) lze podobně jako v předchozím důsledku definovat jednoznačnou korespondenci mezi aritmetickými posloupnostmi řádu d a polynomy stupně $d+1$ s nulovými absolutními členy. Je jistě vhodné upozornit též na obecnou formulaci výše uvedené korespondence. *Nechť I je nekonečný obor integrity. Potom výše definované korespondence jsou izomorfismy mezi aditivní grupou všech aritmetických posloupností vyšších řádů s členy z oboru I a aditivní grupou všech polynomů z oboru $I[x]$.*

Poznámka 6. Poznamenejme, že prvky $z_{m,r}$ matice M ve Větě 7 jsou až na násobek Sterlingova čísla $S(m,r)$ druhého druhu:

$$z_{m,r} = (r-1)!\, S(m,r).$$

Připomeňme, že $S(m,r)$ je počet možností, jak rozdělit množinu o m prvcích na r neprázdných množin. Tedy, např. pro $d = 7$ má matice M tento tvar:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 15 & 50 & 60 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 31 & 180 & 390 & 360 & 120 & 0 & 0 \\ 1 & 63 & 602 & 2100 & 3360 & 2520 & 720 & 0 \\ 1 & 127 & 1932 & 10206 & 25200 & 31920 & 20160 & 5040 \end{pmatrix}$$

Následující tvrzení vyjadřuje fakt, že množina všech aritmetických řad vyšších řádů je velmi bohatá.

Věta 8. *Libovolnou posloupnost k čísel $(a_s \mid 1 \leq s \leq k)$ lze jednoznačně prodloužit na aritmetickou posloupnost $\mathbf{a} = (a_s \mid 1 \leq s)$ řádu $d \leq k-1$.*

Důkaz. S pomocí konečné posloupnosti $(a_s \mid 1 \leq s \leq k)$ určíme jednoznačně všechna $\Delta_{r,s}$ pro $r+s \geq k+1$, a tedy speciálně $b_r = \Delta_{r,1}$ pro $1 \leq r \leq k$. Položme $b_r = 0$ pro všechna zbývající r, tj. $k+1 \leq r$ a označme výslednou posloupnost $\mathbf{b}$. Potom $\mathbf{a} = \nabla(\mathbf{b})$ je hledané rozšíření.

Plné porozumění Větě 8 (a Větě 1) vyžaduje zavedení pojmu rekurzivní posloupnost závislá na konečném počtu parametrů; takových posloupností závislých na dvou parametrech se týká článek [2].

Definice 2. *Řekneme, že $\mathbf{a} = (a_s \mid 1 \leq s)$ je* **rekurzivní posloupností o h parametrech**, *jestliže existují nenulová čísla $p_1, p_2, \ldots, p_h$ taková, že*

$$a_{n+h} = p_1\, a_{n+h-1} + p_2\, a_{n+h-2} + \cdots + p_h\, a_n = \sum_{t=1}^{h} p_t\, a_{n+h-t} \quad \textit{pro všechna} \quad 1 \leq n.$$

Takovou posloupnost budeme značit $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_h;\ p_1, p_2, \ldots, p_h)$.

Věta 9. *Aritmetické posloupnosti $\mathbf{a}$ řádu d jsou právě rekurzivní posloupnosti o $d+1$ parametrech*

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{d+1};\ p_1, p_2, \ldots, p_{d+1}), \quad \textit{kde} \quad p_t = (-1)^{t-1}\binom{d+1}{t} \ \textit{pro} \ 1 \leq t \leq d+1.$$

Důkaz. Požadavek

$$a_n = \sum_{t=1}^{d+1} (-1)^{t-1}\binom{d+1}{t} a_{n-t} \quad \text{pro všechna} \quad d+2 \leq n$$

je právě rovnost (3) ve Větě 1 pro $r = d+2$ a $s = n-d-2$, neboť, podle předpokladu, $\Delta_{d+2,s} = 0$ pro všechna $1 \leq s$.

Není jistě na škodu zdůraznit výše odvozené bijektivní korespondence. Aritmetické posloupnosti řádu d lze identifikovat s polynomy stupně d a s velmi specifickými rekurzivními posloupnostmi řádu

$d+1$. Tyto identifikace, tj. příslušná bijektivní zobrazení jsou obsahem Věty 6 a Věty 9. Tak například obyčejná aritmetická posloupnost, tj. posloupnost řádu 1, $\mathbf{a}_{(a,d)}$ je rekurzivní posloupností $(a, a+d;\ 2, -1)$ a příslušný polynom je $P_{\mathbf{a}}(x) = d\ x + (a-d)$. Podobně aritmetická posloupnost řádu 2, jejíž první tři členy jsou a_1, a_2, a_3, je rekurzivní posloupností $(a_1, a_2, a_3;\ 3, -3, 1)$ a příslušný polynom je

$$P_{\mathbf{a}}(x) = \frac{1}{2}(a_3 - 2a_2 + a_1)x^2 + \frac{1}{2}(-3a_3 + 8a_2 - 5a_1)x + (a_3 - 3a_2 + 3a_1).$$

Využijme ještě tuto příležitost k zavedení pojmu, který je „duální“ k pojmu aritmetická posloupnost, a který se zajisté stane předmětem dalších vyšetřování. Jestliže aritmetické posloupnosti (prvního řádu) $\mathbf{a}$ jsou charakterizovány tím, že pro posloupnost $\mathbf{b} = \Delta(\mathbf{a}) = (b_r \mid 1 \leq r)$ je $b_r = 0$ pro všechna $3 \leq r$, definujme nyní posloupnosti $\Delta(\mathbf{a})$, pro něž posloupnost $\mathbf{a} = (a_s \mid 1 \leq s)$ splňuje $a_s = 0$ pro všechna $3 \leq s$. Definici uvedeme v obecné podobě.

Definice 3. *Posloupnost* $\mathbf{b}$ *se nazývá* **alternující aritmetická posloupnost řádu** d*, jestliže v posloupnosti* $\nabla(\mathbf{b}) = \mathbf{a} = (a_s \mid 1 \leq s)$ *je* $a_s = 0$ *pro všechna* $s \geq d+2$ *a* $a_{d+1} \neq 0$.

Značnou část shora uvedených výsledků pro aritmetické posloupnosti lze snadno přeložit do terminologie alternujících aritmetických posloupností. Musíme si však být vědomi toho, že už pro posloupnosti řádu 1 nastávají zjevné rozdíly. Pro takové posloupnosti snadno odvodíme, že

$$b_r = (-1)^r[-b_1 + (r-1)(b_1 + b_2)]$$

a že součet prvních n členů této posloupnosti je $s_n = t(b_1 + b_2)$ pro $n = 2t$ a $s_n = b_1 - (t-1)(b_1 + b_2)$ pro $n = 2t - 1$. Dodejme ještě, že tato posloupnost je rekurzivní posloupností $(b_1, b_2;\ -2, -1)$.

ILUSTRACE.

Typickými aritmetickými posloupnostmi vyšších řádů u jsou posloupnosti k-tých mocnin přirozených čísel ($k \geq 1$). Jestliže uvažujeme posloupnosti nad číselným tělesem (např. nad reálnými čísly), potom tyto posloupnosti tvoří vektorový prostor nad tímto tělesem a množina všech posloupností k-tých mocnin přirozených čísel je jeho bází. Odtud plyne těsný vztah mezi těmito posloupnostmi a polynomy!

Součet $\sum_{s=1}^{n} s^3$ tedy, na základě výše uvedené metody, dostáváme ihned ze schématu

1	8	27	64	125
7	19	37	61	
12	18	24		
6	6			
0				

a ze vzorce (7) vztah

$$\sum_{s=1}^{n} s^3 = \binom{n}{1} + 7\binom{n}{2} + 12\binom{n}{3} + 6\binom{n}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Stejným způsobem můžeme z posloupnosti

1, 32, 243, 1024, 3125, 7776, 16807

obdržet $\Delta_{2,1} = 31$, $\Delta_{3,1} = 180$, $\Delta_{4,1} = 390$, $\Delta_{5,1} = 360$, $\Delta_{6,1} = 120$ a $\Delta_{7,1} = 0$, a tedy

$$\sum_{s=1}^{n} s^5 = \binom{n}{1} + 31\binom{n}{2} + 180\binom{n}{3} + 390\binom{n}{4} + 360\binom{n}{5} + 120\binom{n}{6}.$$

Je-li posloupnost $\mathbf{a}$ definována polynomem $P_{\mathbf{a}}(x)$, hodnota příslušného polynomu $S_{\mathbf{a}}(x)$ pro $x = n$ pak určuje součet $\sum_{t=1}^{n} P_{\mathbf{a}}(t)$. Tak na příklad pro $P_{\mathbf{a}}(x) = ax^2 + bx + c$ snadno určíme, že $\Delta_{1,1} = a + b + c$, $\Delta_{2,1} = 3a + b$ a $\Delta_{3,1} = 2a$, a tedy

$$S_{\mathbf{a}}(x) = \frac{1}{6}\big[\,2ax^3 + 3(a+b)x^2 + (a+3b+6c)x\,\big] = \int P_{\mathbf{a}}(x)dx + C_{\mathbf{a}}(x),$$

kde korekční polynom

$$C_{\mathbf{a}} = \frac{a}{2}x^2 + \Big(\frac{a}{6} + \frac{b}{2}\Big)x.$$

Zvolíme-li $a = 1$, $b = c = 0$, dostáváme známý vzorec $\sum_{s=1}^{n} s^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Podobně pro posloupnost $\mathbf{a}$ určenou polynomem $P_{\mathbf{a}}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ snadno odvodíme, že

$$S_{\mathbf{a}}(x) = \int P_{\mathbf{a}}(X)dx + C_{\mathbf{a}}(x),$$

kde

$$C_{\mathbf{a}}(x) = \frac{a}{2}x^3 + \Big(\frac{a}{4} + \frac{b}{2}\Big)x^2 + \Big(\frac{b}{6} + \frac{c}{2}\Big)x.$$

Zde, pro $a = 1$, $b = c = d = 0$, dostáváme vzorec

$$\sum_{s=1}^{n} s^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Podejme ještě ilustraci Věty 8 a určeme aritmetickou posloupnost $\mathbf{a} = (a_s \mid 1 \leq s)$ řádu ≤ 3 takovou, že

$$a_1 = 5, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 0.$$

Užitím schematu

5	**−1**	**2**	**0**	−21	−75	−176	−338
−6	3	−2	−21	−54	−101		
9	−5	−19	−33				
−14	−14	−14					
0	**0**						

dostáváme

$$S_{\mathbf{a}}(x) = 5\binom{x}{1} - 6\binom{x}{2} + 9\binom{x}{3} - 14\binom{x}{4} = \frac{1}{12}x(174 - 167x + 60x^2 - 7x^3).$$

Odtud

$$P_{\mathbf{a}}(x) = a_s = S_{\mathbf{a}}(x) - S_{\mathbf{a}}(x-1) = -\frac{1}{6}(14x^3 - 111x^2 + 271x - 204),$$

a tedy $a_5 = -21$, $a_6 = -75$, $a_7 = -176$, $a_8 = -338$, $a_9 = -575$ atd. Samozřejmě, polynom vyjadřující $a_s = P_{\mathbf{a}}(s)$ jsme mohli též získat aplikací Věty 1, anebo přímo pomocí Lagrangeovy interpolace.

Čtenář se může sám přesvědčit, že posloupnost počínající členy $\sqrt{2}, -10, 0$ lze rozšířit na aritmetickou posloupnost řádu 2, mající obecný člen $a_s = \frac{1}{2}\big[\,(20+\sqrt{2})s^2 - (80+5\sqrt{2})s + 60 + 6\sqrt{2}\,\big]$ a součet prvních n členů $S_{\mathbf{a}}(n) = \frac{1}{6}n\big[\,(20+\sqrt{2})n^2 - (90+6\sqrt{2})n + 70 + 11\sqrt{2}\,\big]$.

LITERATURA

[1] Vlastimil Dlab, *Číslo kombinační klíčem k aritmetickým řadám vyšších stupňů.* Příloha k maturitní zkoušce, Reálné gymnázium Turnov, 1951.

[2] Vlastimil Dlab, *Rekurzivní posloupnosti* $\{X_n \mid n \geq 1\}$ *o dvou parametrech:* $X_{n+2} = pX_{n+1} + qX_n$, zadáno k publikaci.

[3] František Josef Studnička, *Algebra pro vyšší třídy středních škol.* Praha, 1877, 192 stran (2. vydání 1879, 172 stran, německá verze 1878, 212 stran).

[4] Václav Veselý, *Aritmetické řady vyšších stupňů.* Rozhledy matematicko-přírodovědecké 30(1950/51), č. 1, 16–22.

[5] Jan Vyšín, *O nekonečných řadách.* Cesta k vědění, sv. 45, Praha, 1948.